FÉDÉRATION WALLONIE-BRUXELLES
ENSEIGNEMENT.BE

ÉVALUATION EXTERNE NON CERTIFICATIVE 2017

FORMATION MATHÉMATIQUE

PISTES DIDACTIQUES

3e ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

SOMMAIRE

Ce document de pistes didactiques a été élaboré par le groupe de travail chargé de la conception de l'évaluation externe de 3^{e} primaire en formation mathématique :

Arnaud BAY, enseignant ;

Perry BINARD, enseignant ;

Gina BRUNATO, conseillère pédagogique ;

Isabelle DEMONTY, chercheuse au Service d'analyse des Systèmes et Pratiques d'enseignement de l'Université de Liège ;

Christelle DUEZ, enseignante ;

Patricia FLÉCHIR, enseignante ;

Véronique FRÈRE, conseillère pédagogique ;

Jeannine LEROY, inspectrice ;

Régine LEUNEN, conseillère pédagogique ;

Marie-Noëlle MEERSSEMAN, chargée de mission au Service général du Pilotage du Système éducatif ;

Luc MICHIELS, conseiller pédagogique ;

Catherine PALM, inspectrice ;

Christophe PIROTTE, inspecteur ;

Jean-Louis SARLET, inspecteur ;

Thibault WAUTHIER, enseignant.

INTRODUCTION

Ce document fait suite aux résultats de l'évaluation externe en formation mathématique administrée en octobre 2017 dans les classes de 3e année primaire. Cette évaluation diagnostique et formative avait pour but d'établir un bilan de l'acquisition de certaines compétences. En particulier, il s'agit de déceler celles qui sont moins bien maitrisées et qui doivent faire l'objet d'une attention particulière.

Les compétences choisies par le groupe de 3e primaire l'ont été en commun avec celui de 5e primaire afin de permettre aux équipes éducatives de travailler en continuité. Les résultats aux épreuves ont abouti à des conclusions différentes. Par conséquent, le travail des *Pistes didactiques* a pris des chemins spécifiques. N'hésitez pas à aller consulter le document de 5e primaire sur **www.enseignement.be**.

QUELLES SONT LES COMPÉTENCES QUI ONT POSÉ PARTICULIÈREMENT PROBLÈME ?

Dans le domaine des *nombres*, la décomposition d'un nombre et une utilisation pertinente du système décimal pour effectuer du calcul mental est complexe pour de nombreux élèves. Le sens de l'égalité et l'utilisation du signe « = » pose problème également surtout lorsqu'il se place entre deux ou plusieurs opérations désignant un même nombre. La maitrise des tables de multiplication est une priorité, même lorsqu'elle concerne les petits nombres. En ce qui concerne la propriété de commutativité, de nombreux élèves ont tendance à la généraliser à l'ensemble des quatre opérations, ce qui risque d'avoir des conséquences importantes dans la bonne acquisition des stratégies de calcul mental, par exemple.

Dans le domaine des *grandeurs*, comprendre qu'une fraction, comme $\frac{1}{4}$, implique que la grandeur fractionnée puisse être exactement reproduite quatre fois dans l'unité, est complexe pour une majorité d'élèves. En ce qui concerne les autres compétences évaluées, aucune ne prévoit de certification au terme de la 2e année primaire. L'évaluation a donc permis de cibler le « déjà-là » sur lequel pourront s'ancrer les premiers apprentissages formels à entamer au cycle 8-12 : il semble que la notion même de contour extérieur d'une figure ou de dénombrement d'une grandeur unité pour déterminer le volume d'un solide ou l'aire d'une figure sont des notions déjà partiellement acquises par les élèves. La proportionnalité n'est à la portée des élèves que si elle est questionnée dans un contexte familier et accompagnée d'un support visuel autorisant à nouveau le dénombrement direct des quantités impliquées.

De manière *transversale,* nous avons pu constater des difficultés liées au vocabulaire, ainsi qu'à l'exploitation de supports visuels susceptibles d'organiser certains concepts essentiels en mathématiques, par exemple les tapis de nombres, les arbres de décomposition ou les représentations visuelles de la proportionnalité.

Ce recueil de pistes se propose d'approfondir les compétences des élèves dans le domaine des nombres et des opérations, en explorant des supports visuels aidant à leur donner sens. Les enseignants souhaitant approfondir la construction et l'utilisation de démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes sont invités à se référer aux pistes de 2008 destinées aux élèves de 5e primaire. Une vaste section y était effectivement consacrée aux pages 73 à 89. Les fractions et la proportionnalité ont été approfondies dans le cadre des pistes de 2008 et 2011 en 2e primaire (pistes 2008 – pages 86 à 122 pour les fractions et pistes 2011 – pages 28 à 47 pour la proportionnalité). Ces pistes sont téléchargeables en cliquant sur le lien suivant :

http://www.enseignement.be/pistes didactiques 2008 et 2011

| DÉCOMPOSER ET RECOMPOSER DES NOMBRES, AU CŒUR DES ACTIVITÉS PROPOSÉES DANS CES PISTES...

Le groupe de travail chargé de la conception de ces pistes didactiques a choisi de développer une réflexion sur la compétence « décomposer et recomposer », avec en point de mire, un double objectif : **donner du sens au nombre** d'une part et **donner du sens aux opérations sur les nombres** d'autre part.

> Dans ce document, au travers du terme « donner du sens », nous souhaitons faire passer l'idée que les supports peuvent aider les élèves à comprendre ce qu'ils font et à se détacher ainsi de l'idée qu'ils appliquent simplement une règle ou une technique dont ils ne comprennent pas le fondement.

Décomposer un nombre pour lui donner du sens permet aux élèves de comprendre qu'un nombre comme 3, 75 ou 4 500 n'est pas simplement un mot dans la chaine verbale des nombres, mais désigne également une quantité qui peut se décomposer de multiples façons en utilisant des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division.

Mais décomposer un nombre est également essentiel pour faciliter le calcul. Par exemple, le nombre 11 peut se décomposer en 10 + 1. Cette décomposition pourra alors être impliquée dans les 3 calculs suivants :

49 + 11	49 – 11	49 × 11

On peut, dans tous les cas, utiliser la décomposition de 11 en 10 + 1, mais en fonction de l'opération en jeu, la décomposition se réalisera de diverses façons en fonction cette fois des propriétés des opérations.

49 + 11	49 – 11	49 × 11
= 49 **+ 10 + 1**	= 49 – (10 + 1)	= 49 × (10 + 1)
= (49 + 10) + 1	= 49 **– 10 – 1**	= (49 **× 10**) + (49 **× 1**)
= 59 + 1	= 39 – 1	= 490 + 49
= 60	= 38	= 539

Si, en général, les élèves comprennent que 49 + 11, c'est 49 + **10 + 1**, certains ne tiennent pas compte de l'opération dans laquelle cette décomposition de 11 est utilisée et en arrivent alors à écrire que :

49 – 11 = 49 – **10 + 1**

ou 49 × 11 = 49 × **10 + 1**

L'objectif de ces *Pistes didactiques* est donc de proposer une réflexion accompagnée d'activités à mener en classe sur la décomposition et recomposition des nombres. Afin d'aider les élèves à donner du sens aux démarches qu'ils utilisent, des supports visuels seront développés : le tapis de nombre, l'arbre de décomposition, des bandelettes, le tableau des 100 premiers nombres organisé par dizaines, la droite des nombres ainsi que des situations de vie.

La suite du document est structurée en deux sections qui vous permettront de découvrir 12 activités organisées autour de 21 fiches d'apprentissages.

La première section se centre sur des activités visant à travailler la compétence « **décomposer et recomposer pour donner du sens au nombre** ».

Elle s'articule autour de 5 activités.

- Les activités 1 et 2 explorent la décomposition de nombres à l'aide des arbres de décomposition. Elle débute par un travail dans la cour de récréation, puis en classe, à l'aide de supports concrets qu'il vous faudra trouver (comme des post-it ou des aimants) puis avec des supports écrits qui vous sont fournis dans les fiches associées à ces activités.
- Les activités 3 à 5 explorent cette décomposition à l'aide des tapis de nombres. Le travail s'organise au départ d'un matériel concret (des trombones) qu'il vous faudra trouver puis à l'aide de supports écrits fournis dans les fiches.

La deuxième section envisage des situations centrées sur la compétence « **décomposer et recomposer pour donner du sens aux opérations sur les nombres** ». Elle s'articule autour de 7 activités.

- Les activités 6 à 8 amènent les élèves à explorer les décompositions d'un nombre en dizaines et unités pour effectuer une addition ou une soustraction. Dans ces activités, nous avons privilégié l'utilisation de la grille des 100 premiers nombres naturels pour aider les élèves à donner sens aux opérations envisagées. Ce support est fourni dans les fiches.
- Les activités 9 à 12 envisagent un panel plus large de décompositions d'un nombre pour effectuer des additions, des soustractions et des multiplications. Dans ces activités, seront proposés des supports tels que des bandelettes, la droite des nombres ainsi que des situations de vie. Ces supports sont également fournis dans les fiches.

Ces activités ont été essayées dans des classes de 3^{e} et 4^{e} années primaires. Les commentaires issus de ces essais, les productions des élèves recueillies ainsi que les photos que vous trouverez dans ces pistes vous permettront, nous l'espérons, de découvrir tout le potentiel qu'elles offrent. En effet, la richesse des activités réside moins dans les fiches que les élèves complèteront au fur et à mesure des apprentissages, que dans l'exploitation que vous pourrez en faire en classe. En effet, les questions posées aux élèves, l'analyse de leurs démarches spontanées et la confrontation de celles-ci lors des mises en commun sont autant d'éléments qui vont vous permettre de tirer pleinement profit des situations.

Nous proposons donc, pour chaque section, une analyse organisée en trois points.

- Tout d'abord les constats de l'épreuve qui permettent de justifier l'intérêt des activités.
- Ensuite un point intitulé « intentions et commentaires » dans lequel vous pourrez comprendre les orientations pédagogiques et mathématiques qu'il nous semble judicieux d'avoir en tête avant d'exploiter les activités en classe, avec les élèves.
- Et enfin, une présentation des activités proposées, accompagnées de photos, de productions d'élèves et de fiches à leur distribuer.

La seconde section se termine en outre par une réflexion permettant de faire le lien entre les propriétés des opérations les plus souvent utilisées en calcul mental et la manière dont elles peuvent prendre sens, dans le contexte direct de leur utilisation, lors de l'apprentissage des techniques de calcul mental particulièrement travaillées en 3e et 4e primaires.

En fin de document, vous trouverez quelques liens internet permettant de trouver d'autres idées pour approfondir l'un ou l'autre thème.

1 DÉCOMPOSER ET RECOMPOSER POUR DONNER DU SENS AUX NOMBRES

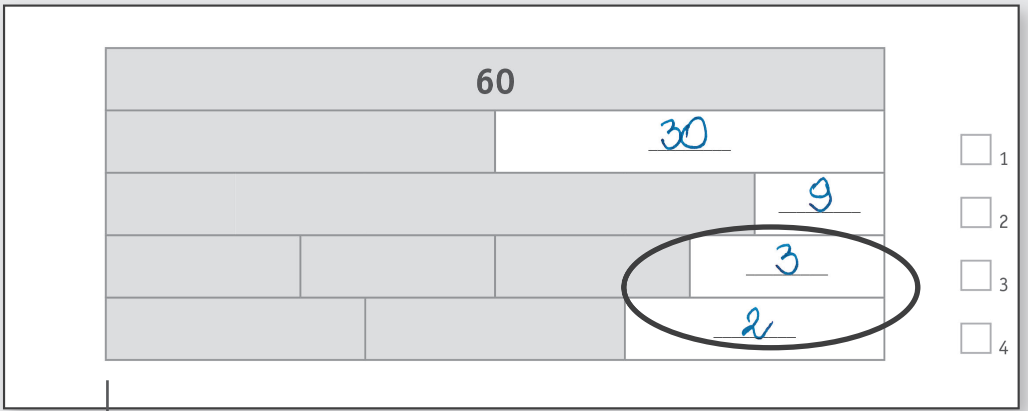
1.1 | LES CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Parmi les questions composant l'épreuve soumise aux élèves à l'automne 2017, les quatre premières ciblaient la composition et la décomposition de nombres, envisagées au travers de l'exploitation d'un tableau de nombres (question 1), d'un arbre de décomposition (questions 2 et 4) ou d'énoncés (question 3).

Si l'analyse des énoncés en mots (question 3) est réussie par une majorité d'élèves, plusieurs indices nous amènent à penser que **les élèves ne comprennent que superficiellement la logique de construction des supports comme des tapis de nombres ou des arbres de décomposition** même si, particulièrement lorsqu'il s'agit de composer le nombre 96, des erreurs de calcul apparaissent également.

Exemples

Par exemple, l'analyse des réponses obtenues à l'exploitation du tapis du nombre 60 montre que, si plus de 80 % des élèves conçoivent bien que 60 peut être décomposé en 2 fois 30, le lien entre le nombre 60 et les décompositions successives en trois parties égales (item 4) ou 4 parties égales (item 3) ne sont pas aussi évidentes pour les élèves et certains perdent de vue le sens du support, comme l'illustre la discussion suivante entre un enseignant et un élève :



Enseignant : *Pourquoi as-tu écrit 3 (item 3) et 2 (item 4) ?*

Élève : *Parce qu'il y avait trois parties grisées (item 3) ou 2 parties grisées (item 4).*

Enseignant : *Et là, pourquoi as-tu écrit 30 ?*

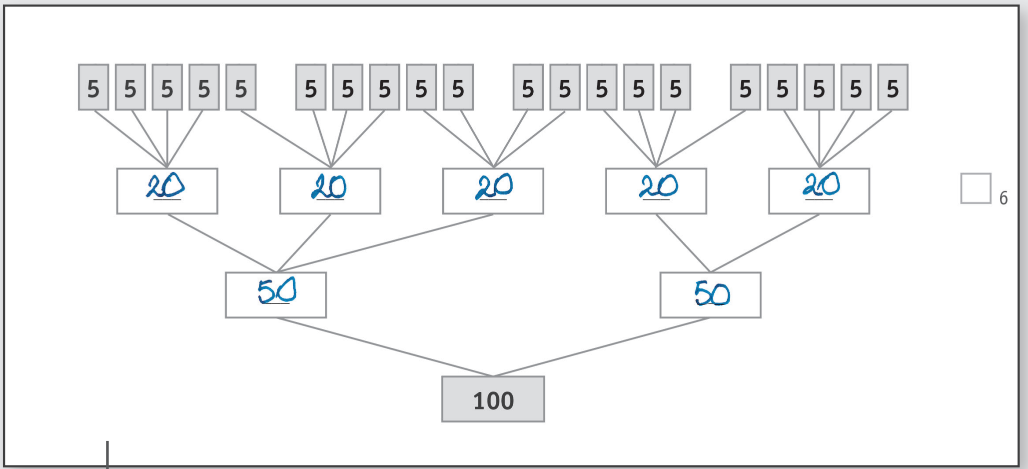
Élève : *Parce que 60, c'est 30 et 30.*

Enseignant : *Et là, pourquoi avoir écrit 9 ?*

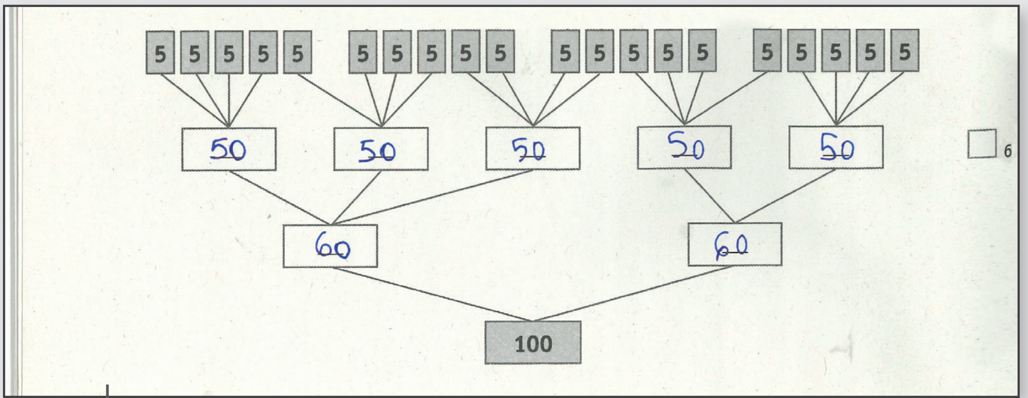
Élève : *Là, il y a une grande bande (E montre la partie grisée de l'item 2) et une bande beaucoup plus petite ici (montre la partie blanche de l'item 2). Comme en tout ça fait 60, j'ai écrit 9.*

Cette discussion montre que l'élève est conscient du sens du support lorsqu'il explique sa réponse à l'item 1 et 2 (même si dans ce second cas, sa solution n'est pas correcte), mais il semble réellement perdre de vue la logique de décomposition du nombre 60 lorsqu'il explique pourquoi il a écrit 2 et 3 aux deux derniers items.

En ce qui concerne l'arbre de décomposition de 100 (items 5 et 6), si la majorité des élèves sont parvenus à compléter les deux premières lignes de l'arbre (item 5 – 74 % de réussite), les difficultés s'intensifient dans la seconde moitié, où visiblement, de nombreux élèves ne sont pas parvenus à prendre en compte les différents indices fournis par le support (item 6 – 31 % de réussite). Tout comme pour le tapis de nombres, certains perdent de vue qu'il s'agit de décomposer le nombre 100, d'autres ont bien en tête que le total de chaque ligne de l'arbre doit être égal à 100, mais ne prennent pas en compte les liens regroupant les cases présentées sur deux lignes successives. Les deux productions présentées à la page suivante illustrent ces tendances.



Cet élève a visiblement bien pris en compte le fait que chaque ligne envisageait une décomposition du nombre 100. En revanche, il a sans doute pensé que les décompositions de 100 étaient symétriques, ce qui ne lui a pas posé problème pour compléter la deuxième ligne (100 = 5 × 20) mais bien la troisième : une prise en compte des liens unissant les nombres écrits sur ces deux lignes l'aurait aidé à mieux répondre à cet item.



Dans ce cas, l'élève perd de vue le fait qu'il s'agit de composer le nombre 100, comme en attestent les sommes des nombres figurant sur les lignes 2 et 3 : 250 pour la ligne 2 et 120 pour la ligne 3.

1.2 | INTENTIONS ET COMMENTAIRES

Les difficultés brièvement décrites ci-dessus nous amènent à questionner le rôle de ces supports dans la compréhension du nombre. En effet, il nous semble essentiel de garder à l'esprit que **ces supports ne doivent pas être enseignés pour eux-même**s, mais doivent au contraire **constituer des outils pour donner sens aux relations quantitatives entre les nombres**.

Quels peuvent être dès lors leurs intérêts en regard de la compréhension du nombre ? Nous en avons répertorié 4 :

- comprendre l'aspect cardinal du nombre ;
- utiliser la soustraction comme la réciproque de l'addition et la division comme la réciproque de la multiplication ;
- développer des démarches de calculs mentaux et écrire les calculs correspondants ;
- mémoriser des décompositions de certains nombres.

1.2.1 | COMPRENDRE L'ASPECT CARDINAL DU NOMBRE

Pour pleinement comprendre un nombre, l'élève doit maitriser sa composition additive : « *L'enfant maitrise la composition additive des nombres s'il est capable de comprendre l'identité d'un tout au travers des différentes décompositions additives de ses parties* »[1].

Exemple

14 = 10 + 4 = 11 + 3 = 8 + 6 = 9 + 5

L'ensemble « 14 » peut être décomposé en sous-ensembles et les différentes décompositions réalisées ne remettent pas en cause le cardinal de l'ensemble initial.

Par la suite, les élèves vont également pouvoir apprendre les décompositions multiplicatives des nombres en approchant notamment les notions de multiples et diviseurs.

Exemple

14 = 7 × 2 = 1 × 14

1.2.2 | UTILISER LA SOUSTRACTION COMME LA RÉCIPROQUE DE L'ADDITION ET LA DIVISION COMME LA RÉCIPROQUE DE LA MULTIPLICATION

Les tapis de nombres ou les arbres de décomposition peuvent amener les élèves à envisager les liens entre les opérations.

Lorsqu'ils symbolisent par un calcul une démarche pour compléter une case d'un tapis ou d'un arbre de décomposition, les élèves peuvent analyser les opérations correspondant aux décompositions d'un même nombre, et en particulier aux liens entre l'addition et la soustraction ou entre la multiplication et la division (voir exercice 1 ci-après) ou entre l'addition réitérée et la multiplication (voir exercice 2 ci-après).

[1] C. VAN NIEUWENHOVEN, J. GRÉGOIRE & M.-P. NOËL, *Le Tedi-Math: test diagnostique des compétences de base en mathématiques*, ECPA, Paris, 2002.

Exercice 1

<table>
<tr><td colspan="14">**14**</td></tr>
<tr><td colspan="7"></td><td colspan="7"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

14
7 + 7 = 14 ou 2 × 7 = 14 ou 14 :2 = 7
2+2+2+2+2+2+2 = 14 ou 7 × 2 = 14 ou 14 : 7 = 2
1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 14 ou 14 × 1 = 14 ou 14 : 14 = 1

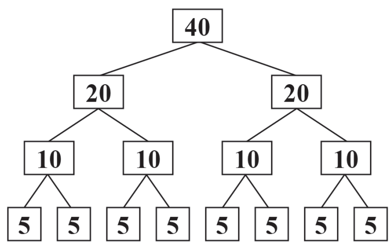
Exercice 2

15. Qui s'est trompé ?

Aujourd'hui, la classe de Mathias travaille <u>le nombre 40</u>. Les élèves doivent trouver différentes façons de représenter ce nombre.

