

Faculté de Psychologie, Logopédie et Sciences de l'Éducation

Département des Sciences de l'Éducation

Unité de recherche ÉQUALE – Évaluation et qualité de l'enseignement

**Contribution à la mise en place d'expériences
pilotes de différenciation et d'accompagnement
personnalisé en mathématiques au
1^{er} degré du secondaire**

*Isabelle Demonty
Annick Fagnant
Christine Géron
Rachel Halleux
Annick Sacré*

**Rapport final
Août 2021**

Table des matières

| | |
|--|------------|
| Introduction | 1 |
| Partie 1 – Fiches outils présentant les activités | 5 |
| Analyser des mosaïques_pour donner du sens à la lettre | 7 |
| Apprendre des tours de magie mathématiques pour comprendre le sens de la lettre en algèbre . | 19 |
| Utiliser des cartes et des enveloppes_pour résoudre des équations | 35 |
| Utiliser les programmes de calculs pour établir les règles liées aux sommes et produits algébriques..... | 45 |
| Analyser des démarches correctes et incorrectes_pour donner du sens aux techniques algébriques | 55 |
| Exploiter un puzzle de fractions pour donner du sens aux techniques opératoires..... | 65 |
| Utiliser des bandes unité_pour introduire la fraction nombre | 77 |
| Additionner et soustraire des fractions nombres en utilisant la droite numérique | 95 |
| Utiliser la droite numériquepour additionner des entiers relatifs..... | 111 |
| Utiliser la droite numérique_pour soustraire des entiers relatifs..... | 119 |
| Utiliser les tuiles algébriques_pour revoir les techniques de calculs dans Z | 129 |
| Jongler avec le signe moins_pour mieux le comprendre et l'utiliser, même en algèbre..... | 143 |
| | |
| Partie 2 – Fiches conceptuelles faisant le point sur les trois nœuds matière | 153 |
| Versions définitives des fiches conceptuelles centrées sur les nœuds matière | 155 |
| 1. Fiche conceptuelle sur le sens du signe « moins »..... | 157 |
| 2. Fiche conceptuelle sur les fractions | 169 |
| 3. Fiche conceptuelle sur le sens de la lettre | 183 |

Introduction

Durant deux années scolaires, l'équipe de Liège a accompagné treize écoles pilotes dans la mise en place d'une des mesures liées au Pacte pour un enseignement d'excellence, concernant l'accompagnement personnalisé des élèves du premier degré de l'enseignement secondaire. L'objectif du travail était de soutenir le développement professionnel des enseignants de mathématiques, au travers d'une réflexion sur la manière de favoriser la différenciation des apprentissages dans 3 nœuds matière particulièrement problématiques au début de l'enseignement secondaire : le sens de la lettre, le signe « moins » et les fractions.

Ce rapport de recherche présente les documents que l'équipe de recherche souhaite diffuser à un large public d'enseignants. Il complète le précédent, remis en juin 2021, qui abordait la question de l'analyse des dispositifs mis en place dans les écoles.

Le rapport est structuré en deux parties. La première partie reprend les fiches-outil présentant les activités observées dans les écoles. Au total, 12 activités ont été finalisées. Elles se répartissent de la manière suivante, en fonction des trois nœuds matières :

| Sens de la lettre | Fractions | Sens du signe « - » |
|---|--|---|
| Analyser des mosaïques pour donner du sens à la lettre ¹ | Exploiter un puzzle de fractions pour donner du sens aux techniques opératoires | Utiliser la droite numérique pour additionner des entiers relatifs |
| Apprendre des tours de magie mathématiques pour comprendre le sens de la lettre | Utiliser des bandes unités pour introduire la fraction nombre | Utiliser la droite numérique pour soustraire des entiers relatifs |
| Utiliser des cartes et des enveloppes pour résoudre des équations | Additionner et soustraire des fractions nombres en utilisant la droite numérique | Utiliser les tuiles algébriques pour revoir les techniques de calculs dans Z |
| Utiliser les programmes de calculs pour établir les règles liées aux sommes et produits algébriques | | Jongler avec le signe moins pour mieux le comprendre et l'utiliser, même en algèbre |
| Analyser des démarches correctes et incorrectes pour donner du sens aux techniques algébriques | | |

La rédaction de ces fiches s'est appuyée sur le contenu des grilles de reporting synthétisant les observations réalisées dans les classes. Celles-ci nous ont permis d'apporter aux fiches-outils des illustrations ainsi que des adaptations, à la lumière du vécu en classe.

La deuxième partie du rapport présente la mise à jour des trois fiches conceptuelles qui permettent de montrer la cohérence dans les activités proposées par l'équipe de recherche².

¹ Cette activité a déjà été publiée dans le rapport de février 2021 sous le nom d'« Antoine fait des mosaïques ». Elle a été renommée ici, dans un souci d'harmonisation avec les autres activités.

² A cet effet, le renvoi aux fiches conceptuelles est systématiquement inséré dans la rubrique « pour en savoir plus sur l'outil » des différentes fiches-outils.

Partie 1 – Fiches outils présentant les activités

Analyser des mosaïques pour donner du sens à la lettre

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à introduire ou réinvestir le sens de la lettre, en amenant les élèves à généraliser une règle à l'aide d'une expression algébrique. Cette activité est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique.

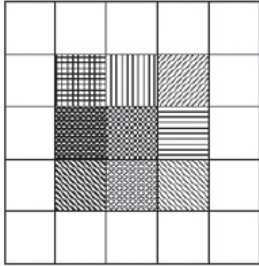
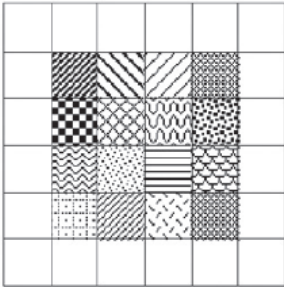
À partir de mosaïques de tailles variées construites selon une même logique, les élèves vont devoir identifier cette logique et l'exprimer à l'aide d'expressions algébriques dont l'équivalence sera établie.

Elle est accompagnée d'un document élève (pp.17 et 18)

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|--------------------------------|--|
| Public-cible | Élèves 1 ^{re} et 2 ^e secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Algèbre / Nombres |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none">• Relever des régularités dans des suites de nombres• Construire des expressions littérales, où les lettres ont le statut de variables• Utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence• Utiliser les conventions d'écriture mathématique• Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode |

| | |
|--|--|
| <p>Objectif(s) d'apprentissage de l'activité</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Elle amène les élèves à généraliser, ce qui constitue une démarche de pensée fondamentale en algèbre. • Cette généralisation se réalise grâce à l'observation d'une suite de nombres présentée de manière picturale (à l'aide de mosaïques) : les élèves sont donc amenés à relever des régularités dans cette suite de nombres et à dégager une règle de fonctionnement de cette suite de nombres. • Elle travaille la symbolisation de la règle à l'aide d'une formule. En ce sens, elle permet d'introduire (ou de revoir) : <ul style="list-style-type: none"> ○ le sens de la lettre : celle-ci représente une variable, sur laquelle il est possible d'effectuer des opérations et une même lettre peut être utilisée pour déterminer plusieurs variables ; ○ le sens donné à l'égalité en permettant aux élèves de l'appréhender à la fois en terme de résultat (la formule trouvée par chaque élève aboutit à tel résultat, pour une mosaïque particulière) et en terme d'équivalence (les formules produites par les élèves sont équivalentes car, quelle que soit la mosaïque sur laquelle on les applique, elles donneront toujours le même résultat) ; ○ certaines conventions d'écritures mathématiques : quand faut-il mettre des parenthèses, quand peut-on omettre de placer un signe de multiplication... ? • Elle vise à introduire (ou à revoir) quelques techniques de réduction d'expressions. |
| <p>Outil didactique mis en œuvre</p> | <p>Cet outil présente un type d'activité bien connu : elle est parfois appelée « Manufacturier » (Bednarz, 2005), « Germaine la couturière » (Vlassis & Demonty, 2002) ou « Carré bordé » (Coulange & Grugeon, 2008; Coppé & Grugeon, 2009 ; Krysinska, 2018).</p> <p>Dans cette version, il s'agit de décrire une méthode pour déterminer le nombre de carrés blancs bordant des mosaïques construites selon une même logique, et ce, à partir du nombre de carrés de couleur disposés sur un côté de la mosaïque. Deux modèles sont présentés aux élèves :</p> |

| | |
|---|--|
| | <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Mosaïque réalisée à partir de 3 carrés de couleur sur un côté</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Mosaïque réalisée à partir de 4 carrés de couleur sur un côté</p> </div> </div> <p>Les élèves doivent dans un premier temps chercher le nombre de carrés blancs pour des mosaïques proches des deux modèles déjà donnés. Ils disposent d'une feuille quadrillée autorisant la reproduction de la mosaïque recherchée et le comptage des carrés blancs. Par la suite, on leur demande de s'intéresser à des mosaïques plus grandes (la reproduction sur la feuille quadrillée n'est plus possible). Ils sont enfin amenés à dégager une règle qui pourrait fonctionner quel que soit le nombre de carrés de couleur sur un côté de la mosaïque.</p> |
| <p>Pour en savoir plus sur le l'outil</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Demonty, I. & Vlassis, J. (2018). L'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre : Comment penser la progression des apprentissages numériques entre 10 et 14 ans ? <i>Losanges</i>, 43, 37-55. • Demonty, I., & Vlassis, J. (2018). <i>Développer l'articulation arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire</i>. Bruxelles : Van In. • La fiche conceptuelle sur le sens de la lettre. |
| <p>Fil didactique</p> | <p>Cette activité peut être proposée en introduction, en entraînement et/ou en approfondissement (au départ d'autres supports). Elle est décrite ici pour des élèves de début de deuxième année, lors de l'introduction du chapitre lié au calcul algébrique.</p> |

| | |
|----------------------------|--|
| Durée/fréquence | Deux périodes de 50 minutes qui se structurent en deux étapes : un travail individuel (ou en sous-groupes) suivi d'une exploitation collective. |
| Contexte d'expérimentation | Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans deux écoles : la première compte 5 classes d'environ 25 élèves (quartile ISE 4) de 2 ^e année et la seconde compte 4 classes d'environ 25 élèves (quartile ISE 2). |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête notamment à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Elle peut également être proposée lorsque les élèves sont répartis en demi-groupe. Les modalités de mise en œuvre de ces dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p.13).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|---|
| Différenciation | <p>Les entrées dans cette activité sont multiples : certains élèves peuvent s'appuyer sur la feuille quadrillée et reproduire ainsi quelques mosaïques, alors que d'autres préféreront sans doute analyser d'abord la manière dont les carrés s'agencent dans les deux mosaïques mises à leur disposition. D'autres encore dégageront d'emblée les données numériques présentes dans l'énoncé (nombre de carrés de couleur présents sur un côté de la mosaïque et nombre de carrés blancs de cette mosaïque) pour trouver un calcul permettant de relier ces données.</p> <p>Lors de la mise en commun de l'activité, l'explicitation des stratégies des élèves est valorisée : c'est sur cette base que l'équivalence des formules pourra être établie.</p> <p>L'activité gagne à être explorée en petits groupes : les élèves auront alors plus de facilités pour verbaliser la manière dont ils analysent les mosaïques en vue d'en dégager la règle (ou la formule).</p> <p>Le soutien fourni aux élèves par l'enseignant a pour but de les amener à approfondir leurs démarches spontanées, en vérifiant par exemple qu'elles s'appliquent sur les cas connus ou en amenant les élèves à les préciser progressivement.</p> |
| Encadrement renforcé | L'activité a été menée durant une leçon où les élèves étaient répartis en demi-classes de 12 élèves. Elle a également été exploitée en classe complète d'environ 25 élèves, dans d'autres circonstances. |

Préparation matérielle de l'activité

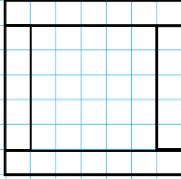
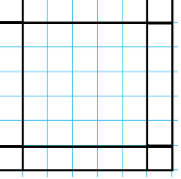
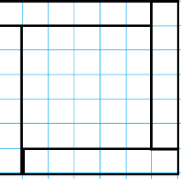
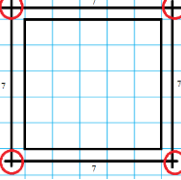
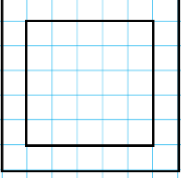
| | |
|------------------------------------|--|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : travail en petits groupes de 3 élèves. Les tables doivent être disposées pour accueillir des petits groupes et permettre le déplacement de l'enseignant. |
| Support/matériel nécessaire(s) | Une feuille de consignes et une grille de carrés à photocopier par élève (voir pp. 17-18). Pour la mise en commun, prévoir un agrandissement d'une ou des deux mosaïques de l'énoncé. |
| Témoignages élèves | « J'ai appris à partager mes idées avec les autres. » « J'ai remarqué qu'il y a beaucoup de méthodes pour résoudre un problème. » « J'ai appris que j'aime chercher des théories et des formules. » |
| Témoignages enseignants | « Je n'avais pas conscience de la variété des démarches que les élèves allaient développer. » « Le travail en demi-groupe est particulièrement intéressant pour gérer cette activité car cela m'a permis de comprendre la logique des élèves. » « Je n'ai vraiment pas l'habitude de gérer des travaux de groupes et j'ai vraiment été surpris de l'engagement des élèves dans le travail. » |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|---|--|
| <p>1. Présentation de l'exercice et lecture des consignes (voir document élève)</p> | <p>L'entrée dans l'activité peut nécessiter une reformulation de la consigne générale : il est important que les élèves aient bien compris les deux variables à mettre en relation (le nombre de carrés de couleurs sur un côté de la mosaïque et le nombre de carrés blancs de la mosaïque).</p> <p>Il est utile d'encourager les élèves à bien analyser ces deux dessins, avant de poursuivre la réflexion, en attirant leur attention sur la manière dont les carrés de couleurs et les carrés blancs sont agencés dans les deux cas mis à disposition.</p> |
| <p>2. Travail en groupes sur les questions 1 et 2, qui leur demandent de trouver le nombre de carrés blancs présents sur une mosaïque proche des deux mosaïques données dans la situation.</p> <p>Afin d'entrer au cœur du processus de généralisation, il est important que les élèves dépassent le comptage direct des carrés blancs pour chercher un lien entre les carrés colorés et les carrés blancs, pour chaque mosaïque.</p> | <p>Pour répondre à ces questions, une grille présentant une série de carrés est mise à disposition des élèves : elle peut être utilisée pour représenter d'autres mosaïques que celles fournies dans l'énoncé, notamment dans le but de vérifier que les règles imaginées par les élèves peuvent bien être appliquées à d'autres mosaïques.</p> <p>L'enseignant passe auprès des groupes afin de soutenir les élèves dans leur réflexion. Au moment où il passe dans les groupes, il est préférable qu'il pose une question simple comme « Expliquez-moi ce que vous avez découvert » afin de permettre aux élèves de verbaliser leur démarche et à l'enseignant de la comprendre en vue d'aider les élèves à l'approfondir si nécessaire.</p> <p>Certains élèves risquent de considérer que le nombre de carrés blancs constitue en réalité le périmètre du carré composant la mosaïque. En leur proposant de vérifier cette idée sur les cas dont ils disposent, ils</p> |

| | |
|---|---|
| | comprendront qu'on obtient 4 carrés de trop (car on a compté 2 fois les carrés placés dans les 4 « coins » de la figure). |
| 3. Travail en groupes sur la question 3 : cette question vise à amener les élèves à trouver un calcul permettant de déterminer le nombre de carrés blancs sur une mosaïque impossible à représenter sur la grille. | C'est souvent à ce niveau de la réflexion que les élèves éprouvent des difficultés, s'ils se sont limités à dénombrer le nombre de carrés blancs à l'étape précédente. Il est donc important que l'enseignant les encourage à analyser en profondeur les mosaïques dont ils disposent pour trouver un lien entre le nombre de carrés colorés sur un côté et le nombre de carrés blancs. |
| 4. Travail en groupes sur les questions 4 et 5 : il s'agit de généraliser la démarche à l'aide du langage oral d'abord puis de l'écriture algébrique. | L'enseignant passe dans les bancs pour soutenir les élèves dans leur réflexion : certains ne pensent pas à utiliser la lettre pour symboliser leur règle en langage mathématique. Il est donc possible de faire des liens avec le cours d'algèbre déjà abordé en 1 ^{re} secondaire, en vue de les sensibiliser à l'utilisation de la lettre pour désigner le nombre de carrés colorés sur n'importe quelle mosaïque. |
| 5. Mise en commun Durant l'exploitation collective, les différentes démarches sont confrontées. 1) Les démarches sont visualisées sur les schémas et sont exprimées algébriquement. 2) Une réflexion sur l'équivalence des expressions est entamée : vérification à l'aide des schémas mais aussi à l'aide des transformations algébriques. 3) Une synthèse sur le sens de la lettre dans les expressions / transformations algébriques est réalisée. | La mise en commun permet de centrer l'attention des élèves sur le sens de la lettre et la symbolisation d'une démarche à l'aide d'une formule. Il peut être utile d'aider les élèves à visualiser les différents raisonnements au départ de schémas réalisés au tableau. La réflexion sur l'équivalence de démarches peut engendrer de nombreux débats. Voici quelques idées. <ul style="list-style-type: none"> • Constater que plusieurs calculs permettent de déterminer le nombre de carrés blancs, et aboutissent donc au même résultat. $(n + 2) \cdot 2 + n \cdot 2 = n \cdot 4 + 4 = (n + 1) \cdot 4 = (n + 2) \cdot 4 - 4 = (n + 2)^2 - n^2$ • Comprendre pourquoi il n'est pas possible de réduire l'expression $n \cdot 4 + 4$ en $8n$ puisque dans un cas, on a 4 fois le nombre de carrés colorés sur un côté de la mosaïque plus 4 autres carrés, alors que dans l'autre, on a 8 fois ce nombre. Si les élèves développent tous la même démarche, il est essentiel d'en proposer d'autres à critiquer lors de l'exploitation collective, afin d'enrichir les discussions. |

Quelques exemples de démarches correctes :

| | | |
|---|---|---|
| <p style="text-align: center;">1</p>  <p style="text-align: center;">$(n + 2) \cdot 2 + n \cdot 2$</p> | <p style="text-align: center;">2</p>  <p style="text-align: center;">$n \cdot 4 + 4$</p> | <p style="text-align: center;">3</p>  <p style="text-align: center;">$(n + 1) \cdot 4$</p> |
| <p style="text-align: center;">4</p>  <p style="text-align: center;">$(n + 2) \cdot 4 - 4$</p> | <p style="text-align: center;">5</p>  <p style="text-align: center;">$(n + 2)^2 - n^2$</p> | |

Pistes d'adaptation

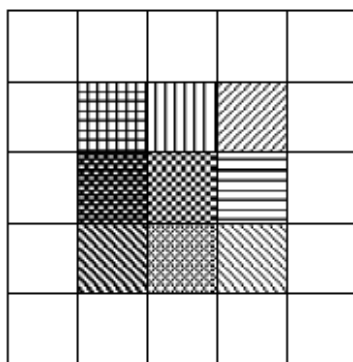
Selon le moment de l'année où l'on propose ce genre d'activités et selon les besoins identifiés auprès des élèves, les objectifs poursuivis seront exploités un peu différemment.

| | En première année | | En deuxième année | |
|--|--|--|---|----------------|
| | Pour introduire l'algèbre | Après les premières transformations algébriques | En introduction du chapitre sur le calcul algébrique | En fin d'année |
| Donner du sens à la lettre | Le passage de l'expression en mots à la symbolisation mathématique permet de montrer à quoi servent les lettres dans les formules. | Les élèves peuvent être amenés à produire par eux-mêmes des formules. On peut alors constater que 1) toutes les variables ne nécessitent pas l'utilisation d'une lettre différente : certaines sont dépendantes d'autres variables ; 2) certaines quantités peuvent s'exprimer par un nombre lorsqu'elles restent toujours les mêmes, quelle que soit la mosaïque envisagée. | | |
| Généraliser | Cet objectif est abordé à différents moments du premier degré et nécessite de dépasser le comptage direct pour s'assurer que la règle fonctionne dans plusieurs cas. | | | |
| Travailler les techniques de réduction d'expressions | Travailler avec les élèves sur l'expression $4n + 4$ (démarche ②), en leur demandant si elle vaut la même chose que $8n$. | Faire montrer, par des transformations algébriques, l'équivalence des démarches ①, ②, ③ et ④. | Exploiter la méthode ⑤ impliquant les produits remarquables : $(n+2)^2 - n^2 = 4n + 4$ | |
| Symboliser par l'algèbre | Introduction des premières conventions d'écriture : la lettre et l'expression algébrique s'utilisent pour désigner des variables. | Utilisation progressive d'autres conventions d'écriture : - l'utilisation (ou non) de parenthèses, en fonction de la règle de priorité des opérations ; - l'omission du signe de multiplication entre un nombre et une lettre ; - ... | | |

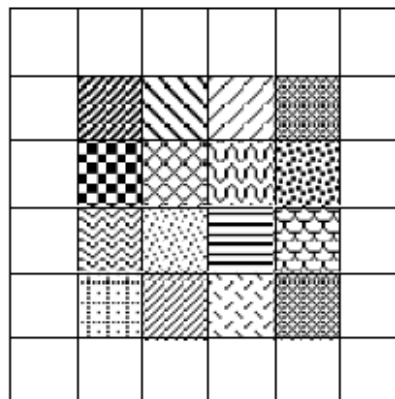
Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) – Haute École de la ville de Liège (HEL)

Document Élève – Analyser des mosaïques pour donner du sens à la lettre

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

- 1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté. A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
.....
- 2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté. Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
.....
- 3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
.....
- 4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
.....
.....
.....
- 5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
.....

Apprendre des tours de magie mathématiques pour comprendre le sens de la lettre en algèbre

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à introduire le sens de la lettre en tant que nombre indéterminé. Cette activité permet également de revoir, de manière ludique, quelques propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication. Ces deux dimensions permettent aux élèves de comprendre pourquoi un même enchaînement d'opérations réalisées au départ de nombres différents peuvent parfois aboutir systématiquement au même résultat.

L'activité consiste à amener les élèves à vivre un tour de magie, à chercher à en comprendre le fonctionnement puis à en inventer un autre, construit sur une logique analogue. Elle est accompagnée d'un document élève (pp. 33-34).

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---|--|
| Public-cible | Élèves 1 ^{re} secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Algèbre / Nombres |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Utiliser des propriétés des opérations pour justifier une méthode de calcul. • Utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence. • Construire des expressions littérales, où les lettres ont le statut de variables. |
| Objectif(s) d'apprentissage de l'activité | <ul style="list-style-type: none"> • L'activité amène les élèves à s'intéresser aux propriétés des opérations (Élément neutre, associativité et commutativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). • Elle permet de travailler la notion d'égalité : en se détachant d'une analyse centrée sur le résultat final d'un enchaînement de calculs, les élèves se concentrent sur l'analyse des opérations réalisées pour aboutir à ces résultats. • La symbolisation algébrique de l'enchaînement de calculs permet d'introduire les premières transformations algébriques (addition de termes semblables et multiplication de facteurs). |
| Outil didactique mis en œuvre | <p>L'activité centrée sur l'invention de tours de magie mathématiques est un type d'activité qui permet d'analyser, dans un contexte ludique, des enchaînements d'opérations pouvant être réalisés au départ de n'importe quel nombre réel.</p> <p>Dans la version proposée dans cet outil, l'enseignant réalise un tour de magie devant ses élèves. L'enseignant semble avoir des talents de mentaliste, puisqu'il peut prédire le résultat obtenu sans même que l'élève ne lui communique le nombre choisi au départ. Après l'essai de plusieurs nombres, cette amorce conduit ensuite les élèves à décoder un tour de magie réalisé selon une logique analogue. L'analyse débouche sur la création, par les élèves, d'autres tours de magie qu'ils soumettront ensuite à leurs camarades.</p> |

| | |
|---------------------------------|---|
| Pour en savoir plus sur l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Demonty, I., & Vlassis, J. (2018). Développer l'articulation arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire. Collection Math et sens. Editions Van In. • La fiche conceptuelle sur le sens de la lettre. |
| Fil didactique | Cette activité peut être proposée en introduction du calcul algébrique. |
| Durée/fréquence | Deux périodes de 50 minutes qui impliquent une alternance entre travail individuel, travail en sous-groupes et exploitation collective. |
| Contexte d'expérimentation | Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant l'année scolaire 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans deux écoles. La première comptait 6 classes d'environ 25 élèves (quartile ISE 1) de 1 ^{re} année, répartis en demi-classe et la deuxième comportait 3 classes d'une vingtaine d'élèves répartis en demi-classe (quartile ISE 3). Dans ces deux écoles, l'activité a été testée lors de séances consacrées à l'encadrement personnalisé des élèves. |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Les modalités de mise en œuvre de ces deux dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p.24).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|--|
| Différenciation | L'activité se prête particulièrement bien à un travail en petits groupes s'appuyant sur les productions individuelles de 3 élèves. La différenciation interviendra principalement lorsque l'enseignant apportera son soutien dans l'analyse des tours de magie réalisés par les élèves, au départ de nombres variés. |
| Encadrement renforcé | L'activité a été menée durant une leçon où les élèves étaient répartis en demi-classes de 15 élèves. Cette modalité de fonctionnement est intéressante, car il est important de susciter la réflexion mathématique des élèves, que ce soit lors du travail en groupe ou lors des moments plus collectifs. Cet encadrement gagne à s'adapter à la réflexion en cours de chaque groupe d'élèves, lorsqu'ils sont amenés à analyser un tour de magie ou à en inventer un autre, construit sur une logique analogue. |

Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|--|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : aménager le local pour permettre une alternance entre un travail en petits groupes de 3 élèves, une réflexion plus individuelle et des moments collectifs. Les tables pourront être disposées pour accueillir des petits groupes et permettre le déplacement de l'enseignant. |
| Support/matériel nécessaire(s) | Une feuille de consignes par élève (voir p. 33) et éventuellement une calculatrice pour permettre aux élèves de tester rapidement les tours de magie. |
| Témoignages élèves | « J'aimais bien car on a inventé un tour de magie : trouver tout de suite la réponse, sans même avoir besoin de faire tous les calculs. » « C'était chouette de chercher à comprendre le tour de magie. » « Parfois, c'était difficile d'inventer le tour de magie, car on ne comprenait pas pourquoi il ne marchait pas. » |
| Témoignages enseignants | « Le point de départ de l'activité qui consiste à faire vivre le tour de magie aux élèves est vraiment accrocheur. L'invention de tours a parfois été complexe, car les élèves ne pensaient pas à tester leurs tours sur des nombres particuliers. » « C'est principalement dans la mise en commun que j'ai pu introduire la lettre et faire comprendre aux élèves pourquoi le résultat sera le même dans tous les cas, que le nombre de départ soit un nombre naturel, entier, décimal ou même fractionnaire. » « L'activité est intéressante et ludique, mais parfois les difficultés de calcul des élèves font qu'ils se trompent dans l'application du tour de magie. Le recours à la calculatrice peut être utile. » « Dans cette activité, il est vraiment important de poser des questions aux élèves et de les faire réfléchir sur les tours de magie, tant dans les moments de travaux de groupes qu'en synthèse, sinon on passe à côté de beaucoup de choses. » |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|--|---|
| <p>1. Réalisation par l'enseignant d'un tour de magie devant les élèves :</p> <ul style="list-style-type: none">• Choisissez tous un nombre dans votre tête, n'importe lequel.• Multipliez votre nombre par 10.• Divisez le résultat par 5.• Divisez la réponse par 2.• Ajoutez 9 à votre résultat.• Retirez de cette réponse le nombre que vous aviez choisi au départ• Retirez enfin 4 de ce résultat. <p>Je vais maintenant vous prouver que je suis mentaliste : je vais interroger au hasard un élève dans la classe et prédire sa réponse finale : c'est 5...</p> | <p>Cette phase d'accroche permet d'introduire la leçon : les élèves vont chercher à comprendre le fonctionnement mathématique de ce tour de magie pour pouvoir en inventer un autre, construit selon une même logique. Évidemment, ce tour devra fonctionner quel que soit le nombre de départ choisi par les participants. Les élèves seront donc amenés à réaliser des opérations sur des quantités indéterminées.</p> <p>L'utilisation de la calculatrice n'est pas indispensable mais cela permet d'éviter les erreurs de calcul. On peut aussi limiter le choix du nombre de départ (en imposant un nombre entre 1 et 10).</p> |

2. Travail sur un autre tour de magie construit selon une même logique

L'enseignant distribue la feuille de consignes (voir p. 33) aux élèves et lit un deuxième tour de magie aux élèves.

Il lit le tour

Choisis un nombre

- 1) Ajoute-lui 10
- 2) Soustrais 7 à la solution obtenue
- 3) Soustrais le nombre de départ
- 4) Multiplie le résultat par 6
- 5) Divise la réponse par 2
- 6) Divise la réponse par 3

Les élèves répondent d'abord individuellement aux questions 1, 2 et 3 puis se mettent en groupe pour répondre à la question 4 en vue de comprendre le fonctionnement du tour de magie.

Il est important que les élèves notent bien les calculs successifs réalisés au départ du nombre qu'ils ont choisi.

Il peut être utile de noter le tour de magie au tableau afin que les élèves puissent y revenir, si nécessaire, lors de la réflexion en groupe.

Le travail dans les classes amène assez rapidement à constater qu'à partir de l'étape 4, tous les calculs sont les mêmes, quel que soit le nombre de départ choisi.

Il est important d'encourager les élèves à aller plus loin dans l'analyse en cherchant à comprendre **pourquoi** le résultat de l'étape 3 est exactement le même que celui de l'étape 6 (multiplier par 6 et ensuite diviser par 3 puis par 2 sont des opérations qui se neutralisent).

Quelques suggestions pour approfondir leur réflexion :

- Aurait-on pu proposer d'autres opérations que « fois 6 puis diviser par 2 et diviser par 3 » ?
- Est-ce que ça aurait aussi marché en multipliant par 6 puis en divisant par 4 et par 2 (comme $4+2$ donne 6) ?

Ces approfondissements permettent aux élèves de réfléchir sur les propriétés des opérations, en testant leurs conjectures sur quelques nombres.

3. Mise en commun

Les idées des uns et des autres sont confrontées dans le but de décoder complètement le tour de magie. Au total, trois étapes clés structurent le tour :

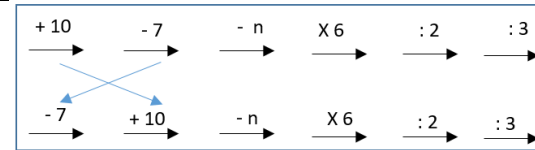
- soustraire le nombre de départ,
- effectuer des opérations qui se neutralisent
- construire le nombre d'arrivée (+10 – 7 = +3)

On peut également à ce moment introduire la lettre pour désigner la quantité indéterminée de départ et coder ainsi le tour de magie :

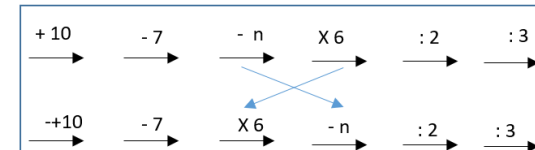
$$n \xrightarrow{+10} \xrightarrow{-7} \xrightarrow{-n} \xrightarrow{\times 6} \xrightarrow{:2} \xrightarrow{:4} 3$$

Afin de faciliter le travail d'invention qui sera proposé par la suite, il est nécessaire, dans cette première mise en commun, d'attirer l'attention des élèves sur de petits changements que l'on pourrait introduire dans le tour en vue de voir s'ils auraient des conséquences.

Exemple : Est-ce qu'on aurait pu proposer les opérations dans un ordre différent ?



ou



- ⇒ Les élèves peuvent ici s'intéresser au lien entre ces modifications et les propriétés des opérations : dans le 1^{er} cas, on applique la commutativité de l'addition dans Z (+ 10 et -7) alors que dans le 2^e cas, on commute une multiplication et une soustraction. Dès lors la division par 2 et puis par 3 ne sera plus neutralisée par la multiplication par 6.
- ⇒ Il est également important d'encourager les élèves à tester les modifications envisagées sur des nombres (ce type de démarche pourra être investi plus tard, dans le calcul algébrique).

4. Invention de tours de magie

L'enseignant passe entre les bancs pour soutenir les élèves dans leur réflexion : inciter les élèves à expliciter leur raisonnement et à tester leur tour sur des nombres variés.

Pour cela, on peut encourager les élèves à s'organiser dans le groupe : un élève code le tour (identification des calculs successifs), un deuxième élève le vérifie à l'aide de la calculatrice et un troisième élève traduit le tour en français.

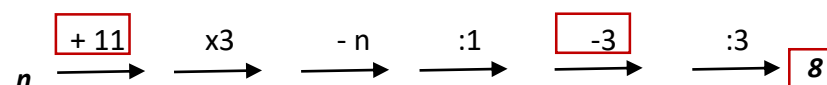
5. Exploitation collective

L'exploitation collective finale permet d'analyser quelques tours produits par les élèves, de constater s'ils fonctionnent ou pas et de comprendre pourquoi le tour fonctionne ou pas.

Exemples de tours inventés par les élèves :

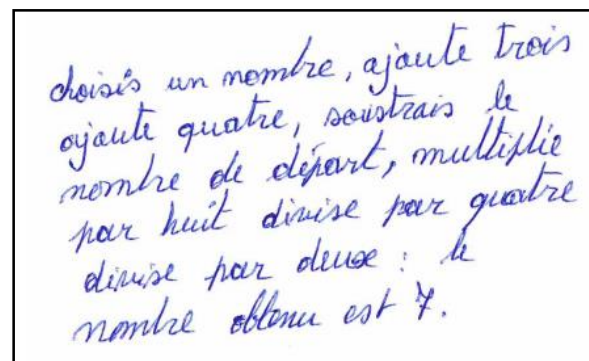
tu prends le nombre de départ
puis ajoute 11
puis multiplie le nombre obtenu par trois
soustrais le nbr de départ
divise le résultat par 1
ensuite soustrais trois
enfin divise le résultat par trois
et puis dis ton nbr (ce sera 8)

Ce tour de magie ne fonctionne pas :



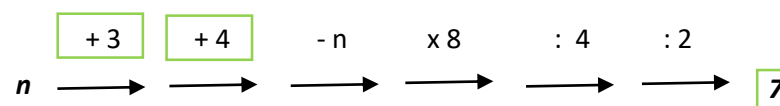
Les élèves ont cherché des opérations qui se neutralisaient, ($\times 3$ et $:3$ ou $+n$ – n) et ont pensé qu'en ajoutant 11 et en retirant 3, on obtiendrait 8 (voir opérations entourées en rouge dans la symbolisation ci-dessus). Il est intéressant de discuter de ce programme avec les élèves, en vue de comprendre pourquoi il ne fonctionne pas : en ajoutant 11 au nombre de départ et en multipliant la réponse par 3, on obtient 3 fois le nombre de départ plus 33. Par la suite, on retire seulement une fois le nombre de

départ, donc ce n'est pas possible que la réponse finale soit toujours 8 : elle va dépendre du nombre de départ.



choisis un nombre, ajoute trois
ajoute quatre, soustrais le
nombre de départ, multiplie
par huit, divise par quatre
divise par deux : le
nombre obtenu est 7.