<u>Observe</u> bien les fiches produites par 3 élèves.
Une élève <u>s'est trompée</u>.

Leila



Eva

$$40 = \begin{cases} 10 + 10 + 10 + 10 \\ 4 \times 10 \\ 2 \times 20 \\ 20 + 20 \end{cases}$$

Catherine

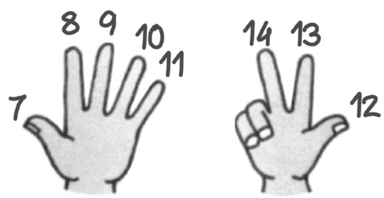
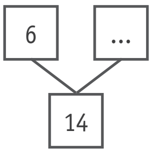
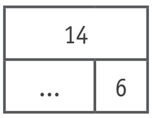
<table>
<tr><td colspan="4">40</td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td><td colspan="2">10</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

<u>Ecris</u> son prénom.

Source : *Évaluation externe non certificative - Mathématiques - 2e année de l'enseignement primaire - Carnet de l'élève,* FW-B/AGE, 2008.

1.2.3 | DÉVELOPPER DE PREMIÈRES DÉMARCHES DE CALCUL MENTAL ET ÉCRIRE LES CALCULS CORRESPONDANTS.

Compléter un tapis de nombres ou un arbre de décomposition peut également permettre de travailler les stratégies de calcul mental, lorsqu'on dépasse le dénombrement direct. En effet, en fonction des nombres indiqués sur ces supports, les élèves pourront être amenés à mettre en œuvre et verbaliser ces démarches. L'idée du tableau suivant est d'illustrer les possibilités qu'offrent les arbres de décomposition et les tapis de nombres pour développer le calcul mental :

Arbre ou tapis à compléter	Explication de démarches de calcul	Symbolisation des démarches par un calcul
	Démarche de dénombrement direct *Je compte à partir de 7 pour trouver combien je dois ajouter à 6 pour arriver à 14.*  *Donc, on a ajouté 8.*	Cette démarche s'appuie seulement sur la chaine verbale. Elle n'implique pas de (dé)composition de 14.
	**Démarche de (dé)composition s'appuyant sur la connaissance du double de 6[2].** *6 + ? = 14* *Je sais déjà que 6 et 6 font 12 et il faut encore ajouter 2 pour arriver à 14.* *Il faut mettre **8** dans la case.*	6 + 6 + 2 = 6 **+ 8** = 14
	**Démarche de (dé)composition s'appuyant sur la connaissance de la moitié de 14.** *14 – 6 = ?* *Je sais que 14, c'est 7 + 7, donc je vais déjà retirer 7, ça donnera 7. Mais alors, j'en ai retiré 1 de trop, donc la réponse sera **8**.*	14 **– 6** = 14 – 7 + 1 = 7 + 1 = 8
	Démarche de (dé)composition s'appuyant sur la connaissance du nombre 10. 6 + ? = 14 Je sais que *6 + 4, c'est 10. Il faut encore ajouter 4 pour arriver à 14.* *Il faut mettre **8** dans la case.*	6 + 4 + 4 = 6 **+ 8** = 14
	Démarche de (dé)composition s'appuyant sur la connaissance du nombre 10. *14 – 6 = ?* *Je retire d'abord 4 à 14 : 14 – 4 = 10.* *Ensuite, il faut encore retirer 2 : 10 – 2 = **8.*** *Donc il faut mettre **8** dans la case.*	14 **– 6** = 14 – 4 – 2 = 10 – 2 = 8

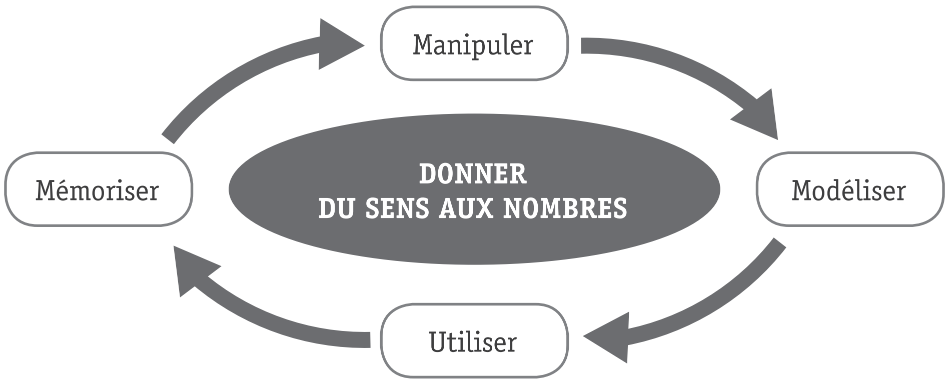
[2] Cette technique peut paraitre peu conventionnelle. Toutefois, des études ont montré que le passage par les doubles (ou les moitiés) est plus accessible aux jeunes élèves que le passage par les décompositions de 10 (Gravemeijer, 2002).

1.2.4 | MÉMORISER DES DÉCOMPOSITIONS DE CERTAINS NOMBRES

Les arbres de décompositions ou les tapis de nombres peuvent également constituer des supports riches pour aider à la mémorisation des décompositions des nombres, comme par exemple 10 ou 100. Cette mémorisation sera utile pour permettre aux élèves d'accéder à des stratégies de calcul mental plus sophistiquées. Par exemple, lorsque les nombres à composer/décomposer seront plus grands, certaines démarches (comme celles passant par les doubles) pourront être abandonnées au profit d'autres (notamment celles s'appuyant sur le passage à la dizaine qui permettront de rentrer au cœur du système décimal). Pour favoriser ces stratégies plus complexes, la mémorisation des décompositions de ces nombres « riches » comme 10 ou 100 sera nécessaire. Les résultats de l'épreuve externe ont montré que ces décompositions mémorisées ne posaient pas de grandes difficultés aux élèves. Les pistes didactiques proposées dans la suite ne développent dès lors pas cet aspect.

Les grandes étapes des activités proposées :

Qu'elles concernent les arbres de (dé)compositions ou les tapis de nombres, les activités se déclinent en plusieurs étapes synthétisées dans le schéma suivant :



Dans un premier temps, les élèves sont amenés à **manipuler** et verbaliser les moments vécus. Si, l'action directe est au départ l'activité principale suscitée, il s'agira que celle-ci soit progressivement mise en mots, afin que les élèves puissent s'en détacher. Cela pourrait se faire en plusieurs étapes résumées au travers des phrases suivantes (Mialaret[3], 1977) :

- **LE FAIRE PUIS LE DIRE**
- **LE FAIRE EN LE DISANT**
- **LE DIRE PUIS LE FAIRE**
- **LE DIRE SANS LE FAIRE**

Il s'agira également de **modéliser** les actions ainsi verbalisées par des traces écrites permettant de bien intégrer le fonctionnement des supports visuels que sont les arbres de décomposition et les tapis de nombres, ainsi que les liens qui les unissent avec les opérations sur les nombres. Les élèves seront ensuite amenés à **utiliser** ces supports dans le but de développer leurs compétences calculatoires. Et enfin, les élèves pourront **mémoriser** certaines démarches et certains supports (par exemple les décompositions de nombres particuliers, comme 10, 100 ou 1000), car ils seront nécessaires dans le développement de nouvelles stratégies plus élaborées.

[3] G. MIALARET, *La formation des enseignants*, Paris, PUF, coll. « Que sais-je ? », 1977.

1.3 | ACTIVITÉS CENTRÉES SUR LES ARBRES DE DÉCOMPOSITION

Travail avec du matériel authentique

- Activité 1 – *Construction des arbres de la classe - P. 19 à 23 - Fiche 1 agrandir et à imprimer 1× pour l'ensemble de la classe.*

Travail avec du matériel représenté ou symbolique

- Activité 2 – *Construction d'un arbre avec support visuel (aimants ou Post-it) - P. 24 à 25 - Fiche 2.*

Travail avec les outils plus formels

- Activité 2 (suite) – *Associations diverses - P. 26 - Fiche 3.*
- Activité 2 (suite) – *Des situations avec de plus grands nombres - P. 27 - Fiche 4.*

Les activités doivent permettre aux élèves d'apprendre :

- à composer et décomposer un nombre naturel (activités 1 et 2) ;
- à comprendre les deux composantes des arbres de (dé)compositions : les nœuds (correspondant aux cases de l'arbre) qui, à chaque étage, reconstituent le nombre étudié et les branches qui donnent des informations sur les relations unissant certains nœuds de l'arbre (activités 1 et 2) ;
- à utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence (activité 2) ;
- à utiliser les décompositions appropriées de nombres dans un calcul (activité 2) ;
- à utiliser la soustraction comme la réciproque de l'addition et la division comme la réciproque de la multiplication (activité 2).

Les activités proposées sont au nombre de 2, elles s'accompagnent de 4 fiches.

L'activité 1 se réalise dans la cour de récréation autour d'une répartition des élèves de la classe en diverses catégories (garçons, filles ; ceux dont le prénom débute par une voyelle ou une consonne…) dans le but de **faire vivre des décompositions** d'un petit nombre et de prendre conscience des deux éléments caractéristiques des arbres : les nœuds et les branches. Durant cette activité, les enfants dessinent sur le sol de la cour des arbres à 2 et à 3 niveaux. La fiche 1 fournit le matériel nécessaire pour faire vivre aux élèves la construction d'un arbre à 3 niveaux.

L'activité 2 se réalise en classe, autour d'une réflexion collective organisée en 2 étapes.

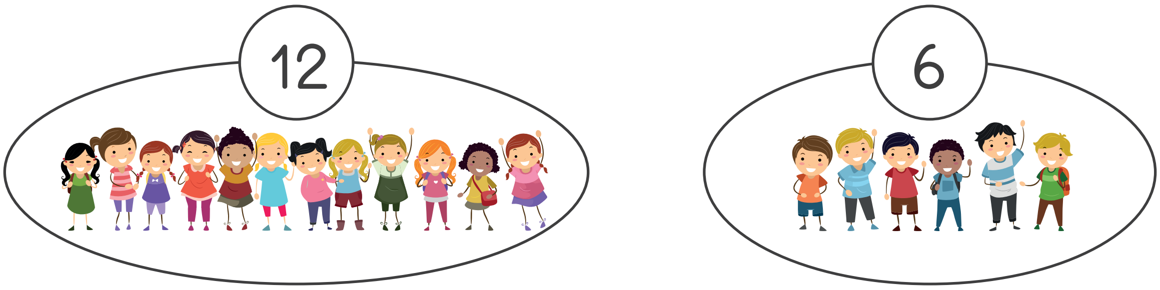
- Elle débute par la réalisation d'autres regroupements en catégories à l'aide d'objets qu'il est possible de dénombrer (par exemple des aimants). Les arbres sont alors introduits de manière plus formelle et des calculs sont indiqués en regard de chaque niveau de l'arbre. L'égalité des calculs présentés à chaque niveau de l'arbre sera également établie. La fiche 2 clôture la première partie de cette activité, les élèves étant invités à réaliser par écrit les démarches suscitées collectivement.
- Par la suite, les élèves explorent les fiches 3 et 4 et associent alors des arbres de décomposition avec des énoncés en mots et les calculs correspondants. Il s'agit ici de mettre en évidence **les démarches de calculs** utilisées par les élèves pour réaliser les (dé)compositions, de valider celles qui sont correctes et de comprendre pourquoi les autres sont erronées. Une fois les démarches validées, on pourra mettre en évidence les liens entre les calculs effectués (par exemple, le lien entre les additions et les soustractions).

1.3.1 | ACTIVITÉ 1 : CONSTRUCTION DES ARBRES DE LA CLASSE DANS LA COUR DE RÉCRÉATION

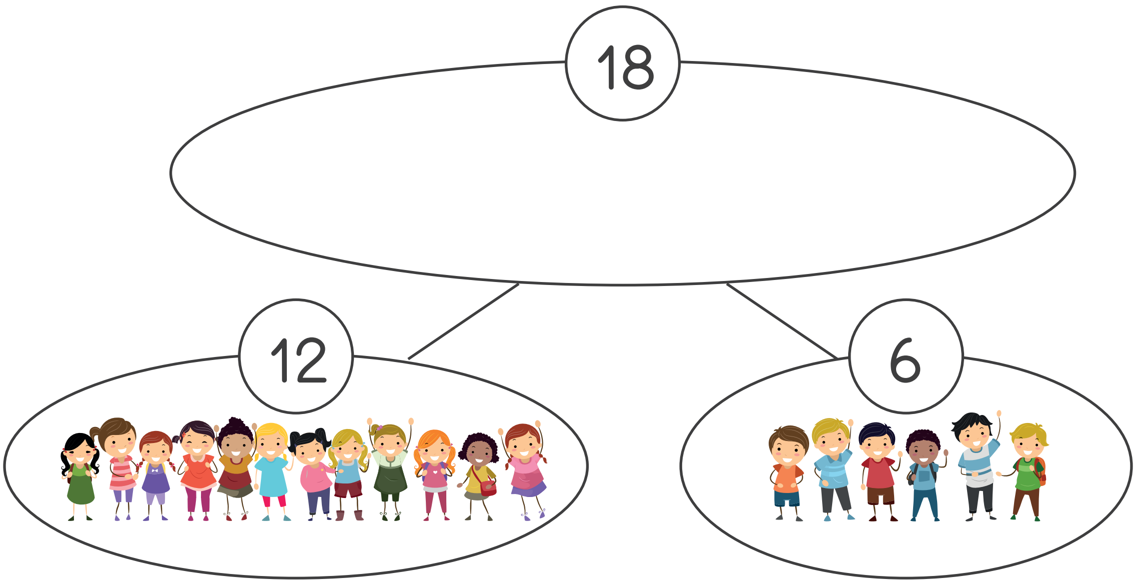
Tous les élèves de la classe se regroupent dans un espace assez aéré pour pouvoir faire des marques au sol, à la craie (la cour de récréation ou la salle de gymnastique par exemple). Ils vérifient qu'ils sont tous présents. L'enseignant leur demande alors de se compter. Il (ou elle) trace un trait autour du groupe et écrit le nombre d'élèves présents (par exemple : 18).

Dans l'exemple illustré ici, la classe comprend 18 élèves.

Ensuite, sur le sol de la cour, l'enseignant dessine deux autres traits et demande aux garçons de se mettre d'un côté et aux filles, de l'autre. Chaque groupe compte le nombre d'élèves qui le compose et écrit ce nombre.



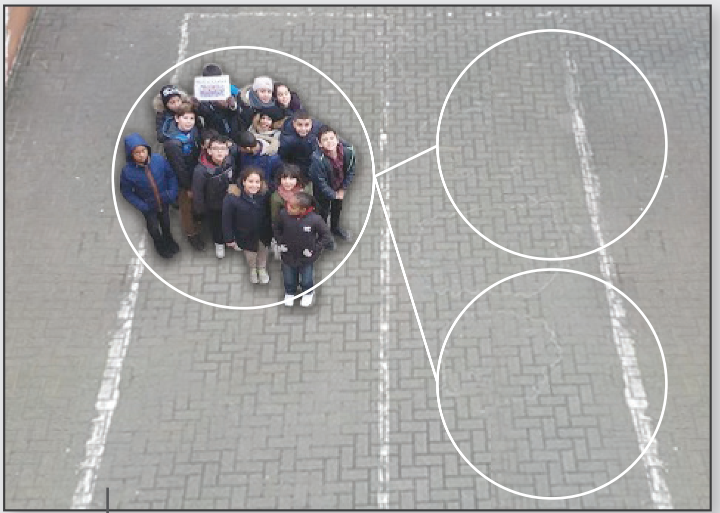
L'enseignant demande alors à un enfant de chaque groupe de tracer le chemin emprunté pour aller du premier ensemble au second. Les branches de l'arbre sont ainsi tracées.



L'exercice est alors recommencé, de manière à produire des décompositions plus variées du nombre d'élèves.

Si vous disposez d'un appareil photo, il peut être utile de prendre des photos des différents ensembles dans lesquels se sont réunis les enfants. Elles seront utilisées lors de la deuxième activité.

Exemple réalisé dans une classe de 16 élèves

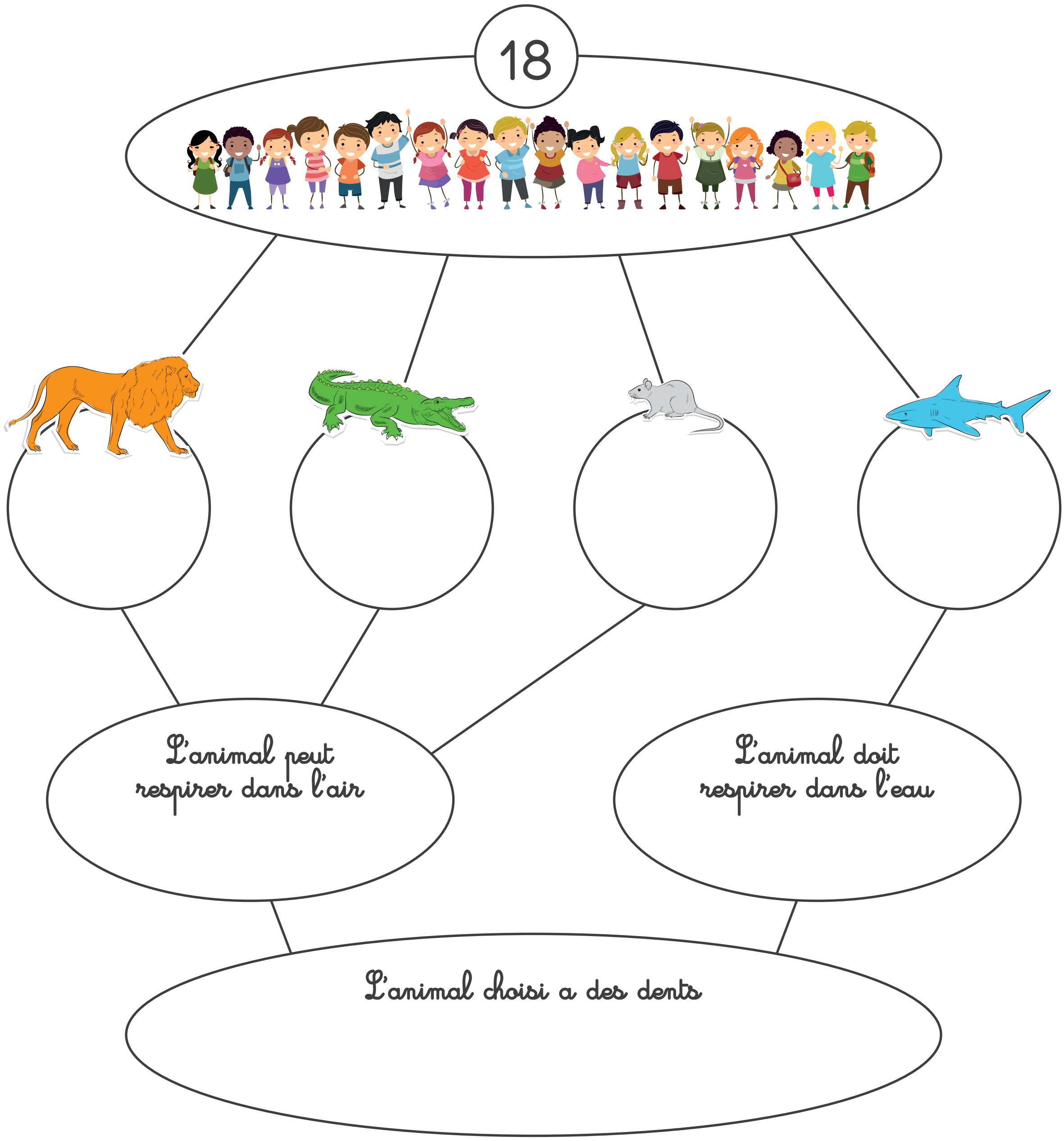


Les 16 élèves forment l'ensemble des élèves de la classe.

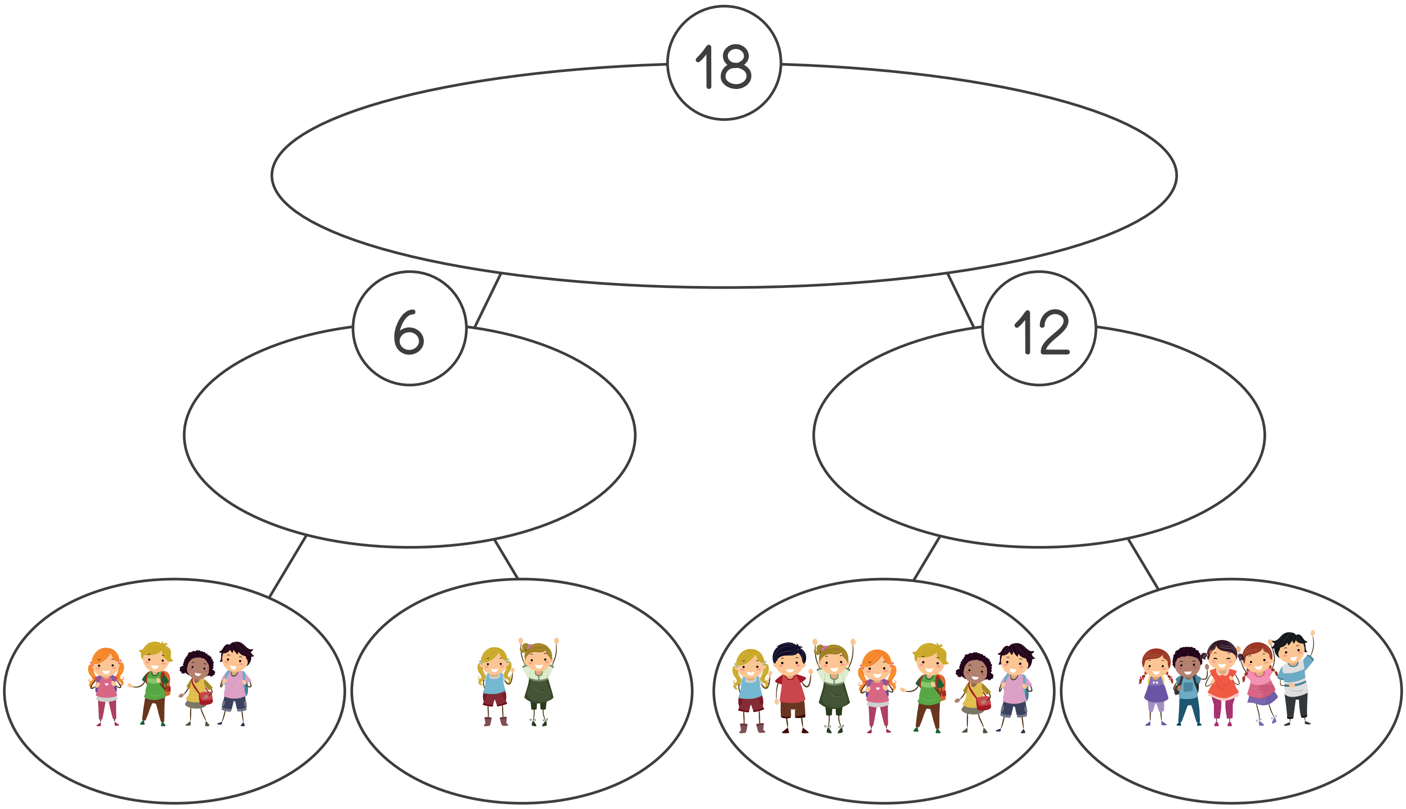
Ils ont ensuite été répartis en 2 ensembles (les 7 filles et les 9 garçons).

Pour approfondir la réflexion dans la cour et construire ainsi des arbres à plusieurs niveaux, l'enseignant propose des images de quatre animaux : le lion, le rat, le crocodile et le requin. Les enfants se répartissent en 4 groupes en fonction de l'animal qui leur fait le plus peur. Ensuite, ils sont amenés à se répartir en deux groupes, en fonction du fait que leur animal vive dans l'eau ou sur Terre. Et enfin, il s'agit de voir si leur animal a des dents.

Les dessins des animaux et les catégories utilisés pour réaliser cet arbre à trois niveaux sont proposés dans la fiche 1. Il est conseillé de photocopier cette fiche et, éventuellement, de plastifier les éléments nécessaires au classement.



L'exercice peut être à nouveau réalisé au départ d'autres questions (par exemple, le régime alimentaire préféré, la couleur ou l'animal domestique préféré…). On envisage ainsi des arbres de décompositions en plusieurs niveaux, afin de bien installer la notion de niveau et de branche.

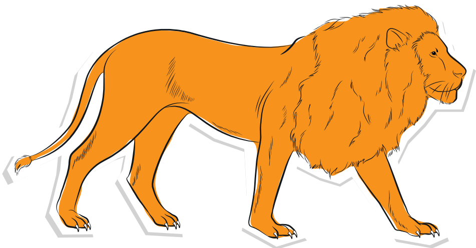


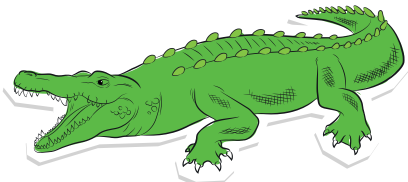
En privilégiant le travail vécu dans la cour par l'ensemble des élèves, cette première activité a donc pour but de les amener à bien comprendre :

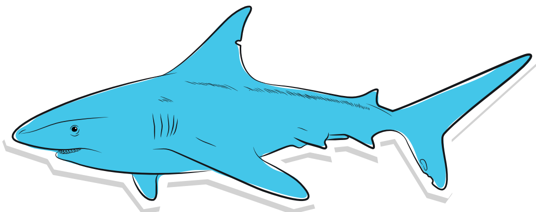
1) qu'à chaque niveau, on retrouve toujours le même nombre d'élèves ;
2) que les branches indiquent les chemins empruntés par les élèves d'un même ensemble pour passer d'un ensemble à un sous-ensemble.

Fiche 1

Dessins à photocopier pour aider les enfants dans la classification à opérer pour l'activité 1.







L'animal peut respirer dans l'air.

L'animal doit respirer dans l'eau.

L'animal a des dents.

1.3.2 | ACTIVITÉ 2 : CONSTRUCTION D'UN ARBRE AVEC UN SUPPORT VISUEL (AIMANTS OU POST-IT)

L'activité vécue en cour de récréation est représentée au tableau à l'aide d'aimants (ou de « post-it »), en vue de rappeler le fonctionnement des arbres de décomposition et de mettre en évidence ses deux éléments caractéristiques : les nœuds et les branches.

De cette façon, on met en lien la situation, l'arbre et un (ou plusieurs) calcul(s) permettant de compléter l'arbre :

Exemple

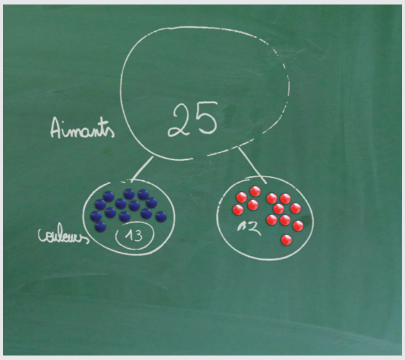
Situation	Arbre	Calcul
Il y a 18 aimants. Il y a 6 aimants de couleur bleue et les autres sont rouges.	18 6 12	6 + 12 = 18
Il y a 18 aimants. Il y a 4 petits aimants et 14 autres sont gros.	18 4 14	4 + 14 = 18

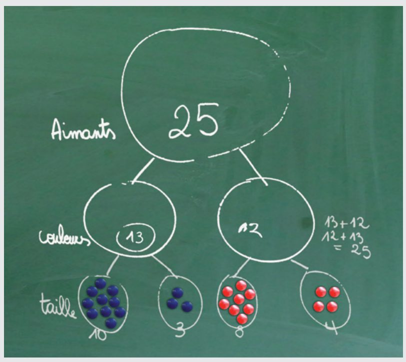
Pour approfondir cette première approche, on peut analyser les calculs pour constater que tous sont équivalents entre eux, car ils désignent tous le nombre d'élèves dans la classe :

$$6 + 12 = 4 + 14 = 18$$

Dans une classe où cette activité a été mise en place, comme vous pouvez le voir sur les photos ci-dessous, l'enseignante a combiné deux caractéristiques (couleur et taille) des aimants.

Exemple





Les élèves ont donc pu réaliser un arbre à deux étages. Les aimants ont été déplacés au fur et à mesure de la réflexion pour montrer le caractère dynamique de l'arbre lorsqu'on le construit au départ d'une situation vécue.

Les nœuds vides ont ensuite été complétés par le nombre d'éléments qui s'y trouvaient initialement.

L'enseignante a ensuite posé une série de problèmes amenant les élèves à compléter les arbres (S'il y a 13 aimants bleus, combien y en a-t-il de rouges ? S'il y a 4 fois plus d'aimants bleus que d'aimants rouges, combien y en a-t-il de chaque sorte ?...

Les fiches 2, 3 et 4 prolongent cette réflexion sur un support écrit en compliquant progressivement les situations et les calculs qui permettent de les résoudre.

Fiche 2 : Je construis des arbres

COMPLÈTE.

Situation	Arbre	Calcul
Il y a 18 aimants. Il y a 6 aimants de couleur bleue et les autres sont rouges.	18 6 12	6 + 12 = 18

Situation	Arbre	Calcul
Il y a 18 aimants. Il y a 4 petits aimants et 14 autres sont gros.		____________

Situation	Arbre	Calcul
Il y a ___ aimants. Il y a 5 petits aimants et 13 autres sont gros.		____________

Situation	Arbre	Calcul
Il y a 18 aimants. Il y a ___ petits aimants et 9 autres sont gros.		____________

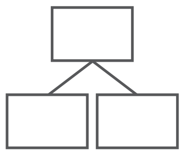
À ton tour !
INVENTE une nouvelle situation et écris l'arbre et un calcul qui lui correspond.

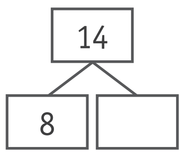
Situation	Arbre	Calcul
Il y a ___ aimants. Il y a ___ petits aimants et ___ autres sont gros.		____________

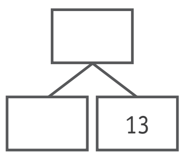
Fiche 3 : Associations diverses

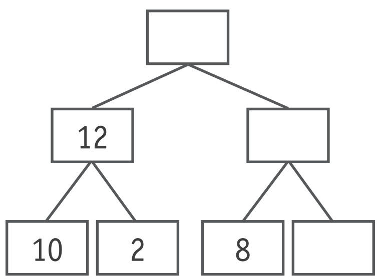
Dans d’autres classes, les élèves ont vécu les mêmes situations que vous. Malheureusement, ils ont parfois oublié de compléter les informations.

COMPLÈTE les informations qui manquent.

Situation	Arbre	Calcul
Nous étions un groupe de 25 élèves.		
Nous nous sommes répartis dans deux ensembles car il y a 12 garçons dans la classe et 13 filles.		____________

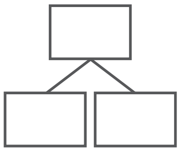
Situation	Arbre	Calcul
Nous étions un groupe de 14 élèves.		
Nous nous sommes répartis dans deux ensembles car certains ont un prénom qui commence par une voyelle et les autres ont un prénom qui commence par une consonne.		____________

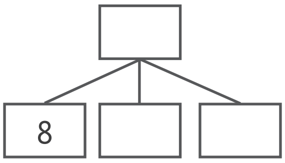
Situation	Arbre	Calcul
Nous étions un groupe de ___ élèves.		
Nous sommes répartis dans deux ensembles car il y a 7 garçons dans la classe et ___ filles.		____________

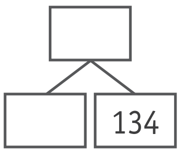
Situation	Arbre	Calcul
Nous étions un groupe de ___ élèves.		
Nous nous sommes d’abord répartis dans deux ensembles : ceux qui portent des lunettes et les autres.		12 + ___ = 21
Ensuite, dans chaque groupe, nous avons mis d’un côté ceux qui aimaient le jus d’orange et de l’autre, ceux qui ne l’aimaient pas.		10 + 2 + 8 + ___ = ___

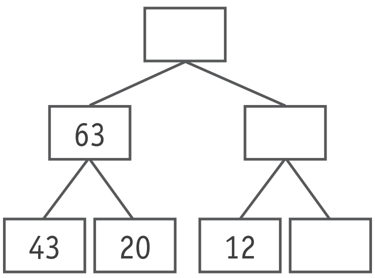
Fiche 4 : Des situations avec de plus grands nombres...

COMPLÈTE.

Situation	Arbre	Calcul
Nous étions un groupe de 125 élèves.		
Nous nous sommes répartis dans deux ensembles car il y a 87 garçons et les autres sont des filles.		___

Situation	Arbre	Calcul
Nous étions un groupe de 145 élèves.		
Nous nous sommes répartis dans trois ensembles. Il y avait 8 élèves dans le premier groupe, 37 dans le deuxième et le reste est allé dans le troisième groupe.		___

Situation	Arbre	Calcul
Nous étions un groupe de ___ élèves.		
Nous nous sommes répartis dans deux ensembles. Il y avait exactement le même nombre d'élèves dans chaque groupe.		___

Situation	Arbre	Calcul
Nous étions un groupe de ___ élèves.		
Nous nous sommes d'abord répartis dans deux ensembles : ceux qui portent des lunettes et les autres.		63 + ___ = 156
Ensuite, dans chaque groupe, nous avons mis d'un côté ceux qui aimaient le jus d'orange et de l'autre, ceux qui ne l'aimaient pas.		43 + 20 + 12 + ___ = ___

1.4 | ACTIVITÉS CENTRÉES SUR LES TAPIS DE NOMBRES

Travail avec du matériel authentique

- Activité 3 – *Construction de chaines à l'aide de trombones - P. 29 à 30 - Fiche 5.*

Travail avec du matériel représenté ou symbolique

- Activité 4 – *Reconnaitre une chaine à partir de sa description numérique - P. 31 - Fiche 5.*
- Activité 5 – *Organiser la chaine par couleur, découverte du fonctionnement du tapis de nombres et des calculs associés - P. 32 à 35 - Fiche 6.*

Travail avec les outils plus formels

- Activité 5 (suite) – *Travail sur des tapis de nombres - P. 36 à 37 -* Fiches 7 et 8.

Les activités 3, 4 et 5 doivent permettre aux élèves d'apprendre:

- à composer et décomposer un nombre naturel (activités 3 à 5) ;
- à comprendre les deux composantes du tapis de nombres : la surface de référence représentant le nombre à (dé)composer et les surfaces qui symbolisent les parties décomposées (activités 4 et 5) ;
- à faire des liens entre le dénombrement direct et l'écriture de calculs (activité 5) ;
- à utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence (activité 5) ;
- à observer les propriétés de l'addition – associativité et commutativité (activités 4 et 5) ;
- à utiliser les décompositions appropriées de nombres dans un calcul (activité 5) ;
- à utiliser la soustraction comme la réciproque de l'addition et la division comme la réciproque de la multiplication (activité 5).

Ces activités proposées s'accompagnent de 4 fiches. Elles nécessitent également des trombones de couleurs différentes (suffisamment pour que chaque élève puisse disposer, en tout, d'une trentaine de trombones de différentes couleurs).

L'activité 3 est une activité de manipulation directe réalisée à partir de trombones. Chaque élève reçoit un trombone argenté (ou d'une couleur identique aux autres élèves) et reconstitue avec les autres élèves de la classe une chaine appelée chaine de référence. Ensuite, chacun reçoit des trombones de différentes couleurs et réalise une chaine ayant la même longueur que la chaine de référence. Chaque élève note ensuite sur une fiche combien de trombones de chaque couleur ont été utilisés pour former cette seconde chaine (fiche 5).

L'activité 4 consiste à retrouver la chaine d'un autre élève à partir de la carte qu'il a réalisée au terme de l'activité précédente. Les élèves constatent alors que les chaines organisées par couleur sont les plus faciles à reconnaitre. Il n'y a pas de fiche spécifique élève à utiliser puisque les élèves repartent des fiches 5 construites lors de l'activité 3.

L'activité 5 commence par une organisation des chaines par couleur et un dessin de celles-ci sur une feuille (fiche 6), de manière à disposer d'une représentation horizontale de la chaine. Les chaines sont affichées au tableau. Le tapis de nombres est ensuite construit en référence directe aux chaines (chaque trombone est symbolisé par un petit carré). Les liens aux calculs sont également établis (ce qui permet d'observer certaines propriétés de l'addition). Les fiches 7 et 8 proposent pour finir des exploitations diverses de tapis de nombres (à compléter) et les démarches des élèves sont mises en évidence et confrontées. Le lien aux calculs sur les nombres est également réalisé.

1.4.1 | ACTIVITÉ 3 : CONSTRUCTION DE CHAINES À L'AIDE DE TROMBONES

Chaque élève reçoit un trombone (tous les élèves ont un trombone de la même couleur). Les trombones sont ensuite assemblés pour réaliser une chaine représentant le nombre d'élèves présents dans la classe. Elle constituera la chaine de référence pour la suite de l'activité.

Ensuite, en utilisant des trombones de couleurs différentes, chaque élève réalise une chaine de longueur égale à celle de la chaine de référence.

Au niveau mathématique

- Le cardinal du nombre d'élèves de la classe est ainsi exprimé au travers du nombre de trombones de la chaine de référence.

Cette activité a été réalisée dans une classe qui comprend 15 élèves. Les explications vous permettent de voir comment peut se dérouler l'activité. Il est bien entendu conseillé de réaliser l'activité à partir du nombre exact d'élèves dans votre classe.

Exemple

Deux élèves réalisent ci-contre une chaine d'une longueur égale à la chaine de référence.

Chacun indique ensuite sur une petite carte (voir fiche 5) le nombre de trombones de chaque couleur utilisée et la remet à l'enseignant.

En comparant les chaines construites, les élèves s'expriment à propos de leurs ressemblances et leurs différences : toutes les chaines comportent un même nombre de trombones, mais la répartition des couleurs est différente. Certains élèves ont regroupé les trombones par couleur et d'autre pas.

Au terme de l'activité 3, l'enseignant reprend les fiches complétées par les élèves.

Fiche 5 : Je construis à l'aide de trombones

COMPLÈTE.

Pour réaliser ta chaine, indique le nombre de trombones de chaque couleur utilisée :

________________ verts

________________ bleus

________________ rouges

________________ jaunes

Fiche 5 : Je construis à l'aide de trombones

COMPLÈTE.

Pour réaliser ta chaine, indique le nombre de trombones de chaque couleur utilisée :

________________ verts

________________ bleus

________________ rouges

________________ jaunes

1.4.2 | ACTIVITÉ 4 : RECONNAITRE UNE CHAINE À PARTIR DE SA DESCRIPTION NUMÉRIQUE

L'enseignant distribue aux élèves de manière aléatoire les cartes complétées au terme de l'activité 3 (fiche 5). Ceux-ci doivent reconnaitre la construction décrite sur la carte et sont invités à replacer les constructions dans l'ordre de rapidité des découvertes.

Exemple

Les chaines des élèves de la classe sont pendues à un fil.

Un élève montre la chaine correspondant à la fiche qu'il a reçue au début de l'activité 3.

Chacun s'exprime alors pour expliquer les difficultés ou facilités à associer les chaines et les cartes. Une solution pour identifier rapidement une carte est de disposer les trombones par couleur dans la chaine.

Exemple

Les élèves montrent ici les associations qu'ils ont pu faire entre la fiche qu'ils ont reçue au début de l'activité 4 et la chaine correspondante.

Au niveau mathématique

- On pourra à nouveau attirer l'attention des élèves sur l'aspect cardinal du nombre : les chaines sont différentes, mais elles ont comme caractéristiques commune d'être composées d'un même nombre de trombones.

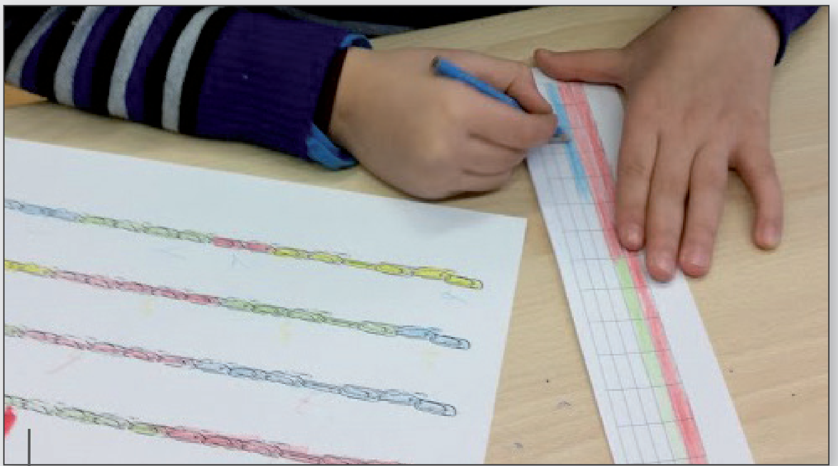
1.4.3 | ACTIVITÉ 5 : ORGANISER LA CHAINE PAR COULEUR, DÉCOUVERTE DU FONCTIONNEMENT DU TAPIS DE NOMBRES ET DES CALCULS ASSOCIÉS

Chaque élève reçoit une chaine qu'il va modifier (si nécessaire) afin de la rendre plus lisible : les trombones sont à ce moment organisés par couleur.

Par groupes de 5, les élèves complètent ensuite la fiche 6, en reproduisant les couleurs des trombones utilisées pour réaliser la chaine de chaque élève du groupe.

Attention, la fiche 6 (voir page 35) doit être adaptée en fonction du nombre d'élèves de la classe.