Ce tour de magie fonctionne et l'on peut remarquer qu'ici, la distributivité n'intervient pas. L'opération « $\times 8$ » est neutralisée par les opérations « $: 4$ » puis « $: 2$ » et le nombre 7 s'obtient par l'opération $+ 3 + 4$.



Lors de cette exploitation, on pourra également revenir sur les propriétés des opérations abordées, sur la notion d'égalité ainsi que sur le statut de la lettre dans ce type de situations : elle représente une quantité indéterminée sur laquelle on va pouvoir effectuer des calculs.

Pistes d'adaptation

Cette activité peut également être utilisée avec des élèves de 2^e année, ayant une expérience plus approfondie du calcul algébrique. La symbolisation des tours à l'aide du langage algébrique pourra alors être approfondie, au départ des tours inventés par les élèves, comme l'illustrent les exemples suivants :

| | |
|---|--|
| <p><i>tu prends le nombre de départ puis ajoute 11 puis multiplie le nombre obtenu par trois soustrais le nbr de départ divise le résultat par 4 ensuite soustrais trois enfin divise le résultat par trois et puis dis ton nbr (ce sera 8)</i></p> | <p><i>choisis un nombre, ajoute trois ajoute quatre, soustrais le nombre de départ, multiplie par huit divise par quatre divise par deux : le nombre obtenu est 7.</i></p> |
| $(n + 11) \cdot 3 = 3n + 33$ $(3n + 33) - n = 2n + 33$ $(2n + 33) : 4 = 2n + 33$ $(2n + 33) - 3 = 2n + 30$ $(2n + 30) : 3 = \frac{2n+30}{3}$ <p>La réponse ne sera égale à 8 que si n vaut -3.</p> | $n + 3 + 4 = n + 7$ $n + 7 - n = 7$ $\frac{7 \cdot 8}{4} = 14$ $\frac{56}{4} = 14$ $\frac{14}{2} = 7$ |

D'autres tours de magie pourraient également être exploités à l'aide du symbolisme algébrique. Voici un exemple³.

Loïc propose le tour suivant à sa sœur Juliette.

Il lui dit :

« Sans me le dire, pense à un nombre puis...

- Multiplie-le par 3.
- Ajoute 1.
- Multiplie par 3.
- Ajoute le nombre que tu as choisi.

Combien trouves-tu ? » demande Loïc.

« 43 », répond Juliette.

« Le nombre que tu as choisi est 4 », répond tout de suite Loïc.

- 1) Loïc doit avoir un truc pour avoir si vite trouvé le nombre de Juliette. Trouve le truc.
- 2) Loïc propose le truc à d'autres amis. Voici les nombres qu'ils obtiennent. Retrouve à chaque fois le nombre de départ.
 - Garris a obtenu le nombre 63. Il avait pensé au nombre
 - Victor a obtenu le nombre 113. Il avait pensé au nombre
 - Ella a obtenu -7. Elle avait pensé au nombre
- 3) Maintenant que Juliette a bien compris le tour de Loïc, elle veut jouer avec lui... et le piéger. Elle dit à Loïc qu'elle a trouvé le nombre 58. Loïc est sûr qu'elle a triché. Pourtant, non ! Elle a simplement choisi un nombre que Loïc n'avait pas prévu dans sa règle. Trouve le nombre de départ.
- 4) À ton tour, invente un autre tour de magie du même genre que celui de Loïc.

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) – Haute École de la ville de Liège (HEL)

³Cet exemple provient du document suivant : Demonty, I., & Vlassis, J. (2018). Développer l'articulation arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire. Collection Math et sens. Editions Van In, pp.62.

Document Élève - Apprendre des tours de magie mathématiques pour comprendre le sens de la lettre⁴



1. Quel est ton nombre de départ ?
2. Quels calculs as-tu effectués ? Explique ta démarche.

3. Quel est ton nombre d'arrivée ?
4. Que remarques-tu ?

⁴ Ce document élève est issu du document suivant : Demonty, I., & Vlassis, J. (2018). Développer l'articulation arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire. Collection Math et sens. Editions Van In, pp.58-59.

Invente ta devinette

Essais

Ta devinette :



Utiliser des cartes et des enveloppes pour résoudre des équations

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à introduire les méthodes algébriques de résolution d'équations, en amenant les élèves à résoudre puis formaliser un problème. Cette activité est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique.

À partir de cartes et d'enveloppes, les élèves vont devoir résoudre un problème, d'abord avec matériel puis sans. Ils sont amenés à exprimer, par une lettre, non pas un objet (une enveloppe contenant des cartes), mais une quantité indéterminée (le nombre de cartes contenues dans une enveloppe). La formalisation algébrique de la résolution du problème sans matériel découle des gestes posés lors de la résolution du problème avec matériel, pour lui donner du sens.

Cette fiche est accompagnée d'un document élève (p. 43).

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---|--|
| Public-cible | Élèves de 1 ^{re} ou 2 ^e secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Algèbre / Nombres |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Résoudre une équation du 1^{er} degré à une inconnue issue d'un problème simple. • Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut d'inconnues. • Utiliser l'égalité en terme d'équivalence. |
| Objectif(s) d'apprentissage de l'activité | <ul style="list-style-type: none"> • Elle amène les élèves à travailler le sens de la lettre : celle-ci représente une inconnue sur laquelle il est possible de réaliser des opérations avant même connaître la valeur de l'inconnue. • Elle travaille le sens donné à l'égalité en terme d'équivalence (si on transforme le problème d'une certaine manière, les deux parties sont toujours équivalentes). • Elle permet également de mettre en place certaines conventions d'écritures mathématiques liées aux équations. • Elle vise à découvrir les méthodes algébriques de résolution d'équations. |
| Outil didactique mis en œuvre | <p>Les problèmes des enveloppes sont tirés des travaux de Radford & al. (2009). Il s'agit de</p> <ul style="list-style-type: none"> • proposer aux élèves des problèmes simples de type : deux enfants possèdent des cartes et des enveloppes. Les enveloppes contiennent le même nombre de cartes. On donne des cartes aux enfants pour qu'au total, ils en obtiennent le même nombre. Il faut trouver le nombre de cartes contenues dans chaque enveloppe ; • les laisser trouver la réponse à l'aide de matériel (des enveloppes et des post-it représentant les cartes) ; • les amener à formaliser la résolution concrète en étapes de résolution d'équations. |

| | |
|---------------------------------|--|
| Pour en savoir plus sur l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Radford, L., Demers, S., & Miranda, I. (2009). Processus d'abstraction en mathématiques. Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques. http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentssuccess/abstraction.pdf • La fiche conceptuelle sur le sens de la lettre. |
| Fil didactique | <ul style="list-style-type: none"> • Il s'agit d'une activité de découverte de la méthode algébrique de résolution d'équations. • Cette activité porte sur la lettre en tant qu'inconnue. Elle prend place après d'autres activités portant sur d'autres sens de la lettre comme des activités de généralisation (lettre-variable) ou les tours de magie (lettre-nombre généralisé) (voir fiche outils « Apprendre des tours de magie mathématiques pour comprendre le sens de la lettre »). • L'utilisation des tuiles algébriques comme outil de visualisation peut amener un complément d'aide aux élèves qui en éprouveraient le besoin. • https://support.mathies.ca/fr/mainSpace/TuilesAlgebriques.php |
| Durée/fréquence | L'activité d'introduction se déroulera idéalement en deux fois 50 minutes. |
| Contexte d'expérimentation | Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant l'année scolaire 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans une classe d'environ 20 élèves (quartile ISE 2) de 2 ^e année (en coenseignement). |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête notamment à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Elle peut également être proposée lorsque les élèves sont répartis en demi-groupe. Les modalités de mise en œuvre de ces dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (voir p.40).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|--|
| Différenciation | <p>Le choix des problèmes permet d'adapter la difficulté aux aptitudes des élèves. Il convient toutefois de choisir des problèmes où l'inconnue apparaît dans les deux membres afin de justifier pleinement l'intérêt de développer la démarche de résolution d'équations s'appuyant sur les propriétés de l'égalité.</p> <p>Lors de la mise en commun de l'activité, tout en encourageant les démarches algébriques, l'explicitation des stratégies des élèves est valorisée pour associer une égalité à chacune des étapes du raisonnement. L'activité gagne à être explorée en petits groupes : les élèves auront alors plus de facilités pour verbaliser leur raisonnement.</p> <p>Le soutien fourni aux élèves par l'enseignant a pour but de les amener à approfondir ou corriger leurs démarches spontanées et les amener à un raisonnement plus abouti.</p> |
| Encadrement renforcé | <p>L'activité a été menée dans une classe de 20 élèves. Renforcer l'encadrement est assurément bénéfique pour les élèves puisqu'il permet de repérer plus rapidement les raisonnements erronés et d'amener ces élèves à en prendre conscience de manière à les faire évoluer de façon plus personnalisée. Il enrichit également les éléments à exploiter lors de la mise en commun.</p> |


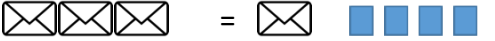

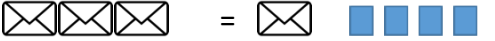

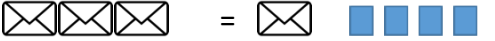
Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|---|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : travail en petits groupes de 3 ou 4 élèves. Les tables doivent être disposées pour accueillir des petits groupes et permettre le déplacement de l'enseignant. |
| Support/matériel nécessaire(s) | Une feuille de consignes reprenant un problème. Le problème peut être le même pour tous les groupes ou différer d'un groupe à l'autre selon le temps que l'on peut consacrer à la mise en commun. (voir p.41). Des enveloppes et des cartes (représentées par des post-it ou autre). Pour la mise en commun, prévoir un agrandissement de ces problèmes (ou prévoir du matériel de projection). |
| Témoignages élèves | « C'est facile avec les enveloppes. » « C'est compliqué d'expliquer comment on a trouvé 5. J'ai juste compté dans ma tête. » « C'est comme une règle de trois : ce qu'on fait d'un côté, on le fait de l'autre. » |
| Témoignages enseignants | « Le support visuel a vraiment aidé certains élèves qui se rendaient compte qu'ils savaient en fait résoudre une équation, que ce n'était pas si difficile. » |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|--|--|
| <p>1. Présentation du premier problème (voir document élève p. 43). Chaque groupe d'élèves reçoit un problème ainsi que des cartes et des enveloppes. Par groupe, les élèves doivent représenter le problème et le résoudre à l'aide du matériel.</p> | <p>L'entrée dans l'activité peut nécessiter une reformulation de la consigne générale : il est important que les élèves aient bien compris qu'il faut utiliser le matériel pour trouver la réponse et expliquer leur raisonnement.</p> <p>Le problème de départ est assez facile et les élèves pourraient trouver la solution « dans leur tête ». Il est utile de les encourager à bien décomposer les étapes de leur raisonnement, notamment à l'aide du matériel, en vue de développer des démarches algébriques. L'idée est de les amener à dépasser les démarches strictement numériques d'essai-erreurs. Cette étape est nécessaire à la poursuite de l'objectif. Il ne faut pas aller trop vite. C'est à ce moment notamment que la présence de plusieurs enseignants en classe apporte un vrai plus.</p> <p>Il peut être intéressant d'inviter les plus rapides à déjà chercher une formalisation du procédé en langage mathématique mais ce n'est pas l'objectif de cette étape.</p> <p>Dans l'énoncé, les cartes Pokemon peuvent être remplacées par tout autre type de cartes plus en vogue auprès des élèves.</p> |

| | |
|--|---|
| <p>2. <u>Analyse d'un deuxième problème</u></p> <p>Il s'agit de le résoudre de la même manière que le précédent et de chercher, en plus, une manière de formaliser le raisonnement en langage mathématique.</p> | <p>C'est lors de cette étape que les élèves utilisent une lettre comme représentant d'une inconnue sur laquelle il va être possible de réaliser des opérations, sans même connaître sa valeur (exemple, retirer une enveloppe des deux côtés de l'égalité puisque les enveloppes contiennent toujours exactement le même nombre de cartes). Il peut être utile de s'y attarder un moment.</p> <p>L'enseignant passe auprès des groupes afin de soutenir les élèves dans leur réflexion. Au moment où il passe dans les groupes, il est préférable qu'il pose une question simple comme « Expliquez-moi comment vous avez procédé » afin de permettre aux élèves de verbaliser leur démarche et à l'enseignant de la comprendre en vue d'aider les élèves à l'approfondir si nécessaire. La présence de plusieurs enseignants en classe est la bienvenue pour accompagner chaque groupe de manière personnalisée.</p> <p>Le passage à la formalisation mathématique est souvent délicat.</p> |
|--|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|------------------|--|--|------------|------------|
| <p>3. <u>Mise en commun</u></p> <p>La mise en commun donne l'occasion aux élèves d'expliquer aux autres leurs démarches.</p> | <p>La mise en commun permet de centrer l'attention des élèves sur le sens de la lettre. Elle doit également mettre en lien l'étape de résolution avec matériel et l'égalité écrite pour la représenter en langage mathématique. Par exemple :</p> <table border="1" data-bbox="1070 427 2033 740"> <tr> <td data-bbox="1070 427 1659 563">  </td> <td data-bbox="1659 427 2033 563"> $3x + 3 = x + 7$ </td> </tr> <tr> <td data-bbox="1070 563 1659 699"> <p>On enlève 3 cartes des deux côtés</p>  </td> <td data-bbox="1659 563 2033 699"> $3x + 3 - 3 = x + 7 - 3$ $3x = x + 4$ </td> </tr> <tr> <td data-bbox="1070 699 1659 740"> <p>...</p> </td> <td data-bbox="1659 699 2033 740"> <p>...</p> </td> </tr> </table> <p>C'est le moment charnière de cette activité.</p> |  | $3x + 3 = x + 7$ | <p>On enlève 3 cartes des deux côtés</p>  | $3x + 3 - 3 = x + 7 - 3$ $3x = x + 4$ | <p>...</p> | <p>...</p> |
|  | $3x + 3 = x + 7$ | | | | | | |
| <p>On enlève 3 cartes des deux côtés</p>  | $3x + 3 - 3 = x + 7 - 3$ $3x = x + 4$ | | | | | | |
| <p>...</p> | <p>...</p> | | | | | | |
| <p>4. Un troisième problème est proposé aux élèves. Ils doivent le résoudre sans matériel en réinvestissant les éléments mis en évidence lors de la mise en commun.</p> | | | | | | | |
| <p>5. S'ensuit une phase de consolidation pour repérer les éventuels manques de compréhension et permettre à l'enseignant de revenir si nécessaire sur certains éléments.</p> | <p>Les exercices proposés à chaque élève ou groupe peuvent varier en fonction de leur niveau de compréhension.</p> <p>Le recours aux tuiles algébriques peut être intéressant comme intermédiaire entre le concret (enveloppes et cartes) et l'abstrait (les équations). Elles peuvent fournir un support au raisonnement pour les élèves qui en éprouveraient le besoin.</p> | | | | | | |

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche ULiège- Haute École de la ville de Liège

Document Élève – Utiliser des cartes et des enveloppes pour résoudre des équations

1. AVEC MATÉRIEL (enveloppes et post-it représentant les cartes)

La mère d’Helena et de Nathan décide de donner un cadeau à ses enfants.

Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes Pokemon.

Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes Pokemon dans chaque enveloppe.

Helena avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.

Nathan avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes.

Maintenant les 2 enfants ont le même nombre de cartes Pokemon.

Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

2. AVEC MATÉRIEL

La mère de Mat et de Matik décide de donner un cadeau à ses enfants.

Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes Pokemon.

Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes Pokemon dans chaque enveloppe.

Mat avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.

Matik avait déjà 3 cartes et sa mère lui donne 3 enveloppes.

Maintenant les 2 enfants ont le même nombre de cartes Pokemon.

Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

3. SANS MATÉRIEL

La mère de Mario et de Chantal décide de donner un cadeau à ses enfants.

Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes Pokemon.

Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes Pokemon dans chaque enveloppe.

Mario avait déjà 12 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.

Chantal avait déjà 3 cartes et sa mère lui donne 4 enveloppes.

Chantal a le même nombre de cartes Pokemon que Mario.

Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Utiliser les programmes de calculs pour établir les règles liées aux sommes et produits algébriques

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à introduire ou réinvestir les règles de réduction de sommes et produits algébriques, en amenant les élèves à repérer des expressions algébriques équivalentes. Cette activité est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique.

À partir de nombres, les élèves vont devoir appliquer les consignes indiquées dans trois programmes de calculs et comparer les résultats. Deux programmes aboutissent toujours à la même réponse. Il faut les repérer, comparer les expressions algébriques correspondantes et ainsi mettre en évidence une règle de réduction de somme ou de produit algébrique.

Cette fiche est accompagnée d'un document élève (pp. 53-54).

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---|--|
| Public-cible | Élèves de 1 ^{re} ou 2 ^e secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Algèbre / Nombres |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables. • Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode. • Utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence. |
| Objectif(s) d'apprentissage de l'activité | <ul style="list-style-type: none"> • Elle amène les élèves à travailler le sens de la lettre : celle-ci représente un nombre généralisé. • Elle travaille le sens donné à l'égalité en permettant aux élèves de l'appréhender à la fois en terme de résultat (quand on choisit un nombre particulier, un programme de calcul aboutit à un résultat particulier) et en terme d'équivalence (quel que soit le nombre de départ, deux programmes de calculs donnent toujours le même résultat, ils sont donc équivalents). • Elle permet également de revoir certaines conventions d'écritures mathématiques lors de l'écriture de l'expression algébrique associée à chacun des programmes. • Elle vise à introduire (ou à revoir) quelques techniques de réduction d'expressions. |
| Outil didactique mis en œuvre | <p>Les programmes de calculs sont inspirés d'une recherche menée par Grugeon et al. (2012). Il s'agit de</p> <ul style="list-style-type: none"> • proposer aux élèves trois programmes de calcul de type (Choisis un nombre - Multiplie-le par 4 - Ajoute le nombre de départ - Ajoute 4), • les tester avec plusieurs nombres (un même nombre sert de point de départ aux trois programmes, puis on choisit un autre nombre et ainsi de suite), • repérer les deux programmes qui aboutissent toujours au même résultat, • dégager les expressions algébriques correspondant à ces deux programmes, mettre en évidence la règle de réduction d'expressions algébriques découverte. |

| | |
|---------------------------------|---|
| Pour en savoir plus sur l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives, 137-162. • La fiche conceptuelle sur le sens de la lettre |
| Fil didactique | <ul style="list-style-type: none"> • Il s'agit d'une activité de (re)découverte des règles de réduction de sommes et produits algébriques. • Cette activité peut être précédée d'activités portant sur le sens de la lettre (notamment des activités de généralisation). • Cette activité gagne à être suivie d'activités basées sur les tuiles algébriques, supports concrets à manipuler dans leur version papier ou numérique. Elles permettent aux élèves de visualiser les transformations et de se forger des images mentales. Elles permettent aussi à l'enseignant de comprendre le raisonnement de l'élève en le regardant manipuler l'outil. https://support.mathies.ca/fr/mainSpace/TuilesAlgebriques.php |
| Durée/fréquence | L'activité d'introduction se déroule sur deux séances de 50 minutes. Les règles de réduction doivent être régulièrement utilisées en vue d'une automatisation efficace. |
| Contexte d'expérimentation | Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant les années scolaires 2019-2020 et 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans une classe d'environ 15 élèves (quartile ISE 2) de 2 ^e année (en coenseignement) et dans une classe d'une vingtaine d'élèves de 1 ^{re} année (quartile ISE 3). |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête notamment à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Elle peut également être proposée lorsque les élèves sont répartis en demi-groupe. Les modalités de mise en œuvre de ces dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (voir p.50).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|--|
| Différenciation | <p>Le choix des programmes de calcul permet d'adapter la difficulté aux aptitudes des élèves.</p> <p>Lors de la mise en commun de l'activité, l'explicitation des stratégies des élèves est valorisée pour associer une expression algébrique au programme. L'activité gagne à être explorée en petits groupes : les élèves auront alors plus de facilités pour verbaliser leur raisonnement.</p> <p>Le soutien fourni aux élèves par l'enseignant a pour but de les amener à approfondir ou corriger leurs démarches spontanées et les amener à un raisonnement plus abouti.</p> |
| Encadrement renforcé | <p>L'activité a été menée dans une classe de 20 élèves comme dans une classe de 15 élèves. Une des deux expérimentations s'est déroulée en coenseignement. Renforcer l'encadrement est assurément bénéfique pour les élèves puisqu'il permet de repérer plus rapidement les raisonnements erronés et d'amener ces élèves à en prendre conscience de manière à les faire évoluer de façon plus personnalisée.</p> |

Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|--|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : travail en petits groupes de 3 ou 4 élèves. Les tables doivent être disposées pour accueillir des petits groupes et permettre le déplacement de l'enseignant. |
| Support/matériel nécessaire(s) | Une feuille de consignes reprenant une série de 3 programmes de calcul. Elle est différente pour chaque groupe. (voir pp. 53-54). Pour la mise en commun, prévoir un agrandissement de ces programmes de calculs. Éventuellement prévoir des calculatrices pour les élèves moins à l'aise avec le calcul mental. Les erreurs de calculs empêcheraient d'atteindre l'objectif visé. |
| Témoignages élèves | Les élèves étaient motivés par l'activité : ils se sont rapidement engagés dans la tâche. Le lien avec la symbolisation et la réduction d'expressions a dû être davantage guidé par l'enseignant. « J'ai appris qu'on pouvait avoir le même résultat avec différents calculs. » « Travailler en groupe m'a aidé. » |
| Témoignages enseignants | « Cette activité permet de donner du sens aux règles de réduction de sommes et produits algébriques. Les élèves sont bien rentrés dans la tâche. Travailler en coenseignement était vraiment un atout ! » |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|--|---|
| <p>1. <u>Présentation de l'exercice et lecture des consignes</u> (voir document élève) Chaque groupe d'élèves reçoit un ensemble de 3 programmes de calculs à analyser. Par groupe, les élèves doivent choisir 3 nombres et les tester avec chaque programme.</p> | <p>L'entrée dans l'activité peut nécessiter une reformulation de la consigne générale : il est important que les élèves aient bien compris qu'il faut appliquer les trois programmes de calculs à un même nombre.</p> <p>Si cela s'avère nécessaire, les calculs peuvent être réalisés à l'aide de la calculatrice puisque ce n'est pas un objectif de calcul qui est poursuivi ici.</p> <p>Il est utile d'encourager les élèves à bien réitérer le processus plusieurs fois pour pouvoir repérer les programmes de calculs équivalents sans se baser sur un seul exemple.</p> <p>Chaque groupe peut travailler sur un ensemble différent de programmes de calculs.</p> |
| <p>2. <u>Identification des programmes de calculs équivalents</u> Par groupe, les élèves sont invités à déterminer les programmes qui aboutissent aux mêmes résultats et à écrire une expression algébrique correspondant à chacun. Ils doivent ensuite tirer des conclusions sur ces expressions algébriques.</p> | <p>C'est lors de cette étape que les élèves utilisent une lettre comme représentant d'un nombre généralisé. Il peut être utile de s'y attarder un moment.</p> <p>L'enseignant passe auprès des groupes afin de soutenir les élèves dans leur réflexion. Au moment où il passe dans les groupes, il est préférable qu'il pose une question simple comme « Expliquez-moi ce que vous avez découvert » afin de permettre aux élèves de verbaliser leur démarche et à l'enseignant de la comprendre en vue d'aider les élèves à l'approfondir si nécessaire. La présence de plusieurs enseignants en classe est la bienvenue pour accompagner chaque groupe de manière personnalisée.</p> |

| | |
|--|--|
| | <p>Pour des élèves de 1^{re} année, cette étape peut parfois être délicate : un retour aux calculs effectués par les élèves au départ des trois nombres choisis peut aider à la symbolisation algébrique.</p> |
| <p>3. <u>Mise en commun – Explication des démarches</u></p> <p>La première étape de la mise en commun donne l'occasion aux élèves d'expliquer aux autres leurs démarches. Dans le même temps, l'enseignant répertorie les expressions algébriques équivalentes.</p> | <p>Il n'est pas toujours évident pour les élèves de comprendre le raisonnement des autres groupes, surtout sur des programmes de calculs différents des leurs. Il n'est peut-être pas nécessaire que tout le monde comprenne tout le cheminement des autres groupes. Si l'enseignant a validé les équivalences de tous les groupes, on peut se contenter de simplement les écrire au tableau de manière à ne pas trop s'attarder sur ce point.</p> <p>La mise en commun permet de centrer l'attention des élèves sur le sens de la lettre.</p> |
| <p>4. <u>Mise en commun – Analyse des expressions algébriques équivalentes</u></p> <p>La deuxième étape de la mise en commun collective porte sur l'analyse des expressions algébriques équivalentes et des règles qui peuvent en être déduites.</p> | <p>C'est l'étape charnière de cette activité.</p> <p>Il faut amener les élèves à trouver la règle expliquant l'équivalence de deux expressions algébriques comme par exemple $(x + 5) - 3x$ et $-2x + 5$.</p> <p>Le choix des programmes de calculs de départ et l'ordre dans lequel on analyse les équivalences doivent faire l'objet d'une attention particulière, selon que les élèves soient en 1^{re} ou en 2^e année, selon que l'activité introduise le chapitre ou réactive des concepts déjà vus au préalable. Dans un premier temps, il peut être utile de se centrer sur une seule règle (réduction de termes semblables), sans qu'il y ait en plus des débats sur le rôle des parenthèses.</p> |
| <p>5. <u>Consolidation</u></p> <p>Cette phase de consolidation vise à repérer les éventuels manques de compréhension et permettre à l'enseignant de revenir si nécessaire sur des éléments de la mise en commun.</p> | <p>Les exercices proposés à chaque élève ou duo peuvent varier en fonction de leur niveau de compréhension.</p> |

Pistes d'adaptation

Cette activité est particulièrement modulable.

Les programmes peuvent porter uniquement sur les sommes algébriques ou uniquement sur les produits ou sur les deux.

En phase de découverte des règles, il est préférable de séparer les deux aspects.

La difficulté des programmes peut également être adaptée aux élèves.

Il peut être intéressant d'illustrer les règles déduites à l'aide des tuiles algébriques pour que les élèves puissent se forger des images mentales correctes.

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche ULiège- Haute École de la ville de Liège

Document Élève

Utiliser les programmes de calculs pour établir les règles liées aux sommes et produits algébriques

Les programmes de calculs suivants sont-ils équivalents ?

| 1 | 2 | 3 |
|--|--|---|
| Choisis un nombre. | | |
| Ajoute-lui 5. Retire le triple du nombre. | Multiplie-le par 5. Retire ensuite le triple du nombre. | Multiplie-le par 2. Calcule l'opposé du résultat. Ajoute 5. |

- 1) Choisis 3 nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.
 - 2) Écris une expression algébrique pour chaque programme.
 - 3) Quels sont les programmes qui aboutissent aux mêmes résultats ? Que peux-tu déduire des expressions algébriques correspondantes ?
-

Les programmes de calculs suivants sont-ils équivalents ?

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| Choisis un nombre. | | |
| Calcule son triple. Ajoute 4 au résultat. Retire le nombre. | Ajoute-lui 2. Calcule le double du résultat. | Multiplie-le par 2. Calcule le triple du résultat. |

- 1) Choisis 3 nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.
 - 2) Écris une expression algébrique pour chaque programme.
 - 3) Quels sont les programmes qui aboutissent aux mêmes résultats ? Que peux-tu déduire des expressions algébriques correspondantes ?
-

Les programmes de calculs suivants sont-ils équivalents ?

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|--|
| Choisis un nombre. | | |
| Multiplie-le par 4. Ajoute le nombre de départ. Ajoute 4. | Multiplie-le par 5. Ajoute 4 au résultat. Retire le nombre de départ. | Ajoute-lui 2. Multiplie le résultat par 4. Retire 4. |

- 1) Choisis 3 nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.
 - 2) Écris une expression algébrique pour chaque programme.
 - 3) Quels sont les programmes qui aboutissent aux mêmes résultats ? Que peux-tu déduire des expressions algébriques correspondantes ?
-

Les programmes de calculs suivants sont-ils équivalents ?

| 1 | 2 | 3 |
|--|--|---|
| Choisis un nombre. | | |
| Ajoute-lui 2. Calcule l'opposé du résultat. | Calcule son opposé. Ajoute 2 au résultat. | Multiplie-le par 2. Ajoute 2 au résultat. Retire le triple du nombre. |

- 1) Choisis 3 nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.
 - 2) Écris une expression algébrique pour chaque programme.
 - 3) Quels sont les programmes qui aboutissent aux mêmes résultats ? Que peux-tu déduire des expressions algébriques correspondantes ?
-

Analyser des démarches correctes et incorrectes pour donner du sens aux techniques algébriques

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à approfondir la compréhension des techniques algébriques : elle propose d'analyser des méthodes de calculs algébriques utilisées par des élèves fictifs pour réduire des expressions. Les questions posées visent à faire prendre conscience aux élèves pourquoi il est pertinent ou non d'appliquer la méthode proposée par l'élève fictif.

Cette activité est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique. Elle est accompagnée d'un document élève (pp. 63-64).

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---|---|
| Public-cible | Élèves de 1 ^{re} et 2 ^e secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Algèbre / Nombres |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none">• Utiliser des propriétés des opérations pour justifier une méthode de calcul.• Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode.• Utiliser, dans leur contexte, les termes usuels et les notations propres aux nombres et aux opérations. |
| Objectif(s) d'apprentissage de l'activité | <ul style="list-style-type: none">• Cette activité vise à revoir les techniques de réduction d'expressions algébriques, en ciblant certaines erreurs fréquentes des élèves : en les amenant à analyser et à expliquer pourquoi des méthodes peuvent ou non s'utiliser, on les amène à développer une compréhension plus approfondie des techniques algébriques. |

| | |
|---------------------------------|---|
| Outil didactique mis en œuvre | Cet outil amène les élèves à analyser des méthodes utilisées par des élèves fictifs pour transformer des expressions algébriques : certaines méthodes peuvent être appliquées dans la situation proposée, alors que d'autres ne sont pas correctes. D'emblée, on précise à l'élève si la méthode étudiée est correcte ou non. Par la suite, on cible le questionnement sur une étape de la transformation. Les élèves sont alors amenés à identifier le raisonnement mis en place par l'élève fictif pour réaliser l'étape et à proposer des explications permettant de mieux comprendre pourquoi la technique peut être utilisée ou non. |
| Pour en savoir plus sur l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Cet outil est inspiré de travaux de recherches réalisés dans le domaine de l'algèbre élémentaire (Booth, J. L., Oyer, M. H., Paré-Blagoev, E. J., Elliot, A. J., Barbieri, C., Augustine, A., & Koedinger, K. R. (2015). <i>Learning algebra by example in real-world classrooms. Journal of Research on Educational Effectiveness, 8(4), 530-551.</i> • La fiche conceptuelle sur le sens de la lettre |
| Fil didactique | <p>Cette activité peut être proposée tant en 1^{re} qu'en 2^e secondaire, lors d'exercices d'application centrés sur les transformations algébriques.</p> <p>Elle est décrite ici pour des élèves de début de deuxième année.</p> |
| Durée/fréquence | Une période de 50 minutes qui se structure en deux étapes : un travail individuel (ou en sous-groupes) suivi d'une exploitation collective. |
| Contexte d'expérimentation | Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant l'année scolaire 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans trois classes d'environ 25 élèves (quartile ISE 1) de 2 ^e année. |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Les modalités de mise en œuvre de ces deux dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p.59).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|--|
| Différenciation | <p>Cette activité fait la part belle à l'explicitation des stratégies pour réduire des expressions algébriques. Elle confronte les élèves à des démarches correctes et incorrectes, et les incite à réfléchir aux raisons qui expliquent pourquoi ces stratégies sont correctes ou incorrectes. Les arguments avancés par les élèves peuvent être de différentes natures : certains se limiteront à rappeler la règle. D'autres penseront peut-être à calculer des valeurs numériques. D'autres pourront également avoir recours à la visualisation (en utilisant par exemple l'algèbre par la géométrie ou les tuiles algébriques). L'intérêt de l'activité réside dans la confrontation des idées en vue d'amener les élèves à mieux comprendre les transformations algébriques apprises.</p> <p>Le soutien fourni aux élèves par l'enseignant a pour but de les pousser à approfondir leurs démarches spontanées, en les amenant à entrer pleinement dans la justification algébrique.</p> |
| Encadrement renforcé | L'activité a été menée durant une leçon où deux enseignants étaient en classe. |

Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|--|
| Aménagements particuliers du local | <p>Configuration de la classe : travail en individuel puis confrontation des idées en petits groupes de 3 élèves.</p> <p>Les tables doivent être disposées pour accueillir des petits groupes et permettre le déplacement de l'enseignant.</p> |
| Support/matériel nécessaire(s) | <p>Une feuille de consignes par élève (voir pp. 63-64).</p> |
| Témoignages élèves | <p>« C'était difficile au début surtout pour trouver pourquoi c'était faux. »</p> <p>« Ça te fait réfléchir en math. »</p> <p>« J'ai appris qu'il y avait plusieurs façons de justifier en math. »</p> <p>« Je pense avoir mieux compris les règles de calcul algébrique. »</p> |
| Témoignages enseignants | <p>« Ça change des leçons habituelles d'exercices, et en plus, on peut vraiment adapter les exemples travaillés aux difficultés des élèves. »</p> <p>« Ce genre d'exercice peut aider les élèves face à des exercices de justification, que l'on retrouve souvent dans les CE1D. »</p> <p>« Au début, les élèves ont été un peu déroutés, donc on est vite passé à la mise en commun, mais par la suite, ils ont vraiment apprécié analyser des démarches et pas simplement faire eux-mêmes les exercices. »</p> |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|--|--|
| 1. <u>Présentation de l'exercice et lecture des consignes</u> (voir document élève) | <p>Il est tout à fait possible d'adapter la feuille de consignes aux difficultés spécifiques des élèves, en ciblant les techniques qui leur posent particulièrement problème. L'important est de fournir des exemples de démarches correctes et incorrectes et de proposer des questionnements qui vont aider les élèves à comprendre pourquoi il est pertinent ou non d'appliquer la démarche proposée.</p> <p>Les premières questions posées aux élèves risquent d'engendrer une certaine confusion de leur part : « je ne comprends pas ce qu'il faut faire » ou « je ne sais pas ce qu'il faut répondre ». Il est important de les rassurer et de leur expliquer d'écrire ce qu'ils pensent et de chercher à comprendre à la fois comment l'élève fictif a raisonné, et pourquoi sa démarche est correcte ou incorrecte.</p> |
| 2. <u>Confrontation des idées en petits groupes</u> | <p>La confrontation des arguments peut aider les élèves à envisager d'autres façons d'expliquer que celles qu'ils ont eux-mêmes produites.</p> <p>De son côté, l'enseignant, en écoutant les échanges entre élèves, peut se rendre compte de la manière dont ils raisonnent et de leur niveau de compréhension des techniques algébriques. Il pourra ainsi proposer un accompagnement plus personnalisé des élèves.</p> |

3. Mise en commun

Durant l'exploitation collective, les différentes démarches seront confrontées.

Une synthèse sur le sens de la lettre dans les expressions / transformations algébriques est réalisée.

La mise en commun permet de centrer l'attention des élèves sur le sens des transformations algébriques et sur les conceptions erronées des élèves. Les démarches sont confrontées, expliquées durant cette mise en commun.