Exemple

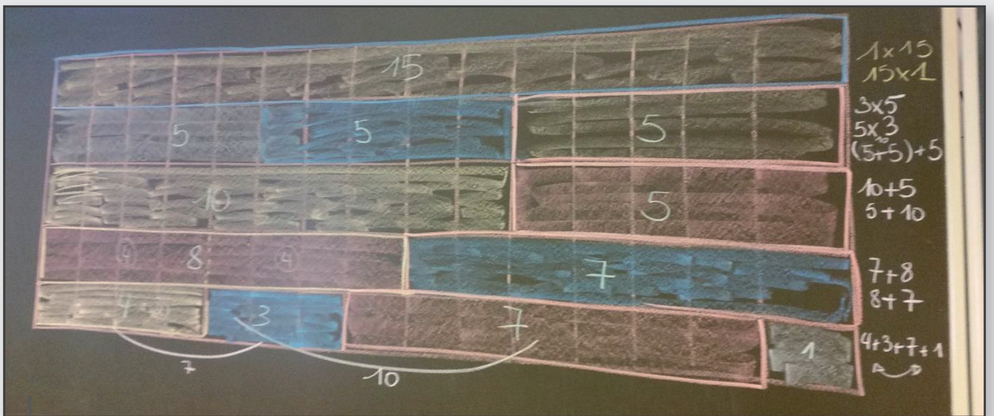


Ensuite, les enfants « reportent » leurs observations des trombones dans le tableau en faisant correspondre couleur et nombre.

L'enseignant reproduit au tableau l'une ou l'autre fiche 6 complétée par un groupe et fait le parallèle avec les tapis de nombres. Les élèves sont alors amenés à verbaliser les liens entre les chaines de trombones et les tapis de nombres correspondants.

Le lien aux calculs est également réalisé.

Exemple



Cette photo du tableau montre la trace d'une exploitation collective réalisée : les élèves ont ici comparé plusieurs décompositions additives de 15.

Au niveau mathématique

- L'exploitation des calculs peut permettre d'observer deux propriétés de l'addition : la commutativité et l'associativité ainsi que la technique de compensation dans l'addition.

  Même si visuellement, les chaines sont différentes, les calculs qui les représentent correspondent tous à la décomposition d'un même nombre.

  - Certains calculs impliquent les mêmes nombres mais ils sont placés dans un ordre différent. Dans ce cas, on peut constater que l'addition est commutative.

Exemple

6 + 9 = 9 + 6

6	9
9	6

  - D'autres comportent certains nombres identiques mais pas tous : on constate lors que l'addition est associative.

Exemple

3 + 3 **+ 9** = 6 **+ 9**

6		9
3	3	9

  - Dans le cas où tous les nombres impliqués dans les calculs sont différents, on peut faire ressortir la compensation dans l'addition. Si on ajoute un certain nombre à un terme, il faudra le soustraire à l'autre terme pour que le résultat soit identique.

Exemple

6 + 9 = 10 + 5

On a ajouté 4 à 6 pour avoir 10

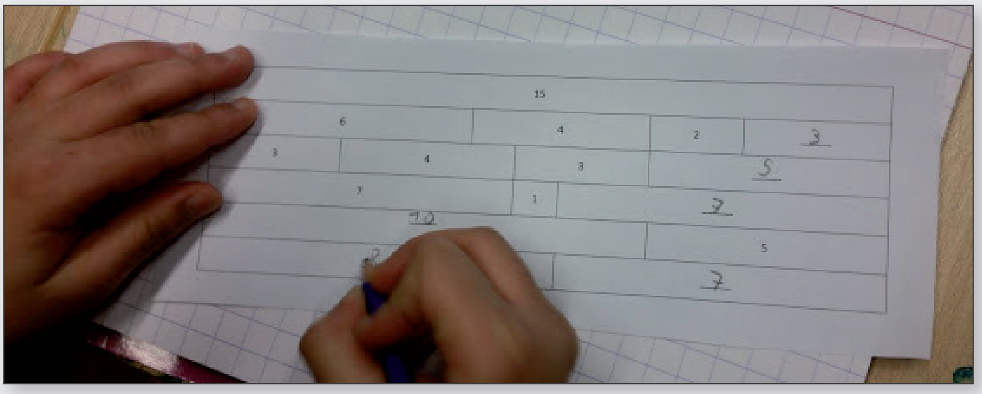
6	9		
6	4	5	étape intermédiaire
10		5	

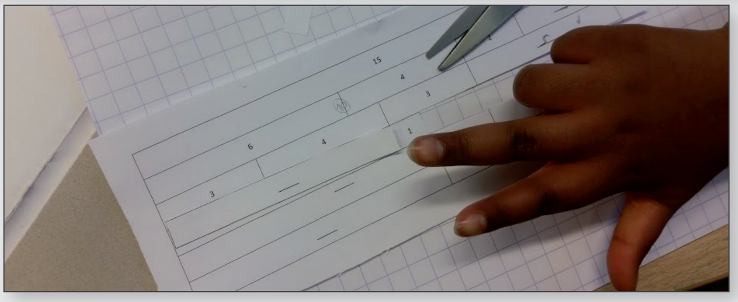
Par la suite, les élèves réalisent les fiches 7 et 8, qui sont centrées sur des tapis de nombres. Après un travail individuel, les démarches sont comparées et les liens avec les stratégies de calcul sont établis.

Lors de l'exploitation dans la classe, ces fiches ont été résolues par les élèves à l'aide de démarches variées.

- Certains élèves ont eu besoin de découper une feuille quadrillée pour effectuer les exercices et mieux visualiser ainsi les liens entre les surfaces.

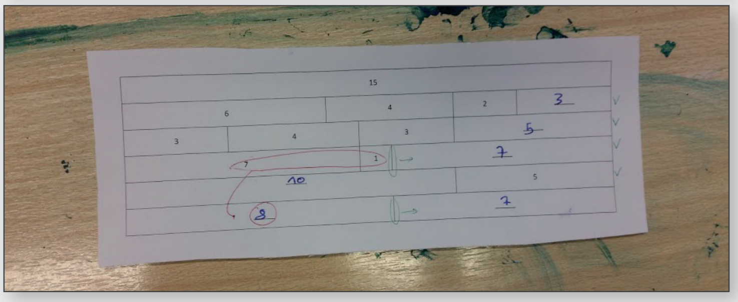
Exemple





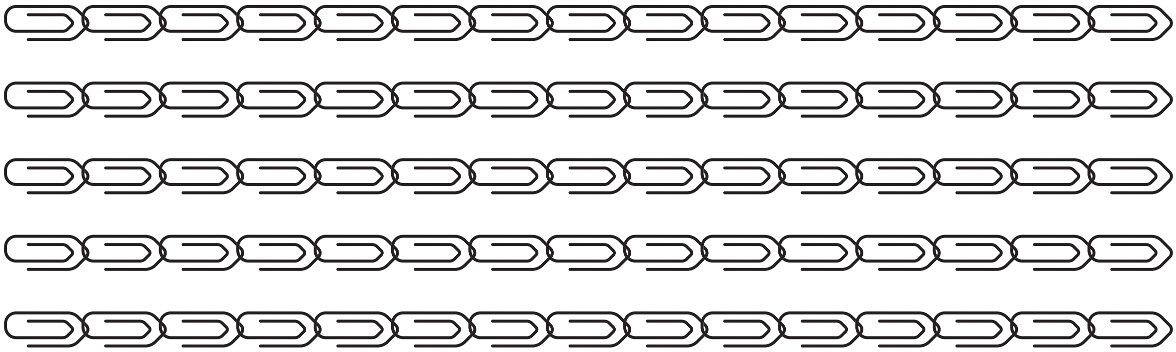
- D'autres ont fait des reports avec leurs doigts ou ont ajouté des liens supplémentaires.

Exemple



Fiche 6 : Je construis à l'aide de trombones

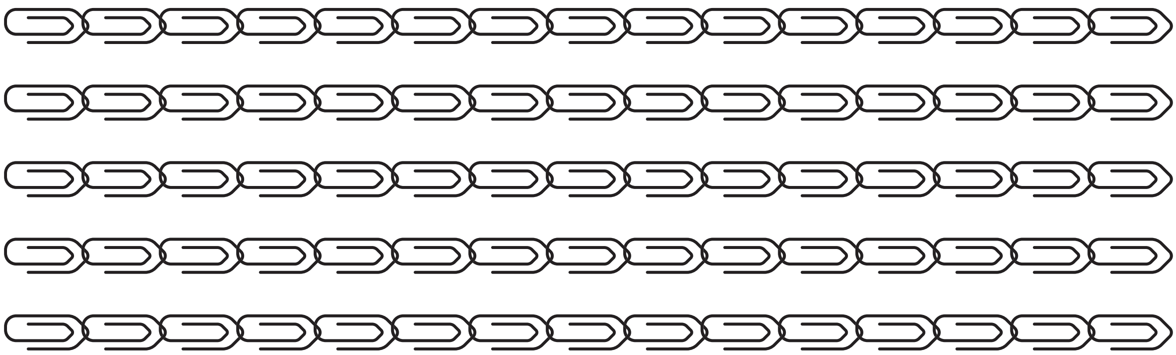
COMPLÈTE la fiche suivante, en reproduisant les couleurs des trombones utilisées pour réaliser la chaine :



Attention, le nombre de trombones sur cette fiche doit être adapté en fonction du nombre d'élèves dans la classe.

Fiche 6 : Je construis à l'aide de trombones

COMPLÈTE la fiche suivante, en reproduisant les couleurs des trombones utilisées pour réaliser la chaine :



Attention, le nombre de trombones sur cette fiche doit être adapté en fonction du nombre d'élèves dans la classe.

Fiche 7 : Travail sur des tapis de nombres

COMPLÈTE les tapis de nombres suivants :

<table>
<tr><th colspan="3">15</th></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">9</td></tr>
<tr><td colspan="2">9</td><td>___</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">15</th></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td>9</td></tr>
<tr><td>3</td><td>___</td><td>___</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">15</th></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">9</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td><td>___</td></tr>
<tr><td colspan="2">___</td><td>___</td></tr>
</table>

Fiche 8 : Travail sur des tapis de nombres plus grands

COMPLÈTE les tapis de nombres suivants :

<table>
<tr><th colspan="8">15</th></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td colspan="4">4</td><td>2</td><td>___</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="3">3</td><td colspan="2">___</td></tr>
<tr><td colspan="3">7</td><td colspan="2">1</td><td colspan="3">___</td></tr>
<tr><td colspan="6">___</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td colspan="4">___</td><td colspan="4">___</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="7">60</th></tr>
<tr><td colspan="3">30</td><td colspan="4">___</td></tr>
<tr><td colspan="6">___</td><td>___</td></tr>
<tr><td>___</td><td colspan="2">___</td><td colspan="2">___</td><td colspan="2">___</td></tr>
<tr><td colspan="2">___</td><td colspan="2">___</td><td colspan="3">___</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="7">120</th></tr>
<tr><td colspan="3">___</td><td colspan="4">___</td></tr>
<tr><td colspan="6">___</td><td>___</td></tr>
<tr><td>___</td><td colspan="2">___</td><td colspan="2">___</td><td colspan="2">___</td></tr>
<tr><td colspan="2">___</td><td colspan="2">___</td><td colspan="3">___</td></tr>
</table>

2 DÉCOMPOSER ET RECOMPOSER POUR DONNER DU SENS AUX OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES

2.1 | LES CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Les opérations sur les nombres ont été investiguées dans plusieurs questions. Certaines envisageaient le calcul mental (questions 5, 8, 9, 13 et 19) et d'autres portaient plus spécifiquement sur les propriétés des opérations (questions 17 et 18).

Rappelons brièvement ce qui se dégage de l'analyse des résultats de ces questions.

2.1.1 | EFFECTUER DES OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES

Comme le montre le tableau suivant, les différents calculs à effectuer par les élèves peuvent être répartis en 3 catégories, selon que leur pourcentage de réussite était supérieur à 75 %, entre 50 % et 75 % ou inférieur à 50 %.

	Tableau 1 Synthèse des résultats des questions portant sur les opérations sur les nombres		
	Le nombre recherché est le résultat du calcul	**Le nombre recherché est impliqué dans le calcul**	**C'est l'(ou les) opération(s) qui est (sont) recherchée(s)**
% de réussite supérieur à 75	48 + 8 = … 49 – 5 = …	80 - … = 10 16 + … = 21 Verbalisation du calcul : 35 + … = 40	3 … 6 = 18 9 … 2 = 11
% de réussite compris entre 50 et 75	3 × 20 = … 15 + 17= …	… × 5 = 30 90 : … = 9	10 = 20 … 2
% de réussite inférieur à 50	80 -12 = … 48 : 4 = …	… : 2 = 50 42 - … = 25 … - 18 = 65 8 × … = 96	20 … 50 = 90 … 20 13 … 13 = 26 … 1

Quels sont les points communs entre les calculs particulièrement bien réussis par les élèves ? Deux constats se dégagent :

- Tous impliquent une vision du **signe d'égalité comme amorce d'un résultat**. En effet, dans ces 7 calculs, ce qui est derrière le signe « = » est le résultat des opérations qui se trouvent avant.
- Trois types d'opérations sont présentes (addition, soustraction et multiplication), mais le nombre à trouver n'est pas nécessairement la réponse au calcul. Les élèves ont donc déjà une **certaine aisance dans la compréhension des opérations d'addition, de soustraction et de multiplication**.
- Il est possible d'effectuer la plupart de ces calculs par **dénombrement direct** (c'est-à-dire le surcomptage ou le comptage à rebours) : en effet, pour effectuer le calcul « 48 + 8 = … », on peut toujours compter sur ses doigts à partir de 49.

Et qu'en est-il des items les moins bien réussis ?

- Ils impliquent tous des **opérations impliquant souvent la décomposition d'un nombre pour trouver la valeur du nombre inconnu**; par exemple, pour effectuer le calcul 80 – 12, il est nécessaire de comprendre non seulement que 12 peut être décomposé en 10 + 2, mais que comme il s'agit de soustraire 12, il faut soustraire 10 et soustraire encore 2. De la même façon, pour partager 48 en 4, on peut partager 40 en 4 et ensuite partager 8 en 4. Ou il est également possible de partager 48 en 2 et puis encore en 2. Autrement dit, ces transformations impliquent une **certaine compréhension des propriétés des opérations** : en particulier l'associativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
- Dans ces calculs, le **signe d'égalité doit également être utilisé tantôt en tant que résultat, tantôt en tant qu'équivalence** : en effet, pour effectuer le calcul « 42 - … = 25 », il faut considérer qu'on a enlevé quelque chose à 42 pour obtenir la réponse 25. En revanche, dans le calcul « 20 … 50 = 90 … 20 », le nombre 90 apparaissant derrière l'égalité n'est pas le résultat de l'opération liant 20 et 50. Il faut plutôt comprendre qu'une opération liant 20 et 50 doit aboutir au même résultat qu'une opération liant 90 et 20.

2.1.2 | MAITRISER LES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS.

Les propriétés des opérations ont également été investiguées plus directement, au travers des questions 17 et 18 : elles concernaient la connaissance de l'élément neutre dans les 4 opérations ainsi que la propriété de commutativité, envisagée également dans les 4 opérations. Le tableau suivant reprend les résultats à ces différentes questions.

Tableau 2
Synthèse des résultats des questions portant sur les propriétés des opérations

	Question	Item	Calcul	Total FW-B
Elément neutre dans les 4 opérations : 63 % de réussite	17	50	96 + … = 96	94 %
		51	96 - … = 96	92 %
		52	96 × … = 96	72 %
		53	96 : … = 96	63 %
Propriété de commutativité : 27 % de réussite	18	54	8 + 2 … 2 + 8	84 %
		55	8 × 2 … 2 × 8	73 %
		56	8 – 2 … 2 - 8	50 %
		57	8 : 2 … 2 : 8	52 %
		58	8 – 0 … 8	70 %
		59	8 + 0 … 8	75 %

Au total, 6 items portaient sur l'élément neutre dans les 4 opérations et 63 % des élèves parviennent à répondre correctement à ces 6 items. Il semble donc que ce concept soit assez bien maitrisé par les élèves.

Ce résultat contraste de façon assez nette lorsqu'on considère la propriété de commutativité. Si les élèves semblent l'avoir intégrée pour l'addition et la multiplication, ils n'ont pas conscience qu'elle ne s'applique pas aux deux autres opérations. En effet, 27 % des élèves seulement parviennent à exprimer le fait qu'elle s'applique à l'addition et à la multiplication mais pas à la soustraction et la division. Remarquons que ces questions impliquent également une vision de l'égalité en termes d'une relation d'équivalence, ce qui, on l'a vu dans le calcul mental, est loin d'être acquis par les élèves. Bref, **la propriété de commutativité est complexe** pour une large majorité d'élèves, surtout lorsqu'il s'agit de l'envisager au travers des 4 opérations.

L'ensemble de ces résultats montrent que les propriétés des opérations et d'égalité doivent faire l'objet d'une attention particulière en 3^{e} et 4^{e} primaires.

2.2 | INTENTIONS ET COMMENTAIRES

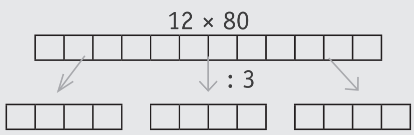
Donner du sens aux opérations sur les nombres, qu'est-ce que cela implique en 3e et 4e primaires ?

On peut amener les élèves à développer leurs compétences en calcul mental de deux manières différentes[4] : en insistant sur les techniques d'une part ou en insistant sur une analyse préalable des calculs à effectuer d'autre part. Dans cette seconde perspective, il est possible de développer, au travers du calcul mental, une meilleure compréhension des propriétés des opérations et de l'égalité.

Pour bien comprendre la différence entre ces deux perspectives, imaginez comment vos élèves pourraient effectuer le calcul suivant :

Exemple

80 × 12 : 3

Vision calculatoire de l'arithmétique	**Vision relationnelle de l'arithmétique**
Ce calcul, comme tous ceux qui présentent un enchainement de 2 opérations ne nécessitant pas d'utiliser la priorité des opérations, peut s'effectuer en respectant l'ordre des opérations écrites dans le calcul.	On peut analyser cet enchainement d'opérations, avant de foncer « tête baissée » dans la recherche de la réponse. On peut alors grouper les facteurs « × 12 » et « : 3 » et trouver un autre calcul plus simple, aboutissant au même résultat que 80 × 12 : 3
$\begin{tikzcd} 80 \arrow[d, "\times 12"] \\ 960 \arrow[d, ": 3"] \\ 320 \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} 80 \arrow[d, "\times 12"] \arrow[dd, bend left=60, "\times 4"] \\ 960 \arrow[d, ": 3"] \\ 320 \end{tikzcd}$
Il faut d'abord multiplier 80 par 12. Pour y arriver, on peut faire 8 × 12 et « ajouter » un zéro à la réponse, **ça donne** 960 80 × 12 = 960 Ensuite, il faut diviser 960 en 3, **ça donne** 320 car 9 : 3, c'est 3, 6 : 3, c'est 2 et on ajoute un zéro à la fin 960 : 3 = 320	Prendre 12 fois le nombre 80 puis diviser le total par 4, **ça revient au même que** prendre 4 fois le nombre 80 car :  En multipliant directement 80 par 4, on trouve la réponse au calcul 80 × 12 : 3, en n'effectuant finalement qu'une seule opération : 80 × 12 : 3 = 80 × 4 = 320

[4] T. P. CARPENTER, L. LEVI, M. L. FRANKE & J. K. ZERINGUE, *Algebra in elementary school: Developing relational thinking. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Springer Link, 2005, Volume 37, p. 53-59.

Dans la vision calculatoire de l'arithmétique, les opérations et l'égalité sont perçue comme des commandes d'actions à accomplir, un peu comme c'est le cas, lorsqu'on utilise une calculatrice. Les opérations doivent donc impérativement être effectuées dans l'ordre où elles apparaissent dans les calculs et, derrière le signe d'égalité, doit se trouver une réponse.

Dans la vision relationnelle de l'arithmétique, les opérations ont des propriétés particulières qui autorisent à effectuer, à la place du calcul initial, un autre plus simple à effectuer et qui aboutit au final au même résultat. Toutefois, pour trouver ce calcul plus simple, il faut avoir pris conscience des propriétés des opérations impliquées dans le calcul initial. Sur le plan mathématique, dans le cas de l'opération (80 × 12) : 3, on peut associer les opérations × 12 et : 3 pour obtenir une seule opération × 4, en raison de la propriété d'associativité.

En effet :

$(80 \times 12) : 3 = 80 \times (12 : 3) = 80 \times 4$

L'utilisation du support « bandelette », proposé dans la partie droite du tableau ci-avant, permet d'appuyer le raisonnement par une visualisation de l'associativité utilisée ici. A l'école primaire, il est donc nécessaire de prendre conscience des propriétés des opérations, non pas en connaissant leurs formulations mathématiques, mais plutôt en disposant de supports (qu'ils soient visuels ou présentés au travers de situations de vie) permettant de leur donner sens.

Si, en calcul mental, on développe des supports permettant aux élèves d'analyser les calculs avant de les résoudre, on les aide à avoir une compréhension « dans l'action » des propriétés des opérations, compréhension nécessaire pour utiliser à bon escient les procédures de calculs mentaux.

Les élèves qui développent, dès le plus jeune âge, de telles stratégies raisonnées de calculs parviennent mieux que les autres à comprendre les techniques de calculs mentaux, ils ont également une vision plus correcte de l'égalité et des propriétés des opérations[5].

Les activités proposées dans cette section ont donc toutes un double objectif : développer le sens de l'égalité et prendre conscience des propriétés des opérations.

2.2.1 | DÉVELOPPER LE SENS DE L'ÉGALITÉ.

Afin d'expliquer les besoins d'apprentissage des élèves en regard de l'égalité, analysons la question suivante que l'on pourrait propose aux élèves de 3e – 4e primaires :

Trouve la valeur du ? dans l'égalité suivante :
8 + 4 = ? + 5

Quatre réponses sont souvent proposées par les élèves (Carpenter, Franke & Levy, 2003) :

1) 12 parce que 8 + 4 = 12
2) 17 parce que 8 + 4 + 5 = 17
3) parce que 8 + 4, c'est 12, et que 7 + 5 c'est 12 aussi
4) 7 parce qu'on devait ajouter 8 à 4. Si, au lieu de prendre 4, on prend 5, il faut ajouter un de moins que 8, donc 7 pour conserver l'égalité.

[5] M. S. BRITT & K. C. IRWIN, *Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In Early Algebraization. A dialogue for multiple perspective*, Heidelberg : Springer, Berlin, 2011, p. 277-301.

Les deux premières réponses sont tout à fait erronées, car elles véhiculent une compréhension inadéquate de l'égalité dans ce contexte : elle est en effet vue comme l'amorce d'un résultat au calcul écrit dans le premier membre de l'égalité.

Pour bien comprendre l'égalité, il est nécessaire d'amener les élèves à : 1) comprendre que le signe « égal » ne désigne pas l'amorce d'un résultat, mais qu'il peut être placé entre deux opérations équivalentes. 2) parvenir à justifier l'égalité au départ d'une analyse des opérations réalisées de part et d'autre de l'égalité plutôt qu'en s'appuyant sur le résultat de chacun des calculs présents dans chaque membre de l'égalité.

2.2.2 | PRENDRE CONSCIENCE DES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS

Les propriétés des opérations sont parfois comprises de manière un peu « théorique », c'est-à-dire indépendamment de leur utilisation dans des calculs mentaux. C'est notamment le cas de l'associativité, présentée comme la propriété d'une opération dans laquelle les nombres peuvent être groupés de différentes façons, sans que le résultat de l'opération ne soit modifié.

Exemples

73 + 27 + 5 = (73 + 27) + 5 = 73 + (27 + 5) = 105 => l'addition est associative

73 – 27 – 5 = (73 – 27) – 5 ≠ 73 – (27 – 5) => la soustraction n'est pas associative

Certains élèves développent une compréhension un peu superficielle de cette propriété dans l'addition (en considérant qu'on peut déplacer les parenthèses) mais, lorsqu'ils sont face à une autre opération, ils ont tendance à appliquer un peu machinalement la technique.

Face au calcul :

80 – 12 =

Certains élèves pensent qu'il faut partir de 80, soustraire **10 et ensuite ajouter 2** puisque **10 + 2** est égal à **12.** D'un point de vue mathématique, c'est un peu comme s'ils pensaient que la soustraction était associative :

80 – 12 = 80 – (10 + 2) ≠ (80 – 10) + 2 = 72

En réfléchissant à ce calcul :

80 – 12 est-il égal à 80 – 10 + 2

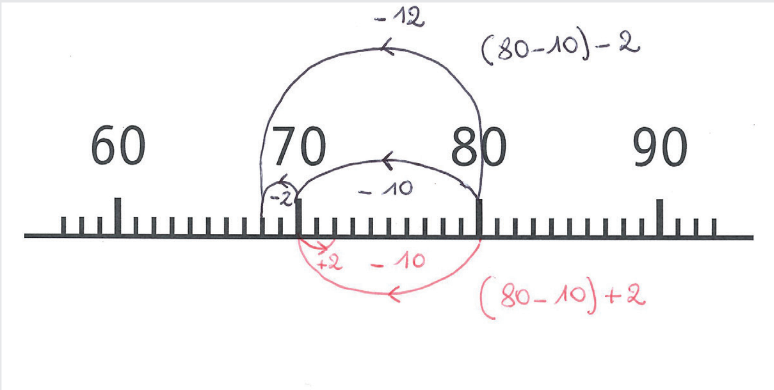
...et en cherchant à vérifier si c'est égal sans passer par le calcul des deux calculs (80 – 12 = 68 et 80 – 10 + 2 = 72), on amène les élèves à mieux intégrer la propriété d'associativité telle qu'elle est utilisées en calcul mental.

Et pour ce faire, **une référence à une situation de vie réelle** peut faire réfléchir les élèves sur le sens de la transformation qu'ils proposent lorsqu'ils considèrent que 80 – 12 est égal à 80 – 10 + 2.

Si tu as 80 bonbons, et que tu dois en donner 12 à ta sœur, tu peux d'abord lui en donner 10, mais ce n'est pas assez, tu dois encore lui en donner 2. Si c'est elle qui t'en rend 2, c'est comme si tu lui en avais donné seulement 8.
Donc pour faire 80 – 12, tu peux d'abord retirer 10, mais ce n'est pas assez il faut encore retirer 2 :

$$80 - 12 = (80 - 10) - 2 \neq (80 - 10) + 2$$

On peut aussi représenter les nombres impliqués dans les opérations à l'aide d'un support visuel, comme par exemple la droite des nombres.



Quand on amène les élèves à réfléchir aux opérations sans directement passer par le calcul du résultat, on les aide à donner du sens aux stratégies de calculs mentaux et, partant à comprendre dans l'action que la propriété d'associativité ne fonctionne pas pour la soustraction.

Dans la suite du document, vous trouverez des activités susceptibles de développer les stratégies de calcul mental, tout en suscitant une prise de conscience des propriétés des opérations.

Ces activités permettent de faire émerger des calculs issus de la décomposition d'un nombre en dizaines/unités pour additionner ou soustraire ou d'autres décompositions impliquées cette fois dans les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication.

L'originalité de ces activités ne se situe pas dans la tâche à effectuer par les élèves, mais plutôt dans la manière dont ils seront encouragés à justifier la pertinence des décompositions proposées. Pour y arriver, le recours à un support visuel ou à de contextes de vie sera particulièrement sollicité.

En tant qu'enseignant, il n'est pas si facile de faire le pont entre une connaissance théorique des propriétés des opérations et la prise de conscience que l'on peut susciter auprès des élèves. C'est pour cette raison qu'en dernière partie de cette section voir pages 77 et suivantes, vous trouverez une réflexion permettant de faire le lien entre les propriétés des opérations les plus souvent utilisées en calcul mental et la manière dont elles peuvent prendre sens, dans le contexte direct de leur utilisation, lors de l'apprentissage des techniques de calcul mental particulièrement travaillées en 3e et 4e primaires.

2.3 | ACTIVITÉS CENTRÉES SUR LA GRILLE DES NOMBRES DE 1 À 100.

Construction de la grille des nombres naturels de 1 à 100

➡ Activité 6 – *Passage de la bande numérique à la grille des nombres - P. 47 à 48 - Fiche 9.*

Utilisation de la grille des nombres pour décomposer un nombre en dizaines et unités

➡ Activité 7 – *Décomposition d'un nombre dans une addition - P. 49 à 56 - Fiches 10 à 13.*

➡ Activité 8 – *Décomposition d'un nombre dans une soustraction - P. 57 à 59 - Fiche 14.*

Ces activités permettent aux élèves d'apprendre:

- à construire la grille des nombres naturels de 1 à 100 à partir d'une bande numérique (activité 6) ;
- à analyser une addition ou une soustraction à l'aide de la grille des nombres naturels de 1 à 100 (activités 7 et 8) ;
- à utiliser l'égalité en termes de résultat et en termes d'équivalence (activités 7 et 8) ;
- à utiliser les décompositions en unités et dizaines de nombres à additionner ou à soustraire (activités 7 et 8).

Ces activités sont au nombre de 3. Elles s'accompagnent de 6 fiches.

L'activité 6 amène chaque élève à reconstruire d'abord la bande numérique des 100 premiers nombres, à analyser quelques régularités existant dans cette bande numérique et à en dégager les limites pour soutenir le calcul mental. Au terme de cette activité, les élèves organisent la bande numérique sous la forme d'une grille de nombres, en vue de faciliter des calculs d'addition et de soustraction impliquant des décompositions de nombres en dizaines et unités. La fiche 9 fournit le support à cette activité.

L'activité 7 et **8** amènent les élèves à utiliser la grille construite par les élèves lors de l'activité 6 pour effectuer des additions (activité 7 – fiches 10, 11, 12 et 13) ou des soustractions (activité 8 – fiche 14).

2.3.1 | ACTIVITÉ 6 : PASSAGE DE LA BANDE NUMÉRIQUE À LA GRILLE DES NOMBRES

L'activité débute par l'assemblage d'une série de bandelettes : chaque enfant reçoit une feuille comprenant des bandelettes des 100 premiers nombres où les bandelettes ne sont pas rangées dans l'ordre. Il doit d'abord les découper puis recomposer à la suite les bandelettes des 100 premiers nombres (voir fiche 9).

Une fois ce " puzzle " terminé, l'enseignant pose une série de défis, visant à permettre aux élèves de se familiariser avec le support :

- Par exemple : « quel est le nombre qui suivra directement 34 ? Ou quel est celui qui précède directement 28 ? »
- On pourra également amorcer de premiers calculs qui s'effectueront par dénombrement direct.

Exemple

24 + 8 => on trouve 24 sur la bande et on avance de 8 cases pour arriver à 32.

On peut répliquer le travail avec des nombres un peu plus grands, pour montrer que ça devient fastidieux de fonctionner de cette façon :

Exemple

34 + 27 => on trouve 34 (ou 27) et on compte 27 ou 34 cases pour arriver à 61.

Cette exploitation de la bande numérique amène les élèves à formuler le fait que chaque fois qu'on avance d'une case, on ajoute 1 au nombre et chaque fois qu'on recule d'une case, on soustrait 1 au nombre.

L'enseignant propose ensuite aux élèves d'organiser un peu différemment cette bande des 100 premiers nombres pour apprendre cette fois à calculer plus facilement. Pour y arriver, ils sont d'abord invités à colorier dans une couleur tous les nombres se terminant par 1 et ensuite à coller les morceaux les uns sous les autres sur une feuille de papier, de manière à former la grille des nombres de 1 à 100.

L'analyse de cette grille de 100 amène alors à dégager sa logique de construction :

- **chaque fois qu'on monte ou descend d'une <u>ligne</u>, on retranche ou on ajoute 10 au nombre ;**
- **chaque fois qu'on avance ou recule d'une <u>case</u>, on ajoute 1 ou on soustrait 1 au nombre.**

En ce sens, la grille de 100 est un support intéressant pour soutenir des calculs mentaux basés sur la décomposition d'un nombre en dizaines et unités. C'est ce que les élèves découvriront dans les activités 7 et 8.

Fiche 9 : Construction de la grille

Voici des bandelettes sur lesquelles apparaissent tous les nombres compris entre 1 et 100.

1) Reconstitue la bande des nombres à partir de 1 et qui soit la plus longue possible.
2) Colorie en vert les cases qui contiennent un nombre qui se termine par 1.

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

2.3.2 | ACTIVITÉ 7 : DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE DANS UNE ADDITION

L'activité 7 a pour but d'exploiter la grille construite lors de l'activité 6 pour effectuer des décompositions de nombres à additionner en dizaines et unités.

Elle s'organise en deux étapes :

- un petit jeu de communication est d'abord réalisé au départ des fiches 10, 11 et 12 ;
- ensuite un exercice d'approfondissement (fiche 13) est envisagé : il vise à amener les élèves à réfléchir à l'équivalence de calculs, en appuyant leur analyse, non pas sur la réponse au calcul, mais plutôt sur les opérations contenue dans chacun des calculs.

2.3.2.1 | LE JEU DE COMMUNICATION (FICHES 10, 11 ET 12)

Dans un premier temps, les élèves reçoivent la fiche 10 et sont invités à positionner deux nombres sur la grille (les nombres 34 et 50). Ensuite, ils cherchent un chemin permettant de relier ces deux nombres et traduisent ce chemin par un calcul. Ils recopient alors leur calcul sur la fiche 11.

Il peut être utile de passer dans les bancs pour analyser les démarches des élèves et donner quelques conseils aux élèves pour écrire les calculs, en étant par exemple attentifs à l'usage des parenthèses.

L'enseignant reprend ensuite toutes les fiches 11 des élèves et les répartit dans la classe de manière aléatoire. En plus d'une fiche 11 complétée par un autre élève que lui, chaque enfant reçoit une fiche 12 vierge et doit, sur la base de la fiche 11 qu'il a reçue, retrouver le chemin utilisé pour passer de 34 à 50.

Après l'exercice, l'enseignant revient, lors de l'exploitation collective, sur quelques chemins envisagés par les élèves (ou inventés par lui).

Exemples de chemins discutés avec toute une classe, lors de l'exploitation collective de cette activité

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$34 + 6 + 10 = 50$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$34 + 10 + 6 = 50$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$34 + 20 - 4 = 50$

- L'enseignant est d'abord revenu sur la réponse de ces 3 opérations en posant la question suivante. Finalement, par combien de cases faut–il passer pour passer de 34 à 50 ?

$$34 + 16 = 50$$

- Il a ensuite repris les diverses démarches pour montrer diverses décompositions du nombre 16 réalisées par les élèves pour passer de 34 à 50 :

$$34 + 16 = 34 + (10 + 6) = (34 + 10) + 6 = 34 + (6 + 10) = 34 + (20 - 4).$$

- Les élèves ont ainsi pu constater qu'on peut décomposer 16 de n'importe quelle façon, le calcul sera toujours correct.

Au niveau mathématique

Les élèves peuvent également approcher ici deux propriétés de l'addition :

- la commutativité lors de la comparaison de ces deux calculs :

$$10 + 6 = 6 + 10$$

- l'associativité, lors de la comparaison des calculs suivants par exemple :

$$34 + (10 + 6) = (34 + 10) + 6 = 44 + 6 = 50$$

Il peut être utile de répliquer l'exercice en travaillant au départ d'autres additions.

2.3.2.2 | L'EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT (FICHE 13)

La fiche 13 prolonge la réflexion en proposant aux élèves un défi permettant de travailler une erreur particulière : à la place du calcul 34 + (20 – 4), un élève a en effet proposé le calcul 34 + (4 – 20). Le but de ce défi est d'amener les élèves à prendre conscience que la soustraction n'est pas commutative et d'appuyer la réflexion par la grille.

Exemple de réponse

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

34 + (20 – 4) n'est pas égal à 34 + (4 – 20) car dans un cas, on ajoute 20 et on retranche 4 et dans l'autre, on ajoute seulement 4 et on retire 20.

Au niveau mathématique

L'objectif est ici de valider des équivalences de calculs en passant non pas par la réponse, mais plutôt par l'analyse des opérations effectuées. En ce sens, on développe une vision relationnelle de l'arithmétique.

Fiche 10 : Jeu de communication

Dans la grille suivante,

1) colorie en rouge la case dans laquelle se trouve le nombre 34 et en vert, la case dans laquelle se trouve le nombre 50.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2) colorie un chemin qui permet de passer du nombre 34 au nombre 50.

3) essaie de transformer ton chemin par un calcul.
Attention, il faut qu'un autre élève puisse retrouver ton chemin uniquement à l'aide du calcul que tu lui fourniras.

Fiche 11 : Jeu de communication

Écris le calcul qui correspond à ton chemin.

Ton calcul :

____

Écris le calcul qui correspond à ton chemin.

Ton calcul :

____

Écris le calcul qui correspond à ton chemin.

Ton calcul :

____

Fiche 12 : Jeu de communication

1) Sur la base du calcul que tu as reçu d'un autre élève, trouve le chemin qu'il a effectué pour
passer du nombre 34 au nombre 50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2) Son calcul était-il correct ?

3) N'y aurait-il pas un chemin et un calcul plus simple pour passer du nombre 34 au nombre 50 ?
Explique ta réponse :

a) avec tes propres mots : ____________________

____

b) avec un calcul : ____________________

Fiche 13 : Exercice d'approfondissement

À la place du calcul :

$$34 + (20 - 4)$$

Un élève propose le calcul :

$$34 + (4 - 20).$$

Sa démarche est-elle correcte ? Explique ta réponse.

____

____

Dessine le calcul de départ et sa démarche sur la grille.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.3.3 | ACTIVITÉ 8 : DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE DANS UNE SOUSTRACTION

L’activité 8 aborde la décomposition d’un nombre dans la soustraction (voir fiche 14).

Elle propose deux manières de décomposer 18 dans le calcul 67 – 18 :

- à l’aide d’une addition, en considérant que 18 est égal à 10 + 8
- et à l’aide d’une soustraction, en considérant que 18 est égal à 20 – 2

Les élèves sont invités à rechercher une démarche pour soustraire 18 de 67 en appliquant les deux manières de décomposer 18. Ils dessinent également sur la grille des 100 nombres les deux manières de procéder et écrivent le calcul correspondant. Un débat plus collectif, visant à confronter les réponses des élèves, est ensuite réalisé.

Voici les productions, toutes correctes, ayant servi de base à la discussion collective dans une classe.

Exemples

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

67 – 18 = 67 – 10 – 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

67 – 18 = 67 – 8 – 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

67 – 18 = 67 – 20 + 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

67 – 18 = 67 + 2 – 20

L'enseignant a non seulement exploité les décompositions correctes (comme celles-ci-dessus), mais aussi une décomposition incorrecte, qu'il a suggéré de lui-même car les élèves n'avaient pas proposé spontanément ce procédé :

Un élève conseille à son enseignante d'enlever d'abord 8 puis après d'ajouter 10, parce que 8 + 10 = 18.

Que pensez-vous de sa démarche ?
Pourquoi est-ce que ça ne fonctionne pas ?

Voici la réponse proposée par un élève :

« ce n'est pas juste car elle enlève 8 puis elle ajoute 10,
donc Christelle a en fait ajouté 2 au lieu de retirer 18… ».

Ce type de raisonnement est intéressant car il ne s'appuie pas sur le résultat des calculs, mais plutôt sur les opérations réalisées (soustraire 8 puis soustraire 10 ou soustraire 8 puis ajouter 10) pour obtenir le résultat. En ce sens, les élèves rentrent au cœur de la réflexion sur les propriétés des opérations et développent alors une vision relationnelle de l'arithmétique.

Au niveau mathématique

A travers l'exploitation des démarches, qu'elles soient correctes ou non, les élèves approfondissent leur compréhension des propriétés des opérations (addition et soustraction) :

$67 - 18 = 67 - (10 + 8) = 67 - (8 + 10)$ => commutativité de l'addition

$67 - 18 = 67 - 10 - 8$ => démarche pour soustraire une somme

L'objectif est ici de valider les équivalences de calculs en passant non pas par la réponse, mais plutôt par l'analyse des opérations effectuées. En ce sens, les démarches apprises par les élèves seront plus efficaces, car elles pourront s'appliquer dans de nombreuses autres situations impliquant la soustraction d'une somme de deux nombres.

Pour exploiter davantage la richesse de cet outil, le groupe propose de se référer au chapitre 4, Ressources complémentaires page 87. Dans ce chapitre, il est suggéré de construire le livre de 1000. Plusieurs photos illustrent des prolongements possibles.

Fiche 14

Thibault et Christelle veulent effectuer l'opération suivante à l'aide de la grille :

67 – 18 =

Thibault propose de décomposer 18 en 20 – 2.

1) Dessine en rouge sur la grille le trajet qu'il pourrait faire.
2) Écris le calcul qui correspond au trajet de Thibault :

____

Christelle propose de décomposer 18 en 10 + 8.

1) Dessine en vert sur la grille le trajet qu'elle pourrait faire.
2) Écris le calcul qui correspond au trajet de Christelle :

____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.4 | ACTIVITÉS CENTRÉES SUR LA CALCULATRICE DÉFECTUEUSE[6]

Analyse d'énoncés en vue de dégager un calcul qui permettent de les résoudre.

- ➡ Activité 9 – *Analyse d'énoncés en vue de dégager une opération permettant de les résoudre - P. 61 à 62 - Fiche 15.*

Décomposition d'un nombre dans 3 opérations différentes, en vue de comparer les démarches en fonction de l'opération dans laquelle le nombre à décomposer est impliqué.

- ➡ Activité 10 – *Décomposition d'un nombre dans une addition - P. 63 à 67 - Fiches 16 et 17.*
- ➡ Activité 11 – *Décomposition d'un nombre dans une soustraction - P. 68 à 71 - Fiches 18 et 19.*
- ➡ Activité 12 – D*écomposition d'un nombre dans une multiplication - P. 72 à 76 - Fiches 20 et 21.*

Ces activités visent à amener les élèves à imaginer une décomposition d'un nombre dans un calcul (addition, soustraction ou multiplication) pour pouvoir l'encoder dans une calculatrice dont une touche ne fonctionne plus. Elles permettent aux élèves d'apprendre:

- à analyser une addition, une soustraction ou une multiplication dont un des termes (ou facteur) doit être décomposé (activités 10, 11 et 12) ;
- à utiliser l'égalité en termes de résultat et en termes d'équivalence (activités 10, 11 et 12) ;
- à justifier sa démarche en utilisant un support visuel ou un contexte de vie (activités 10, 11 et 12).

Ces activités s'organisent autour de 5 fiches.

L'activité 9 (fiche 15) a pour but d'introduire la réflexion en présentant aux élèves des situations dont la résolution nécessitera d'effectuer un calcul. Un travail individuel suivi d'une rapide mise en commun permet de dégager les 3 calculs à effectuer.