Illustrations :

Léa devait réduire l'expression « $3x + 5 + 5x$ », et elle a réalisé correctement la première étape :

$$3x + 5 + 5x = 8x + 5$$

1) Quel procédé Léa a-t-elle utilisé pour trouver le terme $8x$?

Certains élèves associent le $8x$ à la somme de $3x$ et 5 . La mise en commun peut permettre de revenir sur cette erreur en vue de chercher à comprendre pourquoi on ne peut pas additionner ces deux termes.

- Le calcul de valeurs numériques permet de revenir sur le sens de la lettre dans ce contexte et d'amener les élèves à constater que l'égalité $3x + 5 = 8x$ n'est vraie que si x vaut 1 , mais pas dans les autres cas.
- une autre entrée possible est la suivante : $3x$, c'est en réalité 3 fois un nombre et $5x$, c'est 5 fois le même nombre. Donc prendre 3 fois un nombre et ajouter 5 fois le même nombre, ça revient au même que de prendre 8 fois le nombre. Par contre, prendre 3 fois un nombre et ajouter 5 ne donnera 8 fois le nombre que dans un seul cas, lorsque le nombre est 1 .

Basile devait réduire l'expression suivante : $2 + 5x - 3$ mais il s'est trompé :

$$2 + 5x - 3 = 2 + 2x$$

1) Comment Basile a-t-il réfléchi pour trouver le terme $2x$?

Exemples de réponses proposées par les élèves :

- *il a additionné -3 à $5x$*
- *Il a soustrait 3 de $5x$*

2) Pourquoi ne pouvait-il pas utiliser ce procédé ?



Exemples de réponses proposées par les élèves :

- *Il additionne des termes qui ne sont pas semblables*
- *Ça ne marche que si x vaut 1*
- *Car si x vaut 5, $5x - 3$ c'est 22 et $2x$, c'est 10. Donc ce n'est pas pareil.*

Pistes d'adaptation

Ce type d'activité peut être adapté à différentes techniques mathématiques, qu'elles concernent les transformations algébriques ou la résolution d'équations du 1^e degré à une inconnue.

Voici deux exemples de questionnements

| | |
|--|--|
|  |  |
| <p>Un élève a résolu correctement l'équation $5 - x = -2$</p> <p>Voici la première étape de sa démarche :</p> $5 - x - 5 = -2 - 5$ <p>1) Pourquoi cet élève a-t-il retiré 5 aux deux membres de l'équation ?</p> <p>2) Pourquoi n'aurait-il pas pu diviser les deux membres par 5 ?</p> | <p>Un autre élève a tenté de résoudre l'équation $10x = 2$</p> <p>Sa solution est correcte.</p> <p>Voici sa démarche :</p> $\frac{10x}{10} = \frac{2}{10}$ $x = \frac{1}{5}$ <p>Pourquoi cet élève n'aurait-il pas pu soustraire 10 à 10x pour trouver directement la valeur de x ?</p> |

Sur le plan pédagogique, il est également tout à fait possible d'exploiter ce type d'activités lors de séances de remédiation par exemple ou de remplacer quelques exercices d'application des procédures par ce type de questionnement.

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) – Haute École de la ville de Liège (HEL)

Document Élève – Analyser de démarches correctes et incorrectes pour donner du sens aux expressions algébriques



Léa devait réduire l'expression « $3x + 5 + 5x$ », et elle a réalisé correctement la première étape :

$$3x + 5 + 5x = 8x + 5$$

- 1) Quel procédé Léa a-t-elle utilisé pour trouver le terme $8x$?
- 2) Pourquoi pouvait-elle utiliser ce procédé ?



Basile devait réduire l'expression suivante : $2 + 5x - 3$ mais il s'est trompé :

$$2 + 5x - 3 = 2 + 2x$$

- 1) Comment Basile a-t-il réfléchi pour trouver le terme $2x$?
- 2) Pourquoi ne pouvait-il pas utiliser ce procédé ?



Suzie devait effectuer l'opération « $3x \cdot 5x$ », mais elle s'est trompée :

$$3x \cdot 5x = 15x$$

- 1) Comment Suzie a-t-elle réfléchi pour trouver l'expression $15x$?
- 2) Pourquoi son raisonnement n'est-il pas correct ?



Matéo devait effectuer l'opération « $6a + a$ », et voici sa réponse :

$$6a + a = 7a$$

- 1) Comment Matéo a-t-il réfléchi pour trouver l'expression $7a$?
- 2) Pourquoi Matéo ne pouvait-il pas proposer la réponse $6a^2$?
- 3) Quelle opération aboutirait à la réponse $6a^2$?

Exploiter un puzzle de fractions pour donner du sens aux techniques opératoires

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à réactiver quelques notions liées aux fractions développées à l'école primaire.

Le puzzle de fractions est un rectangle découpé en pièces. Le puzzle représentant l'unité, les élèves sont amenés à identifier chaque pièce à l'aide d'une fraction. Cette activité propose une entrée ludique dans l'exploitation des fractions par la manipulation de pièces de puzzle. Elle vise à donner du sens à la fraction et aux opérations sur celle-ci, en amenant les élèves à effectuer des comparaisons d'aires de figures exprimées sous la forme de fractions. La présence d'un support visuel engendre une variété de démarches auprès des élèves, autorisant à revoir quelques opérations (addition de fractions, multiplication d'une fraction par un naturel, ...).

Cette activité est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique.

Elle est accompagnée d'un document élève (pp. 75-76).

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---------------------------------|--|
| Public-cible | Élèves de première année. |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Grandeurs |
| Apprentissage visé | <ul style="list-style-type: none"> • Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées. • Fractionner des objets en vue de les comparer. • Composer deux fractionnements d'un objet réel ou représenté en se limitant à des fractions dont le numérateur est un (par exemple, prendre le tiers du quart d'un objet). • Utiliser l'égalité en terme de résultat et d'équivalence. |
| Objectif(s) d'apprentissage | <ul style="list-style-type: none"> • Elle amène les élèves à opérer sur les fractions (additionner et soustraire des fractions, multiplier et diviser une fraction par un naturel). • Elle permet de relever des fractions équivalentes. • Elle exploite la mise au même dénominateur dans l'addition de fractions. • Elle travaille la symbolisation lors du passage de la manipulation des pièces à l'écriture des calculs, que ce soit pour les opérations ou pour l'égalité. |
| Outil didactique mis en œuvre | Le puzzle de fractions est un rectangle initialement considéré comme une unité. Il est découpé en pièces dont il faut déterminer la valeur. Pour y arriver, les élèves seront amenés à effectuer visuellement des opérations impliquant les fractions. |
| Pour en savoir plus sur l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Boraita, F., Demonty, I., Pirotte, M. & Fagnant, A. (2015). Du concret pour abstraire. Un outil pratique à destination des enseignants de 5ème - 6ème primaire et de 1re - 2ème secondaire. Rapport final de la recherche intitulée "l'enseignement de l'abstraction entre 10 et 14 ans : un outil au service des cours de mathématiques" Belgique : Liège, Université de Liège, aSPe, DGIE. http://hdl.handle.net/2268/188488 • De Terwangne M., & Hauchart C., & Lucas F. (2007). Oser les fractions dans tous les sens. Collection Math & Sens, Éditions De Boeck. • La fiche conceptuelle consacrée aux fractions. |

| | |
|----------------------------|--|
| Fil didactique | <p>Cette activité prend place dans un continuum pédagogique sur les fractions. Elle réinvestit des concepts abordés en primaire.</p> <p>Cette activité doit être complétée par d'autres activités permettant de favoriser la transition vers la fraction nombre. Il s'agit notamment des activités « Utiliser des bandes unité pour introduire la fraction nombre » et « Additionner et soustraire des fractions nombres en utilisant la droite numérique ».</p> |
| Durée/fréquence | <p>En fonction du moment de l'année, de l'hétérogénéité de la classe et surtout de l'objectif poursuivi, cette activité demande au moins une période de 50 minutes afin d'exploiter au maximum toutes les démarches des élèves. Dans l'idéal, il est dès lors conseillé d'utiliser deux périodes de 50 minutes.</p> |
| Contexte d'expérimentation | <p>Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant l'année scolaire 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans trois écoles durant le cours de mathématiques. Une école a choisi de la présenter dans une classe de 8 élèves en difficulté de 2^e année (quartile ISE 2) et les deux autres écoles l'ont proposée dans trois classes de 1^{re} année (quartile ISE 3) et dans cinq classes de 1^{re} année (quartile ISE 4).</p> |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique, et se prête éventuellement à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Les modalités de mise en œuvre de ces deux dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p. 71).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|-----------------|---|
| Différenciation | <p>Grâce au support visuel, les entrées dans l'activité sont multiples. L'élève peut emprunter un chemin en choisissant directement une première pièce ou en observant tout le puzzle et en rapprochant certaines pièces afin de les nommer. Il est intéressant d'accepter toutes les stratégies proposées par les élèves car elles permettront de comparer des opérations aboutissant à un même résultat.</p> <p>Si certains groupes avancent à des vitesses relativement différentes, on peut adapter le questionnement. Par exemple : trouver non pas une mais trois manières différentes de déterminer la fraction correspondant à une même pièce du puzzle ou encore déterminer la valeur d'une pièce à partir d'une autre pièce imposée par l'enseignant plutôt que de laisser choisir la méthode par l'élève.</p> <p>Il peut être utile de guider l'élève dans la recherche de la valeur des pièces en lui proposant de commencer par une pièce qui semble plus simple à déterminer. L'objectif final reste le même, l'enseignant guide les premiers pas de l'élève afin de déléguer progressivement la responsabilité de la prise en charge du reste de la consigne</p> |
|-----------------|---|

| | |
|----------------------|--|
| Encadrement renforcé | <p>L'activité a été menée durant une leçon où les élèves étaient répartis en petits groupes de 2. Les trois premières étapes ont été observées et vécues en 50 minutes.</p> <p>Deux enseignants travaillaient en coenseignement. Plus particulièrement, un enseignant-titulaire du cours enseignait et un collègue lui apportait son soutien (débloquer une situation dans un groupe, stimuler la participation par une question de relance, confronter au sein du groupe deux démarches différentes...).</p> <p>L'enseignant titulaire et le collègue de soutien ont un rôle important à jouer pour aider les élèves à formaliser leurs raisonnements et pour les conduire à vérifier l'équivalence de plusieurs expressions.</p> <p>La diversité des méthodologies utilisées au sein d'un groupe et les besoins peuvent différer d'un groupe à un autre. C'est pour ces raisons que cette activité s'adapte particulièrement bien à un coenseignement.</p> |
|----------------------|--|

Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|---|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : travail en groupe de 2. Les tables doivent être disposées pour accueillir des petits groupes et permettre le déplacement de l'enseignant. |
| Support/matériel nécessaire(s) | Pour le travail en groupe (voir feuilles élèves aux pages 72-73) : <ul style="list-style-type: none"> • Pour chaque élève : <ul style="list-style-type: none"> ○ un puzzle découpé à insérer dans une enveloppe ; ○ un rectangle représentant l'unité. Pour la mise en commun : <ul style="list-style-type: none"> • Prévoir un agrandissement du puzzle visible par tous les élèves et utilisé lors de la phase collective. |
| Témoignages élèves | « J'ai aimé travailler en duo et manipuler des fractions. » « On pouvait donner d'autres réponses que celles du prof. » « J'aime pas les fractions mais là c'était différent, ce n'était pas tout le temps des calculs à faire. » « On pouvait expliquer à toute la classe comment faire et on n'était pas obligé de partir tous de la même pièce. » |
| Témoignages enseignants | « L'idée de relier la fraction à une multiplication est intéressante : les élèves constatent ainsi qu'une pièce s'appelle $\frac{1}{6}$ car elle va exactement 6 fois dans le rectangle. » « Pour bien fonctionner, il est vraiment important de circuler dans les groupes sinon les élèves ne parviennent plus à expliquer la manière dont ils ont procédé pour déterminer une pièce et cela réduit fortement la confrontation des démarches dans la mise en commun. » « J'ai trouvé cette activité intéressante, mais pas évidente à gérer lorsqu'on est seul avec toute la classe : il me semble que c'est vraiment utile de la réaliser en coenseignement, ou lors d'un travail en demi-classe car les stratégies des élèves peuvent vraiment varier d'un groupe à l'autre. » |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|---|--|
| <p>1. <u>(Re)construction du puzzle</u></p> <p>Les élèves reçoivent une enveloppe contenant toutes les pièces préalablement découpées par l'enseignant. Les pièces ne doivent pas être collées puisqu'elles seront susceptibles d'être manipulées, déplacées dans la suite de l'activité. Plusieurs reconstitutions du puzzle sont possibles. Une fois le puzzle reconstitué, les élèves reçoivent le puzzle complet dessiné. Celui-ci servira de point de référence durant toute l'activité. Les pièces de départ (que les élèves ont utilisées pour construire le puzzle) peuvent être manipulées à tout moment pour les mettre en relation les unes avec les autres et pour les reporter sur le puzzle complet.</p> | <p>Les élèves peuvent être perturbés s'ils n'ont pas tous la même disposition des pièces, une fois le puzzle reconstitué.</p> |
| <p>2. <u>Détermination de la valeur des pièces, sachant que le puzzle complet représente l'unité.</u></p> <p>Les élèves répartis en duo déterminent la valeur des pièces et expliquent leurs démarches. Pour y arriver, les groupes seront contraints de rechercher des liens entre les différentes pièces du puzzle et de les associer à des calculs (addition de plusieurs fractions, multiplication d'une fraction par un naturel pour obtenir une autre fraction, prendre la moitié d'une fraction, ...). Ces liens s'opèrent par le déplacement et le rapprochement de certaines pièces.</p> <p>Des mises en commun régulières quant à la valeur des pièces permettront d'assurer le bon déroulement de l'activité.</p> | <p>Il est important d'insister assez rapidement sur le rôle joué par le dénominateur dans ce contexte : il permet de déterminer combien de fois la pièce va dans l'unité. Cette manière de raisonner permet de mieux faire comprendre aux élèves qu'une pièce comme $\frac{1}{3}$ est nécessairement plus grande que $\frac{1}{4}$ (alors que 3 est plus petit que 4) puisqu'on doit la reporter moins de fois dans l'unité.</p> <p>Le professeur peut encourager les élèves à mimer, plier pour vérifier le nom de la fraction trouvée. Pour aider les élèves, on peut leur montrer, avec les pièces, l'opération qu'ils appliquent. Les groupes qui avancent plus rapidement peuvent se voir imposer une contrainte supplémentaire : trouver deux voire trois manières différentes de trouver la valeur d'une pièce.</p> |

3. Exploitation collective

Lors de la phase collective, la fraction attribuée à chaque pièce est analysée, de même que les différentes démarches utilisées pour y parvenir.

Par exemple, prendre le quart du tiers ou la moitié du sixième sont des procédures équivalentes : $\frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{12}$

On a ainsi l'occasion de revenir sur le **signe d'égalité** qui peut être placé entre deux calculs désignant un même nombre.

Afin de déterminer la valeur d'une pièce, plusieurs chemins sont possibles. Il est intéressant de conserver et de discuter cette variété d'approches et de démarches.

Voici des exemples de productions :

| | |
|---|---|
| $P6 + P10 = P8$ $4 \cdot P6 = P8$ $P6 = \frac{1}{4} P8$ $P6 = \frac{1}{4} \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$ | L'élève propose deux chemins pour déterminer la valeur de la pièce 6 : <ul style="list-style-type: none">• soit utiliser les pièces 10 et 8• soit combiner 4 pièces 6 pour former une pièce 8. |
| $\text{grand carré} = 1 \text{ unité}$ $P4 = \frac{1}{4}$ $P7 = \frac{1}{12}$ $P7 \text{ va trois fois dans } P4$ $\frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{12}$ | La pièce 4 vaut $\frac{1}{4}$ et la pièce 7 vaut $\frac{1}{12}$ car elle va 12 fois dans l'unité. La pièce 7 va aussi 3 fois dans la pièce 4, donc $\frac{1}{4}$ c'est 3 fois $\frac{1}{12}$. |

4. Vérification que la somme des pièces du puzzle vaut l'unité.

Les élèves vérifient que la somme des valeurs trouvées pour chaque pièce à l'étape précédente est effectivement égale à l'unité.

Durant **l'exploitation collective**, on confrontera les différentes démarches d'élèves. Comme précédemment, il peut s'avérer utile de mettre l'accent sur les liens entre les pièces et leurs valeurs de manière à vérifier que la somme vaut bien 1 en utilisant la commutativité de l'addition.

Pistes d'adaptation

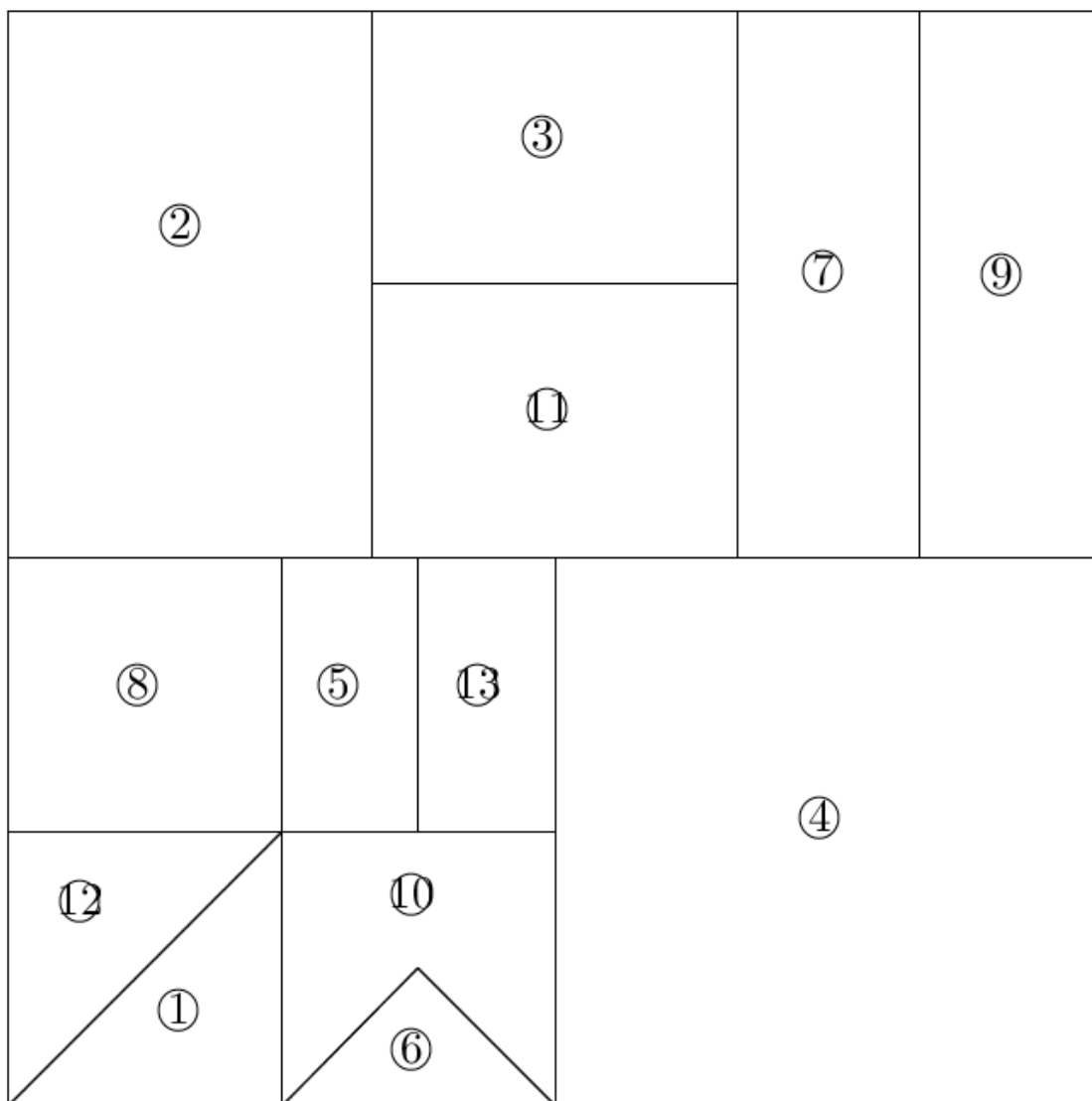
Une fois l'activité proposée, on pourrait ajouter une dernière étape en considérant cette fois que ce n'est pas le puzzle complet qui vaut l'unité, mais plutôt l'une des pièces (par exemple la pièce 4). Cela permet d'élargir le sens de la fraction et les opérations réalisées sur celles-ci. Ainsi, la fraction n'est plus nécessairement plus petite que l'unité et les techniques opératoires peuvent aboutir à des résultats plus grands que l'unité.

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) – Haute École de la ville de Liège (HEL)

Document Élève – Exploiter un puzzle de fractions pour donner du sens aux techniques opératoires

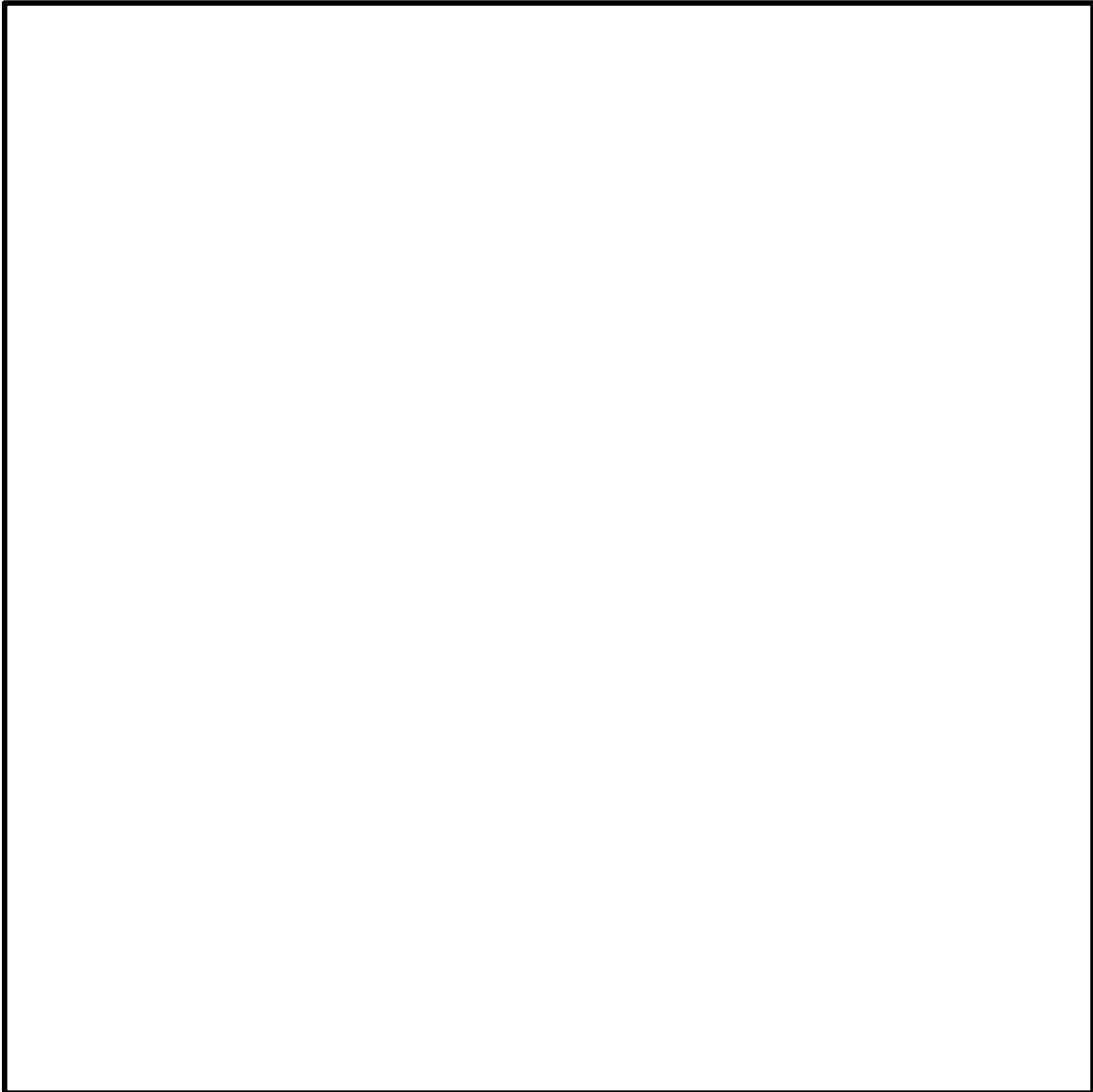


Les pièces sont à découper :





Le cadre dans lequel les élèves pourront coller les pièces du puzzle :



Utiliser des bandes unité pour introduire la fraction nombre

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à introduire la fraction nombre, en travaillant dans un contexte de mesurage d'un segment de longueur inconnue à l'aide de bandes étalons appelées « bandes unité ». Cette activité s'inscrit dans un continuum pédagogique sur les fractions. Elle est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique.

À l'aide d'une bande unité en papier, les élèves vont devoir déterminer la longueur d'un segment donné sur une feuille non quadrillée. Cette longueur ne peut être déterminée en reportant un nombre entier de fois la bande unité. C'est de cette manière que les fractions sont introduites.

Il s'agit ensuite, sur une droite numérique, d'associer un nombre à l'extrémité du segment (si l'origine correspond à 0). C'est à ce moment que la fraction acquiert pleinement le statut de nombre. L'activité est accompagnée de documents élèves (pp. 87-93).

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|-------------------------------|---|
| Public-cible | Élèves de 1 ^{re} année secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Grandeurs / Nombres |
| Apprentissage visé | <ul style="list-style-type: none"> • Situer un nombre (décimal limité, fraction) sur une droite graduée. • Écrire des nombres sous une forme adaptée (décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser. |
| Objectif(s) d'apprentissage | <ul style="list-style-type: none"> • Cette activité vise à introduire la fraction nombre qui sera située sur la droite numérique. • Cette activité amène les élèves à passer de la fraction opérateur (du domaine des grandeurs) à la fraction nombre (du domaine des nombres). |
| Outil didactique mis en œuvre | <p>Cette activité s'inspire d'une activité développée dans ERMEL CM1.</p> <p>Elle se déroule en deux parties :</p> <ul style="list-style-type: none"> • les élèves mesurent un segment en reportant la bande unité. Le segment n'est pas de longueur entière. Ainsi, certains pensent à plier en deux, puis encore en deux, puis éventuellement encore en deux la bande unité. Les mots moitié, demi, quart, huitième utilisés dans les messages sont les témoins de cette démarche. • Ils doivent ensuite superposer le segment sur une droite graduée et associer un nombre à son extrémité. Ce nombre peut s'écrire de différentes manières. L'écriture fractionnaire prend ainsi place sur la droite graduée au même titre que l'écriture décimale. |

| | |
|--|---|
| <p>Pour en savoir plus sur l'outil</p> | <p>ERMEL CM1 (1997) Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Paris : Hatier</p> <p>L'enseignement des rationnels à la liaison primaire-secondaire. Pierre Stegen, Christine Géron et Sabine Daro, Septembre 2007 suivre le lien http://www.enseignement.be/index.php?page=26044&id_fiche=4996&dummy=24898</p> <p>« À la liaison primaire-secondaire : l'apprentissage des fractions » C. Géron, E. Masson, P. Paquay, C. Fauconnier, M. Herman, F. Rajca et A. Sprimont, <i>Losanges</i>, 32 (2016) 3-18.</p> <p>La fiche conceptuelle consacrée aux fractions.</p> |
| <p>Fil didactique</p> | <p>Cette activité peut être proposée en introduction du chapitre consacré aux fractions. Elle favorise la transition entre le primaire et le secondaire.</p> <p>L'activité s'inscrit dans un continuum pédagogique sur les fractions. Il est important d'utiliser régulièrement l'outil « droite graduée » pour permettre aux élèves de se créer des automatismes et des images mentales.</p> <p>De plus, cette activité peut être suivie de l'activité « Additionner et soustraire des fractions nombres en utilisant la droite numérique ». Précisons que l'activité est décrite ici pour des élèves de début de première année.</p> |
| <p>Durée/fréquence</p> | <p>Deux périodes de 50 minutes qui se structurent en plusieurs étapes : alternance de travaux en duo (ou en sous-groupes) et d'exploitations collectives avec traces écrites dans le cahier des élèves.</p> |
| <p>Contexte d'expérimentation</p> | <p>Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant les années scolaires 2019-2020 et 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans 5 classes d'environ 20 élèves (quartile ISE 2) de 1^{re} année et une classe de 20 élèves de 2^e année (quartile ISE 3).</p> |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique, et se prête éventuellement à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Les modalités de mise en œuvre de ces deux dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p. 83).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|--|
| Différenciation | <p>Grâce au support visuel, les entrées dans l'activité sont multiples. L'élève peut emprunter un chemin en choisissant directement de travailler avec toute la bande unité ou une fraction de celle-ci. Il est intéressant d'accepter toutes les stratégies proposées par les élèves car elles permettront des discussions.</p> <p>Lors de la première mise en commun, le recueil des messages concernant un même segment est une occasion de faire verbaliser les élèves autour de leurs stratégies de mesure.</p> <p>L'activité gagne à être explorée en petits groupes : les élèves auront alors plus de facilités pour verbaliser la manière dont ils manipulent la bande unité en vue d'en dégager la longueur du segment.</p> <p>Certains segments sont plus faciles à mesurer que d'autres. C'est l'occasion de proposer aux élèves, supposés plus faibles, d'exprimer la longueur d'un segment impliquant un découpage en demis uniquement, afin qu'ils puissent développer le même raisonnement que les autres, à l'aide de fractions plus simples à visualiser.</p> <p>Lors de la deuxième mise en commun, accepter toutes les écritures de nombres, pour autant qu'elles soient correctes, permet de faire évoluer les conceptions des élèves. Si l'écriture fractionnaire n'apparaît pas, il est indispensable de demander aux élèves de trouver une autre manière de décrire le nombre afin d'atteindre l'objectif visé.</p> |
| Encadrement renforcé | <p>Généralement, l'activité a été menée durant une leçon de deux périodes de 50 minutes, en groupe classe où les élèves étaient répartis en duo.</p> <p>La gestion de l'hétérogénéité des groupes peut être renforcée par une pratique de coenseignement. Plus particulièrement, un enseignant-titulaire du cours enseigne et un collègue lui apporte son soutien.</p> <p>Ce type d'encadrement permet davantage d'interactions entre les groupes d'élèves et les enseignants.</p> |

Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|---|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : travail en petits groupes de 2. La disposition des bancs doit permettre à l'enseignant de se déplacer facilement. |
| Support/matériel nécessaire(s) | <p>L'activité s'ancre dans un jeu de communication où chaque groupe d'élèves reçoit un segment de droite représenté sur une feuille et nommé [AB], [CD] ou [EF] (p. 88 à 90 ainsi qu'une bande unité (p.87). Chaque groupe doit d'abord rédiger un message permettant d'identifier, à l'aide de la manipulation de la bande unité, le segment en question parmi six segments. Par la suite, chaque groupe reçoit le message rédigé par un autre groupe et doit retrouver le segment décrit par le message parmi six segments.</p> <p>Il est donc important que les deux groupes ne travaillent pas sur le même segment, afin que l'analyse du message ne soit pas trop directe.</p> <p>Le matériel nécessaire peut être décrit comme suit.</p> <p>Du côté des élèves :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Au début de l'activité, chaque duo reçoit : <ul style="list-style-type: none"> ○ une bande unité (p.87 - prévoir éventuellement d'autres afin de permettre de nombreux pliages), ○ une feuille sur laquelle est représenté un segment à mesurer ([AB], [CD] ou [EF]) (p.88 à 90), ○ une feuille sur laquelle les élèves indiqueront leur message (p.91). -Au moment d'échanger les messages, chaque groupe reçoit : <ul style="list-style-type: none"> ○ le message rédigé par un autre groupe qui n'a pas travaillé sur le même segment que lui ; ○ la feuille comportant six segments : il s'agira cette fois de décoder le message pour identifier le segment parmi les six mis à leur disposition (p.92). -Une fois le segment identifié, les élèves reçoivent une feuille munie d'une demi-droite orientée qu'ils conserveront dans leur cahier (p.93). |

| | |
|-------------------------|---|
| | <p>Du côté de l'enseignant :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Prévoir un agrandissement de la bande unité qui devra être facilement pliable (une feuille A4 utilisée « horizontalement » peut convenir) et tracer, à l'aide de la droite non graduée, au tableau une droite orientée qui servira de droite numérique. |
| Témoignages élèves | <p>« J'ai aimé écrire un message pour l'autre groupe. » « Moi, je suis contente, je sais enfin faire des choses justes avec les fractions ! »</p> |
| Témoignages enseignants | <p>« La notion de fraction n'est pas du tout évidente pour eux : pourtant ils se prêtent au jeu par l'écriture d'un message.» « J'ai été surpris de la qualité et de la diversité des réponses formulées par ses élèves. » « Cette activité prend du temps mais finalement les élèves comprennent bien et arrivent à mieux utiliser la droite graduée.»</p> |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|---|---|
| <p>1 <u>Mesurage du segment représenté sur la feuille élève</u> Chaque duo reçoit un segment « à mesurer » (pp.88-90) ainsi qu'une bande « unité » (p. 87). Il peut être utile de tenir à la disposition des élèves, une bande supplémentaire si nécessaire.</p> <p>Il est demandé d'écrire un message (p.91) pour qu'un autre duo puisse identifier leur segment parmi six segments en utilisant la même bande unité.</p> <p>Seuls trois segments (parmi les six représentés sur la feuille p.92) différents circulent dans la classe. Les élèves ne disposent pas encore de la feuille reprenant les 6 segments (p.92).</p> | <p>L'entrée dans l'activité peut nécessiter une reformulation de la consigne générale : il est important que les élèves aient bien compris qu'il s'agit de déterminer la mesure du segment exclusivement en utilisant la bande unité de manière horizontale et non avec un objet usuel de mesure (latte, équerre...).</p> <p>Il est utile d'encourager les élèves à être précis dans leur recherche et à indiquer leur procédure.</p> <p>Il peut également être nécessaire d'inciter les élèves à plier la bandelette unité afin d'identifier précisément la longueur du segment.</p> <p>La longueur du segment [AB] s'exprime en demis, celle de [CD] en quarts et celle de [EF] en huitièmes. Les segments peuvent donc être attribués aux duos en fonction de leur niveau de difficulté.</p> |
| <p>2. <u>Échange de messages et repérage du segment</u> Chaque duo reçoit la feuille avec les 6 segments (p. 92). À l'aide de la bande unité, les récepteurs des messages cherchent à retrouver le segment de départ parmi six segments mis à leur disposition.</p> <p>La vérification se fait par superposition du segment de départ avec celui identifié parmi les six. En cas d'incompréhension du message donné, une correction est apportée par les émetteurs.</p> | <p>L'enseignant passe auprès des groupes afin de soutenir les élèves dans leur réflexion. Il est préférable qu'il pose une question simple comme « Expliquez-moi comment vous analysez le message » afin de permettre aux élèves de verbaliser leur démarche et à l'enseignant de la comprendre en vue d'aider les élèves à l'approfondir si nécessaire.</p> |

| | |
|---|--|
| <p>3. <u>Mise en commun</u></p> <p>Mise en évidence des différentes manières d'exprimer la longueur de chaque segment.</p> | <p>L'enseignant indique au tableau les différentes procédures utilisées pour identifier chaque segment.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ainsi, le premier segment mesure par exemples : deux bandes « unité » et une moitié (avec une écriture en lettres ou en fraction) ou 2,5 unités ou $\frac{5}{2}$ de bande unité ou toute production équivalente. • Le deuxième segment mesure une bande « unité » et trois quarts de bande ou 3,75 unités ou $\frac{7}{4}$ de bande unité ou toute production équivalente. • Le troisième segment mesure deux bandes unités et un huitième ou 2,125 unités ou $\frac{17}{8}$ de bande unité ou toute production équivalente. <p>C'est l'occasion pour l'enseignant de vérifier et, le cas échéant, de corriger collectivement certaines procédures erronées.</p> <p>Les fractions correspondant à ces messages sont des fractions opérateurs puisqu'elles sont obtenues par report et pliage de la bande unité.</p> <p>Afin de déterminer la longueur du segment demandé, plusieurs chemins sont possibles. Il est intéressant de conserver et de discuter cette variété d'approches et de démarches.</p> |
|---|--|

| | |
|---|---|
| | <p>Voici différents messages émis par un groupe et permettant de déterminer la longueur du segment [AB] :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>2,5 unités</p> <p>2 unités + 1 demi unité</p> <p>5 demis unités = $\frac{5}{2}$</p> <p>3 unités - 1 demi unité</p> </div> |
| <p>4. <u>Passage à la droite numérique</u> Chaque duo reçoit une demi-droite orientée (p. 93). L'origine correspond au nombre 0. À l'aide de la bande unité, les élèves sont amenés à placer les nombres 1, 2 et 3.</p> <p>Ensuite, les duos sont invités à superposer leur segment de départ sur cette demi-droite en veillant à ce que l'origine du segment (A, C ou E en fonction du segment reçu précédemment) coïncide avec O. Il leur est enfin demandé de trouver un nombre à associer au point correspondant à l'extrémité de leur segment (B, D ou F selon le cas).</p> | <p>L'enseignant s'assure de la concordance de l'origine de la droite numérique et de l'extrémité du segment. Le sens de la flèche peut être aussi relevé.</p> <p>C'est l'étape charnière de cette activité. Il est important de donner une consigne claire et par étapes afin que l'attention des élèves se concentre principalement sur le nombre à associer à l'extrémité du segment.</p> |

| | |
|---|---|
| <p>5. Mise en commun</p> <p>La mise en commun permet d'associer à chacune des trois abscisses correspondant aux extrémités des segments, plusieurs écritures d'un même nombre. Même si les élèves privilégient souvent les écritures décimales aux écritures fractionnaires, on obtient une droite numérique avec trois abscisses associées à des nombres écrits de plusieurs manières.</p> <p>Les fractions ont dès lors le statut de nombre que l'on peut situer sur une droite graduée.</p> | <p>Cette mise en commun s'appuie sur les différentes écritures des nombres correspondant aux abscisses des trois points : revenir sur l'équivalence de ces écritures au départ des productions des élèves peut se révéler nécessaire dans cette mise en commun.</p> <p>Néanmoins, si l'écriture fractionnaire n'apparaît pas, il faut inciter les élèves à la trouver. C'est l'élément principal de l'activité.</p> |
| <p>6. Phase de consolidation</p> <p>Chaque duo est invité à placer d'autres fractions sur la droite graduée. Plus tard, des fractions munies d'un signe « moins » pourront également y prendre place.</p> | |

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) – Haute École de la ville de Liège (HEL)

Document Élève – Utiliser des bandes unité pour introduire la fraction nombre

Prénom :

Feuille n°1

A

B

Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :

Est-ce le bon segment ?