Par la suite, **les activités 10 à 12** explorent chacun de ces 3 calculs, en essayant chaque fois de les remplacer par un autre calcul que l'on pourrait encoder sur une calculatrice dont une touche ne fonctionne pas. Ces trois activités se déroulent toutes en trois étapes :

- une phase individuelle (ou à 2) permettant aux élèves de produire eux-mêmes des calculs ;
- une mise en commun des calculs produits par les élèves, en fonction des décompositions qui ont permis de les proposer ;
- et une validation des démarches proposées où l'enseignant revient sur quelques calculs, en vue de faire réfléchir les élèves sur leur efficacité.
  - l'addition pour l'activité 10,
  - la soustraction pour l'activité 11,
  - et la multiplication pour l'activité 12.

Les fiches 16, 18 et 20 servent de point de départ à chacune de ces activités. Les fiches 17, 19 et 21 proposent un matériel concret (bande de nombres pour les fiches 17 et 21 et droite des nombres pour la fiche 20) permettant aux élèves de visualiser les calculs analysés.

[6] Inspiré de A. COESSENS, *La pensée relationnelle, un tremplin entre l'arithmétique et une ouverture vers l'algèbre. Mémoire de fin de master en Sciences de l'éducation*. Université de Liège, 2017.

2.4.1 | ACTIVITÉ 9 : ANALYSE D'ÉNONCÉS EN VUE DE RETROUVER UNE OPÉRATION POUR LES RÉSOUDRE

Cette activité débute par l'exploitation de la fiche 15. Celle-ci présente trois problèmes assez simples permettant d'introduire un contexte de vie, sur lequel l'enseignant pourra s'appuyer par la suite pour donner sens aux opérations proposées par les élèves. Dans un premier temps, les élèves sont invités à écrire le calcul qui permettra de résoudre le problème.

Après un travail individuel, une exploitation collective permet de mettre en évidence les 3 calculs à effectuer :

$$31 + 27$$

$$78 - 29$$

$$3 \times 21$$

Les énoncés et les calculs qui en découlent, peuvent être adaptés en fonction du niveau des élèves en calcul mental :

Il s'agit de trouver des énoncés donc les calculs se déduisent assez facilement, car l'objectif de l'activité n'est pas d'apprendre en profondeur comment exprimer un énoncé à l'aide d'un calcul.

En ce qui concerne les calculs, ils doivent être suffisamment complexes pour ne pas pouvoir être résolus par simple dénombrement. Toutefois, il faut également veiller à ce que les nombres restent accessibles aux élèves, au cas où ils auraient besoin de dessiner les nombres impliqués dans les calculs dans les activités 10, 11 et 12.

Fiche 15 : Trouver le bon calcul à encoder sur la machine

Voici 3 problèmes. Trouve chaque fois le calcul à effectuer pour les résoudre.

- **Situation 1 :**

Jordan avait 31 cartes de foot. Pour son anniversaire, il en reçoit 27. Combien en a-t-il maintenant ?

Écris le calcul à réaliser pour résoudre le problème :

- **Situation 2 :**

Jordan a 78 cartes de foot. Il en donne 29 à son ami. Combien lui en reste-t-il ?

Écris le calcul à réaliser pour résoudre le problème :

- **Situation 3 :**

Jordan a reçu 3 paquets de 21 cartes de foot. Combien en a-t-il en tout ?

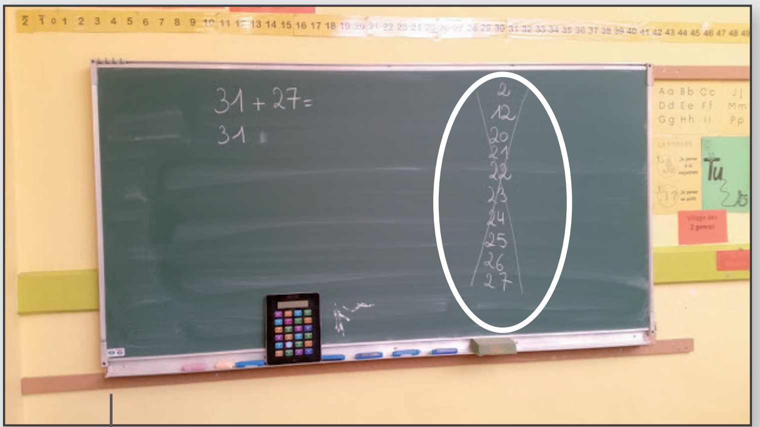
Écris le calcul à réaliser pour résoudre le problème :

2.4.2 | ACTIVITÉ 10 : DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE DANS UNE ADDITION

L'activité 10 commence par un travail individuel (ou par 2) au départ de la fiche 16, où les élèves doivent chercher un calcul équivalent au calcul 31 + 27 : il s'agit en effet de trouver un autre calcul à encoder dans la calculatrice défectueuse sachant que la touche 2 ne fonctionne pas.

Lors des essais dans les classes, certains élèves ont eu des difficultés à bien comprendre que le nombre 27 devait être modifié (et pas le nombre 31), puisque seule la touche 2 était défectueuse. L'enseignante a alors clarifié la situation en faisant réfléchir les élèves sur les nombres interdits :

Exemple



Ces nombres sont interdits ...

Une première mise en commun peut être réalisée à ce moment, pour mettre en évidence les différents types de calculs proposés aux élèves et leur écriture à l'aide des parenthèses. À cette étape, on ne valide pas les propositions : on pourra simplement les classer en fonction du type de décomposition réalisée.

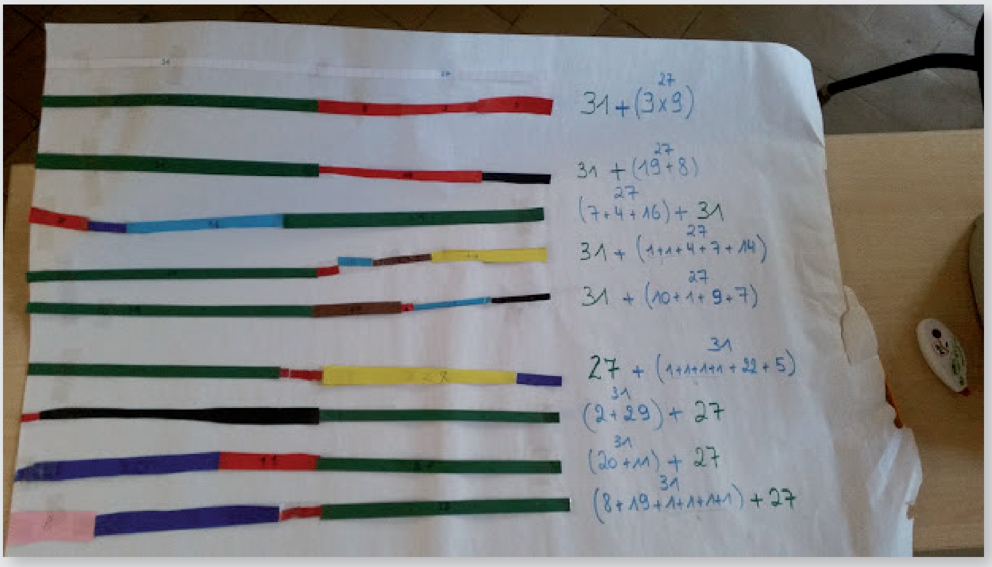
Certains élèves auront sans doute pensé à décomposer 27 en une addition de 2 nombres. D'autres proposeront peut-être une décomposition multiplicative de 27 et d'autres encore, une décomposition soustractive de 27 :

Décompositions additives de 27 31 + (19 + 8)	**Décompositions multiplicatives de 27** 31 + (3 × 9)	**Décompositions soustractives de 27** 31 + (30 – 3)
(31 + 19) + 8 31 + 8 + 19 ...	31 + (3 × 9) (31 + 3) × 9 ...	(31 + 30) – 3 31 + (3 – 30) ...

Ensuite, l'enseignant propose aux élèves de valider les calculs proposés. Pour cela, on pourra partir de toutes les propositions des élèves ou en sélectionner quelques-unes, certaines étant correctes et d'autres, incorrectes.

Pour aider les élèves à entrer dans l'analyse fine des calculs, il est utile de prévoir du matériel : par exemple des feuilles de couleurs dans lesquelles les élèves peuvent découper des bandes de 31 cm ou de 27 cm par exemple, comme illustré ci-dessous. Vous trouverez dans la fiche 17 des bandes de 31, 27 et 10 carrés que les enfants peuvent découper et recoller ensemble pour donner du sens aux différents calculs analysés.

Exemple



Une autre possibilité est de s'appuyer sur le contexte de départ (voir fiche 15) :

Jordan avait 31 cartes de foot. Pour son anniversaire, il en reçoit 27.

Combien en a-t-il maintenant ?

Les enfants peuvent alors représenter certaines décompositions en lien avec l'énoncé.

Calculs à analyser	Compréhension que les élèves peuvent développer pour approcher les propriétés des opérations en contexte.	Propriété mathématique travaillée
31 + 19 + 8 31 + 8 + 19	Jordan avait 31 cartes. Vu qu'il en reçu 27, il peut d'abord en avoir reçu 19 et puis 8 ou le contraire.	Ici, les élèves prennent conscience de la commutativité de l'addition 19 + 8 = 8 + 19
31 + 30 – 3 31 + 3 - 30	31 + 30 – 3 ≠ 31 + 3 – 30 Dans le premier calcul, c'est comme s'il en avait d'abord reçu 30 cartes, mais alors, on lui en a donné trop puisqu'il ne devait en recevoir que 27. Il doit en rendre 3. Donc 31 + 30 – 3, c'est juste. Dans le deuxième calcul, c'est comme si on lui en avait donné 3, puis qu'il en avait perdues 30. Il en a alors beaucoup moins que 31, ça ne marche pas…	Ici, les élèves prennent conscience que la soustraction n'est pas commutative 30 - 3 ≠ 3 - 30
31 + 10 + 17 31 + 9 + 18	31 + 10 + 17 = 31 + 9 + 18 Dans le premier calcul, il en reçoit 10 et encore 17, c'est donc comme s'il en avait reçu 27. Dans le deuxième calcul, au lieu de 10, on lui en a d'abord donné 9, donc après on doit lui en donner un de plus que 17, donc 18.	Ici, les élèves prennent conscience que l'addition est associative. 31 + 10 + 17 = 31 + (9 + 1) + 17 = 31 + 9 + (1+17)

Fiche 16 : Recherche de calculs équivalents à 31 + 27

Je dois effectuer le calcul

31 + 27

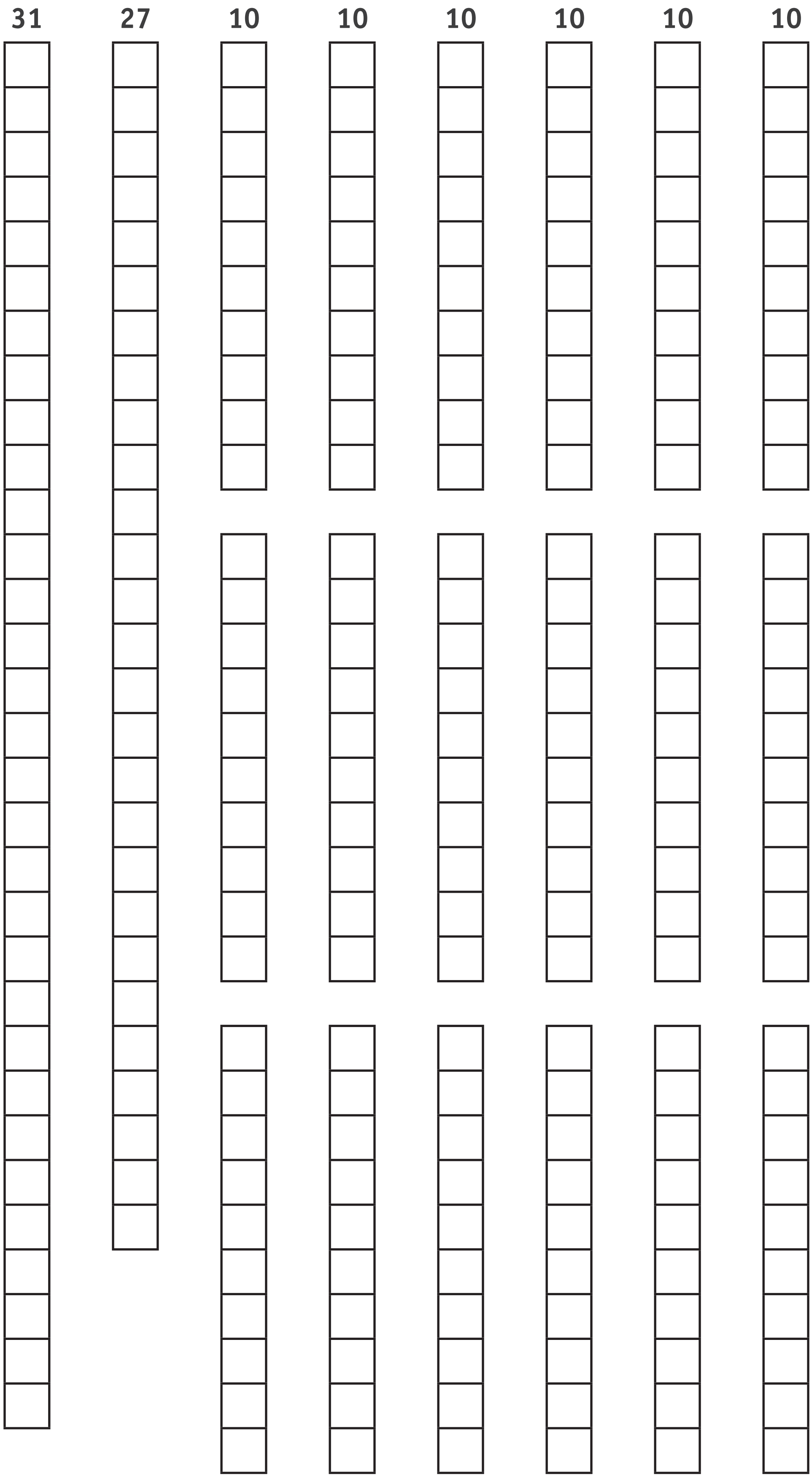
mais la touche « 2 » de ma calculatrice est cassée.

Quelle autre opération pourrais-je effectuer pour trouver la solution ?

Explique comment tu as réfléchi pour trouver le calcul :

AUTRE CALCUL :

Fiche 17 : Matériel pour représenter les opérations équivalentes à 31 + 27



2.4.3 | ACTIVITÉ 11 : EXPLOITATION DE CERTAINS CALCULS SUPPOSÉS ÉQUIVALENTS À 78 - 29

L'activité 11 s'organise selon un schéma analogue à l'activité 10 : la fiche 18 est distribuée et les élèves cherchent (seuls ou par deux) un calcul à encoder sur la calculatrice défectueuse, suivie d'une mise en commun ou l'enseignant organise les productions des élèves en fonction des démarches mises en œuvre.

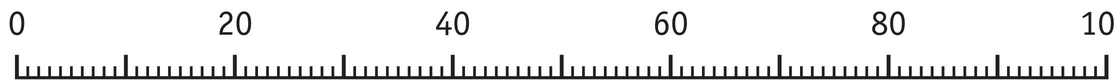
Certaines s'appuient sur une décomposition additive de 29, d'autres, sur une décomposition soustractive de 29. Par exemple :

	Décompositions additives de 29 78 – (10 + 19)	**Décompositions soustractives de 29** 78 – (30 - 1)
Exemples de calculs proposés par les élèves	(78 – 10) – 19 (78 – 10) + 19	(78 – 30) + 1 (78 – 30) - 1

Ensuite, certaines démarches seront analysées plus en profondeur en vue d'être validées par la classe. Pour cela, il peut être utile de prévoir un matériel particulier.

Le même matériel que celui utilisé pour l'activité 10 (bandelette) sera difficile à utiliser pour représenter ces calculs. En effet, comme le nombre de départ est plus grand, cela risque d'être plus compliqué.

On peut alors proposer aux élèves de travailler à partir de la droite numérique reproduite en plusieurs exemplaires, un par calcul analysé :



Vous trouverez dans la fiche 19 des droites numériques dont les élèves peuvent se servir pour raisonner sur les nombres.

On peut également s'appuyer sur le contexte dans lequel le calcul a été produit (voir fiche 15) :

Jordan a 78 cartes de foot. Il en donne 29 à son ami.

Combien lui en reste-t-il ?

C'est ce que présente le tableau à la page suivante.

Calculs à analyser	**Compréhension que les élèves peuvent développer pour approcher les propriétés des opérations en contexte.**	**Propriété mathématique travaillée**
(78 – 10) + 19 (78 – 10) – 19	78 – 29 ≠ (78 – 10) + 19 Dans le calcul (78 – 10) + 19, c’est comme s’il en donnait d’abord 20 et que son copain lui en rendait 19, ça n’est pas juste. 78 – 29 = (78 – 10) – 19 Dans ce calcul 78 – 10 – 19, c’est comme s’il en donnait d’abord 10 à son ami, mais il n’a pas encore donné assez : il doit encore en donner 19. Donc c’est juste.	Les élèves prennent ici conscience que la soustraction n’est pas associative : 78 – (10 + 19) ≠ (78 – 10) + 19. Ils approchent également une autre propriété mathématique : lorsqu’on soustrait une somme de deux termes, il faut soustraire chacun des termes de la somme : 78 – (10 + 19) = 78 – 10 – 19
(78 – 30) + 1 (78 – 30) – 1	78 – 29 ≠ (78 – 30) - 1 Dans le calcul 78 – 30 – 1, c’est comme s’il en avait d’abord donné 30, puis qu’il en avait encore donné 1. Donc en tout, il en a donné 31 et pas 29… 78 – 29 = 78 – 30 + 1 Dans le calcul 78 – 30 + 1, c’est comme s’il en avait d’abord reçu 30 cartes, mais alors, on lui en a donné trop puisqu’il ne devait en recevoir que 29. Il doit en rendre 1. Donc 78 + 30 – 1, c’est juste.	Les élèves prennent à nouveau conscience que la soustraction n’est pas associative : 78 – (30-1) ≠ (78 – 30) – 1 Ils approchent également une autre propriété mathématique : lorsqu’on soustrait une différence de deux termes, il faut soustraire le premier terme et additionner le second terme. 78 – (30 – 1) = 78 – 30 + 1

Lors des essais de cette activité dans les classes, nous avons constaté que les élèves sont très vite entrés dans l’activité, suite au travail préalablement réalisé au départ de l’addition.

Fiche 18 : Recherche de calculs équivalents à 78 – 29

Je dois effectuer le calcul

78 – 29

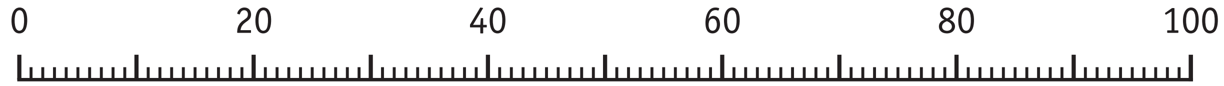
mais la touche « 2 » de ma calculatrice est cassée.

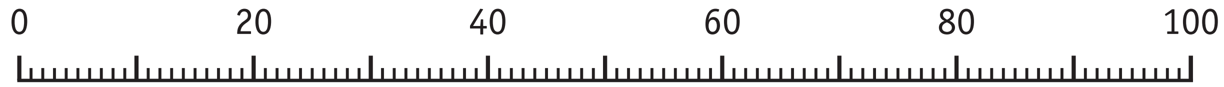
Quelle autre opération pourrais-je effectuer pour trouver la solution ?