Prénom :

Feuille n°1

C

D

Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :

Est-ce le bon segment ?

Prénom :

Feuille n°1

E

F

Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :

Est-ce le bon segment ?

Prénom de l'émetteur :

Feuille n°2

Message :

Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n°3 correspondant au message :

Remarques :

Prénom de l'émetteur :

Feuille n°2

Message :

Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n°3 correspondant au message :

Remarques :

(1) _____

(2) _____

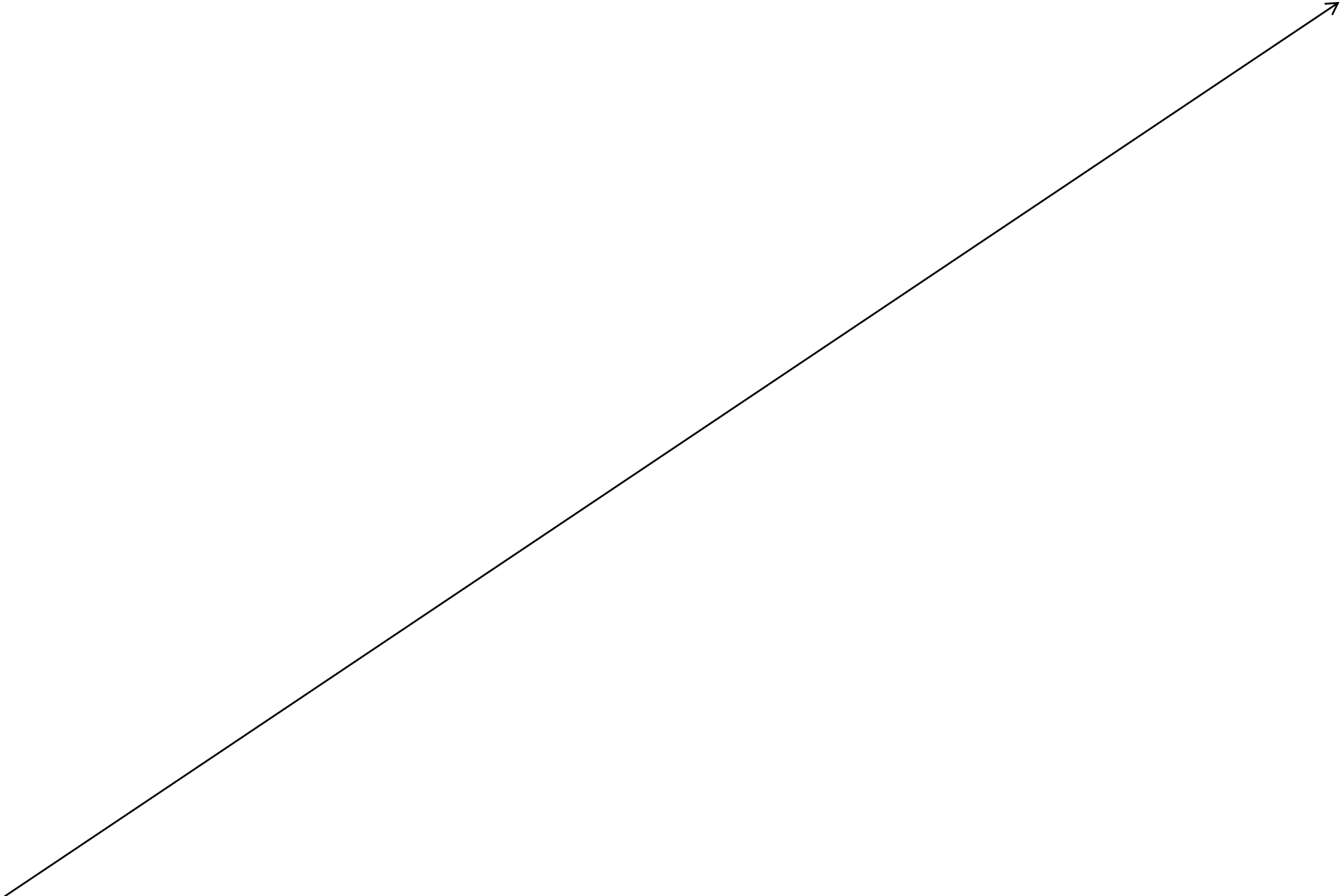
(3) _____

(4) _____

(5) _____

(6) _____

0



Additionner et soustraire des fractions nombres en utilisant la droite numérique

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à additionner et soustraire des fractions à l'aide de la droite numérique. Cet outil constitue un support visuel ancré directement dans le domaine des nombres.

L'activité permet d'expliquer pourquoi il est nécessaire de mettre les fractions au même dénominateur. Elle permet également de travailler le sens des opérations d'addition et de soustraction.

Cette activité s'inscrit dans la continuité de l'activité « Utiliser des bandes unité pour introduire la fraction nombre » qui permet de réaliser le passage entre les fractions opérateurs et les fractions nombres.

Elle est accompagnée d'un document élève (pp. 105-109).

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---|---|
| Public-cible | Élèves 1 ^{re} et 2 ^e secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Nombres / Fractions |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des fractions. |
| Objectif(s) d'apprentissage de l'activité | <ul style="list-style-type: none"> • Donner du sens à la procédure d'addition et de soustraction de deux fractions nombres. |
| Outil didactique mis en œuvre | <p>La droite numérique est un support utilisé dans bon nombre d'apprentissages, dès l'école primaire.</p> <p>Dans cette activité, il s'agit pour les élèves de s'appuyer sur cet outil pour trouver la position du résultat d'une addition ou d'une soustraction de fractions. Il s'agit ensuite d'associer une fraction à la position repérée, à l'aide d'autres droites numériques préalablement graduées en demis, tiers, quarts, cinquièmes, sixièmes, huitièmes, dixièmes, douzièmes. La démarche mise en œuvre pour réaliser l'activité fait émerger la nécessité de mettre les deux fractions au même dénominateur.</p> <p>Dans cette activité, l'avantage de cet outil est multiple :</p> <ul style="list-style-type: none"> - associer des gestes différents aux procédés d'addition et de soustraction de nombres et leur (re)donner du sens, - permettre aux élèves de se construire des images mentales, - rester dans le domaine des fractions nombres sans revenir dans le domaine des fractions opérateurs, donner sens aux règles d'addition et soustraction de fractions et plus particulièrement à la mise au même dénominateur. |

| | |
|---------------------------------|--|
| Pour en savoir plus sur l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • ERMEL CM1. (1997) Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Paris : Hatier. • ERMEL CM2. (1999) Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Paris : Hatier. • La fiche conceptuelle consacrée aux fractions. |
| Fil didactique | <ul style="list-style-type: none"> • Cette activité prend place à la suite de l'activité « Utiliser des bandes unité pour introduire la fraction nombre » pour que les élèves soient initiés au concept de fraction nombre et qu'ils aient été entraînés à en placer sur une droite graduée. • Cette activité peut être proposée en introduction, en entraînement et/ou en approfondissement. |
| Durée/fréquence | <ul style="list-style-type: none"> • Cette activité de découverte se déroule sur une période de deux fois 50 minutes (une séance pour chacune des opérations). Il est en outre nécessaire de consacrer un temps supplémentaire à l'exercitation. |
| Contexte d'expérimentation | <p>Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant l'année scolaire 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans une classe d'environ 20 élèves de 2^e année d'une première école (quartile ISE 3), dans 4 classes d'une vingtaine d'élèves d'une deuxième école (quartile ISE 3) et dans 3 classes d'une troisième école (quartile ISE 4) dont les élèves étaient répartis en demi-groupes de 12 environ.</p> |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête notamment à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Elle peut également être proposée lorsque les élèves sont répartis en demi-groupe. Les modalités de mise en œuvre de ces dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p.100).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

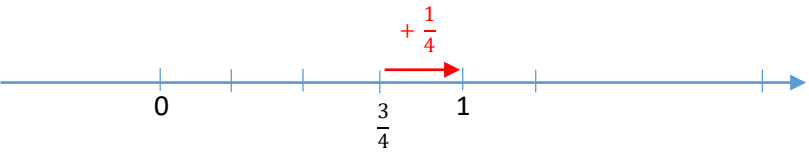
| | |
|----------------------|--|
| Différenciation | <p>L'activité fournit un support visuel aux élèves qui peut les aider dans leur raisonnement. Il n'est cependant pas obligatoire de systématiquement l'utiliser par la suite si cela ne s'avère pas nécessaire.</p> <p>Lors de la mise en commun de l'activité, l'explicitation des stratégies des élèves est valorisée.</p> <p>Le soutien fourni aux élèves par l'enseignant a pour but de les amener à approfondir ou corriger leurs démarches spontanées, pour qu'elles prennent progressivement sens. Le fait de donner des explications aux différents duos ou groupes d'élèves permet de se centrer sur les difficultés de chacun.</p> |
| Encadrement renforcé | <p>L'activité décrite dans cette fiche a été menée en groupe-classe en coenseignement. Renforcer l'encadrement permet de repérer plus rapidement les raisonnements erronés des élèves pour les amener à en prendre conscience de manière à les faire évoluer de façon plus personnalisée.</p> |

Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|--|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : alternance de moments de travail en collectif et en petits groupes de 2 ou 3 élèves. Les tables doivent être disposées pour accueillir les groupes et permettre le déplacement de l'enseignant. |
| Support/matériel nécessaire(s) | Les feuilles élèves (voir pp. 105-108). La feuille « matériel », avec des droites numériques préalablement graduées en demis, tiers, quarts, cinquièmes, sixièmes, huitièmes, dixièmes et douzièmes, à photocopier sur transparent (voir p. 109 - une par groupe). Plusieurs droites graduées où figurent les nombres 0 et 1 séparés de 10 cm. Il peut s'agir de la feuille « matériel » ci-dessous photocopiée sur feuille blanche (une par personne). Plusieurs exemplaires seront peut-être nécessaires pour permettre plusieurs essais. Si nécessaire, une bandelette de 10 cm sur 1 cm qui représenterait l'unité et que l'élève pourrait plier. |
| Témoignages élèves | Lorsqu'ils placent les nombres sur la droite, certains élèves ressentent le besoin de placer les nombres intermédiaires (en identifiant par exemple toutes les graduations). « Avant, j'avais des difficultés à additionner les fractions ; maintenant, j'y arrive mieux. » « Cela m'a plu de faire un travail de groupe pour comprendre la logique de l'autre. » « Ce qui m'a surtout plu, ce sont les soustractions. » « J'aimais bien parce que moi, je faisais les calculs sans passer par les droites et l'autre élève de mon groupe vérifiait les réponses avec les droites et on a eu tout juste. » |
| Témoignages enseignants | « Les élèves qui ont participé à l'activité ont en général "bien joué le jeu". On voit déjà une différence avec ceux qui l'ont vécue. Ils passent plus facilement au même dénominateur pour l'addition et la soustraction. » « Il me paraît important de bien cadrer l'activité au départ, afin que tous les élèves comprennent bien comment utiliser les droites pour additionner des fractions. Le travail de groupes était un plus car il a permis aux élèves de confronter leurs démarches : certains travaillaient directement sur la technique alors que d'autres se basaient sur la manipulation de droites ». |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|---|--|
| <p>1. Réactivation des éléments mis en évidence lors de l'activité « Utiliser des bandes unité pour introduire la fraction nombre ».</p> <p>Les élèves sont placés en duos ou trios.</p> <p>Dans un premier temps, les élèves doivent placer $\frac{3}{2}$, puis par exemple les fractions $\frac{5}{4}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$... sur la droite graduée (dont l'unité correspond à 10 cm).</p> | <p>À la fin de l'activité « Utiliser des bandes unité pour introduire la fraction nombre », des fractions, telles que $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{4}$ et $\frac{17}{8}$ ont été placées sur une droite graduée comportant également les nombres 0, 1, 2 et 3. Si cette activité n'a pas été menée avec les élèves, il importe tout de même, de vérifier que placer des fractions sur une droite graduée ne leur pose pas de problème.</p> <p>Pour être en adéquation avec le matériel proposé ci-dessous, l'unité de cette droite graduée correspond à 10 cm.</p> <p>Si des élèves éprouvent des difficultés, on peut les encourager à utiliser un étalon de 10 cm, plié en deux, quatre ou huit et à le reporter autant de fois que nécessaire pour trouver l'abscisse correspondant à la fraction en question.</p> |
| <p>2. Présentation de l'activité et lecture des consignes (voir document élève)</p> <p>Les élèves vont être amenés à additionner et soustraire des fractions. Dans un premier temps, celles-ci seront de même dénominateur.</p> <p>On demande de trouver, à l'aide de la droite numérique, la réponse au calcul $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$.</p> | <p>L'entrée dans l'activité peut nécessiter une reformulation de la consigne générale.</p> <p>Il s'agit de faire prendre conscience aux élèves que pour « ajouter $\frac{1}{4}$ à $\frac{3}{4}$ », il faut partir de $\frac{3}{4}$ et faire un bond de $\frac{1}{4}$ vers la droite. Cette procédure est valable pour toutes les additions.</p> |

| | |
|---|---|
| |  <p>Si les élèves ont besoin d’approfondir cette procédure d’addition, il est nécessaire de leur proposer d’autres calculs « simples » de manière à ne pas cumuler les difficultés. Par exemple, $\frac{3}{4} + \frac{5}{4}$ ou $\frac{1}{8} + \frac{11}{8}$.</p> |
| <p>3. <u>Calculs impliquant une mise au même dénominateur</u></p> <p>Une fois la procédure d’addition bien établie, on peut proposer des calculs nécessitant des mises au même dénominateur. Les dénominateurs seront d’abord multiples l’un de l’autre puis premiers entre eux avant d’avoir d’autres diviseurs communs.</p> <p>Plusieurs droites graduées (en demis, en tiers, en quarts, en cinquièmes, en sixièmes, en huitièmes, en dixièmes et en douzièmes) sont mises à la disposition des élèves. Pour en faciliter l’utilisation, elles sont imprimées sur un transparent. Elles ne sont pas destinées à représenter l’opération. Elles aident à associer un nombre à la position du résultat de l’addition ou la soustraction. Il faut prévoir d’autres feuilles de travail (voir « Support/matériel nécessaire(s) » ci-dessus).</p> <p>Il faut calculer par exemple $\frac{5}{4} + \frac{1}{2}$. On part de $\frac{5}{4}$ et on ajoute $\frac{1}{2}$. Sur quelle graduation arrive-t-on ?</p> | <p>Cette étape est fondamentale dans cette activité. Il convient de passer près de chaque groupe d’élèves pour leur faire verbaliser leur démarche de réflexion de manière à la valider ou à les amener à la corriger.</p> <p>Afin de trouver la position exacte du résultat de l’addition, il convient de trouver une droite graduée « commune » aux deux fractions $\frac{5}{4}$ et $\frac{1}{2}$.</p> <p>La droite graduée en quarts permet d’y arriver : en effet, $\frac{1}{2}$ est équivalent à $\frac{2}{4}$ puisqu’un morceau qui va deux fois dans l’unité a une longueur équivalente à deux morceaux qui vont chacun 4 fois dans l’unité. La transformation de $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$ peut « se lire » sur la droite graduée.</p> <p>Il faut donc faire émerger la nécessité d’utiliser, dans ce cas-ci, la droite graduée en quarts pour que les deux fractions à additionner soient exprimées à l’aide de la même « graduation ». Autrement dit, les fractions doivent être mises au même dénominateur, pour pouvoir trouver la réponse : $\frac{5}{4} + \frac{2}{4} = \frac{7}{4}$.</p> |

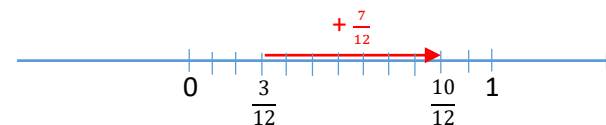
| | |
|---|--|
| <p>4. Exercices Des exercices de consolidation sont alors proposés.</p> | <p>Les procédures de calcul seront mises en évidence après ces quelques exercices de consolidation avec toute la classe. Cette phase d’institutionnalisation s’avère indispensable pour installer les règles et amener les élèves à s’y référer.</p> <p>Certains élèves (ou duos) devront encore réaliser le processus complet, avec l’utilisation de l’outil, pour trouver les réponses aux calculs proposées, d’autres pourront très rapidement s’en passer. Il importe de respecter le rythme de chacun tout en veillant à ce que l’automatisation ne tarde pas trop à s’installer.</p> |
| <p>5. Passage aux soustractions Une fois le procédé d’addition consolidé, on peut passer aux soustractions. De la même manière, on installe d’abord la représentation de l’opération sur la droite numérique, par retrait ou écart (grâce à des calculs tels que $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \dots$ ou $\frac{11}{8} - \frac{9}{8} = \dots$).</p> | |
| <p>6. Calculs impliquant la mise au même dénominateur On passe ensuite à des calculs nécessitant des mises au même dénominateur, en procédant comme pour les additions.</p> <p>Par exemple $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$.</p> <p>On part de $\frac{5}{6}$ et on retire $\frac{1}{4}$. Sur quelle graduation arrive-t-on ?</p> | <p>Ici encore, la nécessité de trouver une droite graduée commune aux sixièmes et aux quarts va permettre de situer avec précision le résultat de l’opération à effectuer.</p> <p>Diviser la plus petite graduation (le sixième) en 2 va permettre d’identifier précisément à la fois la position de $\frac{5}{6}$ et de $\frac{1}{4}$, ce qui permettra en définitive de situer précisément la position du nombre obtenu en retirant $\frac{1}{4}$ à $\frac{5}{6}$.</p> <p>Les deux fractions doivent être mises au même dénominateur pour pouvoir « lire » la réponse sur la droite numérique.</p> |



Une autre manière d'aborder la soustraction est l'écart. Elle permet de maintenir le même raisonnement, même quand les nombres en jeu deviennent négatifs : combien doit-on ajouter à $\frac{1}{4}$ pour obtenir $\frac{5}{6}$?



De la même manière que précédemment, le recours à la droite numérique graduée de manière appropriée permet de faire émerger la réponse et le dénominateur commun, 12.



Présenter les deux manières de raisonner n'est pas indispensable mais peut aider certains élèves à percevoir la cohérence d'un chapitre à l'autre.

7. Exercices

Des exercices de consolidation sont alors proposés.

Ici encore, les procédures de calcul seront mises en évidence après ces quelques exercices de consolidation avec toute la classe.

À nouveau, le recours à l'outil dépendra des élèves (ou des duos).

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) - Haute École de la ville de Liège (HEL)

Document élève

Additionner et soustraire des fractions nombres en utilisant la droite numérique

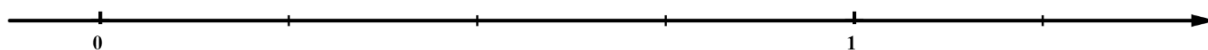
en prolongement de l'activité « Utiliser des bandes unité pour introduire la fraction nombre »

1. Additions

1.1. À l'aide de la droite numérique suivante, calcule

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \dots$$

$$1 + \frac{1}{4} = \dots$$



1.2. Pour chaque calcul,

- identifie sur la feuille annexe la droite numérique qui te permettra de trouver la réponse ;
- transforme le calcul en un autre qui te permettra de trouver plus facilement la réponse.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \dots$

Droite numérique utile :

Calcul transformé :

b) $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \dots$

Droite numérique utile :

Calcul transformé :

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \dots$

d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \dots$

e) $\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \dots$

f) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \dots$

g) $\frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \dots$

Pour additionner deux fractions, il faut

.....

.....

.....

.....

.....

.....

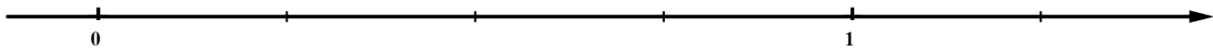
.....

2. Soustractions

2.1. À l'aide de la droite numérique suivante, calcule

$$\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \dots$$

$$1 - \frac{1}{4} = \dots$$



2.2. Pour chaque calcul,

- identifie sur la feuille annexe la droite numérique qui te permettra de trouver la réponse ;

- transforme le calcul en un autre qui te permettra de trouver plus facilement la réponse.

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \dots$

Droite numérique utile :

Calcul transformé :

b) $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \dots$

Droite numérique utile :

Calcul transformé :

c) $\frac{11}{8} - \frac{3}{4} = \dots$

d) $\frac{3}{2} - \frac{2}{4} = \dots$

e) $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \dots$

f) $\frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \dots$

g) $\frac{7}{3} - \frac{3}{4} = \dots$

Pour soustraire deux fractions, il faut

.....

.....

.....

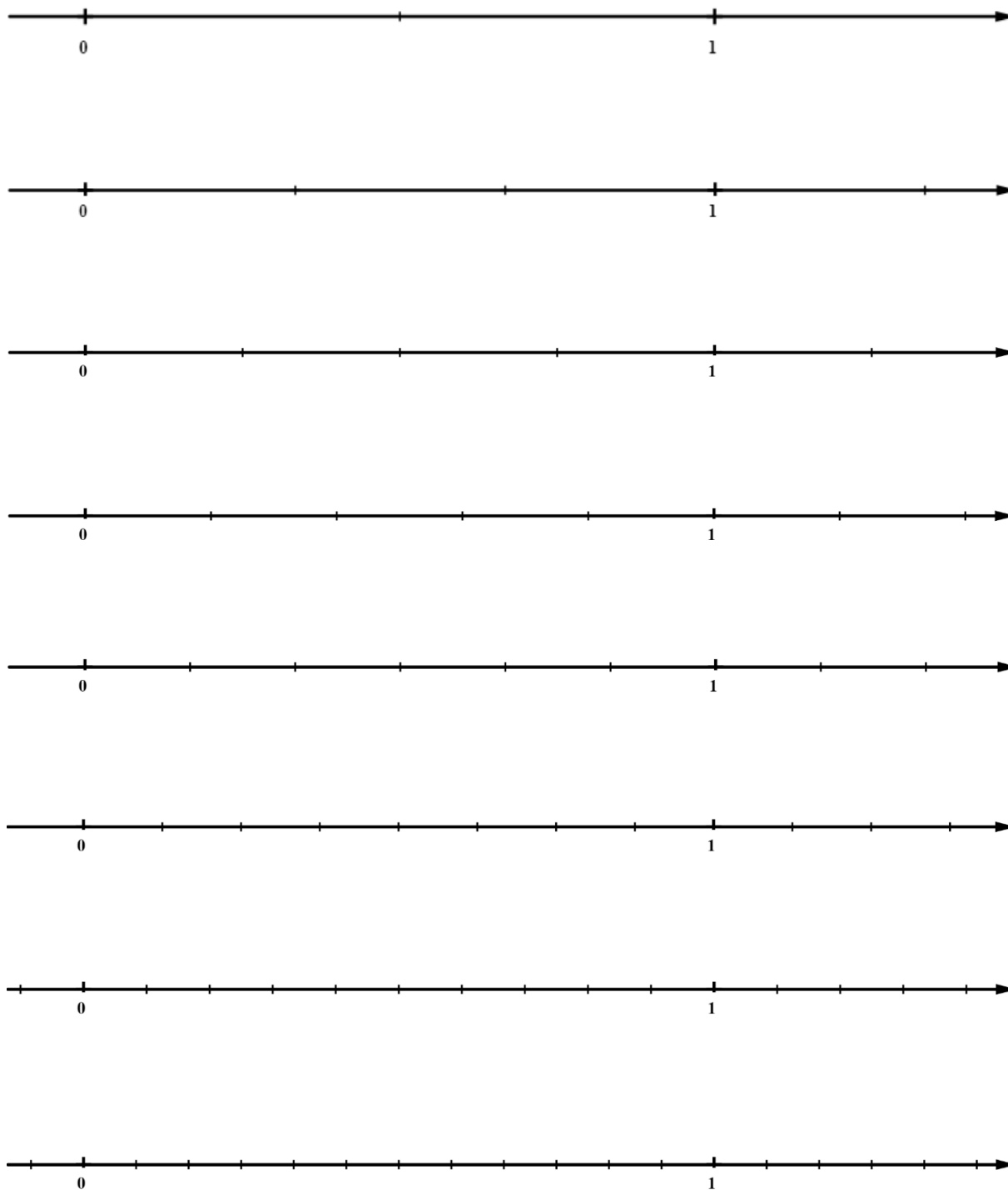
.....

.....

.....

Additions et soustractions de fractions

Matériel pour les élèves (à photocopier sur transparent)



Utiliser la droite numérique pour additionner des entiers relatifs

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à donner du sens aux règles d'addition d'entiers relatifs, en amenant les élèves à générer des additions lors d'un jeu de dés et de trouver la réponse grâce aux déplacements réalisés sur la droite numérique, support utilisé dans bon nombre d'apprentissages, dès l'école primaire. Cette activité est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique.

L'activité se base sur des déplacements sur une droite numérique. Les élèves doivent combiner deux déplacements et y associer un calcul. Les règles d'addition sont ainsi mises en évidence.

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---|--|
| Public-cible | Élèves de 1 ^{re} secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Nombres / Nombres relatifs |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers. • Classer (situer, ordonner) des entiers. |
| Objectif(s) d'apprentissage de l'activité | <ul style="list-style-type: none"> • Elle amène les élèves à donner du sens à l'addition d'entiers relatifs, comme combinaison de deux nombres. • Elle travaille la symbolisation, par des calculs, de combinaisons de deux déplacements. • Elle amène les élèves à comprendre les règles d'addition de nombres entiers relatifs. • Elle permet aux élèves de se forger des images mentales. |
| Outil didactique mis en œuvre | <p>La droite numérique est un support utilisé dans bon nombre d'apprentissages, dès l'école primaire. Dans cette activité, il s'agit pour les élèves de s'appuyer sur cette droite pour trouver la réponse à des additions générées aléatoirement. Envisager l'addition comme une combinaison prend alors sens pour les élèves et ils se constituent ainsi des images mentales sur lesquelles s'appuyer.</p> <p>Lors de la mise en commun, il convient de mettre en évidence les règles de calcul associées à l'addition dans \mathbb{Z}.</p> |

| | |
|---------------------------------|---|
| Pour en savoir plus sur l'outil | La fiche conceptuelle sur le signe « moins » fait la part belle à l'analyse des avantages et inconvénients de l'outil ainsi que sa complémentarité avec un outil de visualisation que sont les tuiles algébriques. |
| Fil didactique | <ul style="list-style-type: none"> • Cette activité est une introduction à la notion d'addition d'entiers relatifs. • L'activité gagne à être suivie d'une activité sur la soustraction d'entiers relatifs basée sur la droite numérique et respectant les mêmes conventions d'utilisation. (voir la fiche outils « Utiliser la droite numérique pour soustraire des entiers relatifs ») • Une activité complémentaire basée sur les tuiles algébriques permettra aux élèves de compléter leur inventaire d'images mentales à convoquer. (voir la fiche outils « Utiliser les tuiles algébriques pour revoir les techniques de calculs dans Z ») |
| Durée/fréquence | L'activité d'introduction se déroule sur une séance de 50 minutes. La droite numérique sera convoquée autant de fois que nécessaire lors des activités ultérieures. |
| Contexte d'expérimentation | Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant les années scolaires 2019-2020 et 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans trois classes de 1 ^{re} année d'une vingtaine d'élèves d'une école de quartile ISE 4 et dans deux classes d'une quinzaine d'élèves d'une école de quartile ISE 1. |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête notamment à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Elle peut également être proposée lorsque les élèves sont répartis en demi-groupe. Les modalités de mise en œuvre de ces dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p. 116).

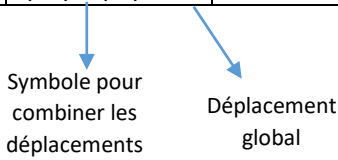
➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|---|
| Différenciation | <p>L'activité fournit un support visuel aux élèves qui peut les aider dans leur raisonnement. Il n'est cependant pas obligatoire de systématiquement l'utiliser par la suite si cela ne s'avère pas nécessaire.</p> <p>Lors de la mise en commun de l'activité, l'explicitation des stratégies des élèves est valorisée pour associer un calcul à la situation.</p> <p>Le soutien fourni aux élèves par l'enseignant a pour but de les amener à approfondir ou corriger leurs démarches spontanées, pour qu'elles prennent progressivement sens pour les élèves.</p> |
| Encadrement renforcé | <p>L'activité a été menée dans des classes de 25 élèves comme dans des classes de 15 élèves. Renforcer l'encadrement permet de repérer plus rapidement les raisonnements erronés des élèves pour les amener à en prendre conscience de manière à les faire évoluer de manière plus personnalisée.</p> |

Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|---|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : travail en petits groupes de 2 élèves. Les tables doivent être disposées pour accueillir des petits groupes et permettre le déplacement de l'enseignant. |
| Support/matériel nécessaire(s) | Chaque duo dispose d'une droite numérique plastifiée (graduée de -15 à 15) et de deux dés : un dé avec les nombres +1 +2 +3 -4 -5 -6 et un dé avec les nombres -1 -2 -3 +4 +5 +6. |
| Témoignages élèves | « On cherche la règle, on ne nous la donne pas comme ça. » « On apprend en faisant des jeux (plutôt qu'être tout le temps sur nos feuilles). » « Avec la droite graduée, c'est beaucoup plus facile. Ça nous permet parfois de nous corriger. » « Ça nous aide à créer un raisonnement nous-mêmes et à nous faire réfléchir par nous-mêmes. » « Grâce au contexte, c'est plus facile de visualiser le calcul. » |
| Témoignages enseignants | « Les élèves apprécient cette activité, ils apprennent en jouant. La droite graduée est une vraie aide pour certains. L'enjeu sera aussi de les aider à s'en passer à l'avenir. » |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé | | | | | | | | | | |
|--|---|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|-------------|-----------------|----|----|----|--------------------|----|
| <p>1. Temps de jeu</p> <p>Chaque duo dispose d'une droite numérique (graduée de -15 à 15) et de deux dés : un dé avec les nombres +1 +2 +3 -4 -5 -6 et un dé avec les nombres -1 -2 -3 +4 +5 +6. Chaque élève prend un crayon comme pion. Il le place sur 0.</p> <p>Règles du jeu : Les déplacements vers la flèche (vers la droite) correspondent nombres positifs. Les déplacements dans le sens contraire (vers la gauche) correspondent à des nombres négatifs.</p> <p>Le plus jeune joueur commence. À son tour, le joueur lance les deux dés et réalise avec son pion la combinaison des déplacements en fonction des nombres indiqués sur les dés.</p> <p>Le jeu dure 10 minutes. À la fin, le gagnant est celui dont le pion est sur le nombre le plus grand.</p> | <p>Au début, certains élèves vont réaliser les déplacements de manière successive : d'abord en fonction du nombre indiqué sur le premier dé, ensuite en fonction du nombre indiqué sur le deuxième dé. D'autres vont trouver la réponse directement.</p> <p>Il est intéressant d'amener petit à petit les duos à anticiper la position d'arrivée du pion, avant de vérifier grâce aux déplacements successifs.</p> <p>De manière à garder trace des déplacements et pour amener les élèves vers les calculs, un tableau à compléter leur est proposé, en introduisant le symbole « + » pour combiner deux déplacements :</p> <table border="1" data-bbox="1070 837 2038 986"> <thead> <tr> <th>Point de départ</th> <th>Nombre indiqué sur le premier dé</th> <th>Nombre indiqué sur le deuxième dé</th> <th>Déplacement</th> <th>Point d'arrivée</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>+3</td> <td>+1</td> <td>-6</td> <td>$(+1) + (-6) = -5$</td> <td>-2</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">  </p> <p>Si le jeu se déroule souvent sans grande difficulté, le passage au calcul est moins évident pour certains élèves. Il peut être utile d'en réaliser un avec eux comme exemple avant de les lancer seuls dans l'écriture des calculs. La plus grande difficulté est de donner sens au « + » comme combinaison des deux déplacements. On peut faire le lien avec d'autres situations de combinaison (ou composition). Par exemple, « Tu as 12 billes, j'en ai 14.</p> | Point de départ | Nombre indiqué sur le premier dé | Nombre indiqué sur le deuxième dé | Déplacement | Point d'arrivée | +3 | +1 | -6 | $(+1) + (-6) = -5$ | -2 |
| Point de départ | Nombre indiqué sur le premier dé | Nombre indiqué sur le deuxième dé | Déplacement | Point d'arrivée | | | | | | | |
| +3 | +1 | -6 | $(+1) + (-6) = -5$ | -2 | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|--|-----------------------------------|-----------------------------------|---|---|-----------------------------------|
| | <p>Combien en aurons-nous si nous les mettons ensemble ? » ou encore « Dans ma classe, il y a 17 filles et 8 garçons. Combien y a-t-il d'élèves ? ».</p> | | | | | | | |
| <p>2. <u>Mise en commun</u></p> <p>Quelques déplacements et calculs sont mis en commun avec toute la classe.</p> | <p>Ce moment d'association est indispensable pour que les élèves se construisent des images mentales utiles pour la suite. Si pour certains, l'association est immédiate et le recours à la droite pratiquement inutile, ce n'est pas le cas pour d'autres. Le temps de recours à l'outil varie en fonction des élèves. Une fois les images mentales ancrées dans l'esprit des élèves, il importe d'accompagner ces élèves dans le désétayage, de les amener à progressivement se passer de l'outil pour automatiser les techniques de calcul et ce, de manière personnalisée.</p> | | | | | | | |
| <p>3. <u>Synthèse</u></p> <p>L'enseignant demande aux élèves de donner des calculs qu'il classe lui-même en plusieurs colonnes au tableau (sans expliquer comment il s'y prend). Les élèves doivent ensuite essayer de donner des titres aux colonnes puis essayer d'exprimer la règle qui permettrait de trouver la réponse aux calculs sans avoir la droite numérique sous les yeux.</p> | <p>L'idée est d'aboutir, par exemple, à un tableau de ce type :</p> <table border="1" data-bbox="1070 699 2033 778"> <tr> <td>Addition de deux nombres positifs</td> <td>Addition de nombres de signes différents</td> <td>Addition de deux nombres négatifs</td> </tr> </table> <p>ou</p> <table border="1" data-bbox="1070 898 2033 1137"> <tr> <td>Addition de deux nombres positifs</td> <td>Addition de nombres de signes différents (le positif ayant la plus grande valeur absolue)</td> <td>Addition de nombres de signes différents (le négatif ayant la plus grande valeur absolue)</td> <td>Addition de deux nombres négatifs</td> </tr> </table> <p>Les règles de calcul peuvent ainsi être facilement dégagées. Les élèves peuvent ensuite inventer des calculs (avec les réponses) à classer dans les différentes colonnes. Les élèves moins à l'aise avec les règles peuvent encore avoir recours à la droite numérique.</p> | Addition de deux nombres positifs | Addition de nombres de signes différents | Addition de deux nombres négatifs | Addition de deux nombres positifs | Addition de nombres de signes différents (le positif ayant la plus grande valeur absolue) | Addition de nombres de signes différents (le négatif ayant la plus grande valeur absolue) | Addition de deux nombres négatifs |
| Addition de deux nombres positifs | Addition de nombres de signes différents | Addition de deux nombres négatifs | | | | | | |
| Addition de deux nombres positifs | Addition de nombres de signes différents (le positif ayant la plus grande valeur absolue) | Addition de nombres de signes différents (le négatif ayant la plus grande valeur absolue) | Addition de deux nombres négatifs | | | | | |

Pistes d'adaptation

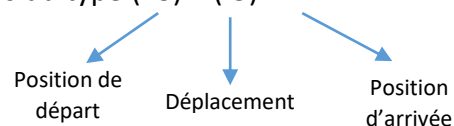
Une autre manière de jouer et de créer des calculs associés n'utilise qu'un seul dé.

La disposition de départ est la même :

- chaque duo dispose d'une droite numérique (graduée de -15 à 15) et de deux dés : un dé avec les nombres +1 +2 +3 -4 -5 -6 et un dé avec les nombres -1 -2 -3 +4 +5 +6 ;
- chaque élève prend un crayon comme pion et le place sur 0 ;
- convention de jeu : les déplacements vers la flèche (vers la droite) correspondent nombres positifs ; les déplacements dans le sens contraire (vers la gauche) correspondent à des nombres négatifs.

À son tour, le joueur choisit un des deux dés, le lance et réalise avec son pion le déplacement indiqué.

Le calcul associé sera alors du type $(+3) + (-5) = -2$.



La différence par rapport à la première version du jeu est que les nombres du calcul ne seront pas tous de la même nature.

Dans notre exemple, +3 et -2 sont des abscisses de points de la droite graduée tandis que -5 correspond au déplacement sur la droite. Le symbole « + » ne représentera donc plus une combinaison de deux éléments mais bien une évolution d'un premier élément vers un deuxième.

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) - Haute École de la ville de Liège (HEL)

Utiliser la droite numérique pour soustraire des entiers relatifs

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à donner du sens aux règles de soustraction d'entiers relatifs, en amenant les élèves à associer un calcul à une situation mettant en jeu des variations de températures et en utilisant la droite numérique, support utilisé dans bon nombre d'apprentissages, dès l'école primaire. Cette activité est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique.

L'activité se base sur des variations de températures entre le matin et le soir. Les élèves doivent représenter les variations sur des droites graduées et associer un calcul à la situation décrite. Les règles de soustraction sont ainsi mises en évidence.

Cette fiche est accompagnée d'un document élève (p. 127).

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---|---|
| Public-cible | Élèves de 1 ^{re} et 2 ^e secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Nombres / Nombres relatifs |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers. • Classer (situer, ordonner) des entiers. |
| Objectif(s) d'apprentissage de l'activité | <ul style="list-style-type: none"> • Elle permet aux élèves de donner du sens au signe « moins », qu'il soit envisagé comme signe unaire (attaché au nombre), binaire (d'opération) ou symétrique. • Elle amène les élèves à donner du sens à la soustraction d'entiers relatifs, comme écart entre les deux nombres. • Elle permet aux élèves de se forger des images mentales. Elle amène les élèves à comprendre la règle « soustraire un nombre entier relatif, c'est additionner son opposé ». |
| Outil didactique mis en œuvre | <p>La droite numérique est un support utilisé dans bon nombre d'apprentissages, dès l'école primaire. L'activité proposée est inspirée d'un exercice de Croc'Math (Leenaers G., Ouanassi J., & Wuyts V. (2018). Croc'Math 1A. Éditions Plantyn).</p> <p>Dans cette activité, il s'agit pour les élèves de trouver la variation de températures entre le matin et le soir pour une ville donnée, de représenter le raisonnement mis en œuvre sur une droite graduée et enfin, d'associer un calcul à la situation.</p> <p>Lors de la mise en commun, il convient de mettre en évidence la règle de calcul associée à la soustraction dans \mathbb{Z} « soustraire un nombre entier relatif, c'est additionner son opposé ».</p> |

| | |
|---------------------------------|--|
| Pour en savoir plus sur l'outil | La fiche conceptuelle sur le signe « moins » fait la part belle à l'analyse des avantages et inconvénients de l'outil ainsi que sa complémentarité avec un outil de visualisation que sont les tuiles algébriques. |
| Fil didactique | <ul style="list-style-type: none"> • Cette activité est une introduction à la notion de soustraction d'entiers relatifs. • L'activité gagne à être précédée d'une activité sur l'addition des entiers relatifs basée sur la droite numérique et respectant les mêmes conventions d'utilisation. (voir la fiche outils « Utiliser la droite numérique pour additionner des entiers relatifs »). • Une activité complémentaire basée sur les tuiles algébriques permettra aux élèves de compléter leur inventaire d'images mentales à convoquer. (voir la fiche outils « Utiliser les tuiles algébriques pour revoir les techniques de calculs dans Z »). |
| Durée/fréquence | L'activité d'introduction se déroule sur une séance de 50 minutes. La droite numérique sera convoquée autant de fois que nécessaire lors des activités ultérieures. |
| Contexte d'expérimentation | Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant les années scolaires 2019-2020 et 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans trois classes de 1 ^{re} année d'une vingtaine d'élèves d'une école de quartile ISE 4 et dans deux classes d'une quinzaine d'élèves d'une école de quartile ISE 1. |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête notamment à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Elle peut également être proposée lorsque les élèves sont répartis en demi-groupe. Les modalités de mise en œuvre de ces dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p. 124).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|---|
| Différenciation | <p>L'activité fournit un support visuel aux élèves qui peut les aider dans leur raisonnement. Il n'est cependant pas obligatoire de systématiquement l'utiliser par la suite si cela ne s'avère pas nécessaire.</p> <p>Lors de la mise en commun de l'activité, l'explicitation des stratégies des élèves est valorisée pour associer un calcul à la situation.</p> <p>Le soutien fourni aux élèves par l'enseignant a pour but de les amener à approfondir ou corriger leurs démarches spontanées, pour qu'elles prennent progressivement sens pour les élèves.</p> |
| Encadrement renforcé | <p>L'activité a été menée dans des classes de 25 élèves comme dans des classes de 15 élèves. Renforcer l'encadrement permet de repérer plus rapidement les raisonnements erronés des élèves pour les amener à en prendre conscience pour les faire évoluer de manière plus personnalisée.</p> |

Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|---|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : travail en petits groupes de 2 élèves. Les tables doivent être disposées pour accueillir des petits groupes et permettre le déplacement de l'enseignant. |
| Support/matériel nécessaire(s) | La feuille de consignes. Si des droites numériques plastifiées ont été élaborées pour la découverte de l'addition d'entiers, elles peuvent être réinvesties ici. Pour la mise en commun, prévoir un agrandissement de la feuille de consignes. |
| Témoignages élèves | « On cherche la règle, on ne nous la donne pas comme ça. » « On apprend en faisant des jeux (plutôt qu'être tout le temps sur nos feuilles). » « Avec la droite graduée, c'est beaucoup plus facile. Ça nous permet parfois de nous corriger. » « Ça nous aide à créer un raisonnement nous-mêmes et à nous faire réfléchir par nous-mêmes. » « Grâce au contexte, c'est plus facile de visualiser le calcul. » |
| Témoignages enseignants | « Il faut accompagner les élèves lors du passage au calcul mais le fait de partir de quelque chose qu'ils connaissent (les températures) les aide à mieux comprendre. » |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|--|---|
| <p>1. Présentation de l'exercice et lecture des consignes (voir document élève) Dans un premier temps, les élèves ne doivent pas trouver les calculs associés : ils se concentrent sur l'identification de la variation de température entre le matin et le soir et la représentation sur la droite numérique.</p> | <p>L'entrée dans l'activité peut nécessiter une reformulation de la consigne générale : il est important que les élèves aient bien compris qu'il ne faut pas répondre à tout, tout de suite.</p> <p>Il est utile d'encourager les élèves à bien représenter la situation sur la droite graduée. Même si, de prime abord, cela leur semble fort simple, le support sera bénéfique lors du passage au calcul.</p> |
| <p>2. Analyse des réponses Les réponses sont vérifiées collectivement à l'aide, notamment, de la droite graduée.</p> | <p>Cette étape ne pose pas souvent problème. Les réponses sont trouvées intuitivement. Une difficulté peut surgir au moment de la représentation sur la droite graduée, surtout si les élèves n'en ont pas eu besoin pour trouver la réponse.</p> |
| <p>3. Analyse des calculs Les élèves sont invités à réfléchir en duos sur le calcul à associer aux deux premières situations. La mise en commun permet à l'enseignant de rectifier les calculs erronés et de mettre sur la voie de la soustraction les duos qui en auraient besoin. Les duos associent alors un calcul aux quatre dernières situations. Les calculs sont vérifiés collectivement.</p> | <p>C'est souvent à ce niveau de la réflexion que les élèves éprouvent des difficultés. Si le premier calcul est souvent facilement trouvé ($(+5)-(+2)=(+3)$ ou $5-2=3$), il n'en est pas de même pour les suivants. Les calculs impliquant des nombres négatifs semblent plus compliqués à appréhender. Il est donc important que l'enseignant encourage les élèves à analyser en profondeur chacune des situations ainsi que leur représentation sur la droite numérique pour trouver le bon calcul, en lien avec ce qu'ils ont trouvé pour la première ville.</p> <p>L'enseignant passe auprès des groupes afin de soutenir les élèves dans leur réflexion. Il est préférable qu'il pose une question simple comme « Expliquez-moi ce que vous avez découvert » afin de permettre aux</p> |







| | <p>élèves de verbaliser leur démarche et à l'enseignant de la comprendre en vue d'aider les élèves à l'approfondir et à faire des liens si nécessaire.</p> <p>Plusieurs calculs peuvent être acceptés pour chacune des situations : la soustraction et l'addition mutilée : $(+2) + ? = +5$ ou $(+5) - (+2) = +3$. Il importe néanmoins que toutes les soustractions soient mises en évidence avant l'étape suivante puisqu'elle va s'appuyer sur ces opérations pour poursuivre la découverte de la règle.</p> | | | | | | | | |
|---|--|--|--|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| <p>4. <u>Dégagement de la règle de soustraction</u> Les 6 soustractions trouvées sont écrites au tableau en deux colonnes. Les élèves doivent trouver le critère de classement (le signe du 2^e terme de la soustraction).</p> <p>Le calcul $(+2) - (-3) = +5$ est alors analysé plus en détails. « Ne peut-on pas transformer ce calcul en une addition dont le 1^{er} terme serait également +2 et la somme serait également +5 ? » - (-3) est remplacé par + (+3).</p> | <p>La découverte du critère ayant permis de séparer les calculs en deux sous-groupes est assez facilement trouvé par les élèves.</p> <table border="1" data-bbox="1234 662 1868 967"> <thead> <tr> <th>Soustractions dont le deuxième terme est positif</th> <th>Soustractions dont le deuxième terme est négatif</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$(+5) - (+2) = +3$</td> <td>$(+2) - (-3) = +5$</td> </tr> <tr> <td>$(+3) - (+4) = -1$</td> <td>$(-2) - (-1) = -1$</td> </tr> <tr> <td>$(-1) - (+1) = -2$</td> <td>$(-2) - (-5) = +3$</td> </tr> </tbody> </table> <p>L'analyse du calcul $(+2) - (-3) = +5$ et sa transformation en un autre qui permette de passer de +2 à +5 avec une autre opération est assez aisée également : $(+2) \dots\dots = +5$. Les élèves trouvent facilement qu'on peut transformer le calcul</p> <p style="text-align: right;">$(+2) - (-3) = +5$</p> <p>en</p> <p style="text-align: right;">$(+2) + (+3) = +5.$</p> <p>Certains ont tout de même besoin de recourir à la droite numérique pour le représenter.</p> | Soustractions dont le deuxième terme est positif | Soustractions dont le deuxième terme est négatif | $(+5) - (+2) = +3$ | $(+2) - (-3) = +5$ | $(+3) - (+4) = -1$ | $(-2) - (-1) = -1$ | $(-1) - (+1) = -2$ | $(-2) - (-5) = +3$ |
| Soustractions dont le deuxième terme est positif | Soustractions dont le deuxième terme est négatif | | | | | | | | |
| $(+5) - (+2) = +3$ | $(+2) - (-3) = +5$ | | | | | | | | |
| $(+3) - (+4) = -1$ | $(-2) - (-1) = -1$ | | | | | | | | |
| $(-1) - (+1) = -2$ | $(-2) - (-5) = +3$ | | | | | | | | |

| | |
|---|---|
| <p>5. <u>Exploitation d'autres calculs</u> Les duos d'élèves analysent les autres calculs pour les traiter de manière analogue et arriver à la conclusion que "soustraire un nombre entier relatif, c'est additionner son opposé".</p> | <p>Pour cette étape, certains élèves pourraient avoir besoin de la droite numérique comme support de réflexion, d'autres pas.</p> <p>La formulation correcte de la règle nécessite un accompagnement de l'enseignant.</p> |
|---|---|

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) - Haute École de la ville de Liège (HEL)

Document Élève – Utiliser la droite numérique pour soustraire des entiers relatifs

Voici les températures de 6 villes belges prises le matin et le soir, aux mêmes heures dans toutes les villes. Pour chacune des villes, calcule la variation de températures entre le matin et le soir (indique l'opération effectuée). Aide-toi de la droite graduée.

| | Température relevée le matin (en °C) | Température relevée le soir (en °C) | Variation de température (en °C) entre le matin et le soir | | |
|-----------|--------------------------------------|-------------------------------------|--|--|--------|
| | | | Réponse | | Calcul |
| Liège | +2 | +5 | |  | |
| Tournai | -3 | +2 | |  | |
| Ostende | -1 | -2 | |  | |
| Mons | -5 | -2 | |  | |
| Bruxelles | +4 | +3 | |  | |
| Bastogne | +1 | -1 | |  | |

Utiliser les tuiles algébriques pour revoir les techniques de calculs dans Z

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à construire une image mentale des opérations élémentaires dans Z (addition, soustraction et multiplication). Cette activité est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique.

L'activité consiste à amener les élèves à utiliser du matériel de manipulation (les tuiles algébriques) pour visualiser les opérations dans Z . Elle est accompagnée d'un document élève (pp.139-140) ainsi qu'une grille pour construire la version « papier » des tuiles algébriques (p. 141).

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---|---|
| Public-cible | Élèves 1 ^{re} secondaire ou de 2 ^e secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Algèbre / Nombres |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Classer (situer, ordonner, comparer) des entiers • Effectuer des additions et des soustractions avec des entiers dans des situations variées. |
| Objectif(s) d'apprentissage de l'activité | <ul style="list-style-type: none"> • Donner du sens au signe moins dans les opérations arithmétiques en tant que signe attaché au nombre, signe d'opération et signe indiquant l'opposé du nombre qui le suit. • Visualiser les opérations d'addition et de soustraction dans Z. |
| Outil didactique mis en œuvre | Les tuiles algébriques permettent de représenter des nombres entiers à l'aide de carrés de deux couleurs (une couleur pour les entiers positifs et une couleur pour les entiers négatifs). Les élèves représentent des nombres entiers et apprennent à réaliser les opérations arithmétiques de base (addition, soustraction et multiplication) au départ de la manipulation de ces tuiles algébriques. |
| Pour en savoir plus sur le l'outil | <p>Support ayant servi à la création de l'outil :</p> <p style="text-align: center;">http://www.learnalberta.ca/content/mf7/html/representationdesentiers.html</p> <p>Pour la version gratuite des tuiles algébriques téléchargeable sur tablettes, il suffit d'encoder sur un moteur de recherche « algebra tiles by mathies » ou d'y accéder via le lien suivant :</p> <p style="text-align: center;">https://support.mathies.ca/en/mainSpace/AlgebraTiles.php</p> <p>La fiche conceptuelle sur le signe « moins » fait la part belle à l'analyse des avantages et inconvénients de l'outil ainsi que sa complémentarité avec une exploitation de la droite numérique.</p> |

| | |
|----------------------------|--|
| Fil didactique | Cette activité peut être proposée en introduction ou en révision des notions liées aux opérations dans Z. L'activité gagne à être complétée par d'autres activités exploitant le support « droite numérique », afin de garantir une bonne compréhension des nombres entiers et du sens des opérations. |
| Durée/fréquence | La familiarisation avec l'outil se réalise sur une période de 50 minutes. Il est intéressant de l'utiliser pour visualiser chaque nouvelle opération rencontrée dans Z. |
| Contexte d'expérimentation | Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant l'année scolaire 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans trois classes de 1 ^{re} secondaire, issues de trois écoles différentes. La première classe comportait 18 élèves et appartenait à une école située dans le 1 ^{er} quartile ISE. Les tuiles ont été exploitées sur tablette (une tablette par groupe de 2 élèves). La deuxième classe comportait 12 élèves et appartenait à une école située dans le 2 ^e quartile ISE et la dernière classe réunissait 28 élèves d'une école située dans le 4 ^e quartile ISE. Les deux dernières écoles ont utilisé la version « papier » des tuiles. Cette fiche décrit l'activité réalisée dans la première école. |




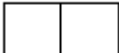





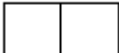





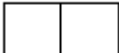




Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Les modalités de mise en œuvre de ces deux dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p.135).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|---|
| Différenciation | Les tuiles algébriques peuvent être adaptées au niveau des élèves : les exercices proposés peuvent être personnalisés en fonction des besoins de chacun. De plus, elles peuvent aussi bien être utilisées pour introduire une technique qu'en séance de remédiation, pour amener les élèves à visualiser les règles à appliquer. |
| Encadrement renforcé | Les essais de cette activité dans les classes ont été réalisés lors de séances de coenseignement (gestion de l'activité par deux enseignants). |

Préparation matérielle de l'activité

| Aménagements particuliers du local | Aucun aménagement particulier n'est requis. | | | | |
|--|---|----------------|----------------|--|---|
| Support/matériel nécessaire(s) | <p>Les tuiles algébriques sont des carreaux à double face : la face blanche représente les nombres entiers négatifs et la face rouge représente les nombres entiers positifs⁵.</p> <p style="text-align: center;">  Blanc (-)  Rouge (+) </p> <p>Pour réaliser la version « papier » des tuiles (voir p. 141) :</p> <ul style="list-style-type: none"> Découper les tuiles, certaines sont présentées seules, d'autres groupées par 2 et par 5 : <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;"><i>Recto :</i></th> <th style="text-align: center;"><i>Verso :</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">    </td> <td style="text-align: center;">    </td> </tr> </tbody> </table> <p>Pour utiliser la version électronique des tuiles, on peut télécharger l'application en cliquant sur le lien ci-dessous :</p> <p style="text-align: center;">https://support.mathies.ca/en/mainSpace/AlgebraTiles.php</p> <p>Un document de consignes par élève (voir pp.139-140).</p> | <i>Recto :</i> | <i>Verso :</i> |    |    |
| <i>Recto :</i> | <i>Verso :</i> | | | | |
|    |    | | | | |

⁵ Remarque : Le choix des couleurs des tuiles (rouge pour les positifs et blanc pour les négatifs) n'a pas d'importance. L'objectif est que les élèves parviennent aisément à distinguer les quantités positives et négatives

| | |
|-------------------------|--|
| Témoignages élèves | <p>« J'ai trouvé ça chouette d'utiliser la tablette pour faire des calculs. »</p> <p>« Moi j'aimais bien car on a vraiment pu trouver tout seul des règles mathématiques. »</p> <p>« Au début, c'était vraiment facile d'utiliser les tuiles mais pour faire les moins, j'ai eu plus de mal. »</p> |
| Témoignages enseignants | <p>« J'ai directement introduit les techniques avec les tuiles et j'ai laissé les élèves travailler avec celles-ci durant une leçon. Les résultats du test final ont été très concluants : les élèves ont réellement intégré ces règles. »</p> <p>« J'aimais particulièrement bien le travail pour l'addition et la soustraction, mais après il faut apprendre aux élèves à se détacher des tuiles, pour pouvoir faire les calculs sans aide. »</p> <p>« J'ai intégré l'utilisation des tuiles dans des séances de remédiations, en faisant des liens avec les bons points et les mauvais points. Les élèves ont vraiment vite compris comment utiliser ce support visuel pour les différentes opérations. »</p> |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|--|--|
| <p>1. Familiarisation avec les tuiles algébriques</p> <p>Après une explication rapide de ce que sont les tuiles algébriques, les élèves construisent une série de nombres proposés par l'enseignant en utilisant une seule couleur de carreaux (Ex : +3 est désigné par trois carreaux rouges).</p> <p>Les élèves situent ensuite ces nombres sur une droite graduée, afin de visualiser la relation d'ordre dans Z.</p> <p>L'enseignant introduit alors la notion d'opposé : -1 et 1 sont des nombres opposés, ils sont de part et d'autre de 0 sur la droite des nombres, exactement à la même distance. Quand on additionne des opposés, la réponse est toujours 0.</p> <p>Cette première familiarisation amène les élèves à représenter un même nombre (par exemple « +3 ») de 4 façons différentes : il est alors nécessaire de penser à utiliser des tuiles de deux couleurs différentes.</p> <p>On en déduit alors qu'ajouter un même nombre de tuiles rouges et blanches à un nombre ne modifie pas sa valeur. Cette propriété sera très utile pour la suite (lorsque les élèves aborderont la soustraction dans Z).</p> <p>$(+3) + (+5) + (-5) = (+3) + (+2) + (-2) = (+3) + (+4) + (-4) = 3$</p> | <p>Il peut être utile de faire des liens entre les tuiles et les bons/mauvais points : une tuile algébrique rouge correspond à un bon point et peut se symboliser mathématiquement par le nombre +1.</p> <p>On peut aisément concrétiser la notion d'opposé dans des contextes : la règle d'addition de nombres opposés est en effet acquise très intuitivement lorsqu'elle est présentée en contexte.</p> <p>Par exemple :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tu reçois 5 bons points et puis tu reçois 5 mauvais points. Finalement, combien de points as-tu, sachant qu'un bon point et un mauvais point se neutralisent. ? <p>Accompagner la règle liée à l'addition des opposés par la manipulation de tuiles peut également aider les élèves à construire une image mentale de la règle : associer un même nombre de tuiles de deux couleurs différentes revient « à ne rien faire ».</p> |

2. Découverte de l'addition

L'enseignant propose aux élèves de représenter des additions à l'aide de tuiles, en procédant en 3 étapes :

1) Les nombres à additionner sont positifs

$$\text{Ex : } (+3) + (+5) =$$

⇒ 3 tuiles rouges et 5 tuiles rouges donnent 8 tuiles rouges

$$\Rightarrow (+3) + (+5) = (+8)$$

2) Les nombres à additionner sont négatifs

$$\text{Ex : } (-3) + (-5) =$$

⇒ 3 tuiles blanches et 5 tuiles blanches donnent 8 tuiles blanches.

$$\Rightarrow (-3) + (-5) = (-8)$$

3) Les nombres à additionner sont de signes différents

$$\text{Ex : } (+3) + (-5) =$$

⇒ Pour additionner 3 tuiles rouges et 5 tuiles blanches, il faut faire intervenir la règle des opposés.

Trois tuiles de chaque couleur vont se neutraliser donc 3 tuiles rouges et 5 tuiles blanches donneront 2 tuiles blanches.

$$\Rightarrow (+3) + (-5) = -2$$

La progression dans le questionnement (d'abord des tuiles uniquement positives puis des tuiles uniquement négatives et enfin des tuiles de deux couleurs) est particulièrement importante pour les élèves faibles : elle permet d'étendre progressivement les règles d'addition valables dans \mathbb{N} : finalement, quand on ajoute des nombres de même « nature » (positive ou négative), on obtient des nombres de même nature.

Le passage à des nombres de signes différents est une étape importante car les élèves peuvent réellement visualiser le fait que dans ce cas, il faudra soustraire les valeurs absolues, car certaines tuiles vont disparaître (puisqu'elles se neutralisent) Donc, dans \mathbb{Z} , additionner passe parfois par une soustraction de valeurs absolue.

Il est important de lier la règle à la manipulation des tuiles : quand les nombres à additionner sont de même signe, c'est logique que la réponse

| | |
|--|--|
| <p>Une fois ces premiers exemples réalisés, les élèves effectuent des additions variées (voir quelques exemples p. 137).</p> <p>Les élèves cherchent ensuite à exprimer la manière d'additionner des nombres dans Z ; ce qui conduit à la formalisation de la règle d'addition dans Z.</p> | <p>soit du même signe, puisqu'il n'y a que des tuiles d'une seule couleur. En revanche, quand les nombres à additionner sont de signe contraire, le signe de la réponse sera celui du plus grand nombre en valeur absolue (car c'est la couleur qui est la plus présente au départ) et il faut bien faire une soustraction puisqu'il y a des tuiles qui vont disparaître en se neutralisant.</p> |
| <p>3. <u>Découverte de la soustraction</u></p> <p>L'enseignant cherche d'abord à étendre dans Z les règles valables pour les naturels avant de faire raisonner les élèves sur les cas moins intuitifs.</p> <p>1) Extension dans Z des règles valables pour les naturels</p> <p>Exemple 1 : $+5 - (+3) = +2$</p> <p>On a 5 tuiles rouges et on en retire 3, donc il en reste 2.</p> <p>Exemple 2 : $(-5) - (-3) = (-2)$</p> <p>On a 5 tuiles blanches et on retire 3 tuiles blanches, donc il reste 2 tuiles blanches.</p> <p>2) Cas moins intuitifs</p> <p>Exemple $(+3) - (-5) =$</p> | <p>Cette progression dans la difficulté des exercices traités permet aux élèves de redécouvrir les règles et d'apprendre à généraliser des démarches, en s'assurant qu'elles fonctionnent dans des situations variées. Ils peuvent ainsi s'appuyer sur ce qu'ils connaissent (soustraction dans N), avant de constater que cette démarche est assez vite limitée lorsqu'on l'utilise dans Z, puisque finalement il faut impérativement que le nombre à soustraire soit plus petit en valeur absolue et de même signe que le nombre de départ.</p> <p>En abordant directement un cas a priori complexe (les nombres à retirer sont de signes contraires), on permet aux élèves de construire la règle qui fonctionnera dans toutes les situations. Lors des essais réalisés dans les classes, les élèves ont assez naturellement pensé à l'idée d'exprimer le 1^{er} terme à l'aide de tuiles de 2 couleurs pour s'assurer que l'on pourra bien retirer le 2^e terme.</p> <p>Par la suite, on peut proposer d'autres exemples, et permettre aux élèves d'envisager différentes démarches.</p> |

On a 3 tuiles rouges et on doit retirer 5 tuiles blanches. Ce n'est pas possible de retirer des tuiles blanches, alors qu'on n'a que des tuiles rouges. Toutefois, à l'étape 1 (familiarisation avec les tuiles algébriques), on a appris à exprimer un nombre avec des tuiles de deux couleurs différentes. Il suffit d'appliquer cette technique ici, en s'assurant d'exprimer +3 à l'aide de tuiles rouges et de 5 tuiles blanches, comme ça, ce sera facile de les retirer après.

$$(+3) - (-5) = (+3) + (+5) + (-5) - (-5) = (+3) + (+5) = (+8)$$

Cette méthode permet de visualiser pourquoi, quand on doit retirer un nombre, il suffit d'ajouter son opposé.

Les élèves effectuent ensuite des opérations variées de soustraction (voir page 138) et écrivent la règle avec leurs mots. Ils découvrent ainsi que finalement toutes les soustractions peuvent être remplacées par des additions d'opposés du terme à soustraire.

4. Exercices variés

Ces exercices permettent de rencontrer les deux règles (additions et soustractions) et de travailler sur des plus grands nombres : cela les amènera à se détacher du travail de dénombrement direct avec les tuiles.

Par exemple, face au calcul suivant :

$$(+3) - (+5) = ?$$

- Les élèves peuvent constater qu'il sera impossible de retirer 5 tuiles rouges, puisqu'il n'y en a que 3 à disposition. On peut donc exprimer d'une autre façon le terme 3 en ajoutant lui ajoutant 2 tuiles rouges et 2 tuiles blanches. Il sera alors possible de retirer 5 tuiles rouges et il restera donc 2 tuiles blanches.

$$(+3) - (+5) = (+3) + (+2) + (-2) - (+5) = -2$$

- Une autre façon de faire est de ne pas tenir compte du 1^e terme de l'addition, et d'ajouter directement 5 tuiles rouges et 5 tuiles blanche aux 3 tuiles rouges déjà là au départ. On retire ensuite les 5 tuiles rouges. Il reste alors 3 tuiles rouges et 5 tuiles blanches. On peut alors réduire ce calcul, puisque 3 tuiles rouges et 3 tuiles blanches se neutralise

$$(+3) - (+5) = (+3) + (-5) + (+5) - (+5) = (+3) + (-5) = -2$$

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) – Haute École de la ville de Liège (HEL)

Document Élève – Utiliser les tuiles algébriques pour revoir les techniques de calculs dans Z

1) Valeur zéro

Les carreaux rouges représentent des valeurs positives et les carreaux blancs, des valeurs négatives.



Blanc (-)



Rouge (+)

$$(+2) \text{ et } (-2) = 0$$

$$(+3) \text{ et } (-3) = \underline{\quad}$$

$$(-5) \text{ et } (\quad) = 0$$

$$(\quad) \text{ et } (+4) = 0$$

2) Addition d'entiers relatifs



Blanc (-)



Rouge (+)

$$(+3) + (+2) = \underline{\quad}$$

$$(+5) + (-2) = \underline{\quad}$$

$$(-3) + (+7) = \underline{\quad}$$

$$(-5) + (-2) = \underline{\quad}$$

Explique comment tu réfléchis pour faire tous ces calculs.

3) Soustraction d'entiers relatifs



Blanc (-)



Rouge (+)

$$(+2) - (+3) = \underline{\quad}$$

$$(+2) - (-2) = \underline{\quad}$$

$$(-1) - (+3) = \underline{\quad}$$

$$(-1) - (-3) = \underline{\quad}$$

$$(-3) - (-2) = \underline{\quad}$$

Explique comment tu réfléchis pour faire tous ces calculs.

4) Exercices variés d'addition et soustraction d'entiers relatifs

$$6 + (-4) - (-7) = \dots\dots\dots$$

$$-7 - (+7) + (-10) = \dots\dots\dots$$

$$1 + (-5) + (-6) - 7 = \dots\dots\dots$$

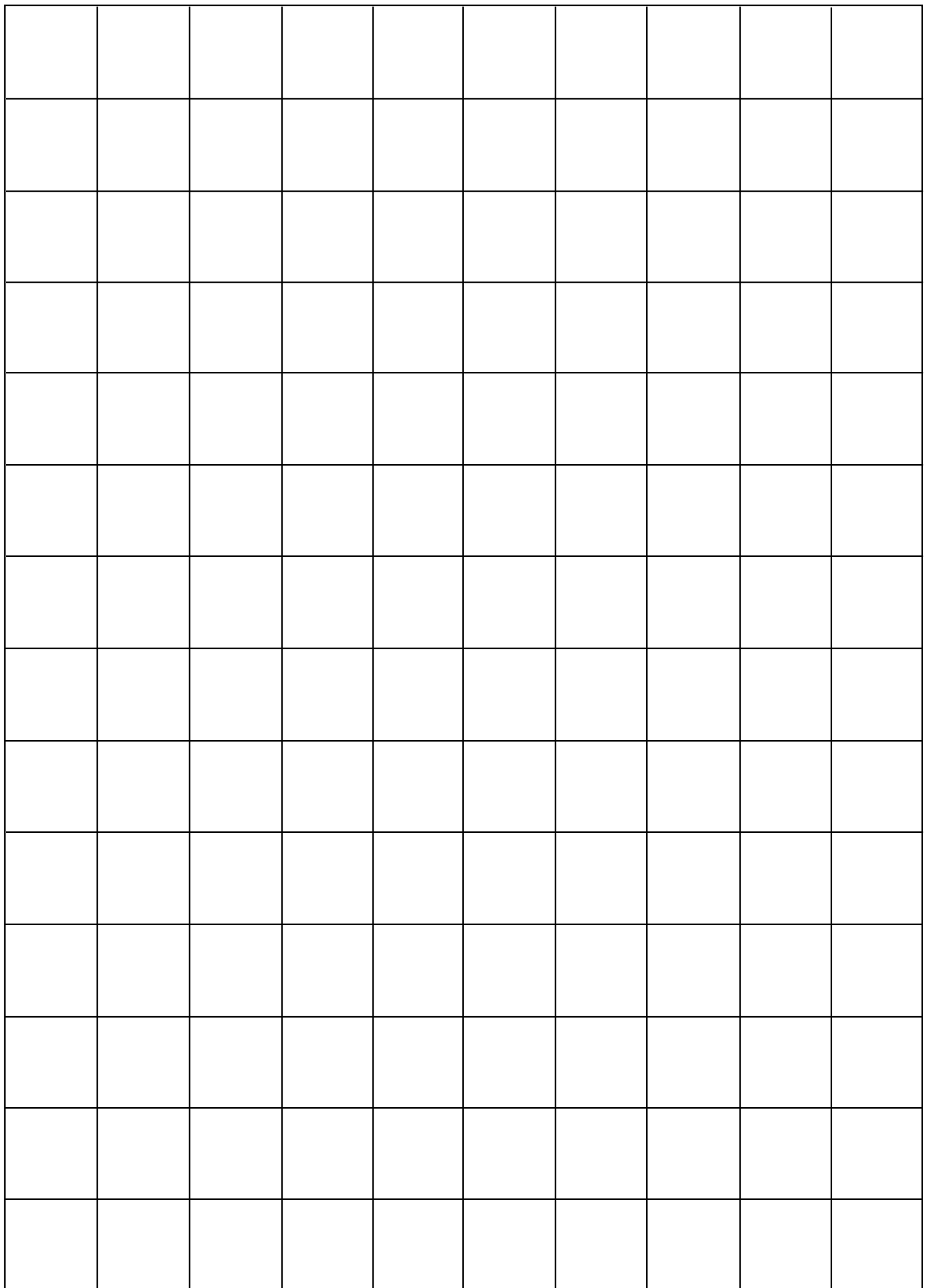
$$9 - (-5) + (-4) - (+6) = \dots\dots\dots$$

$$(-4) + (-6) - (-9) = \dots\dots\dots$$

$$-7 - (-8) + (-3) - (+6) = \dots\dots\dots$$

$$13 + (-7) - (-5) + 7 - 13 + (-5) = \dots\dots\dots$$

-



Jongler avec le signe moins pour mieux le comprendre et l'utiliser, même en algèbre

Cette fiche décrit la mise en œuvre d'une activité visant à envisager la polysémie du signe moins, afin d'éviter des ruptures de sens du côté des élèves, potentielles sources de difficultés, tant dans le domaine des nombres entiers relatifs que dans le domaine algébrique. Cette activité est décrite dans une perspective de différenciation pédagogique.