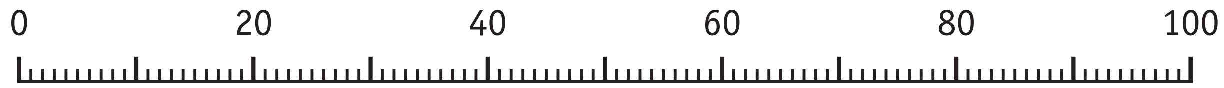
Explique comment tu as réfléchi pour trouver le calcul :

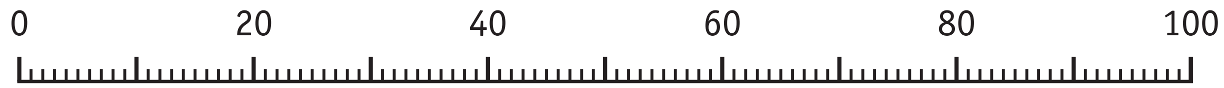
AUTRE CALCUL :

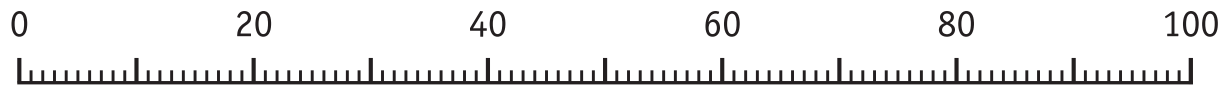
Fiche 19 : Matériel pour représenter les opérations équivalentes à 78 – 29

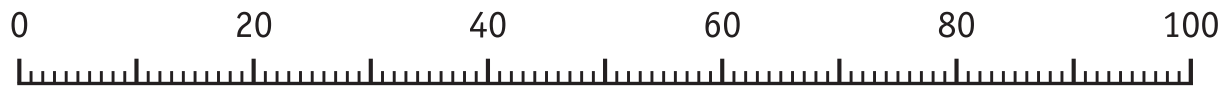


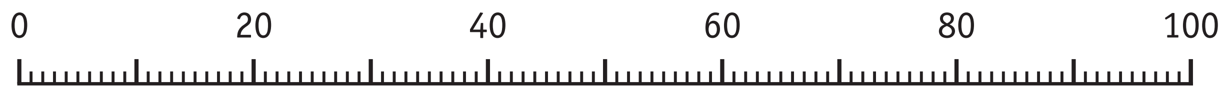


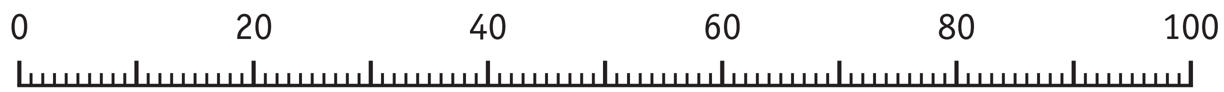












2.4.4 | ACTIVITÉ 12 : EXPLOITATION DE CERTAINS CALCULS SUPPOSÉS ÉQUIVALENTS À 3 × 21

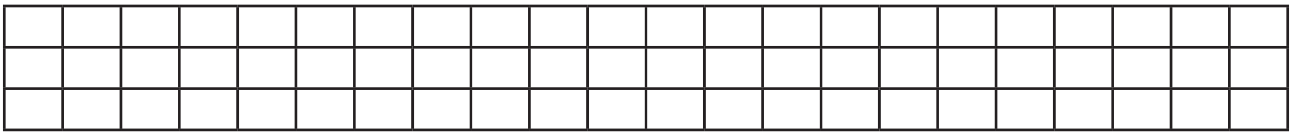
L'activité 12 s'organise selon un schéma analogue à l'activité 10 et 11 :

- la fiche 20 est d'abord distribuée et les élèves cherchent (seuls ou par deux) un calcul à encoder sur la calculatrice défectueuse,
- une première mise en commun est alors proposée : l'enseignant organise les productions des élèves en fonction des démarches mises en œuvre.

Certaines s'appuient sur une décomposition additive de 21, d'autres, sur une décomposition multiplicative de 21 et enfin sur une décomposition soustractive de 21 :

	Décompositions additives de 21	**Décompositions multiplicatives de 21**	**Décompositions soustractives de 21**
Exemples de calculs proposés par les élèves	3 × (19 + 2) 3 × 19 + 2 3 × 19 + 3 × 2 ...	3 × (7 × 3) 3 × 7 × 3 3 × 7 × 3 × 3	3 × (30 – 9) 3 × 30 – 9 3 × 30 – 3 × 9

Dans le cas de la multiplication, il sera sans doute utile de prévoir un autre matériel. Par exemple un rectangle quadrillé en rectangles plus petits, comme le propose la fiche 21.



On peut également raisonner à partir du contexte dans lequel le calcul a été produit (voir fiche 15) :

Jordan a reçu 3 paquets de 21 cartes de foot.

Combien en a-t-il en tout ?

C'est ce que présente le tableau à la page suivante.

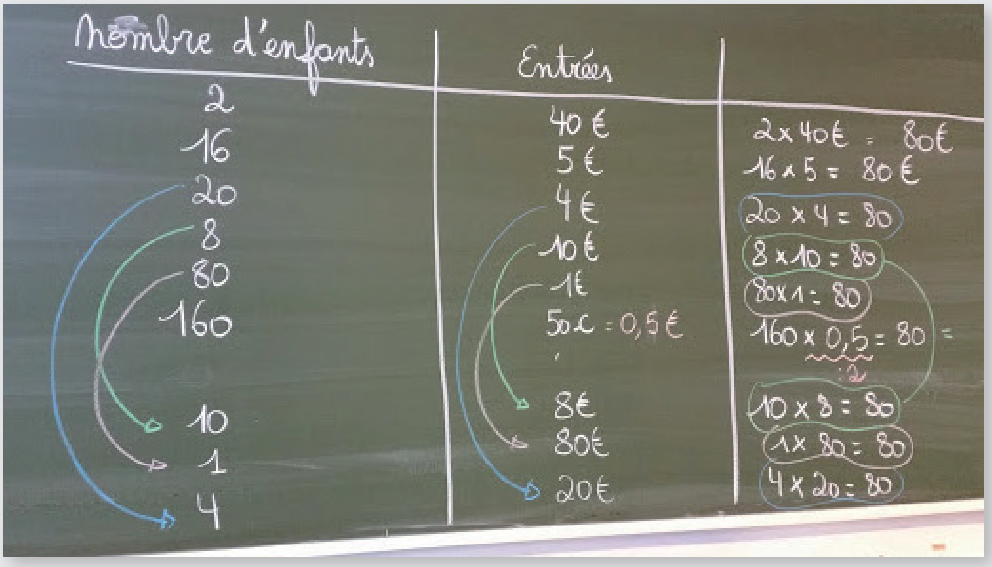
Calculs à analyser	Compréhension que les élèves peuvent développer pour approcher les propriétés des opérations en contexte.	Propriété mathématique travaillée
3 × 19 + 3 × 2 3 × 19 + 2	3 × (19 + 2) = 3 × 19 + 3 × 2 Dans le calcul 3 × 19 + 3 × 2, c'est comme si Jordan avait 3 paquets de 19 cartes, mais il manque alors 2 cartes dans chaque paquet, il faut donc les rajouter. Donc c'est juste. 3 × (19 + 2) ≠ 3 × 19 + 2 Dans le calcul 3 × 19 + 2, Jordan a 3 paquets de 19 cartes et encore 2 cartes. Il peut donc compléter son premier paquet de cartes, mais dans les deux autres, il lui manquera des cartes. Donc c'est faux.	Les élèves prennent ici conscience de la distributivité de la multiplication.
(3 × 7) × 3	3 × (7 × 3) = (3 × 7) × 3 Dans le calcul (3 × 7) × 3, c'est comme si Jordan avait 3 paquets, mais qu'il n'y avait que 7 cartes dans chaque paquet. C'est trop peu vu qu'il lui faut normalement 21 cartes dans chaque paquet. Donc il lui faut 3 fois plus de cartes dans chaque paquet. Donc on multiplie le tout par 3.	Les élèves prennent conscience ici de l'associativité de la multiplication : 3 × (7 × 3) = (3 × 7) × 3

Lors des essais de cette activité dans les classes, certains élèves ont effectué le calcul dans leur tête afin de pouvoir proposer un autre (ex. : 66 – 3). Dans ce cas, le lien au calcul initial est plus complexe à réaliser, mais pas toujours impossible. En effet, si l'on considère que 66 c'est en réalité 3 × 22. On a pris 1 paquet de 3 en trop, donc il faut retirer 3 pour obtenir la réponse.

En guise de prolongement, dans une classe, l'enseignante a proposé le défi suivant :

Exemple

Des enfants vont au musée et paient 80 euros. Combien sont-ils et combien ont-ils payé ?



L'analyse des calculs produits par les élèves lui a permis de revoir la commutativité de la multiplication.

Fiche 20 : Recherche de calculs équivalents à 3 × 21

Je dois effectuer le calcul

3 × 21

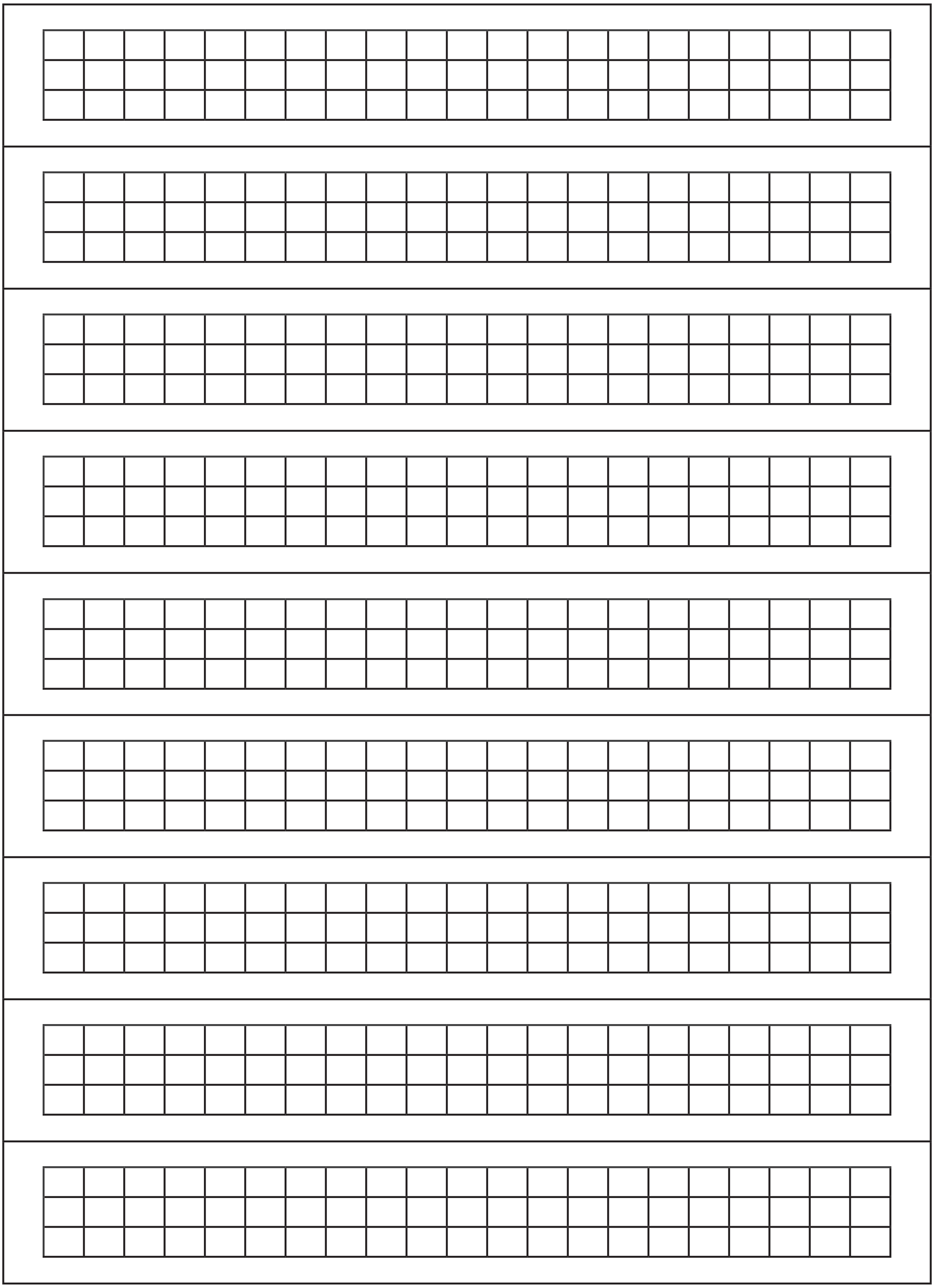
mais la touche « 2 » de ma calculatrice est cassée.

Quelle autre opération pourrais-je effectuer pour trouver la solution ?

Explique comment tu as réfléchi pour trouver le calcul :

AUTRE CALCUL :

Fiche 21 : Matériel pour représenter les opérations équivalentes à 21 × 3



2.5 | PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS ET PROCÉDURES DE CALCUL MENTAL – QUELQUES REPÈRES[7]

Pour clôturer cette section, nous proposons dans cette partie quelques repères théoriques autour des propriétés des opérations. Ce document ne constitue pas une synthèse à destination des élèves, mais plutôt une remise au point à l'usage des enseignants.

Les propriétés des opérations permettent d'expliquer et de justifier les étapes d'un calcul. Ce sont également elles qui permettent de garantir le bien fondé de certaines techniques opératoires. À l'école primaire, les propriétés des opérations sont le plus souvent utilisées de manière implicite : elles n'ont pas à être nommées de façon formelle. Toutefois, elles peuvent être approchées au travers de supports visuels ou de contextes de vie. C'est ce que nous développons ici, en faisant des liens entre les stratégies de calculs mentaux particulièrement utilisées en 3e et 4e primaires et les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité.

[7] Cette partie s'inspire d'un document rédigé par R.Charnay et disponible sur internet à l'adresse suivante : http://www2.ac-lyon.fr/etab/ien/loire/montbrison/IMG/pdf/proprietes.pdf.

<table>
<tr><th colspan="2">LA COMMUTATIVITÉ</th></tr>
<tr><th>Sa définition mathématique</th><th>Son utilisation en calcul mental</th></tr>
<tr><td>• La commutativité s’applique à l’addition et la multiplication.

Cette propriété est liée au fait que, dans le calcul d’une somme (ou d’un produit) de deux nombres, on peut changer la place des deux nombres. Elle peut être formalisée comme suit :

a et b étant 2 nombres,
$a + b = b + a$
et $a \times b = b \times a$</td><td>• La commutativité de l’addition et de la multiplication est utilisée pour retenir plus facilement les tables.

Par exemple :
7×9 sera mémorisé dès que 9×7 le sera et inversement. Cela réduit pratiquement de moitié le nombre de résultats à mémoriser.

• La commutativité permet également de simplifier certains calculs.

Par exemple :
La réponse au calcul 3 + 79 sera plus facile à trouver si on change la place des deux nombres 79 + 3, car dans ce cas, le dénombrement direct (80, 81, 82) permet de trouver très facilement la réponse.</td></tr>
<tr><td>• La commutativité ne s’applique pas à la soustraction.

a et b étant 2 nombres,
$a - b \neq b - a$</td><td>• Face à un calcul mental de ce type :

123 – 74
les élèves ont tendance à inverser certains chiffres des nombres à soustraire :

123 – 74 = 51 car 12 – 7, c’est 5 et 3 – 4, ça ne marche pas donc on fait 4 – 3 = 1

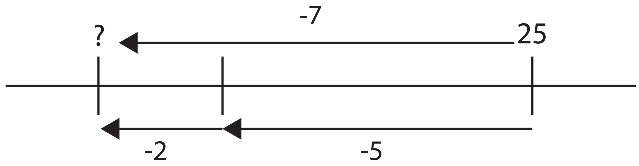
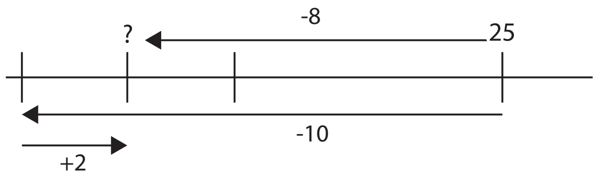
Pour les aider à bien comprendre que cette stratégie ne fonctionne pas, un recours à une situation de vie peut aider à donner sens à l’opération qu’ils doivent effectuer :

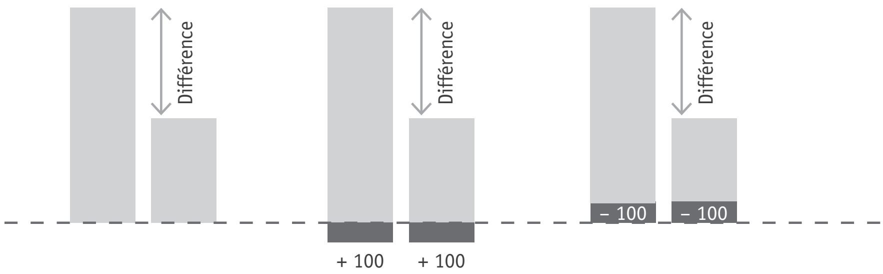
Tu as 123 cartes et tu en donnes 74 à ta sœur. Comment vas-tu faire ? Il faudra d’abord lui en donner 70, mais ce n’est pas assez, il faudra encore lui en donner 4. Donc,

123 – 74 = (123 – 70) – 4 = 53 – 4 = 49.

En cherchant à donner du sens à l’opération de soustraction, les élèves effectueront moins d’erreurs liées à la commutativité.</td></tr>
</table>

L'ASSOCIATIVITÉ	
Sa définition mathématique	**Son utilisation en calcul mental**
• L'associativité s'applique à l'addition et la multiplication. Cette propriété est liée au fait que, dans le calcul d'une somme (ou d'un produit) de trois nombres ou plus, on peut associer de différentes façons les trois nombres 2 par 2. Elle peut être formalisée comme suit : a, b et c étant 3 nombres, $(a + b) + c = a + (b + c)$ $= a + b + c$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ $= a \times b \times c$	Elle est souvent utilisée implicitement par les élèves : • dans le calcul d'une somme (ou d'un produit) de deux nombres, lorsqu'on décompose un des nombres. Par exemple : 49 + 13 peut être calculé comme suit : $49 + 13 = 49 + (11 + 2)$ => on décompose 13 $= (49 + 11) + 2$ => associativité $= 60 + 2 = 62$ Par exemple : $14 \times 20 = 14 \times (2 \times 10)$ => on décompose $= (14 \times 2) \times 10$ => associativité $= 28 \times 10 = 280$ Mais aussi, $= 48 \times 4 = (48 \times 2) \times 2$ ou encore $= 48 \times 5 = (48 \times 10) : 2$ • couplée à la commutativité, c'est également l'associativité qui permet d'échanger la place de certains nombres et de les grouper pour arriver à des calculs plus faciles. Par exemple : $12 + 7 + 48 = 12 + 48 + 7$ => commutativité $= (12 + 48) + 7$ => associativité $= 60 + 7 = 67$ • enfin, la technique de compensation croisée, utilisée dans certaines additions ou multiplication de deux nombres repose sur la propriété d'associativité. Par exemple : $59 + 68 = 60 + 67$ $= 59 + (1 + 67)$ $= (59 + 1) + 67$ $= 60 + 67$

L'ASSOCIATIVITÉ (SUITE)	
Sa définition mathématique	**Son utilisation en calcul mental**
• L'associativité ne s'applique pas à la soustraction, ni à la division. $a - (b + c) = a - b - c$ $a - (b - c) = a - b + c$	Pourtant, les élèves sont fréquemment amenés à soustraire une somme ou une différence de nombres en calcul mental. Par exemple : $25 - 7 = 25 - (5 + 2) = (25 - 5) - 2$ ou $25 - 8 = 25 - (10 - 2) = 25 - 10 + 2$ Des représentations des calculs à l'aide de la droite numérique peuvent aider à la compréhension de cette propriété :   Des contextes peuvent également aider à revenir au sens de la soustraction : - si tu as fait 25 pas et que tu dois reculer de 7 pas, tu peux d'abord reculer de 5, mais ce n'est pas assez : tu dois encore reculer de 2 ; - si tu as fait 25 pas et que tu dois reculer de 8 pas, tu peux reculer de 10 pas mais alors, tu devras encore avancer de 2 pas. C'est également parce que l'associativité ne s'applique pas à la soustraction ni à la division que la technique de compensation doit nécessairement être parallèle (et non croisée comme dans la multiplication et l'addition). Par exemple : $127 - 68 = 129 - 70$ Car $127 - 68$ $= 127 - (70 - 2)$ => décomposition de 68 $= 127 - 70 + 2$ => soustraction d'une différence $= 127 + 2 - 70$ => commutativité de l'addition dans les entiers $= (127 + 2) - 70$ => associativité $= 129 - 70$

L'ASSOCIATIVITÉ (FIN)	
Sa définition mathématique	**Son utilisation en calcul mental**
	Pour être comprise par les élèves[8] , la technique de compensation doit être abordée en même temps qu'une certaine vision la soustraction : la différence entre deux nombres est en réalité l'écart qui sépare le plus petit nombre du plus grand. Dans ce cas, il est facile de comprendre que l'écart entre deux nombres restera le même si l'on augmente (ou diminue) les deux nombres d'un même nombre. Cette compensation parallèle peut être visualisée comme suit, à l'aide de rectangles :  **En cherchant à donner sens à l'opération de soustraction, les élèves effectueront moins d'erreurs liées à l'associativité.**

[8] Des activités centrées sur la compensation sont proposées dans le document *Pistes didactiques de 5e année primaire* de 2017.

LA DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION PAR RAPPORT À L'ADDITION	
Sa définition mathématique	**Son utilisation en calcul mental**
• Cette propriété est liée au fait que calculer le produit d'une somme (ou d'une différence) par un nombre, cela revient au même que calculer le produit de chaque terme par le nombre et ensuite calculer la somme (ou la différence) des résultats obtenus : a, b et c étant des nombres ; $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$	Cette propriété est utilisée en calcul mental, lorsqu'il s'agit par exemple de multiplier par exemple un nombre par 11 ou par 9 ou de **décomposer un des nombres à multiplier par une somme ou une différence de deux nombres**. Par exemple : $152 \times 11 = 152 \times (10 + 1)$ $= (152 \times 10) + (152 \times 1)$ $= 1520 + 152$ $= 1672$ Dans ce calcul, les élèves ont tendance à bien comprendre qu'il faut multiplier 152 par 10 mais pensent qu'il faut ensuite ajouter 1 : ils ne comprennent pas pourquoi il faut encore ajouter le nombre. En fait, ici, ils ont tendance à généraliser une règle qui fonctionne pour **la décomposition d'un facteur en facteurs** : Par exemple : Pour faire 33 × 4, si on décompose 4 en 2 × 2, on peut faire 33 × 2 × 2, car la multiplication est associative. En revanche, si on décompose 4 en 3 + 1, c'est à ce moment la propriété de distributivité qui doit s'appliquer : $33 \times 4 = (33 \times 3) + (33 \times 1) = 99 + 33$

LA DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION PAR RAPPORT À L'ADDITION (SUITE)

Sa définition mathématique	Son utilisation en calcul mental

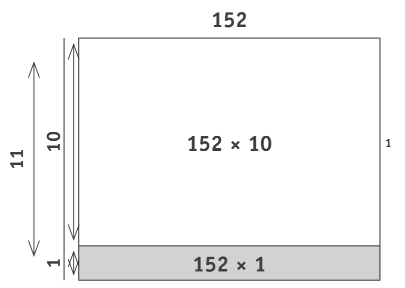
Une manière assez simple de donner sens à cette propriété est de revenir à une situation de vie.