Au départ de cartes sur lesquelles sont indiqués des nombres entiers ou des monômes, les élèves doivent réaliser des calculs ou polynômes, en n'ajoutant que des « + » ou un signe d'égalité. La mise en perspective de calculs ou polynômes équivalents mène à la distinction des différents sens du signe « moins » et à la compréhension du passage de l'un à l'autre, ce qui facilitera notamment la manipulation d'expressions algébriques avec parenthèses.

DESCRIPTION GÉNÉRALE

| | |
|---|---|
| Public-cible | Élèves de 1 ^{re} ou 2 ^e secondaire |
| Domaine d'apprentissage | Mathématiques / Algèbre / Nombres/ Entiers relatifs |
| Apprentissage visé par l'outil | <ul style="list-style-type: none"> • Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers. • Utiliser des propriétés des opérations pour justifier une méthode de calcul. • Utiliser l'égalité en terme d'équivalence. |
| Objectif(s) d'apprentissage de l'activité | <ul style="list-style-type: none"> • Elle amène les élèves à percevoir la polysémie du signe « moins ». • Elle permet d'envisager, au travers d'expressions équivalentes, les différents sens du signe « moins » et de percevoir les principes qui sous-tendent le passage d'une expression à une autre. • Elle permet d'envisager l'égalité comme une équivalence. |
| Outil didactique mis en œuvre | <p>Cette activité est inspirée des travaux de Vlassis (2010).</p> <p>Les élèves, en duo, reçoivent deux cartes sur lesquelles sont indiqués des entiers dont au moins un est négatif.</p> <p>Ils doivent réaliser, avec ces deux cartes et éventuellement des signes « + » et « = » trois calculs possibles et en trouver les réponses.</p> <p>D'étape en étape, les cartes distribuées évoluent : des nombres entiers puis des monômes.</p> <p>Lors de chaque étape, les élèves doivent</p> <ul style="list-style-type: none"> • repérer les calculs ou expressions équivalent(e)s, • repérer, pour chacun d'eux et chacune d'elles, les signes « moins » unaires (attachés au nombre ou au monôme) et les signes « moins » binaires (représentant la soustraction), • justifier l'équivalence des expressions, |

| | |
|------------------------------------|---|
| | <ul style="list-style-type: none"> • se rendre compte que ces équivalences reposent sur deux règles uniquement : la commutativité de l'addition et la règle « soustraire un nombre (ou une expression algébrique), c'est additionner son opposé ». |
| Pour en savoir plus sur le l'outil | Vlassis, J. (2010). Sens et symboles en mathématiques : Étude de l'utilisation du signe "moins" dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue. Berne: Peter Lang. La fiche conceptuelle consacrée au sens du signe moins. |
| Fil didactique | Cette activité prend place à la suite des chapitres sur les entiers relatifs et sur l'introduction à l'algèbre. |
| Durée/fréquence | Cette activité de découverte se déroule sur minimum trois périodes de 50 minutes (une séance pour chaque étape). Ces séances ne doivent pas être trop éloignées dans le temps mais ne doivent pas nécessairement être consécutives. Il peut, en outre, être nécessaire de consacrer un temps supplémentaire à l'exercitation. |
| Contexte d'expérimentation | Cette activité a été expérimentée en Fédération Wallonie-Bruxelles durant l'année scolaire 2020-2021 dans le cadre de l'expérience pilote. Cette activité a été testée dans trois classes d'environ 25 élèves de 1 ^{re} année d'une école (quartile ISE 4), uniquement avec des nombres et dans une version utilisant l'outil numérique. |

Différenciation

Cette fiche outil décrit une activité d'apprentissage menée dans une perspective de différenciation pédagogique. Cette activité se prête notamment à la mise en œuvre d'un encadrement renforcé par le biais du coenseignement. Elle peut également être proposée lorsque les élèves sont répartis en demi-groupe. Les modalités de mise en œuvre de ces dimensions, décrites dans cette partie, font également l'objet d'un focus spécifique au sein du déroulement de l'activité (p. 148).

➤ FICHE INFO 2 : *La différenciation pédagogique*

| | |
|----------------------|--|
| Différenciation | <p>Dans cette activité, l'explicitation des stratégies des élèves est valorisée. Plus qu'une technique, c'est l'apprentissage de la compréhension fine d'un concept qui est ici visé. Il est donc indispensable d'amener les élèves à s'exprimer, à expliquer ce qu'ils perçoivent pour les aider à accéder à un niveau de compréhension supérieur.</p> <p>Le soutien fourni aux élèves par l'enseignant a pour but de les amener à approfondir ou corriger leurs démarches spontanées, pour qu'elles prennent progressivement sens. Le fait de donner des explications aux différents duos ou groupes d'élèves permet de se centrer sur les difficultés de chacun.</p> |
| Encadrement renforcé | <p>L'activité peut être menée en groupe-classe en coenseignement. Renforcer l'encadrement permet de repérer plus rapidement les raisonnements erronés des élèves pour les amener à en prendre conscience de manière à les faire évoluer de façon plus personnalisée.</p> |

Préparation matérielle de l'activité

| | |
|------------------------------------|---|
| Aménagements particuliers du local | Configuration de la classe : alternance de moments de travail en grand groupe et en petits groupes de 2 ou 3 élèves. Les tables doivent être disposées pour accueillir des petits groupes et permettre le déplacement de l'enseignant. |
| Support/matériel nécessaire(s) | Des cartes sur lesquelles sont indiqués des entiers relatifs ou des monômes. |
| Témoignages élèves | « On peut transformer les calculs. Il y a plusieurs manières d'écrire un calcul. » « Il y a plusieurs possibilités pour calculer une opération. » « Les moins, on peut les transformer en +. » « Quand il y a l'opposé, on doit juste transformer le nombre qui est derrière, et pas tout le calcul. » |
| Témoignages enseignants | « Cette activité est vraiment nécessaire pour les élèves. Elle permet d'explicitier des changements de sens du signe « moins » habituellement implicites et pas évidents pour eux. Cette prise de conscience facilite la compréhension du signe « moins » en algèbre. » |

Déroulement de l'activité

| ÉTAPES | Focus sur la différenciation et l'accompagnement personnalisé |
|---|--|
| <p>1. Distribution de deux cartes par duo. Deux nombres entiers (dont au moins un est négatif) sont inscrits sur ces cartes. Par exemple : 3 et -5 ou -3 et -4 ou +5 et -6</p> <p>Consigne : Avec ces deux cartes et éventuellement des signes « + » et « = », réalisez trois calculs possibles et trouvez-en les réponses.</p> | <p>La représentation de ces calculs sur la droite numérique ou l'utilisation de tuiles algébriques permet de (re)donner du sens aux opérations et de se rendre compte que tous les calculs construits à l'aide de deux mêmes nombres aboutissent au même résultat.</p> <p>On pourrait inviter les élèves à repasser en rouge tous les signes d'opération (binaires) et en bleu tous les signes attachés aux nombres (unaires).</p> <p>Pour les calculs associés aux deux premiers nombres, on pourrait alors avoir $\boxed{-5} + \boxed{3} =$ $\boxed{3} \boxed{-5} =$ et $\boxed{3} + \boxed{-5} =$</p> <p>Ou $\boxed{-5} + \boxed{3} =$ $\boxed{3} \boxed{-5} =$ et $\boxed{3} + \boxed{-5} =$</p> <p>Pour le deuxième calcul ($\boxed{3} \boxed{-5} =$), certains élèves pourraient voir le « moins » comme un signe d'opération, là où d'autres pourraient le voir unaire, attaché à 5, en imaginant alors la présence d'un + binaire entre les deux cartes, pour les combiner (revenant ainsi au 3^e calcul).</p> <p>Ces deux visions du signe « moins » sont correctes toutes les deux et mènent à la même réponse. La vision unaire du signe « moins » permet sans doute de mieux comprendre pourquoi le calcul $3 - 5$ est équivalent à $-5 + 3$, l'<u>addition</u> étant commutative.</p> <p>Le fait de voir les signes comme étant unaires, attachés aux nombres, avec des « + » binaires sous-entendus entre les cartes facilitera la manipulation de calculs avec plus de termes ainsi que la réduction de polynômes (voir étapes suivantes).</p> <p>En analysant les calculs, il est important de faire remarquer aux élèves</p> |

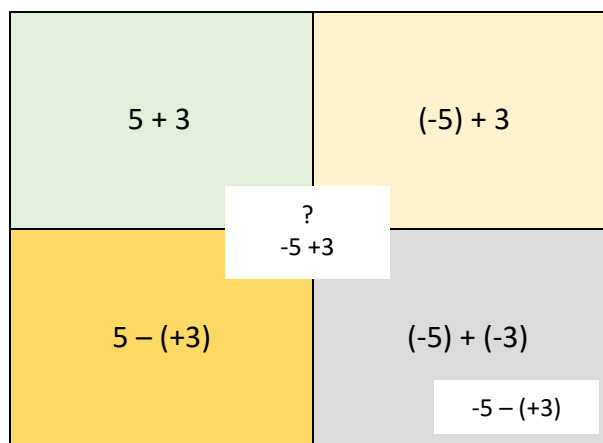
| | |
|---|--|
| | <ul style="list-style-type: none"> - que le lien entre certains calculs repose sur la règle « soustraire un nombre revient à additionner son opposé » (comme entre « $3 - 5$ » et « $3 + (-5)$ »), - que le lien entre d'autres calculs repose sur la commutativité de l'addition vue comme une combinaison (comme entre « $-5 + 3$ » et « $3 + (-5)$ »). <p>Plusieurs paires de nombres peuvent être données à chaque duo pour que ces écritures équivalentes prennent sens grâce aux justifications.</p> |
| <p>2. Distribution de trois puis quatre cartes par duo sur lesquelles sont indiqués des nombres. Consigne : Avec ces trois ou quatre cartes et éventuellement des signes « + » et « = », réalisez trois calculs possibles et trouvez-en les réponses. Justifiez.</p> | <p>Pour certains élèves, il peut être intéressant d'indiquer les « + » entre chacune des cartes de manière à justifier les déplacements des nombres « avec leur signe » grâce à la propriété de commutativité de l'addition.</p> |
| <p>3. Distribution de plusieurs cartes par duo sur lesquelles sont indiqués des nombres ou des monômes (avec des parties littérales identiques). Consigne : Avec ces cartes et éventuellement des signes « + » et « = », réalisez plusieurs polynômes et réduisez-les, en justifiant.</p> | <p>Les tuiles algébriques peuvent être utilisées pour visualiser les termes en présence et aider à trouver les expressions réduites.</p> <p>Exemple :</p> <p>$\boxed{2}$ \boxed{a} $\boxed{-3a}$ $\boxed{-5}$</p> <p>Certains pourraient écrire $2+a-3a-5$ tandis que d'autres pourraient écrire $2+a+(-3a)+(-5)$ ou encore, par exemple, $2-5+a-3a$. À nouveau, les justifications de l'équivalence de plusieurs écritures reposeront soit sur la règle « soustraire une expression algébrique, c'est additionner son opposé », soit sur la commutativité de l'addition.</p> |

| | |
|--|--|
| <p>4. Distribution de plusieurs cartes par duo sur lesquelles sont indiqués des nombres ou des monômes (avec des parties littérales identiques ou différentes).</p> <p>Consigne :</p> <p>Avec ces cartes et éventuellement des signes « + » et « = », réalisez plusieurs polynômes et réduisez-les, en justifiant.</p> <p>Exemple :</p> $\boxed{2} \quad \boxed{b} \quad \boxed{-3a} \quad \boxed{-5} \quad \boxed{2b} \quad \boxed{-a}$ | |
| <p>5. Un prolongement possible : en présence d'expressions algébriques nécessitant d'utiliser la distributivité, il peut être intéressant de faire référence à ce type d'activité.</p> | <p>Par exemple, pour réduire $-2 \cdot (3 - a)$, on peut imaginer que -2, 3 et -a soient sur des cartes différentes, les deux dernières étant séparées par un + (qu'on pourrait éventuellement écrire)</p> $\boxed{-2} \cdot (\boxed{3} + \boxed{-a})$ <p>$\boxed{-2}$ multiplierait alors la carte $\boxed{3}$ puis la carte $\boxed{-a}$, avec le + opératoire qui subsisterait</p> $\boxed{-2} \cdot \boxed{3} + \boxed{-2} \cdot \boxed{-a}$ <p>Par extension, pour réduire $2a - 2 \cdot (3 - a)$, on aurait alors</p> $\boxed{2a} + \boxed{-2} \cdot (\boxed{3} + \boxed{-a}) \text{ puis } \boxed{2a} + \boxed{-2} \cdot \boxed{3} + \boxed{-2} \cdot \boxed{-a}$ <p>en justifiant de la même manière que précédemment (« soustraire une expression, c'est additionner son opposé »). Grâce à la commutativité de l'addition, on obtiendrait alors le polynôme réduit.</p> |

| | |
|--|--|
| 6. Un autre prolongement concerne les équations. | <p>Par exemple, pour résoudre l'équation,</p> $5 - 2a = 9$ <p>on peut d'abord écrire</p> $\boxed{5} + \boxed{-2a} = \boxed{9}$ <p>pour obtenir</p> $-2a = 4.$ <p>Si le – de l'équation de départ peut être interprété comme étant un signe binaire, dans la dernière égalité, il est unaire, attaché à 2. L'égalité intermédiaire peut aider les élèves à réaliser ce passage.</p> |
|--|--|

Pistes d'adaptation

Une version numérique peut être implémentée dans une application telle que learningapps.org. L'idée est d'associer, par glissement dans une des quatre parties, des expressions identiques à celles y figurant.



Cette version numérique permet une correction immédiate puisque, à la fin du jeu, les bonnes réponses apparaissent en vert, les autres en rouge.

Il importe néanmoins d'analyser par après les différents appariements pour permettre aux élèves d'atteindre les objectifs d'apprentissage poursuivis.

Auteurs de la fiche : Équipe de recherche Université de Liège (ULiège) - Haute École de la ville de Liège (HEL)

**Partie 2 – Fiches conceptuelles
faisant le point sur les trois nœuds
matière**

Versions définitives des fiches conceptuelles centrées sur les nœuds matière

1. Fiche conceptuelle sur le sens du signe « moins »

Sens du signe « moins »

Quelques repères didactiques sur le signe « moins »

Le changement conceptuel auquel sont confrontés les élèves lors de l'apprentissage des nombres entiers relatifs n'est pas anodin. En effet, tant les règles de comparaison que les règles d'opérations apprises en primaire pour les nombres naturels ne sont plus valables telles quelles. Cette rupture épistémologique constitue une réelle pierre d'achoppement pour bon nombre d'élèves.

Au lieu de la seule fonction binaire (d'opérations), le signe « moins » peut en revêtir trois : une fonction unaire (le signe du nombre entier relatif négatif), une fonction binaire (d'opérations) et une fonction symétrique (l'opposé) (Vlassis, 2010).

Par exemple, dans $-(-5) - 3$, les trois signes « - » ont des statuts différents :

- *le signe « - » précédant la parenthèse désigne l'opposé de (-5) ;*
- *le signe « - » précédant le nombre 5 a une fonction unaire : il indique que le nombre est négatif ;*
- *le signe « - » précédant 3 a une fonction binaire car il indique une soustraction (il faut soustraire 3 à l'opposé de -5).*

À l'école primaire, les élèves ne rencontrent les nombres entiers relatifs qu'en contexte réel (températures, ascenseurs...). Ils peuvent les comparer sur base de leur ressenti, de leur vécu ou à l'aide de matériel modélisant ces situations réelles. Quand ils arrivent dans l'enseignement secondaire, ce sont les seules expériences liées aux sens unaires et symétriques qu'ils ont engrangées.

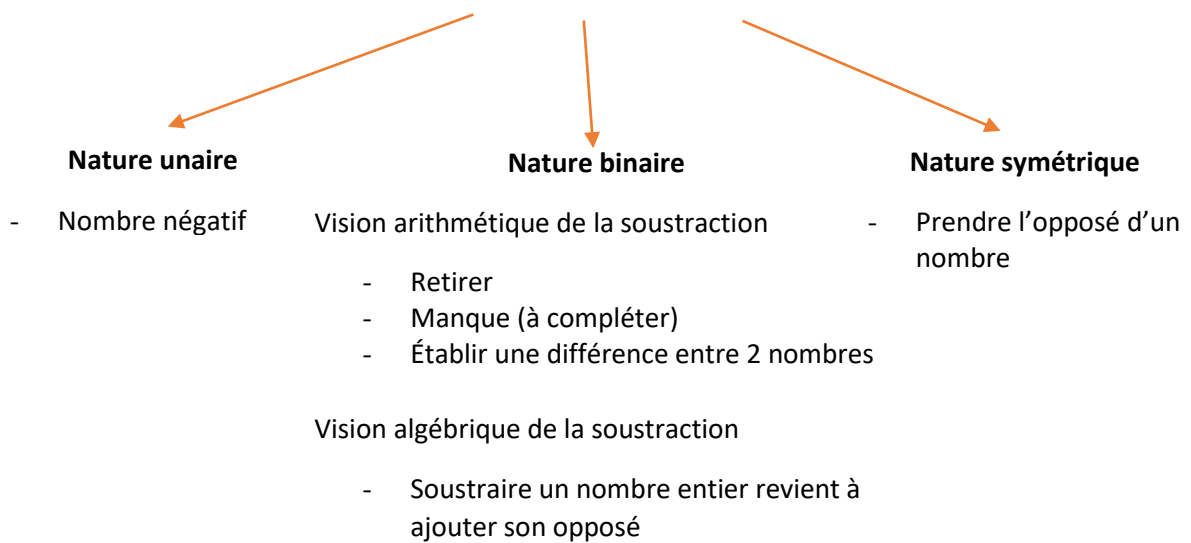
Concernant le sens binaire du signe « moins », les élèves du primaire l'ont davantage expérimenté. Ils ont surtout travaillé le **sens « retrait » de l'opération** (j'ai 10 billes, j'en perds 8, combien m'en reste-t-il ?). Ils ont également rencontré le **sens « écart » ou « différence »** (j'ai 10 ans, mon frère en a 8, quelle est notre différence d'âge ?) ainsi que le **sens « compléter »** (combien dois-je ajouter à 24 pour obtenir 38 ?) (Vlassis, 2010).

C'est donc avec ce bagage qu'ils appréhendent toute la complexité du signe « moins » dans l'enseignement secondaire.

Le champ des entiers relatifs n'est pas le seul concerné par ce signe « moins ». Ce symbole se retrouve aussi dans les autres ensembles de nombres et en algèbre élémentaire, où la difficulté des différents sens qu'il peut prendre s'ajoute à la perception des différents sens de la lettre et à la mise en place de nouvelles règles de calcul et de conventions d'écriture. Par exemple, une expression algébrique comme $-a$ ne désigne pas nécessairement un nombre négatif, mais doit plutôt être associée à un nombre quelconque, qui sera opposé au nombre quelconque a . Dans le même ordre d'idée, « soustraire une expression algébrique » peut aussi être envisagé comme « ajouter son opposé », le signe « moins » passant alors de la fonction binaire à la fonction symétrique.

Vlassis (2004, 2010) reprend les différentes natures du signe « moins » dans un modèle, appelé « négativité ».

Les différentes natures du signe « - »



Tout l'enjeu est de faire prendre conscience aux élèves que le signe « moins » a plusieurs significations⁶, afin de travailler dans une perspective de cohérence et de continuité et ainsi d'éviter des ruptures de sens du côté des élèves, potentielles sources de difficulté.

Principaux obstacles rencontrés par les élèves

➤ L'extension de l'univers des nombres naturels aux entiers peut poser de réels problèmes aux élèves. En effet, beaucoup de règles valables dans les naturels ne le sont plus dans l'ensemble des entiers. Par exemple, il est maintenant possible de trouver une réponse au calcul $3 - 5$ alors que dans les naturels, ce n'est pas possible. Les règles de comparaison des naturels doivent aussi évoluer. En effet, si $2 < 3$, on note au contraire que $-2 > -3$. Par ailleurs, la somme de deux termes, toujours plus grande que les deux termes dans les naturels, peut, dans les entiers, devenir plus petite qu'un des deux termes : dans $(+5) + (-2) = +3$, le résultat $(+3)$ est plus petit que $+5$ alors qu'on lui a pourtant « ajouté » un nombre.

Pour aider les élèves à dépasser ces points de **rupture avec les naturels** et à les envisager comme des extensions des règles déjà connues, il est nécessaire de donner sens à ces nouvelles règles.

Pour ce faire, plusieurs stratégies existent. Certains auteurs préconisent l'utilisation de supports visuels, comme la droite numérique ou les tuiles algébriques (présentés tous deux ci-dessous). Pour que le recours à de tels supports soit bénéfique à long terme, il est indispensable qu'ils aient du sens pour les élèves et que les liens avec les calculs abstraits soient établis de manière explicite (Bofferding, 2019, Bofferding & Wessman-Enzinger, 2017 ; Vlassis 2010).

D'autres auteurs n'ont pas recours à des supports visuels mais choisissent la porte d'entrée du calcul mental pour donner sens aux négatifs ainsi qu'aux opérations (Matheron, 2014).

Quel que soit le choix posé, il est indispensable de donner sens à ce nouvel univers et aux règles qui le régissent.

⁶ On rencontre aussi le signe « moins » dans les notations scientifiques où les règles d'opérations dans Z s'appliquent cette fois sur les exposants : par exemple $10^{-2} \times 10^4 = 10^{-2+4} = 10^2$.

➤ **Les modèles utilisés** pour donner du sens aux règles d'addition et de soustraction des entiers ne peuvent être appliqués tels quels pour la multiplication. En effet, la multiplication ne peut être vue comme une addition répétée que dans le cas où un des deux facteurs est positif. Le modèle utilisé pour les additions s'applique donc à de tels calculs : $(+3) \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2)$. Mais quand les deux nombres sont négatifs, ce modèle devient inapplicable et il faut envisager une autre façon de voir les choses.

Une manière d'y arriver est de s'appuyer sur la régularité de certains calculs.

Par exemple, les réponses aux calculs proposés dans la première colonne peuvent facilement être trouvées par additions répétées. Il en est de même pour les 4 premiers calculs de la deuxième colonne.

| | |
|------------------------|-------------------------|
| $(+3) \cdot (+3) = +9$ | $(+3) \cdot (-4) = -12$ |
| $(+2) \cdot (+3) = +6$ | $(+2) \cdot (-4) = -8$ |
| $(+1) \cdot (+3) = +3$ | $(+1) \cdot (-4) = -4$ |
| $(0) \cdot (+3) = 0$ | $(0) \cdot (-4) = 0$ |
| $(-1) \cdot (+3) = -3$ | $(-1) \cdot (-4) =$ |
| $(-2) \cdot (+3) = -6$ | $(-2) \cdot (-4) =$ |
| $(-3) \cdot (+3) = -9$ | $(-3) \cdot (-4) =$ |

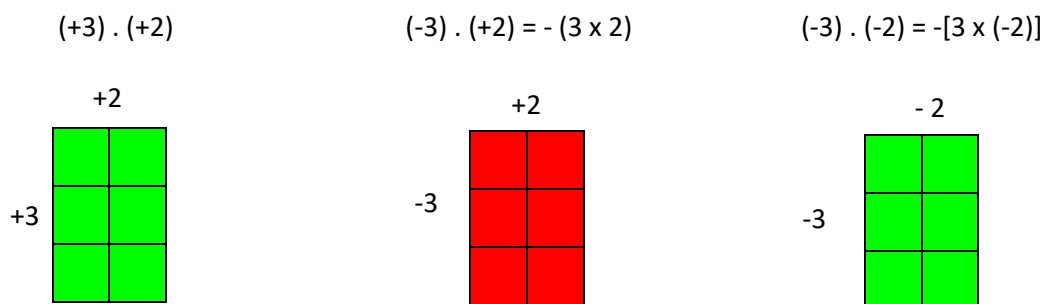
Si on met en évidence le fait que, dans la première colonne, pour passer d'un calcul au suivant, on diminue de 3 la réponse, on peut supposer qu'il faut agir de la sorte pour les calculs de la deuxième colonne, ajouter 4 à chaque réponse, et ainsi trouver les trois réponses qui manquent.

$$(-1) \cdot (-4) = +4$$

$$(-2) \cdot (-4) = +8$$

$$(-3) \cdot (-4) = +12$$

Une autre manière d'y arriver est de s'appuyer sur des modèles à deux dimensions, qu'on peut construire à l'aide de tuiles algébriques par exemple. Ces tuiles sont constituées de carrés verts représentant les nombres positifs et de carrés rouges représentant les nombres négatifs. Il est alors possible de représenter des opérations au départ de ce support visuel, comme l'illustrent les exemples ci-dessous.



On prend 3 fois 2

On prend l'opposé de 3 fois 2

On prend l'opposé de 3 fois (-2)

➤ Un autre obstacle semble se révéler lors du passage au domaine algébrique : la **prédominance de l'interprétation opératoire (binaire) du signe « moins »** au détriment de l'interprétation unaire (Vlassis 2010).

En effet, la compréhension fine du signe « moins » dans le domaine algébrique est assez complexe mais néanmoins indispensable pour permettre aux élèves d'effectuer les calculs qui leur sont proposés

dans ce domaine. Si les élèves n'envisagent pas que, au sein d'un même calcul, le signe « moins » peut parfois changer de signification, ils risquent de ne pas donner sens aux règles qui régissent la réduction de polynômes et même la résolution d'équations.

Par exemple, l'expression $5a - 7a$ peut être vue comme une différence entre $5a$ et $7a$, où le « moins » revêt un sens opératoire (binaire). On peut remplacer $5a$ par $7a - 2a$ et trouver la réponse : $5a - 7a = 7a - 2a - 7a = -2a$. On pourrait aussi mettre « a » en évidence et obtenir $(5-7)a = -2a$.

On peut montrer aussi que ce calcul a la même réponse que $-7a + 5a$. Mais dans ce cas, le signe « moins » n'a plus la même signification. Il devient unaire, attaché au nombre. Si cette « interversion » des deux termes semble naturelle à qui manipule ces expressions avec facilité, elle peut être déroutante pour des élèves qui voient l'expression $5a - 7a$ comme une soustraction et qui verraient, à tort, une sorte de commutativité dans le procédé utilisé. Cette vision principalement voire uniquement opératoire du signe « moins » est dans ce cas problématique.

On peut bien sûr justifier l'équivalence des deux calculs en faisant appel à la commutativité de l'addition. C'est comme si $+5a$ et $-7a$ étaient écrits chacun sur une étiquette, que ces étiquettes étaient reliées par un signe $+$ non apparent et qu'elles pouvaient alors être commutées (Vlassis, 2010).

$$\begin{array}{cc} \boxed{5a} & \boxed{-7a} \\ \boxed{-7a} & \boxed{5a} \end{array}$$

Dans cette explication, le signe « moins » de $5a - 7a$ n'est plus binaire mais bien unaire. Ce changement de point de vue n'est pas naturel en début d'apprentissage et doit constituer un réel point de vigilance pour l'enseignant.

Même s'il est parfois difficile de comprendre comment les élèves raisonnent, certains types d'erreurs peuvent laisser penser à une mauvaise interprétation du signe « moins ». Par exemple, dans la réduction d'un polynôme tel que $-5 + 12 - 7a + 4a$, il n'est pas rare de voir des élèves remplacer $-7a + 4a$ par $-11a$ au lieu de $-3a$, comme si des parenthèses invisibles entouraient $7a + 4a$. On peut supposer que, pour ces élèves-là, le « moins » devant le 7 est considéré comme binaire, séparant d'une part $-5 + 12$ et d'autre part $7a + 4a$. Ces élèves ne semblent pas imaginer qu'il soit « attaché » au 7a. Une manière de les aider serait peut-être de procéder comme ci-dessus, avec des étiquettes, pour obtenir

$$\boxed{-5} \boxed{+12} \boxed{-7a} \boxed{+4a}.$$

Il faut toutefois veiller à ce que les élèves comprennent bien que des « plus » devraient apparaître entre les étiquettes (on pourrait même les indiquer au début) et que c'est la commutativité de l'addition qui est alors convoquée pour justifier les déplacements de termes, avec leur signe.

Dans le travail sur les équations aussi, cette polysémie du signe « moins » peut constituer un frein à la compréhension. Par exemple, dans l'équation $2 - 3a = 8$, certains élèves pourraient voir le « moins » comme un signe binaire. L'étape suivante de la résolution mène à l'égalité $-3a = 6$. Le signe « moins » ne peut plus être vu comme binaire, il devient bien unaire puisqu'on va diviser par -3 les deux membres de l'égalité pour obtenir la réponse.

Ces changements de signification peuvent dérouter les élèves et constituer un véritable obstacle. Il convient d'y être attentif pour apporter une réponse dépassant la technique, afin de lui donner sens.

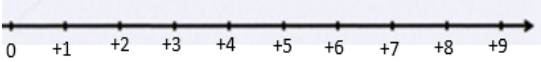

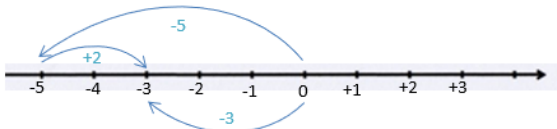
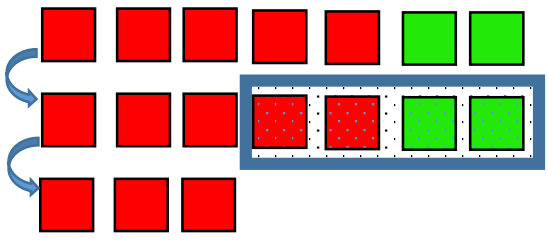
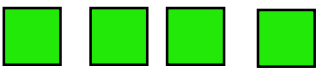
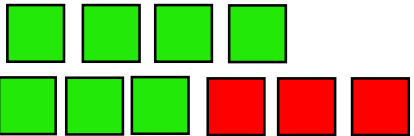
Outils d'enseignement-apprentissage pour les entiers relatifs

Si l'on se penche sur les activités d'enseignement-apprentissage **liées aux nombres entiers relatifs**, le support visuel privilégié en début d'apprentissage est souvent la droite numérique. En ce qui concerne les opérations sur ces nombres dans le champ additif, les supports sont souvent de deux types : la droite numérique (en continuité avec ce qui précède) et des jetons (style « bons points et mauvais points »). Pour les opérations du champ multiplicatif, les supports sont souvent abandonnés au profit d'une réflexion plus abstraite.

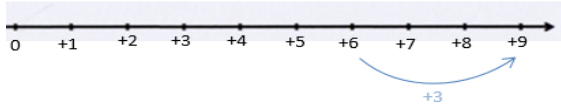
Peu importe le support choisi, il convient d'analyser en profondeur les types de raisonnements qu'il requiert de la part des élèves et d'assurer une certaine cohérence entre les différentes phases de réflexion afin d'éviter de mettre les élèves réputés faibles en difficulté. Il peut également être judicieux d'envisager l'utilisation de supports variés dont la complémentarité peut aider les élèves à mieux cerner le concept tout en veillant à éviter les contradictions et les sauts conceptuels implicites.

Deux outils sont proposés pour travailler sur ces entiers relatifs. Le premier s'appuie sur la droite numérique, qui constitue une modélisation assez immédiate du thermomètre et de l'ascenseur par exemple. Le second s'appuie sur les tuiles algébriques, qui peuvent être utilisées en prolongement des jetons de l'école fondamentale et qui préparent les élèves à leur utilisation dans le calcul algébrique.

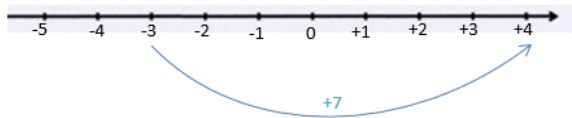
Ces deux outils n'envisagent pas la soustraction de la même manière et, si l'utilisation complémentaire de ces deux outils est intéressante, il convient d'être particulièrement attentif et explicite sur la manière de les utiliser.

| Droite numérique | Tuiles algébriques |
|--|--|
| <p>La droite numérique est un support fréquemment utilisé par les élèves, dès l'école fondamentale. Elle est étendue aux entiers relatifs en début de 1^{er} secondaire.</p>  | <p>Les tuiles algébriques sont des carrés ou des rectangles tels que la couleur du recto et celle du verso ne sont pas identiques. Par exemple, le recto est vert et représente le nombre 1 tandis que le verso est rouge et représente le nombre -1.</p>  |
| <p>Pour envisager une addition, il faut adopter la convention suivante : un déplacement vers la droite (vers la flèche) sur la droite graduée sera représenté par un entier positif tandis qu'un déplacement vers la gauche sera représenté par un entier négatif ; le signe « + » signifie qu'on combine deux déplacements.</p> <p>Exemple : $-5 + (+2) = -3$</p>  | <p>La règle d'utilisation, formulée après avoir vu la notion d'opposé, est que « une tuile verte et une tuile rouge se neutralisent ».</p> <p>Exemple : $-5 + (+2) = -3$</p>  |
| <p>Pour la soustraction d'entiers relatifs négatifs, le sens « retrait » est difficilement envisageable. En effet, on peut difficilement donner du sens au calcul $(+6) - (-4)$ en termes de retrait. Comment retirer -4 à +6 ?</p> <p>Pour rester en cohérence avec les conventions adoptées pour l'addition, une interprétation plus adéquate pour la soustraction d'entiers relatifs est l'écart, la différence ou le manque. Quel(le) est l'écart (la différence) entre -4 et +6 ? Que faut-il ajouter à (-4) pour obtenir +6 ?</p> <p>C'est cette signification qui est perçue intuitivement quand on manipule le thermomètre ou l'ascenseur, deux supports visuels particulièrement appréciés comme soutiens aux explications puisqu'ils sont utilisés dès le début des apprentissages des entiers relatifs. On parlera de différence, de variation de températures ou d'étages et non de retrait.</p> <p>Déjà, dans les naturels, pour effectuer le calcul $9 - 6$, on peut poser la question : « Quel est l'écart entre 6 et 9 » ou « Combien faut-il ajouter à 6 pour</p> | <p>Pour la soustraction d'entiers relatifs, les tuiles algébriques permettent d'illustrer le sens « retrait » de la soustraction grâce à un artifice de calcul.</p> <p>Par exemple, pour le calcul $(+4) - (-3)$, on prend 4 tuiles vertes.</p>  <p>On ne peut pas retirer 3 tuiles négatives rouges (-3) puisqu'on n'a que des positives vertes.</p> <p>On représente alors +4 d'une autre manière, en utilisant des tuiles des deux couleurs. Étant donné que les tuiles rouges et vertes se neutralisent, on peut représenter +4 comme ceci :</p>  |

obtenir 9 ? ». On peut utiliser la droite numérique pour représenter le raisonnement. Le déplacement vers la flèche indique, comme pour l'addition, que la réponse est positive.



Pour le calcul $(+4) - (-3)$, on pose la même question : « Combien faut-il ajouter à -3 pour obtenir $+4$? »



Même si c'est la soustraction « écart/différence ou manque » qui est ici privilégiée, au lieu de la soustraction « retrait », cette façon d'envisager la soustraction permet de lui donner du sens et fournit une image mentale facilement convocable par les élèves.

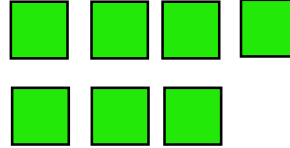
Activités associées :

- « Utiliser la droite numérique pour additionner des entiers relatifs » et « Utiliser la droite numérique pour soustraire des entiers relatifs »

Le calcul associé devient alors

$$(+4) + (+3) + (-3) - (-3)$$

On peut alors retirer trois tuiles rouges (-3) pour obtenir 7 tuiles vertes.



La réponse au calcul est donc

$$(+4) - (-3) =$$

$$(+4) + (+3) + (-3) - (-3) =$$

$$(+4) + (+3) + (-3) - (-3) =$$

$$(+4) + (+3) + 0 = +7$$

De plus, la règle « soustraire un nombre, c'est additionner son opposé » est également illustrée par cette manipulation.

Même si on envisage ici la soustraction comme un « retrait », ce qui peut paraître plus facile pour les élèves, il faut être particulièrement attentif à donner du sens à l'artifice de calcul pour éviter une utilisation purement mécanique de l'outil.

Activité associée :

- « Utiliser les tuiles algébriques pour revoir les techniques de calculs dans Z »

Il peut être intéressant de combiner ces deux approches en donnant d'abord du sens à la soustraction grâce à la droite numérique, en utilisant les activités pour dégager les règles de calcul et leur donner du sens. Les tuiles algébriques interviendraient dans un second temps pour permettre aux élèves de visualiser les règles autrement.

Un diagnostic pour agir : évaluer les acquis et les faiblesses des élèves pour orienter son enseignement

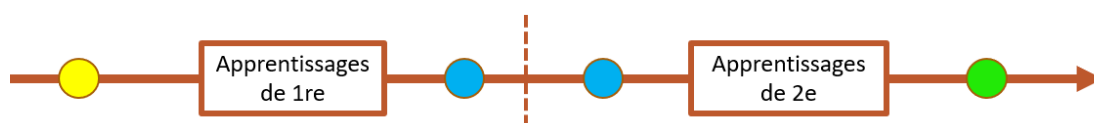
Il peut être utile de repérer les éléments que les élèves maîtrisent déjà et sur lesquels les nouveaux apprentissages peuvent se greffer. C'est l'objectif d'un **test diagnostique** développé autour du signe « moins », du sens « écart » de la soustraction et des procédures en contexte, à destination des élèves de début de 1^{re} secondaire. L'objectif de ce test est de repérer si les élèves maîtrisent déjà ces concepts et procédures. En effet, les élèves ne sont pas vierges de tout apprentissage autour de ce signe « moins ». Ils ont déjà été confrontés à de nombreuses situations en contexte. Par exemple, beaucoup perçoivent la différence entre les natures unaires et binaires du signe « moins ». Ils ont aussi déjà envisagé la soustraction comme un écart, même de manière informelle, au détour d'une mise en situation par exemple. Enfin, même si ce n'est pas de manière formelle, ils arrivent intuitivement à réaliser des comparaisons, des additions et des soustractions lorsqu'elles sont contextualisées. Ces éléments peuvent être confirmés par le test diagnostique étant donné que les élèves doivent expliciter leurs démarches. Au-delà des réponses, ces explications permettent de récolter des éléments sur la (ou les) manière(s) de penser des élèves.

L'enjeu de ce test diagnostique n'est donc pas de repérer ce que les élèves ne maîtrisent pas mais bien de **mettre en évidence les forces de la classe**, sur lesquelles l'enseignant peut s'appuyer lors de l'apprentissage des nouveaux concepts. Les liens, qu'il peut établir avec des situations que les élèves connaissent et maîtrisent, ne peuvent qu'être bénéfiques pour donner du sens aux nouveaux apprentissages et renforcer la confiance des élèves.

Les **activités** proposées ci-dessus sont évidemment **en lien avec ce test** puisqu'elles contextualisent les apprentissages, en s'appuyant notamment sur des outils proches de ce que les élèves connaissent déjà et qui donnent sens aux différentes natures du signe « moins ».

Trois **outils diagnostiques**, disponibles dans un document annexe, ont été élaborés pour prendre place à quatre moments de la scolarité des élèves du premier degré de l'enseignement secondaire :

- avant le début des apprentissages de 1^{re},
- après les apprentissages de 1^{re} et avant ceux de 2^e,
- après les apprentissages de 2^e.



Les items qui les composent s'articulent autour de trois thématiques :

- le **sens du signe « - »** ● ● ●
- les **procédures** (comparaison, +, -, x) **en contexte** ● ●
- les **procédures** (comparaison, +, -, x) **hors contexte** ● ●

Deux points d'attention sont par ailleurs identifiés, en lien avec les obstacles développés ci-avant :

- la difficulté à donner sens aux opérations dans Z ●
- Identification des élèves qui ne maîtrisent pas les procédures hors contexte et qui, en contexte, ne donnent pas sens aux opérations dans Z.
- la difficulté à voir le signe « moins » comme attaché au nombre qui le suit. ● ●

Dans tous les tests, il est demandé aux élèves **d'expliciter leurs démarches** pour permettre d'analyser plus finement les procédés utilisés en allant au-delà de la réponse. Ainsi, il est possible de déceler, dans les explications produites, quel sens du signe « moins » l'élève convoque plus facilement.

Il s'agit bien ici d'utiliser les productions des élèves comme **indicateurs de leurs modes de pensée** de manière à pouvoir les aider à progresser grâce à une aide plus personnalisée et adaptée. Tous ne réfléchissent pas de la même manière et tous n'assimilent pas les concepts à la même vitesse. Certaines questions sont similaires à deux tests, voire même identiques, de manière à pouvoir percevoir une évolution dans les modes de pensée des élèves et dans leur appropriation du signe « moins ».

L'objectif du premier test est bien, comme expliqué ci-avant, de repérer les déjà-là des élèves. Le but des deux autres tests n'est plus du même ordre : il s'agit ici de mettre en évidence les compétences que l'élève a acquises, celles en cours de construction et celles qu'il n'a pas acquises. Étant donné le caractère évolutif des tests, l'attribution de scores n'est pas préconisée car leur comparaison temporelle serait caduque. L'idée est bien que ces tests constituent pour l'enseignant une aide à la mise en place d'un accompagnement plus personnalisé, éventuellement basé sur des activités similaires à celles présentées précédemment.

Outil d'enseignement-apprentissage en algèbre élémentaire

L'activité décrite dans la fiche outils « Jongler avec le signe moins pour mieux le comprendre et l'utiliser, même en algèbre » permet de conscientiser la polysémie du signe moins et les potentielles modifications de sens apparaissant lors de la réduction de polynômes ou lors de la résolution d'équations.

Références

- Berté, A. & al. Groupe didactique des mathématiques – IREM d'Aquitaine – AMPERES-INRP. Enseigner les nombres négatifs au collège. http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/enseigner_les_nombres_negatifs_au_collège.pdf
- Bofferding, L. (2019). Understanding negative numbers. In *Constructing Number* (pp. 251-277). Springer, Cham.
- Bofferding, L., & Wessman-Enzinger, N. (2017). Subtraction involving negative numbers: Connecting to whole number reasoning.
- Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, 79(3), 1202-1242.
- Leenaers G, Ouanassi J., & Wuyts V. (2018). *Croc'Math 1A*. Éditions Plantyn.
- Matheron, Y. (2014). *Les nombres relatifs en 5^e – Proposition de Parcours d'Étude et de Recherche (PER)*. <http://ife.ens-lyon.fr/formation-formateurs/catalogue-des-formations/formations-2014-2015/la-di-en-maths/per-nombres-relatifs-5eme.pdf/view>
- Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction*, 14(5), 469- 484.

Vlassis, J. (2010). *Sens et symboles en mathématiques : Étude de l'utilisation du signe "moins" dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue*. Peter Lang.

<https://support.mathies.ca/fr/mainSpace/TuilesAlgebriques.php>

<https://www.mathematiques.be/2015/11/25/enseigner-avec-des-tuiles-algebriques/>

<https://slideplayer.fr/slide/3405763/>

2.Fiche conceptuelle sur les fractions

Fractions

Quelques repères didactiques sur les fractions

On peut regrouper les fractions rencontrées par les élèves en trois catégories : les fractions opérateurs (aussi appelées fractions partages), les fractions nombres et les fractions rapports (De Terwangne, Hauchart & Lucas, 2007).

Les fractions opérateurs sont des fractions qui agissent sur des objets, des grandeurs ou des quantités (par exemple $\frac{1}{4}$ de gâteau, $\frac{3}{5}$ de litre ou $\frac{2}{3}$ d'une collection de billes).

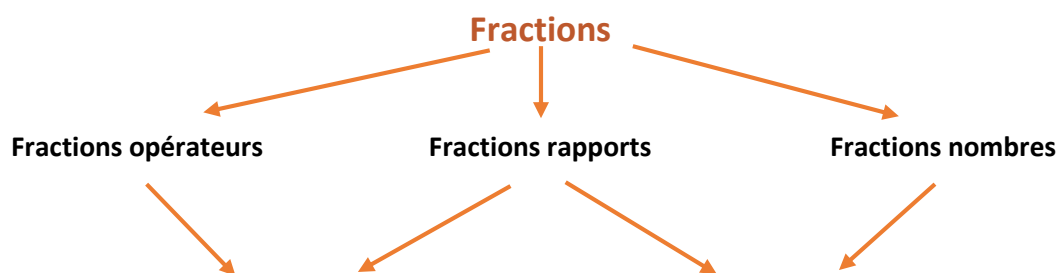
Les fractions qui n'agissent pas sur des objets, des grandeurs ou des quantités sont de deux types :

- la fraction rapport, envisagée comme le résultat de la comparaison de deux grandeurs de même nature (par exemple l'échelle $\frac{1}{10000}$ ou l'écran $\frac{16}{9}$),
- la fraction nombre, envisagée comme un nombre à part entière, qui correspond à l'abscisse d'un point sur la droite des nombres ($\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{4}$ sur la droite graduée).

Les élèves rencontrent ces différents sens de fractions au fur et à mesure de leur scolarité, sans en avoir nécessairement conscience. Pourtant la façon de les appréhender n'est pas la même et on peut supposer qu'une partie des difficultés rencontrées par les élèves prend racine dans cette triple signification.

Les prescrits légaux mentionnent les fractions en primaire essentiellement dans le domaine des grandeurs (fractions opérateurs et rapport) tandis que du côté du secondaire, les fractions font davantage partie du domaine des nombres. On peut donc comprendre que la transition de la fraction opérateur à la fraction nombre s'effectue en même temps que la transition primaire-secondaire. Pourtant, cette transition n'est pas souvent travaillée explicitement avec les élèves. Les deux aspects sont fréquemment utilisés sans se préoccuper des images mentales que s'en font les élèves, sans vraiment prendre en compte la réelle rupture conceptuelle sous-jacente. Par exemple, il n'est pas rare d'expliquer les additions de fractions (dans le domaine des nombres) en utilisant, comme support visuel, une tarte ou un rectangle, revenant par là à des fractions opérateurs, au lieu de rester dans le domaine numérique.

Pourtant, il faut que les élèves se détachent progressivement de l'aspect grandeur des fractions pour pouvoir mieux les appréhender en tant que nombres, en statistique, en algèbre ou dans les études de fonction par exemple. Néanmoins, les fractions rencontrées dans le cadre de la résolution de problèmes sont du type rapport ou opérateur. Il ne faut donc pas abandonner ces types de fractions au profit de la fraction nombre mais bien les faire coexister de manière consciente, réfléchie et explicite.



Rencontrées notamment en résolution de problèmes

Rencontrées notamment en statistique et en algèbre

Il paraît nécessaire de prendre le temps d'explorer avec les élèves ces différents types de fractions, de manière claire, explicite et progressive, sans supposer que les liens et sauts conceptuels se feront naturellement et sans anicroche.

Principaux obstacles rencontrés par les élèves

➤ Pour certains élèves, la fraction est vue exclusivement comme un partage d'une unité en parts égales dont on en prend un certain nombre : la fraction $\frac{3}{4}$ est interprétée comme étant une unité qui a été partagée en 4 parts égales dont on en a pris 3. On est dans un enchaînement de type « je coupe puis je prends ».

Si cette représentation est correcte et aidante pour les élèves en début d'apprentissage, elle présente aussi des limites (Siegler, Carpenter, Fennell et al., 2010).

Par exemple, quelle signification donner dans ce cadre à $\frac{5}{4}$? Que répondre à des élèves qui estiment cette fraction impossible puisqu'il n'y a que 4 morceaux et qu'on ne peut donc en prendre 5 ?

Cette **vision figée** et réductrice de la fraction entraîne de facto des difficultés pour les élèves dans leur appréhension des fractions plus grandes que l'unité.

Une manière de les aider est de proposer d'autres visions de la fraction.

Toujours dans le domaine des grandeurs, la fraction peut, par exemple, être vue comme une unité reproduite plusieurs fois puis qu'on découpe en parts égales. Ainsi, la fraction $\frac{3}{4}$ est interprétée comme trois « tartes » partagées équitablement entre 4 personnes et l'enchaînement est ici plutôt du type « je prends puis je coupe ». Cette vision permet d'envisager les fractions plus grandes que l'unité de manière plus intuitive puisqu'il est aisément acceptable de partager 5 unités en 4 par exemple. C'est aussi une façon d'amener progressivement l'idée que $\frac{3}{4}$, c'est $3 \times \frac{1}{4}$ puisque dans l'exemple donné, chaque personne reçoit en réalité 3 fois $\frac{1}{4}$ de tarte (Empston & Levi, 2011).

De manière plus abstraite, on peut donner du sens à la fraction sans faire référence à l'opération « partage » ou « fractionnement » mais en focalisant l'attention sur le résultat du partage. Dans cette optique, la fraction est vue comme une quantité reproduite un certain nombre de fois en vue de composer l'unité. Ainsi, la fraction $\frac{3}{4}$ est interprétée comme trois parts, dont chacune entre exactement 4 fois dans l'unité. Cette vision a plusieurs avantages.

- Elle montre le rôle primordial du dénominateur dans la définition de la fraction. Le numérateur étant ainsi considéré comme le nombre de fois que l'on prend la part :

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

- Elle donne sens aux fractions plus grandes que l'unité

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$$

- Elle aide à comprendre pourquoi les quarts constituent des parts plus petites que des tiers (même si 4 est plus grand que 3) : il faut en effet 4 quarts pour reconstituer l'unité alors qu'il ne faut que 3 tiers pour reconstituer la même unité.
- Elle permet également de comprendre que la fraction est utile pour définir des unités de mesures qui permettent de réaliser des mesurages plus précis que ce que ne permettent les nombres entiers puisqu'elle donne accès à des sous-multiples de l'unité.

Cette vision, plus abstraite, n'est pas fréquemment abordée dans le primaire. Il est intéressant de l'installer dès le début du premier degré du secondaire, en prenant appui sur la droite numérique.

➤ Même si plusieurs portes d'entrée des fractions sont travaillées au primaire avec les élèves, elles relèvent souvent du domaine des grandeurs. En facilitant le recours au concret pour soutenir les explications, cette manière d'appréhender la fraction permet de travailler beaucoup d'aspects, dont les fractions équivalentes et les opérations. Elle est aussi prégnante dans la résolution de problèmes puisqu'on y recourt souvent au domaine des grandeurs.

Toutefois, les fractions rencontrées en statistique ou en algèbre ne sont plus du même ordre. Elles relèvent davantage du domaine des nombres. Ce **passage du concept de fraction des grandeurs vers les nombres** est un enjeu crucial pour les apprentissages des élèves. Il est pourtant souvent (trop) rapide et implicite. Or, il est indispensable de prendre le temps, au premier degré du secondaire, de placer les fractions sur la droite des nombres, au même titre que tous les autres nombres, d'envisager plusieurs écritures d'un même nombre et de réinstaller les règles d'opérations sur les fractions en restant sur la droite numérique (Siegler, Carpenter, Fennell et al., 2010).

➤ Les opérations sur les fractions constituent une réelle pierre d'achoppement pour les élèves. Les confusions de règles sont légion. Celles-ci s'expliquent notamment par le fait que les élèves ont tendance à penser que les règles qui régissent les opérations sur les naturels peuvent être transférées directement vers les fractions. En effet, il n'est pas rare de rencontrer des réponses du type $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, puisque $1 + 1 = 2$ et $2 + 3 = 5$. Ces erreurs témoignent ainsi d'une **généralisation abusive des règles sur les naturels**. Cette erreur est révélatrice du fait que les élèves utilisent des règles sans les comprendre mais aussi sans réfléchir ou même appréhender les nombres en jeu. En effet, bien que $2 + 3 = 5$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ n'est pas égal à $\frac{2}{5}$, car $\frac{2}{5}$ représente une fraction plus petite que la moitié alors qu'on a pourtant ajouté $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{2}$. D'autres règles de calcul doivent également être construites, et en particulier la nécessité de rechercher un dénominateur commun à deux fractions qu'on additionne. Le recours à un support tel que la droite numérique peut être bénéfique pour les élèves puisqu'il permet de visualiser les nombres et les opérations. Il est toutefois indispensable qu'il soit construit avec les élèves pour qu'il soit réellement porteur.

Les apprentissages du 1^{er} degré du secondaire devront ensuite évoluer vers une véritable automatisation des règles en vue d'effectuer des opérations sur les fractions de plus en plus complexes.

Outils d'enseignement-apprentissage pour les fractions

Plusieurs outils ont été exploités avec les enseignants. Certains ont été mis en œuvre dans les classes. Ils sont surlignés en bleu dans les paragraphes suivants. Ils ciblent deux thématiques principales : le sens de la fraction et les opérations sur les fractions.

Le sens de la fraction

Quatre activités permettent d'appréhender les différents sens de la fraction.

L'activité « Exploiter un puzzle de fractions pour donner du sens aux techniques opératoires » met l'accent sur la transition primaire-secondaire en abordant les fractions à l'aide d'un matériel concret et en envisageant la fraction comme le résultat d'un fractionnement (De Terwangne *et al.*, 2007).

Trois autres activités, à envisager en continuité, approfondissent les apprentissages liés aux fractions :

- une activité donnant l'occasion aux élèves de se rendre compte de l'existence des trois types de fractions (fractions opérateurs, fractions rapports, fractions nombres), du sens qu'elles ont et des contextes dans lesquels on les utilise (Postal *et al.*, 2012) ;
- l'activité « Utiliser des bandes unité pour introduire la fraction nombre » permettant de réaliser le passage entre les fractions opérateurs et les fractions nombres (ERMEL, 1997 ; Stegen *et al.*, 2007 ; Géron *et al.*, 2016) ;
- l'activité « Utilisation de la droite numérique » visant à construire une droite numérique sur laquelle figurent des nombres naturels et des nombres décimaux, dans leur écriture fractionnaire et leur écriture décimale (ERMEL, 1999 ; Stegen *et al.*, 2007).
-

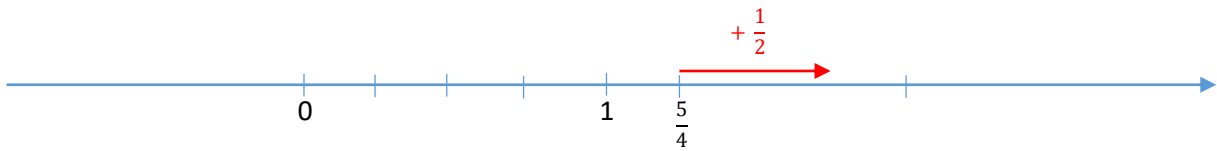
Les opérations sur les fractions

L'activité « Exploiter un puzzle de fractions pour donner du sens aux techniques opératoires » permet d'introduire les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division d'une fraction par un nombre naturel. D'autres activités dont « Utilisation de la droite numérique » et « Additionner et soustraire des fractions nombres en utilisant la droite numérique » s'appuient, comme leur nom l'indique, sur la droite numérique, qui constitue un support visuel ancré directement dans le domaine des nombres.

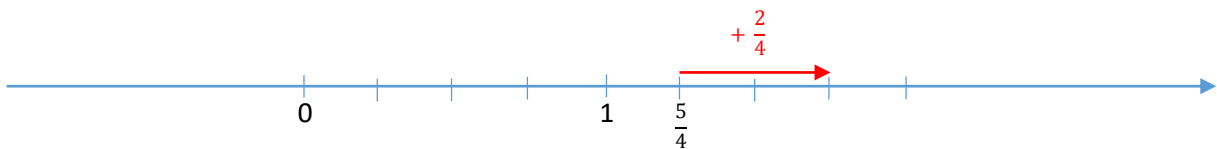
En voici quelques exemples d'utilisation.

- $\frac{5}{4} + \frac{1}{2}$

On part de $\frac{5}{4}$ et on ajoute $\frac{1}{2}$. Sur quelle graduation arrive-t-on ?



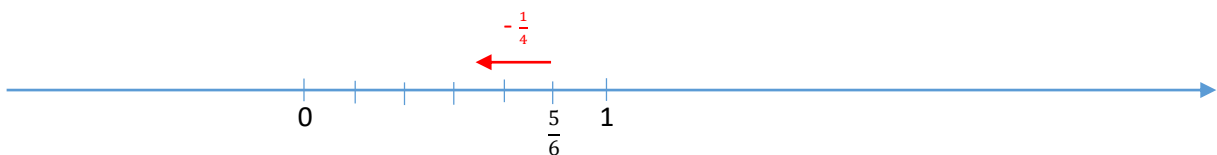
Afin de trouver la position exacte de la réponse à ce calcul, il convient de trouver une droite graduée « commune » aux deux fractions $\frac{5}{4}$ et $\frac{1}{2}$. La droite graduée en quarts permet d'y arriver : en effet, $\frac{1}{2}$ est équivalent à $\frac{2}{4}$ puisqu'un morceau qui va deux fois dans l'unité a une longueur équivalente à deux morceaux qui vont chacun 4 fois dans l'unité.



Il faut donc faire émerger la nécessité d'utiliser, dans ce cas-ci, la droite graduée en quarts pour que les deux fractions à additionner soient exprimées à l'aide de la même « graduation ». Autrement dit, les fractions doivent être mises au même dénominateur, pour pouvoir trouver la réponse : $\frac{5}{4} + \frac{2}{4} = \frac{7}{4}$.

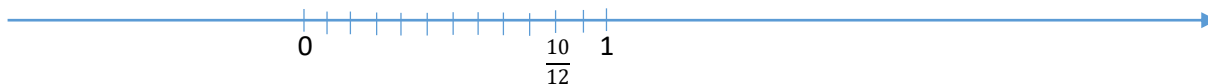
- $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$

On part de $\frac{5}{6}$ et on retire $\frac{1}{4}$. Sur quelle graduation arrive-t-on ?



Ici encore, la nécessité de trouver une droite graduée commune aux sixièmes et aux quarts va permettre de situer avec précision le résultat de l'opération à effectuer. Diviser la plus petite graduation (le sixième) en 2 va permettre d'identifier précisément à la fois la position de $\frac{5}{6}$ et de $\frac{1}{4}$, ce qui permettra en définitive de situer précisément la position du nombre obtenu en retirant $\frac{1}{4}$ à $\frac{5}{6}$. Dans ce cas aussi, les deux fractions doivent être mises au même dénominateur pour pouvoir « lire » la réponse sur la droite numérique.

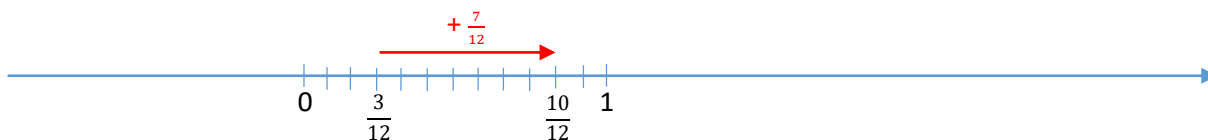




Une autre manière d'aborder la soustraction est l'écart. Elle permet de maintenir le même raisonnement, même quand les nombres en jeu deviennent négatifs : combien doit-on ajouter à $\frac{1}{4}$ pour obtenir $\frac{5}{6}$?



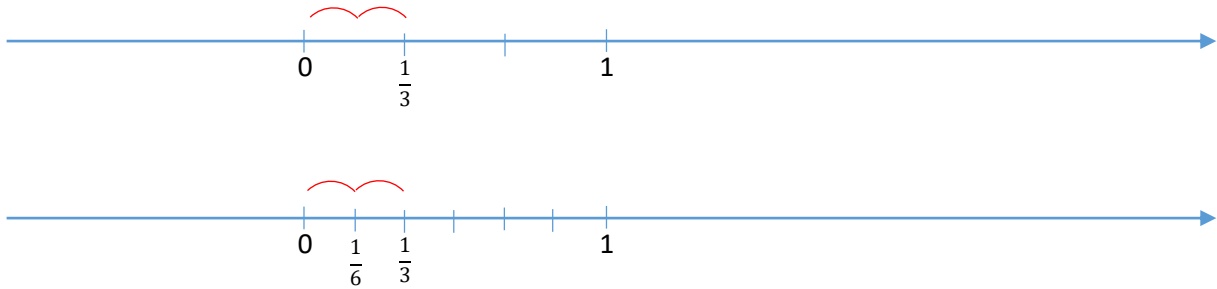
De la même manière que précédemment, le recours à la droite numérique graduée de manière appropriée permet de faire émerger la réponse et le dénominateur commun, 12.



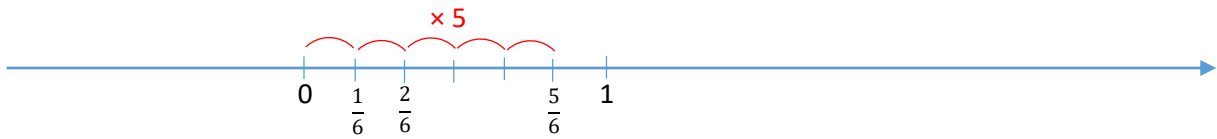
Finalement, pour additionner ou soustraire deux fractions, il faut trouver une droite graduée commune aux deux fractions à additionner ou soustraire. La graduation commune s'obtient en cherchant un multiple commun aux deux dénominateurs, permettant ainsi d'exprimer les deux fractions à l'aide du même dénominateur.

- $\frac{5}{2} \times \frac{1}{3}$

Prendre les $\frac{5}{2}$ de $\frac{1}{3}$ revient à prendre 5 fois la moitié de $\frac{1}{3}$, puisque $\frac{5}{2}$ c'est 5 fois $\frac{1}{2}$. Et la moitié de $\frac{1}{3}$ va exactement 6 fois dans l'unité (un tiers partagé en 2 comme résultat un sixième).



Comme il faut prendre cette graduation 5 fois, la réponse sera égale à $\frac{5}{6}$ (un sixième fois cinq donne, comme résultat, cinq sixièmes).



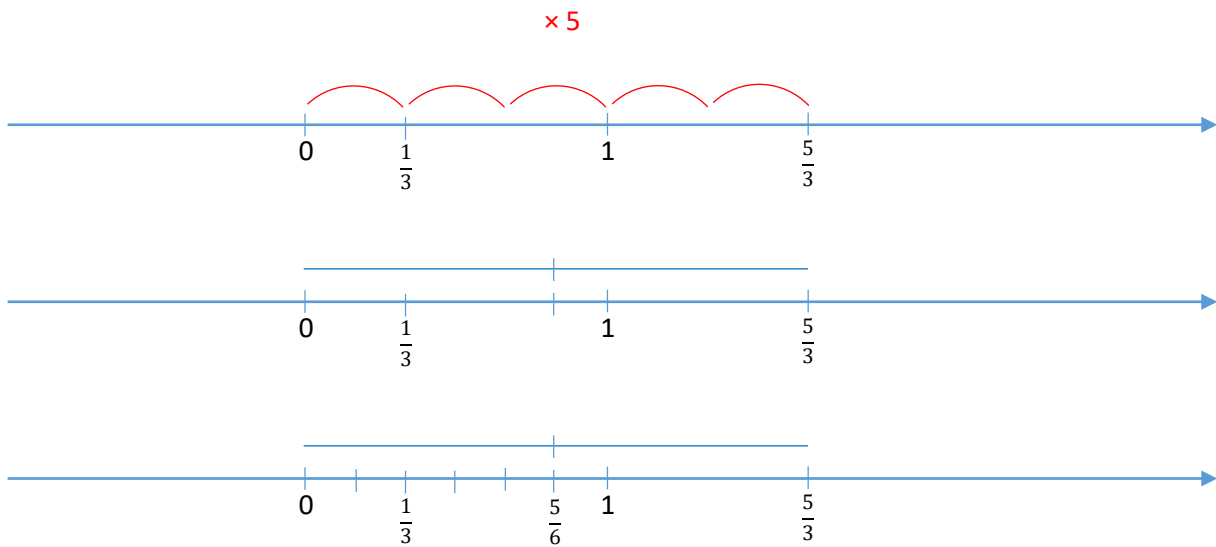
Finalement, pour multiplier des fractions, on multiplie les dénominateurs entre eux et ensuite, on multiplie les numérateurs entre eux :

$$\frac{5}{2} \times \frac{1}{3} = \left(5 \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} = 5 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5 \times 1}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

De la même manière, en utilisant la commutativité et l'associativité de la multiplication,

$$\frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \left(5 \times \frac{1}{2}\right) \times \left(3 \times \frac{1}{4}\right) = 5 \times 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) = 5 \times 3 \times \frac{1}{8} = \frac{5 \times 3}{2 \times 4} = \frac{15}{8}$$

Une autre manière de procéder est de d'abord multiplier $\frac{1}{3}$ par 5 puis de diviser le segment correspondant au résultat en 2.

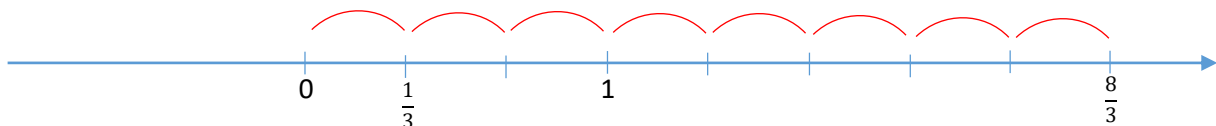


- $\frac{8}{3} : \frac{1}{3}$

Dans le cas de la division par une fraction, c'est la division « contenance » qui permet de lui donner du sens. Combien de fois $\frac{1}{3}$ va dans $\frac{8}{3}$?

Pour situer précisément $\frac{8}{3}$, on va devoir graduer la droite en tiers.

Ensuite, on regarde combien de fois $\frac{1}{3}$ va dans $\frac{8}{3}$. Il y va 8 fois.



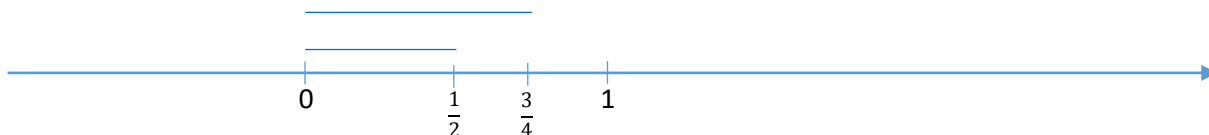
Autrement dit, diviser par $\frac{1}{3}$, c'est trouver une réponse 3 fois plus grande que le nombre à diviser (car on le divise par un nombre qui est trois fois plus petit que l'unité).

$$\frac{8}{3} : \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \times 3 = \frac{24}{3} = 8$$

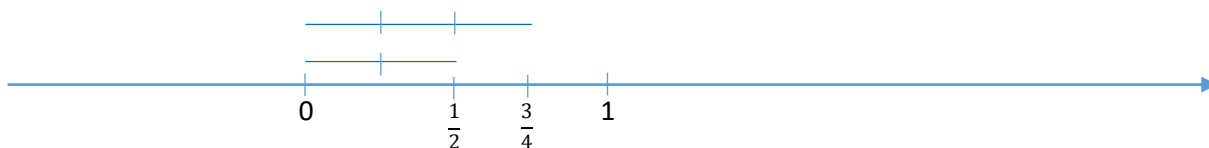
On peut réaliser un raisonnement similaire sur un autre exemple.

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$$

Combien de fois $\frac{1}{2}$ va dans $\frac{3}{4}$?



On peut comparer les deux segments bleus et ainsi trouver la réponse. En effet, $\frac{1}{2}$ va une fois et demi dans $\frac{3}{4}$, autrement dit, $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.



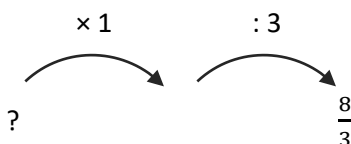
On peut aussi raisonner de la même manière que précédemment : diviser par $\frac{1}{2}$, c'est trouver une réponse 2 fois plus grande (car on divise par un nombre qui est deux fois plus petit que l'unité).

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

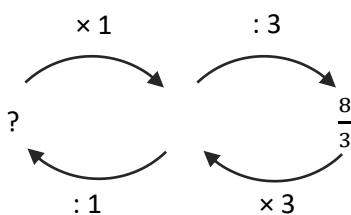
Une autre manière de raisonner dans le cadre de la division par une fraction est de s'appuyer sur le fait que le quotient d'une division multiplié par le diviseur donne le dividende.