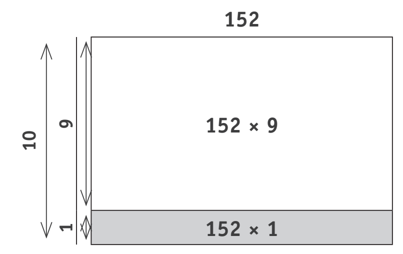
Par exemple :
152 × 11, c'est comme prendre 11 paquets de 152 bonbons.
On peut d'abord prendre 10 paquets de 152, mais alors il manque 1 paquet de 152, on doit donc encore ajouter 152 bonbons.

De la même façon, si on doit prendre 9 paquets de 152 bonbons, on peut en prendre 10, mais alors on en a pris trop : il faut enlever un paquet de 152 bonbons.

Des représentations visuelles sous la forme de rectangles peuvent également être utiles :

$152 \times 11 = (152 \times 10) + 152$	$152 \times 9 = (152 \times 10) - 152$





En cherchant à donner sens à l'opération de multiplication, les élèves effectueront moins d'erreurs liées à la distributivité.

3 EN SYNTHÈSE

Très souvent, lorsqu'on introduit les nombres ou des procédures de calcul mental, on cherche à leur donner sens, dans des contextes de vie ou à l'aide de supports visuels. Toutefois, par après, ces supports disparaissent et l'élève en arrive à mémoriser des techniques qu'il ne comprend pas réellement et qu'il applique dans des situations où elles n'ont aucun sens.

Ce sens peut émerger de situations de vie, comme par exemple :

- additionner, c'est comme faire des pas en avant ;
- soustraire, c'est comme faire des pas en arrière ;
- multiplier un nombre par un autre c'est comme prendre des paquets du premier nombre ;
- diviser un nombre par un autre, c'est chercher combien de fois va le second dans le premier.

Il peut également se dégager d'une réflexion réalisée au départ de supports plus visuels comme la droite des nombres (particulièrement utile pour visualiser les opérations d'addition ou de soustraction), l'aire d'un rectangle (qui s'adapte bien à une visualisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction)…

C'est en tout cas dans cette direction que nous avons souhaité orienter les pistes proposées dans ce document. Les activités proposées ont été pensées pour amener les élèves à se poser des questions, à approfondir leurs démarches spontanées, de manière à intégrer pleinement ces supports dans le développement d'une pensée mathématique. Tout ce travail prend du temps, implique de la manipulation de matériel facilement accessible, mais pas toujours présent dans les cahiers des élèves. C'est à ce prix, nous le pensons, que les élèves développeront des stratégies de plus en plus raisonnées en matière de compréhension des nombres naturels et des opérations sur ces nombres.

Encourager les élèves de 3e et 4e primaires à donner du sens à la décomposition d'un nombre ou au calcul mental à effectuer peut les aider à développer une compréhension beaucoup plus accessible des propriétés des opérations qui jalonneront encore ses apprentissages en 5e et 6e primaires mais aussi après, en début d'enseignement secondaire, lorsque l'algèbre sera introduite.

Plus on aura manipulé (concrètement, à l'aide de supports visuels ou de vie) les opérations sur les nombres, plus les techniques opératoires prendront sens pour les élèves.

4 RESSOURCES COMPLÉMENTAIRES

Voici une série de sites sur lesquels vous pourriez trouver d'autres activités :

- **Un peu de tout :**

  https://calculatice.ac-lille.fr/spip.php?rubrique2

  http://www.pepit.be/

  http://www.larecre.net/fr/exercices/mathematique.html

- **Pyramides d'additions :**

  http://www.logicieleducatif.fr/math/calcul/pyramide-additions.php

- **Recomposer les nombres** :

  http://www.logicieleducatif.fr/math/calcul/calculator.php

- **Compléments de 10, 20, 100, 1000 :**

  http://www.gomaths.ch/cm_complement.php

LE LIVRE DE 1000

Nous proposons un prolongement en jouant avec le *Livre de 1000* qui n'est rien d'autre que la succession des carrés de 100 construits lors de l'activité 6.

Le Livre peut être reconstruit dans un second temps grâce aux pages suivantes qui mettent en lien la succession des carrés de 100. Les pages à photocopier sont en annexe de ces pistes.

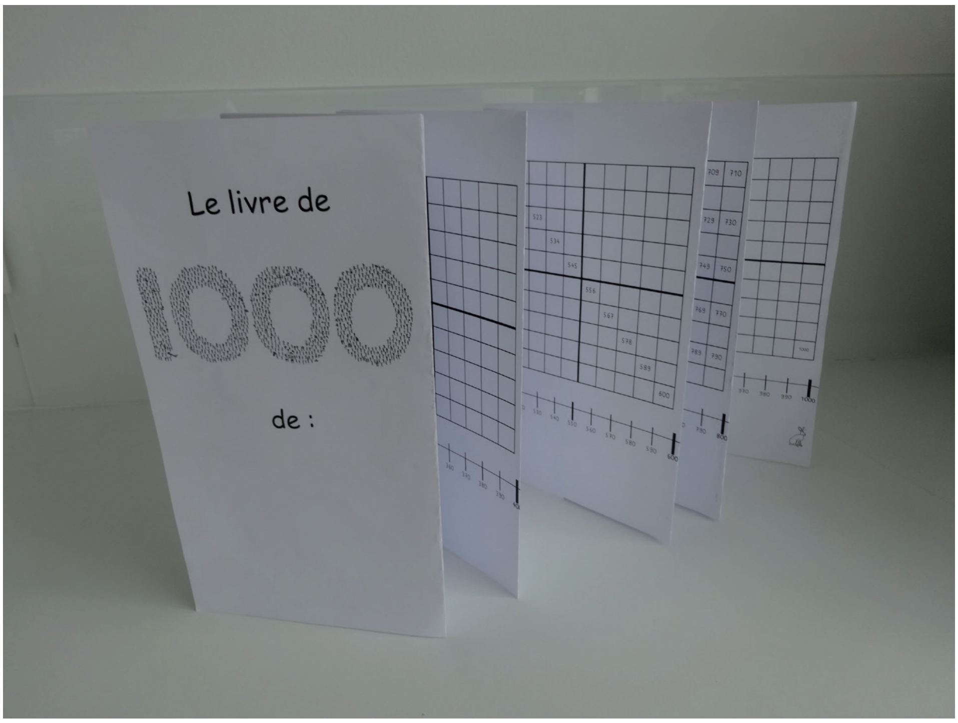
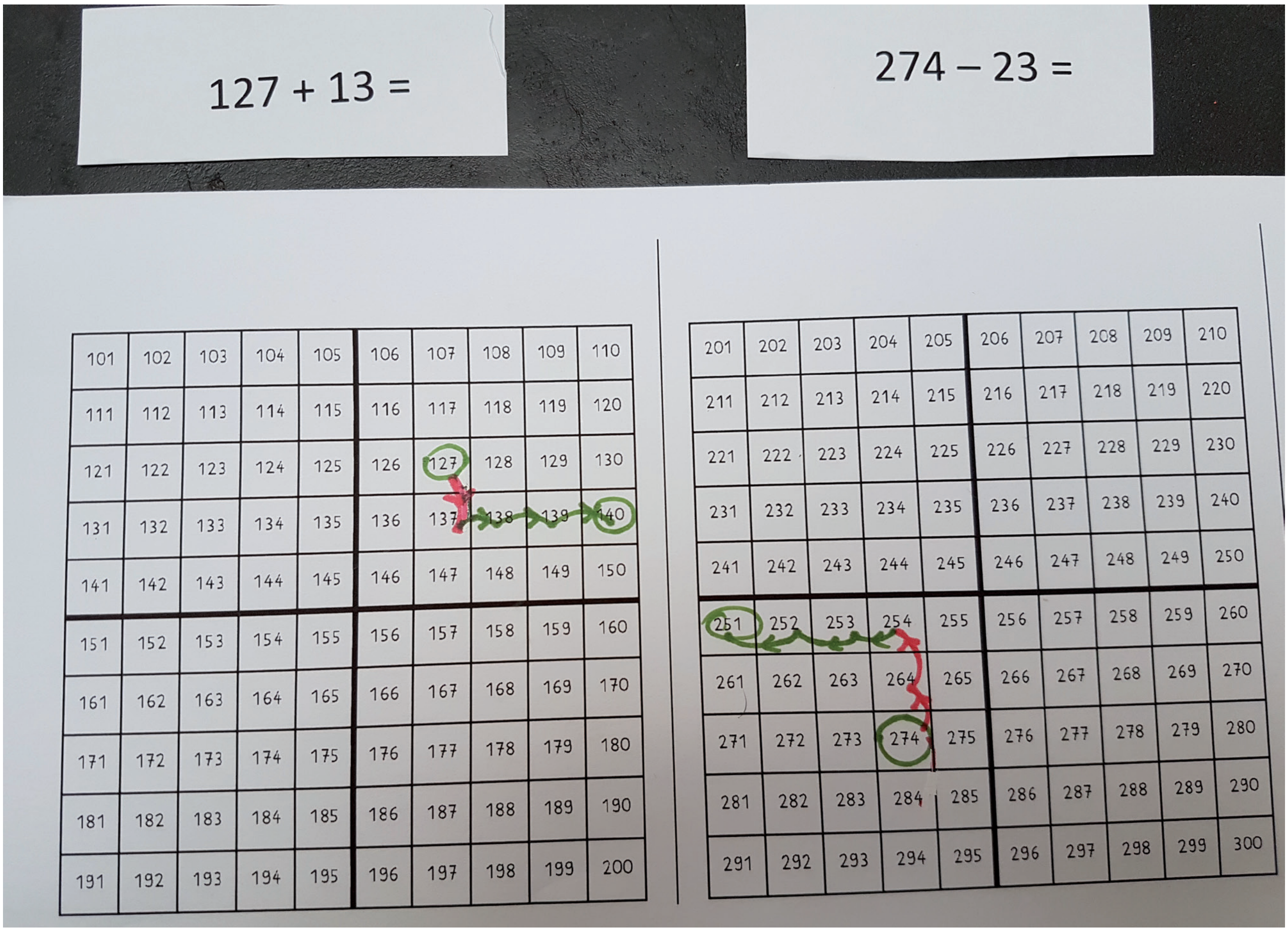
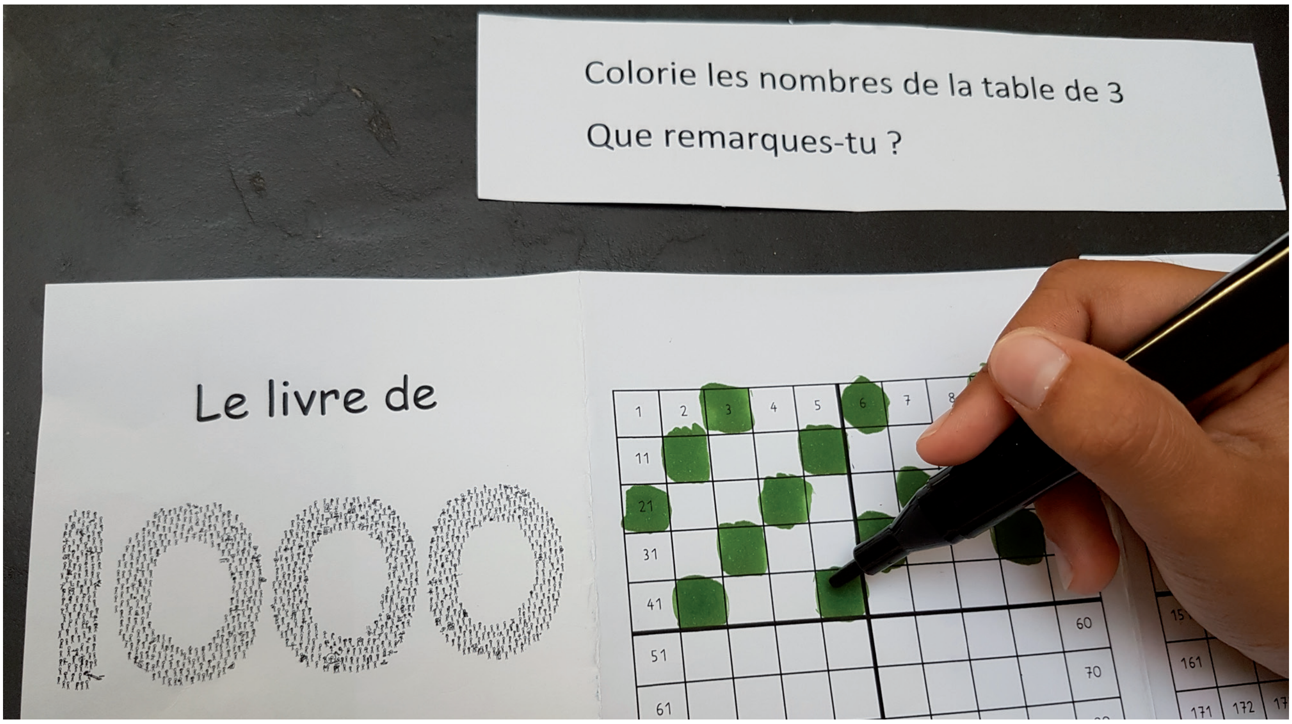
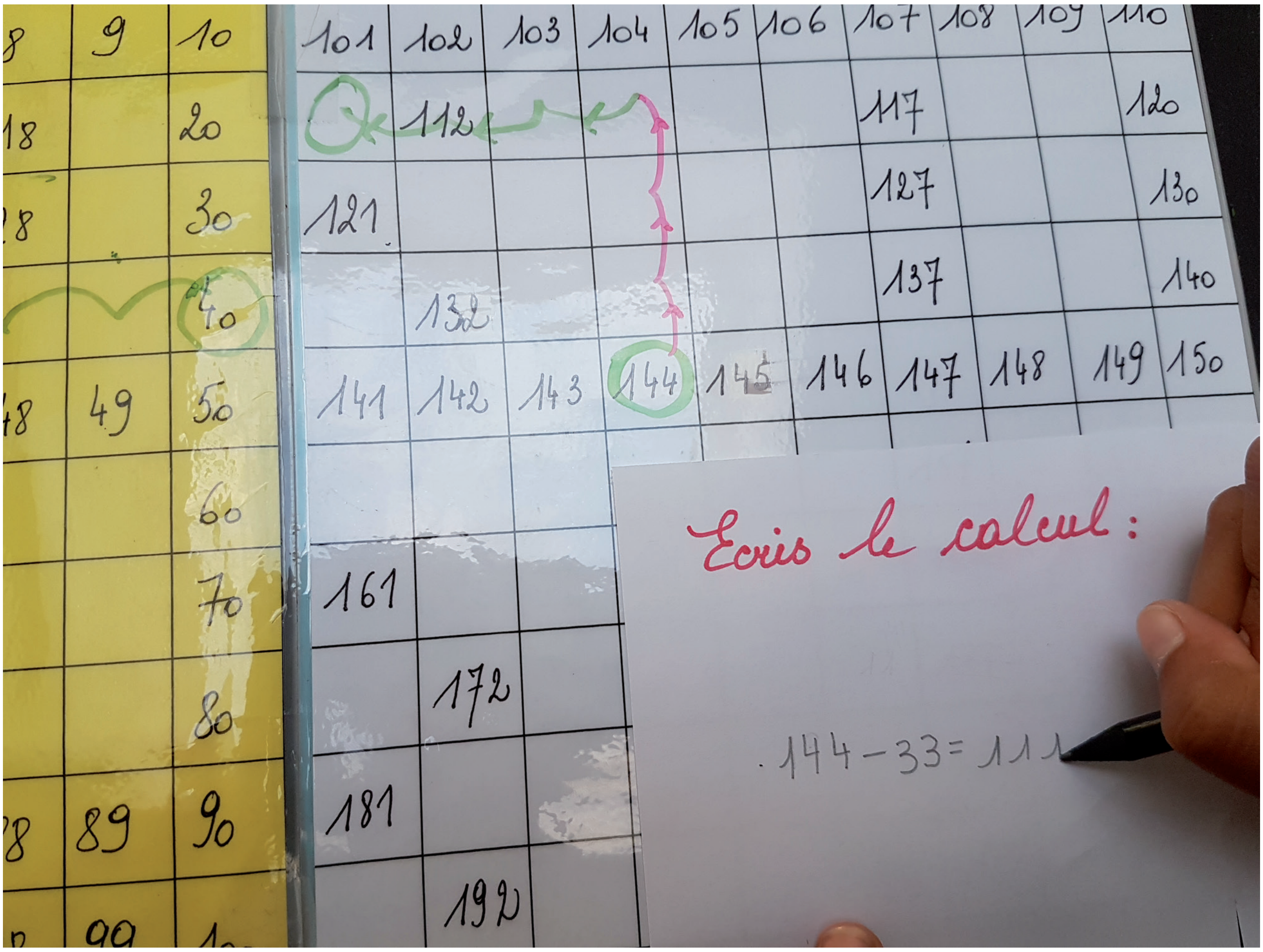


Illustration de l'exploitation du *Livre de 1000* pour une addition et une soustraction comme proposé lors des activités 7 et 8 :



Voici des illustrations d'autres exploitations possibles :



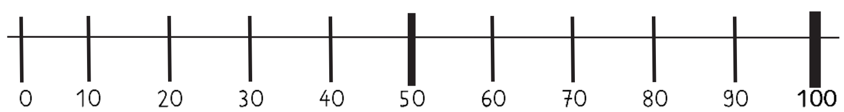

Ecris le calcul :
144 – 33 = 111

Le livre de

1000

de :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11									20
21									30
31									40
41									50
51									60
61									70
71									80
81									90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Coller

101		103	104						110
111	112	113	114						120
121	122	123	124						130
131									
141									
151									
161									
171	172	173	174						180
181	182	183	184						190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

									210
									220
									230
									240
									250
									260
									270
									280
									290
291	292	293	294	295	296	297	298	299	300

Coller

110 120 130 140 150 160 170 180 190 **200** 210 220 230 240 250 260 270 280 290 **300**

301	302								
311	312								
321	322								
331	332								
341	342								
351	352								
361	362								
371	372								
381	382								
391	392								

401	402	403	404	405	406	407	408	409	410

Coller

310 320 330 340 350 360 370 380 390 400 410 420 430 440 450 460 470 480 490 500

501									
	512								
		523							
			534						
				545					
					556				
						567			
							578		
								589	
									600

				605	606				
				615	616				
				625	626				
				635	636				
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650
651	652	653	654	655	656	657	658	659	660
				665	666				
				675	676				
				685	686				
				695	696				

Coller

510 520 530 540 550 560 570 580 590 **600** 610 620 630 640 650 660 670 680 690 **700**

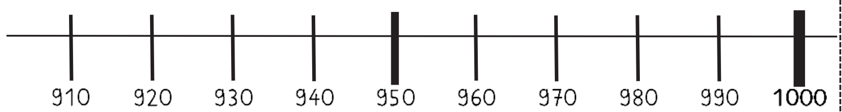
701	702	703	704	705	706	707	708	709	710
721	722	723	724	725	726	727	728	729	730
741	742	743	744	745	746	747	748	749	750
761	762	763	764	765	766	767	768	769	770
781	782	783	784	785	786	787	788	789	790

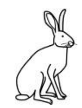
									810
									830
									850
									870
									890

Coller

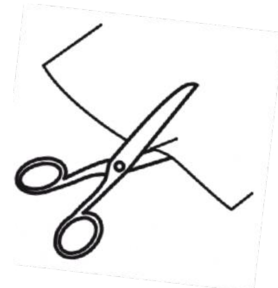
710 720 730 740 750 760 770 780 790 **800** 810 820 830 840 850 860 870 880 890 **900**

901									
									1000





Couper



Fédération Wallonie-Bruxelles / Ministère
Avenue du Port, 16 – 1080 Bruxelles
www.fw-b.be – 0800 20 000

Graphisme : Sophie JEDDI - sophie.jeddi@cfwb.be
Octobre 2018

Le Médiateur de la Wallonie et de la Fédération Wallonie-Bruxelles
Rue Lucien Namèche, 54 – 5000 NAMUR
0800 19 199
courrier@le-mediateur.be

Éditeur responsable : Lise-Anne HANSE, Administratrice générale

La « Fédération Wallonie-Bruxelles » est l'appellation désignant usuellement la « Communauté française »
visée à l'article 2 de la Constitution