Par exemple, pour $\frac{8}{3} : \frac{1}{3} = ?$, on peut écrire $? \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

Si on décompose la multiplication par $\frac{1}{3}$ à l'aide d'un schéma, on obtient



En utilisant les opérations réciproques, on peut écrire



En lisant le schéma de droite à gauche, on arrive à l'égalité

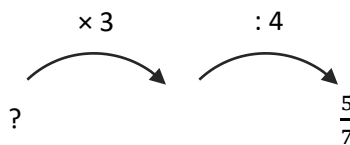
$$\frac{8}{3} \times \frac{3}{1} = ?$$

Et on obtient donc

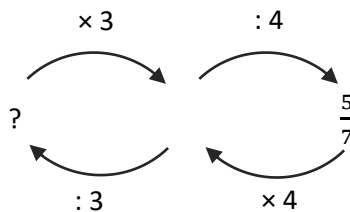
$$\frac{8}{3} : \frac{3}{3} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{1} = \frac{8}{3} \times 3 = \frac{24}{3} = 8$$

On peut raisonner de la même manière pour n'importe quelle autre division de fractions. Par exemple pour $\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = ?$, on peut écrire $? \times \frac{3}{4} = \frac{5}{7}$.

Si on décompose la multiplication par $\frac{3}{4}$ à l'aide d'un schéma, on obtient



En utilisant les opérations réciproques, on peut écrire



En lisant le schéma de droite à gauche, on arrive à l'égalité

$$\frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = ?$$

Et on obtient donc

$$\frac{5}{7} : \frac{4}{4} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$$

Afin de permettre aux élèves d'acquérir une aisance dans les opérations sur les fractions, il est indispensable d'automatiser les règles d'opérations. En cas de problème, le recours au support visuel permet cependant de se souvenir du bien-fondé de ces règles.

Une autre manière d'aider les élèves à automatiser les règles, tout en leur donnant du sens consiste à donner une place plus large aux estimations. En effet, on peut déjà, avant de calculer, estimer si la réponse à un calcul est plus grande ou plus petite que 1, en s'appuyant par exemple sur la droite numérique. Cela permettrait que des élèves, donnant $\frac{3}{5}$ comme réponse au calcul $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, se rendent compte que ce n'est pas possible étant donné que la réponse devrait être plus grande que 1.

Dans le même ordre d'idée, on pourrait déconstruire certains raisonnements erronés en se rendant compte que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ n'est pas égal à $\frac{2}{5}$ parce que $\frac{1}{2}$ est déjà plus grand que $\frac{2}{5}$.

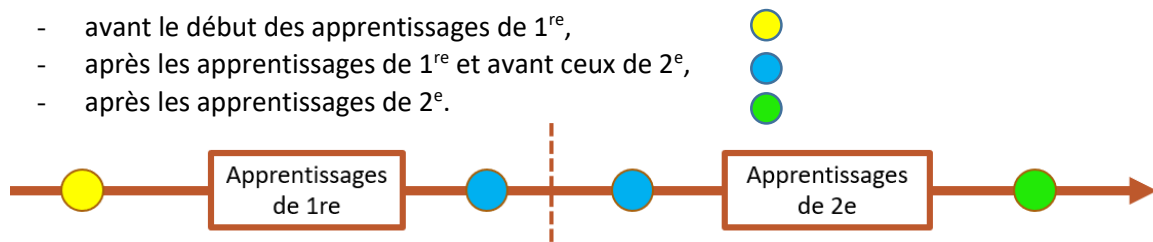
Un diagnostic pour agir : évaluer les acquis et les faiblesses des élèves pour orienter son enseignement

Avant l'apprentissage, il importe de faire le point sur ce que les élèves maîtrisent déjà et comment ils conçoivent les fractions : quelles sont les démarches mobilisées qui peuvent être réinvesties avec un autre type de fraction ? Quelles sont celles qui entrent en contradiction avec les nouveaux concepts ? Sur quoi peut-on appuyer son enseignement ? À quoi faut-il être particulièrement attentif quand on accompagne les élèves vers ce saut conceptuel ?

Un **test diagnostique** à proposer avant le début des apprentissages de 1^{re} peut constituer une aide pour répondre à ces questions. En effet, grâce aux explications données par les élèves, il est possible de se faire une idée de leur manière de réfléchir. Certains items concernent toujours des fractions opérateurs mais sur des supports tels que des segments ou des bandelettes. Ils peuvent constituer une base solide pour amener les élèves à utiliser une droite numérique et à progressivement apprivoiser le concept de fraction nombre. **Les activités** brièvement décrites ci-avant sont **construites dans cette optique**. Les **tests diagnostiques** seront disponibles dans un document annexe.

Trois **outils diagnostiques** ont été élaborés pour prendre place à quatre moments de la scolarité des élèves du premier degré de l'enseignement secondaire :

- avant le début des apprentissages de 1^{re},
- après les apprentissages de 1^{re} et avant ceux de 2^e,
- après les apprentissages de 2^e.



Les items qui les composent s'articulent autour de trois thématiques :

- le sens donné à la fraction ● ● ●
- les procédures⁷ en contexte ● ● ●
- les procédures hors contexte ● ● ●

Deux points d'attention sont par ailleurs identifiés, en lien avec les obstacles développés ci-avant :

- la généralisation abusive des règles sur les naturels ● ● ●
- la fraction non considérée comme un nombre. ● ●

Dans tous les tests, il est demandé aux élèves **d'explicitier leurs démarches** pour permettre d'analyser plus finement les procédés utilisés en allant au-delà de la réponse. Ainsi, il est possible de déceler, dans les explications produites, quel sens de la fraction l'élève convoque plus facilement : amorce-t-il déjà un raisonnement basé sur la fraction nombre ou continue-t-il de réfléchir sur base des fractions opérateurs ?

Il est important de ne pas pénaliser les élèves en fonction de la démarche qu'ils utilisent. S'ils arrivent à trouver une réponse correcte, peu importe le sens de la fraction qu'ils mobilisent. Il s'agit bien ici

⁷ Le vocable 'procédure' reprend les opérations sur les fractions mais aussi la comparaison de fractions.

d'utiliser les productions des élèves comme **indicateurs de leurs modes de pensée** de manière à pouvoir les aider à progresser grâce à une aide plus personnalisée et adaptée. Tous ne réfléchissent pas de la même manière et tous n'assimilent pas les concepts à la même vitesse. Certaines questions sont similaires à deux tests, voire même identiques, de manière à pouvoir percevoir une évolution dans les modes de pensée des élèves et dans leur appropriation des différents types de fraction.

C'est l'utilisation d'une échelle d'acquisition de compétences pour chacune des trois thématiques citées ci-avant qui est adoptée, couplée au repérage du « déjà là » de la fraction nombre. Étant donné le caractère évolutif des tests, l'attribution de scores n'est pas préconisée car leur comparaison temporelle serait caduque. L'idée est bien que ces tests constituent pour l'enseignant une aide à la mise en place d'un accompagnement plus personnalisé, éventuellement basé sur des activités similaires à celles présentées précédemment.

Références

De Terwangne M., & Hauchart C., & Lucas F. (2007). *Oser les fractions dans tous les sens*. Collection Math & Sens, Éditions De Boeck.

Empson, S. & Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics. Fractions and decimals*. Heinemann.

ERMEL (1997). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*, Éditions Hatier.

ERMEL (1999). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM2*. Éditions Hatier.

Géron C., Masson E., Paquay P., Fauconnier C., Herman M., Rajca F. et Sprimont A. (2016) À la liaison primaire-secondaire : l'apprentissage des fractions. *Losanges*, 32, 3-18.

Postal F., & Valenduc A.-M. (2012). *Randomaths 1^{re} année*. Éditions Érasme.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide* (NCEE #2010-4039). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Retrieved from whatworks.ed.gov/publications/practiceguides.

Stegen P., Géron C., & Daro S. (2007), L'enseignement des rationnels à la liaison primaire-secondaire, Rapport de recherche téléchargeable sur <http://www.hypothese.be/index.php/brochures-thematiques/>

<https://fr.khanacademy.org/math/be-2eme-seconaire2/x291d358f50a246d9:nombres-1/x291d358f50a246d9:multiplier-des-fractions/v/concept-fraction-mult-number-line>

<https://fr.khanacademy.org/math/be-2eme-seconaire2/x291d358f50a246d9:nombres-1/x291d358f50a246d9:diviser-une-fraction-par-une-fraction/v/another-dividing-fractions-example>

3. Fiche conceptuelle sur le sens de la lettre

Sens de la lettre

Quelques repères didactiques sur le sens de la lettre

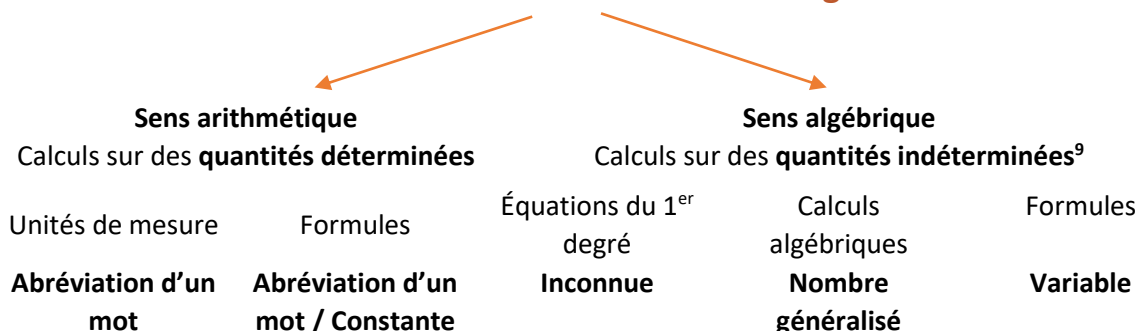
Lorsqu'on introduit la lettre en première secondaire, on a tendance à penser que les élèves ne l'ont jamais utilisée avant. Pourtant, les lettres apparaissent en primaire mais souvent, elles sont principalement considérées comme étant l'abréviation d'un mot. En effet, en arithmétique, les lettres C, D et U sont utilisées pour écrire les nombres en mettant en évidence leur décomposition en centaines, dizaines et unités : par exemple, l'expression « $5C + 2D + 1U$ » est associée au nombre 521. Dans le domaine des grandeurs, les lettres désignent des unités de mesure, comme par exemple le litre, la tonne, ... On rencontre également des lettres dans les formules d'aire où elles désignent l'abréviation des objets géométriques mis en relation (base, hauteur, ...). L'exploitation de ces formules permet aux élèves de calculer l'aire d'une figure ou de retrouver une valeur à partir des autres données impliquées dans ces formules.

À l'école secondaire, différentes interprétations de la lettre se côtoient. On la retrouve dans l'écriture des unités de mesure, dans les formules où, à côté des abréviations de mots, on désigne des constantes (comme par exemple la lettre g , dans la formule impliquant la gravité en sciences). Parallèlement à cela, un usage algébrique va se développer : **la lettre désigne une quantité indéterminée sur laquelle il va être possible de réaliser des opérations**, avant même d'en connaître la valeur. C'est cet aspect qu'il faut construire au début du secondaire et qui constitue un point de rupture avec l'utilisation de la lettre au primaire.

Dans les **équations du 1^{er} degré et en résolution de problèmes**, la lettre désigne **une inconnue** et l'objectif est d'en trouver la valeur : dans certains cas, la valeur peut être directement trouvée par un simple calcul sur des nombres, alors que dans d'autres, les propriétés de l'égalité seront nécessaires pour identifier précisément cette solution de l'équation. Dans les **calculs algébriques**, chaque lettre désignent **un nombre généralisé**. L'objectif n'est alors pas de déterminer sa valeur (puisque'elle est quelconque), mais de transformer un calcul en un calcul plus simple⁸. Et enfin, **dans les formules**, les lettres désignent des **variables**, dont les valeurs sont dépendantes les unes des autres. Dans ces situations, l'objectif est de pouvoir déterminer soit la relation qui unit les variables, soit l'une des variables, au départ de l'autre (ou des autres).

Le schéma suivant synthétise les différents sens de la lettre en 1^{re} et 2^e secondaire.

Les différents sens de la lettre au début de l'enseignement secondaire



¹ Cette conception de la lettre est également convoquée pour justifier une assertion (exemple : la somme de deux nombres pairs est paire).

⁹ En 3^e secondaire, l'étude des équations indéterminées amènera les élèves à constater que, dans certaines équations, la lettre désigne en réalité n'importe quel nombre, ce qui amène des rapprochements entre inconnue et nombre généralisé.

Différentes portes d'entrée sont possibles pour aider les élèves à explorer les usages algébriques des lettres. Et avant même d'introduire la lettre, il est possible de les amener à **raisonner algébriquement** sans nécessairement manipuler des lettres (Kieran, Pang, Schiffer & Ng ; 2016).

Tout d'abord, lors de la révision du calcul sur les nombres, en début de 1^{re} secondaire, on peut amener les élèves à **mettre l'accent sur les relations entre les nombres plutôt que sur la recherche directe de la réponse au calcul**. Par exemple, une expression numérique comme « $80 \times 12 : 3$ » peut être appréhendée de manière globale, sans nécessairement chercher à effectuer les opérations dans l'ordre où elles se présentent. Ainsi, en analysant un tel calcul, on peut amener les élèves à comprendre que multiplier par 12 puis diviser par 3 revient au même que multiplier par 4. Ce calcul peut donc être simplifié en 80×4 , soit 320. Cette manière d'analyser les calculs aide à installer des démarches qui pourront par la suite être réinvesties lors du calcul algébrique, où les élèves apprendront qu'effectuer un calcul algébrique revient à remplacer ce calcul par un calcul plus simple, équivalent au premier.

Aborder les calculs en mettant l'accent sur les relations entre les nombres, plutôt que sur la recherche directe de la réponse permet également d'investiguer plus en profondeur la **compréhension de l'égalité** : le signe « = » doit apparaître entre deux expressions désignant la même quantité, et non être simplement considéré comme l'amorce d'un résultat.

Ensuite, les problèmes de partages inéquitables, déjà explorés en primaire, sont également l'occasion de manipuler des quantités indéterminées en contexte. En voici un exemple.

Trois boîtes contiennent des bonbons. La deuxième boîte contient 5 bonbons de plus que la première boîte et la troisième boîte contient 7 bonbons de plus que la première boîte. En tout, il y a 24 bonbons. Combien de bonbons contient chacune des boîtes ?

Ces situations impliquent en général plusieurs quantités indéterminées, appelées « inconnues ». Dans le problème des boîtes de bonbons, il s'agit du nombre de bonbons de chacune des 3 boîtes. On pourrait désigner :

- par x , le nombre de bonbons de la première boîte,
- par y , le nombre de bonbons de la deuxième boîte
- et par z , le nombre de bonbons de la troisième boîte.

Mais pour pouvoir résoudre ce problème, l'utilisation de trois lettres risque de ne pas être très utile. Ces quantités doivent être exprimées au départ d'une seule et même inconnue (le nombre de bonbons dans une seule des trois boîtes), ce qui permet alors de trouver rapidement la solution du problème.

Si on encourage les élèves à analyser ce type de problèmes en identifiant le fait que toutes les inconnues de l'énoncé peuvent se déduire à partir d'une et une seule inconnue, on les amène à penser le problème de manière algébrique, même s'ils ne passent pas par la résolution d'une équation pour le résoudre.

Les activités de généralisation impliquées dans les problèmes de dénombrement permettent également d'aborder les quantités indéterminées. Ces activités consistent à rechercher une règle permettant de déterminer n'importe quel terme d'une suite arithmétique, à partir de son rang. En ce sens, elles amènent les élèves à trouver une quantité indéterminée (un terme quelconque de la suite) à partir d'une autre quantité indéterminée (le rang de ce terme). Accompagnées d'un support visuel, ces situations peuvent faire émerger une variété de formules, autorisant alors une analyse de l'équivalence de ces dernières.

Enfin, les formules d'aires de quadrilatères constituent une belle occasion d'amener les élèves du secondaire à faire des ponts avec ce qu'ils ont appris précédemment. Il faut toutefois être prudent dans les analogies. En effet, beaucoup d'élèves continuent à considérer les lettres de ces formules comme l'abréviation d'un mot même si, d'un point de vue mathématique, elles peuvent être

considérées comme des variables. À l'école primaire, ce n'est pas problématique, car les élèves peuvent directement remplacer les lettres par des nombres. En revanche, lorsqu'ils découvrent l'algèbre en secondaire, il est important qu'ils prennent conscience que les lettres utilisées dans ces formules constituent des variables, sur lesquelles il est possible d'effectuer des opérations.

Principaux obstacles rencontrés par les élèves

Des conceptions non algébriques des lettres

Un premier obstacle est lié directement à la compréhension des lettres. Des études ont mis en évidence trois conceptions incorrectes qu'ont les élèves (Kuchemann, 1978 ; Booth, 1984) : la lettre est évaluée, la lettre est ignorée et la lettre est associée à un objet.

- **La lettre est évaluée**

Les élèves qui développent cette conception de la lettre cherchent directement à attribuer une valeur numérique aux lettres dans les calculs.

Cette conception de la lettre peut suffire pour résoudre certains exercices comme :

« que vaut a si $a + 8 = 13$? »

« que vaut u si $u = v + 2$ et que v est égal à 1 ? ».

En effet dans ces situations, on peut facilement trouver la valeur des lettres, sans effectuer d'opérations sur des quantités indéterminées : pour trouver la valeur de a ou de u , les calculs à effectuer s'appuient directement sur des quantités déterminées (13 et 8 dans le 1^{er} exercice ; 1 et 2 dans le 2^e exercice)

En revanche, cette conception de la lettre ne permet pas d'effectuer des calculs algébriques. Ainsi, face à un exercice comme : « Réduis au maximum : $3b + 4a + 2a = \dots$ », les élèves attribuent des valeurs aux lettres (en référence par exemple à l'alphabet) et proposent des réponses comme $32 + 41 + 21 = 94$. Ce type d'erreur disparaît en général très rapidement dès que l'algèbre est introduite.

- **La lettre est ignorée**

Cette conception de la lettre consiste à développer, dans les exercices, des raisonnements s'appuyant exclusivement sur les nombres connus. Elle permet de résoudre des exercices comme :

« Si $a + b = 43$, que vaut $a + b + 2$? »

« Si $m - 246 = 762$, que vaut $m - 247$? »

Dans ces deux exercices, les élèves peuvent uniquement raisonner au départ de 43 ou de 246. Il suffit d'ajouter 2 à 43 pour le premier exercice et, pour le deuxième, comme on retire un de plus que 246 à m , on obtiendra une réponse un peu plus petite que 762, donc ce sera 761.

Dans la même logique, lorsqu'ils sont face à des calculs algébriques, ces élèves ne prennent en compte que les nombres. Par exemple, face à l'exercice $3a + 2b - 5a + 3 + 7b$, certains proposent la réponse $10ab$ en ne considérant que les nombres et les signes opératoires du calcul ($3 + 2 - 5 + 3 + 7 = 10$), et en recopiant les lettres, sans chercher à leur donner sens.

- **La lettre est associée à un objet**

Cette conception de la lettre est très répandue chez les élèves et persiste souvent durant les deux premières années du secondaire. Ces élèves considèrent que la lettre est avant tout l'abréviation d'un mot ou l'associent à une unité, comme l'expliquent ces élèves, face à l'exercice : « que représente la lettre n dans le calcul $10n + 20$? » :

« n est une unité qui peut s'additionner et se soustraire entre « n » et pas avec d'autres lettres »

« c'est seulement un élément neutre, c'est pour ça que c'est n (n de neutre) »

« Une pomme. Et la pomme se mélange avec des pommes et rien d'autre »

Cette manière de considérer la lettre va permettre de réaliser un certain nombre d'exercices.

Par exemple, lorsqu'il s'agit de réduire l'expression $3a + 5a$, les élèves estiment que c'est comme prendre 3 ananas et encore 5 ananas, cela donnera 8 ananas, donc $8a$. Dans le même ordre d'idée, « $8t + 3m$ » ne peut être réduit, car c'est comme si on avait des tonnes et des mètres, on ne peut pas les additionner.

Ces élèves sont en revanche mis en difficulté lorsqu'il s'agit par exemple de multiplier des expressions algébriques : comment peut-on obtenir des a^2 en multipliant des ananas par des ananas ? Ils auront également des difficultés lors de la mise en équation de problèmes, car pour ces élèves, l'idée de pouvoir exprimer, au départ d'une même lettre, souvent nommée x , plusieurs objets différents est tout à fait inconcevable.

Afin d'aider les élèves à mieux comprendre le sens algébrique des lettres, il est important de les plonger dans des activités impliquant des quantités indéterminées et de les amener à prendre conscience du statut des lettres qu'ils utilisent dans ces situations. Lors de la mise en équation, il convient de leur faire comprendre que toutes les quantités indéterminées de l'énoncé doivent être exprimées au départ d'une seule et même quantité indéterminée.

Une difficulté à comprendre pourquoi les procédures permettent de transformer des expressions algébriques

Un mathématicien se permet de faire une confiance aveugle à des règles qu'il connaît et ceci tant qu'aucun obstacle ne survient. Toutefois, en cas de difficultés, il a la possibilité d'abandonner ce fonctionnement en « pilote automatique » pour mettre en œuvre d'autres types de procédures. De plus lorsqu'il cherche à mettre un problème en équation, c'est parce qu'il a une conscience claire du sens de la lettre en algèbre qu'il va pouvoir utiliser à bon escient l'outil algébrique.

Mais cette force de l'algèbre est sans doute également à l'origine de la principale difficulté à enseigner l'algèbre : **certains élèves ne cherchent pas à donner sens aux règles qu'ils appliquent lorsqu'ils transforment des expressions** et deviennent ainsi des **calculeurs aveugles** (Sackur, Drouhard, Maurel & Pécal, 1997). Pour eux, une transformation algébrique est correcte si elle est conforme à la règle apprise. Par exemple, quand on leur demande pourquoi on ne peut réduire l'expression « $7n + 2$ » en « $9n$ », ces élèves n'ont comme argument que « les deux termes n'ont pas la même partie littérale » : l'idée que ce calcul $7n + 2 = 9n$ ne fonctionne que pour 1 seul nombre ne leur paraît pas une justification pertinente.

Il faut donc amener les élèves à être pleinement conscients :

- 1) qu'une expression comme $m(2m + 3)$ a une valeur numérique
- 2) que cette valeur dépend de la valeur de m
- 3) et qu'elle n'est pas modifiée lorsqu'on applique une transformation conforme aux règles algébriques, comme par exemple $2m^2 + 3m$

Il s'agit là d'un objectif essentiel pour que les élèves parviennent à réellement donner du sens aux transformations d'expressions qu'ils doivent maîtriser au terme du premier degré.

Des faiblesses dans la compréhension de la propriété de distributivité

La propriété de distributivité est très souvent centrale dans le calcul algébrique, que ce soit pour supprimer des parenthèses, pour réduire des termes semblables, pour effectuer le produit de polynômes ou encore pour explorer les identités remarquables. Or, des études montrent que très souvent, cette propriété mathématique est peu travaillée en tant que telle à l'école primaire et qu'il est donc important de la revoir en profondeur, lors de l'introduction des techniques algébriques (Constantin & Coulane, 2017).

Outils d'enseignement-apprentissage sur le sens de la lettre

Six outils, élaborés dans le cadre de recherches visant à améliorer les performances des élèves en algèbre, permettent d'aborder deux thématiques principales : le sens de la lettre et le sens des opérations impliquant des lettres.

Le tableau suivant présente une vue d'ensemble de ces activités, en identifiant le statut des lettres véhiculé dans chaque activité (nombre généralisé, inconnue ou variable) et le type d'opérations ciblées (transformations algébriques ou résolution d'équations).

| Activités | Sens de la lettre | | | Sens des opérations impliquant des lettres | |
|---|--------------------------|-------------------|-------------------|--|-----------|
| | Lettre-nombre généralisé | Lettre - inconnue | Lettre - variable | Transformations algébriques | Équations |
| Apprendre des tours de magie mathématiques pour comprendre le sens de la lettre | | | | | |
| Analyser des mosaïques pour donner du sens à la lettre | | | | | |
| Utiliser des cartes et des enveloppes pour résoudre des équations | | | | | |
| Utiliser les programmes de calculs pour établir les règles liées aux sommes et produits algébriques | | | | | |
| Analyser des démarches correctes et incorrectes pour donner du sens aux techniques algébriques | | | | | |

Le sens de la lettre

Les « **Tours de magie** » (Demonty & Vlassis, 2018) amènent les élèves à transformer des calculs en d'autres beaucoup plus simples à réaliser. Dans cette activité, la lettre ne s'impose pas d'emblée ; elle constitue plutôt un symbole utile pour pouvoir simplifier des opérations parfois très complexes, lorsqu'elles sont effectuées sur des nombres particuliers. Cette activité peut être abordée en début de 1^{re} secondaire, avant même l'introduction de la lettre : elle met en effet l'accent sur l'analyse des relations entre les nombres plutôt que sur la recherche d'une réponse particulière au calcul. Elle installe donc les prémices d'un raisonnement qui pourra par la suite aider les élèves à donner du sens à la lettre-nombre généralisé (voir fiche outils « **Apprendre des tours de magie mathématiques pour comprendre le sens de la lettre** »).

L'activité « **Antoine fait des mosaïques** » (Demonty & Vlassis, 2018) plonge les élèves dans une situation de généralisation, où il s'agit d'énoncer une règle permettant de déterminer le nombre de carrés nécessaires pour construire des mosaïques de dimensions variées, mais construites selon une même logique. Cette règle s'exprime d'abord par un calcul, puis par une expression en mots, et enfin par une formule. Cette activité amène l'élève à l'exploitation algébrique de la lettre, en mobilisant le concept de lettre-variable (voir fiche outils « **Analyser des mosaïques pour donner du sens à la lettre** »).

Elle peut être abordée à différents moments de l'apprentissage.

- En début de 1^{re} secondaire, elle amène les élèves à dégager l'importance d'introduire un nouveau symbole (la lettre) pour désigner une quantité indéterminée.
- Plus tard, elle permet de réinvestir ce concept de lettre et de revoir quelques transformations algébriques en contexte.

Les « **problèmes des enveloppes** » (Radford, 2009) ont pour but de traiter plus précisément la conception erronée de lettre « objet » en amenant les élèves à exprimer, par une lettre, non pas un objet (une enveloppe comprenant des cartes), mais une quantité indéterminée (le nombre de cartes contenues dans une enveloppe). Cette activité envisage la lettre-inconnue puisqu'elle s'insère dans le contexte de la résolution d'équations (voir fiche outils « **Utiliser des cartes et des enveloppes pour résoudre des équations** »).

Les « **programmes de calculs** » (Grugeon, 2012) travaillent la perception de la lettre comme un nombre généralisé. Dans cette activité, les élèves doivent réaliser des programmes de calculs avec plusieurs nombres afin de repérer ceux qui amènent toujours au même résultat. Il s'agit alors d'exprimer ces programmes de manière algébrique en utilisant la lettre pour représenter n'importe quel nombre (voir fiche outils « **Utiliser les programmes de calculs pour établir les règles liées aux sommes et produits algébriques** »).

Le sens des opérations impliquant des lettres

Une autre activité cible directement les opérations impliquant les lettres.

L'« **analyse de démarches correctes et erronées** » (Booth, 2015) amène les élèves à réfléchir sur des calculs algébriques ou des équations résolus par des élèves fictifs, ces démarches étant clairement mentionnées comme correctes ou erronées. En ce sens, cette activité a pour but d'amener les élèves à abandonner les comportements de calculateurs aveugles. En faisant la part belle à l'argumentation, l'activité amène les élèves à comprendre en profondeur pourquoi des démarches sont valides ou non : on retravaille ainsi le sens de la lettre, le sens de l'égalité et les propriétés de l'égalité. Dans cette

activité, la lettre est envisagée en tant que nombre généralisé ou en tant qu'inconnue (voir fiche outils « Analyser des démarches correctes et incorrectes pour donner du sens aux techniques algébriques »).

En s'appuyant sur un modèle visuel, l'activité « **Antoine fait des mosaïques** » peut générer des formules algébriques équivalentes et variées. En ce sens, elle permet de rappeler l'idée que des expressions algébriques équivalentes désignent en réalité des mêmes quantités et ce, même si elles sont indéterminées (voir fiche outils « Analyser des mosaïques pour donner du sens à la lettre »).

Les « **problèmes des enveloppes** » (Radford, 2009) ont pour but d'introduire un support visuel permettant de donner du sens à la résolution algébrique d'équations (voir fiche outils « Utiliser des cartes et des enveloppes pour résoudre des équations »).

Les « **programmes de calculs** » (Grugeon, 2012) visent à donner du sens à la réduction de sommes et produits algébriques (voir fiche outils « Utiliser les programmes de calculs pour établir les règles liées aux sommes et produits algébriques »).

Un diagnostic pour agir : évaluer les acquis et les faiblesses des élèves pour orienter son enseignement

Dès le début de la première secondaire, il importe de faire le point sur ce que les élèves maîtrisent déjà et qui sera utile dans les apprentissages algébriques : quelle(s) conception(s) ont-ils de l'égalité ? Parviennent-ils à réfléchir au départ de calculs mentaux abordés à l'école primaire, ou ont-ils simplement mémorisé des techniques sans chercher à en comprendre le sens ? Quel sens donnent-ils à la lettre rencontrée dans les formules apprises à l'école primaire ?

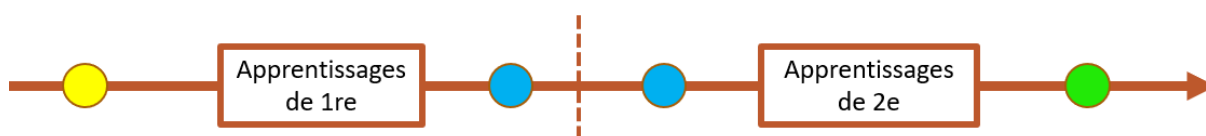
Un **test diagnostique** à proposer avant le début des apprentissages de 1^{re} peut constituer une aide pour répondre à ces questions. En effet, grâce aux explications données par les élèves, il est possible de se faire une idée de leur manière de réfléchir. L'enjeu de ce test diagnostique est moins de repérer ce que les élèves ne maîtrisent pas que de **mettre en évidence les forces de la classe**, sur lesquelles l'enseignant peut s'appuyer lors des apprentissages algébriques. Les liens, qu'il peut établir avec des situations que les élèves connaissent et maîtrisent, ne peuvent qu'être bénéfiques pour donner du sens aux nouveaux apprentissages et renforcer la confiance des élèves.

D'autres tests, à proposer au terme des apprentissages de 1^{re} et 2^e secondaire apporteront des informations quant à la progression des élèves dans ce domaine algébrique.

Tests diagnostiques sur le sens de la lettre et les opérations impliquant des lettres

Trois **tests diagnostiques** ont été élaborés pour prendre place à quatre moments de la scolarité des élèves du premier degré de l'enseignement secondaire :

- avant le début des apprentissages de 1^{re},
- après les apprentissages de 1^{re} et avant ceux de 2^e,
- après les apprentissages de 2^e.



L'objectif de ces tests est d'aider les enseignants à identifier les forces et besoins prioritaires de leurs élèves en algèbre, en vue de choisir les activités particulièrement utiles pour les aider à progresser dans leurs apprentissages tout au long du degré.

Certaines thématiques concernent les concepts algébriques, et plus précisément :

1. **le sens de l'égalité** : ont-ils conscience que deux opérations complètement différentes peuvent toutefois être équivalentes ? Parviennent-ils à exprimer l'idée que le signe d'égalité doit être mis entre deux expressions qui désignent le même nombre ?
2. **le sens de la lettre** : ont-ils compris que la lettre en algèbre pouvait avoir différents statuts ? Et, pour les plus jeunes (prétest), ont-ils conscience que les lettres utilisées dans les formules sont plus que de simples abréviations de mots et qu'elles peuvent même désigner, dans certaines situations, un même nombre ?

D'autres ciblent plus particulièrement la **compréhension des procédures** : pour les plus jeunes (prétest), ce sont les procédures de calcul mental qui sont principalement investiguées. L'enjeu est de voir dans quelle mesure les élèves sont, même intuitivement, conscients de la manière dont ces procédures fonctionnent. Pour les plus âgés (post-tests 1 et 2), c'est la compréhension des procédures algébriques qui est ciblée. Enfin, **l'application directe des procédures algébriques** est approfondie. Pour les plus jeunes (prétest), ces techniques algébriques sont convoquées dans des contextes autorisant leur utilisation avant même l'introduction de la lettre. Pour les élèves plus âgés (post-tests 1 et 2), ce sont les techniques hors contexte qui sont mises à l'honneur.

Par ailleurs, deux points d'attention sont convoqués, pour les élèves de fin de 1^e et 2^e secondaire :

- d'une part, la difficulté à **comprendre les procédures (risque d'agir en calculateur aveugle)** : il s'agit ici de repérer des élèves qui, tout en étant faibles dans l'application directe de techniques, ne parviennent pas à donner du sens à celles-ci.
- et d'autre part, les élèves particulièrement mis en difficulté lorsqu'il s'agit de **percevoir la propriété de distributivité** de la multiplication par rapport à l'addition.

Le tableau suivant détaille la progression envisagée dans ces différentes thématiques. Les questions proposées en début de 1^{re} secondaire appréhendent des notions vues à l'école primaire et sont ainsi ancrées dans le domaine numérique. Les raisonnements nécessaires pour répondre correctement à ces questions constituent en quelque sorte les socles sur lesquels s'ancreront les apprentissages algébriques ultérieurs. Les questions des autres épreuves s'insèrent plus directement dans le contexte algébrique.

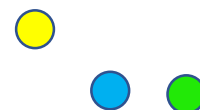
Acquis/déjà là

Sens de l'égalité et sens de la lettre



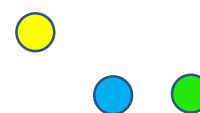
Compréhension des procédures

- procédures de calcul mental
- procédures de calcul algébrique



Maitrise des procédures

- procédures impliquant une réflexion algébrique (pas de lettre)
- procédures hors contexte (équations, calcul algébrique)



Points d'attention

Difficulté à comprendre les procédures

(risque de calculateurs aveugles)



Difficulté à percevoir la distributivité



Dans tous les tests, il est souvent demandé aux élèves **d'expliquer leurs démarches** pour permettre d'analyser plus finement les procédés utilisés en allant au-delà de la réponse.

L'objectif du premier test est bien, comme expliqué ci-avant, de repérer les déjà-là des élèves. Le but des deux autres tests n'est plus du même ordre : il s'agit ici de mettre en évidence les compétences que l'élève a acquises, celles en cours de construction et celles qu'il n'a pas acquises. Étant donné le caractère évolutif des tests, l'attribution de scores n'est pas préconisée car leur comparaison temporelle serait caduque. L'idée est bien que ces tests constituent pour l'enseignant une aide à la mise en place d'un accompagnement plus personnalisé, éventuellement basé sur des activités similaires à celles présentées précédemment.

Références

Booth, L. R. (1984). *Children's strategies and errors*. London : NFER-Nelson.

Constantin, C., & Coulange, L. (2017). La multiplication et la propriété de distributivité au primaire : une entrée dans la pensée algébrique? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20 (3), 9-32. <https://doi.org/10.7202/1055726>

Demonty, I., & Vlassis, J. (2018). *Développer l'articulation arithmétique algèbre entre le primaire et le secondaire*. De boeck.

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., & Delozanne, E. (2012). *Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives, 137-162.

- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Open.
- Kuchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school* 7(4), 23-56.
- Picciotto, H., & Wah, A. (1993). A New Algebra: Tools, Themes, Concepts. *Journal of Mathematical Behavior*, 12(1), 19-42.
- Radford, L. (2013). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Radford, L., Demers, S., & Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques*. Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques.