FÉDÉRATION WALLONIE-BRUXELLES
ENSEIGNEMENT.BE

ÉVALUATION EXTERNE NON CERTIFICATIVE 2017

FORMATION MATHÉMATIQUE

PISTES DIDACTIQUES

5e ANNÉE DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

SOMMAIRE

Ce document de pistes didactiques a été élaboré par le groupe de travail chargé de la conception de l'évaluation externe de 5e année primaire en formation mathématique :

Caroline BEELEN, enseignante ;

Sérevine COCRIAMONT, enseignante ;

Françoise CRÉPIN, chercheuse au Service d'analyse des Systèmes et Pratiques d'enseignement de l'Université de Liège ;

Vanessa DESPONTIN, enseignante ;

Gilberte HAVART, inspectrice ;

Sophie KAISER, conseillère pédagogique ;

Valérie LÉONARD, conseillère pédagogique ;

Étienne MAZAY, conseiller pédagogique ;

Marie-Noëlle MEERSSEMAN, chargée de mission au Service général du Pilotage du Système éducatif ;

Valérie RADOUX, enseignante ;

Dominique REIP, inspectrice ;

Donatella ROCHEFORT, inspectrice ;

Quentin SOHY, enseignant ;

Pierre STEVENS, enseignant ;

Christophe VANDERROOST, conseiller pédagogique ;

Jean-Marc WILLAIN, conseiller pédagogique ;

Olivier ZANCHETTA, inspecteur.

INTRODUCTION

Ce document fait suite aux résultats de l'évaluation externe en formation mathématique administrée en octobre 2017 dans les classes de 5^{e} primaire. Cette évaluation à visée diagnostique et formative avait pour objectif d'établir un bilan précis de l'acquisition de certaines compétences et de déceler celles qui sont moins bien maitrisées et qui devraient faire l'objet d'une attention particulière.

Les compétences choisies par le groupe de 3^{e} primaire l'ont été en commun avec celui de 5^{e} primaire afin de permettre aux équipes éducatives de travailler en continuité. Les résultats aux épreuves ont abouti à des conclusions différentes. Par conséquent, le travail des *Pistes didactiques* a pris des chemins spécifiques. N'hésitez pas à aller consulter le document de 3^{e} primaire sur **www.enseignement.be**.

Sept compétences ont été évaluées dont quatre relèvent du domaine des nombres et trois du domaine des grandeurs. Certaines de ces compétences ont déjà été largement travaillées à ce stade de la scolarité, comme par exemple *Fractionner des objets en vue de les comparer*. D'autres, en revanche, sont amorcées, mais doivent encore être travaillées jusqu'au terme de l'étape 2.

Cette évaluation diagnostique a accordé une place prépondérante aux opérations dans le domaine des nombres : un nombre important d'items visait les compétences *Construire des tables*, *Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées* et *Utiliser des propriétés des opérations*.

Dans le domaine des grandeurs, trois compétences avaient été sélectionnées car elles posent régulièrement problème aux autres évaluations externes non certificatives et à l'évaluation externe certificative (CEB). Il s'agit de *Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe*, *Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes* et *Fractionner des objets en vue de les comparer*.

C'est sur la base des constats détaillés dans le document *Résultats et commentaires*[1] que le présent recueil de pistes didactiques a été élaboré. Il s'adresse aux enseignants et aux élèves de 4^{e}, 5^{e} et 6^{e} années primaires. Y sont proposées des activités concrètes et des ressources didactiques dans les domaines précis qui ont été pointés comme posant problème à de nombreux élèves.

Les **principales difficultés** des élèves peuvent être synthétisées comme suit.

[1] Disponible sur http://www.enseignement.be/index.php?page=24761&navi=2030

À une ou deux exceptions près, toutes les questions faisant intervenir des propriétés des opérations ont mis une majorité d'élèves en difficulté. L'associativité, la commutativité, la distributivité et les stratégies de compensation sont loin d'être maitrisées. Les rares élèves qui semblent connaitre ces propriétés ou stratégies ne maitrisent pas les conditions de leur validité.

La compréhension du fonctionnement des opérations écrites et de leur lien avec le système décimal fait défaut pour de nombreux élèves.

Si l'opération de fractionnement (partager puis prendre un certain nombre de parts) semble maitrisée, la recherche du résultat du fractionnement et le passage à une fraction réduite ou équivalente posent problème à de nombreux élèves.

Les réponses aux questions visant la compétence *Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe* montrent que peu d'élèves perçoivent la proportionnalité comme une relation particulière entre deux grandeurs.

Les **principaux constats** brièvement rappelés ci-dessus conduisent à envisager des propositions d'actions dans plusieurs directions.

- Un travail qui vise la capacité à donner du sens aux opérations semble plus que nécessaire dans le but d'amener les élèves à réfléchir sur le calcul et non simplement à exécuter des calculs, à prendre conscience des opérations et de leurs propriétés, à enrichir leur rapport à l'égalité dans le sens d'une relation à l'équivalence et non seulement comme le signal de l'exécution d'un calcul, à enrichir leurs stratégies numériques, par exemple, les stratégies de compensation, l'identification de la structure des calculs, etc.
- Les propriétés des opérations permettent d'expliquer et de justifier les étapes d'un calcul et certaines techniques opératoires, notamment celles utilisées pour la soustraction écrite et la multiplication écrite. Il s'agira donc de manipuler et de travailler sur les nombres en utilisant les propriétés des opérations pour améliorer les techniques opératoires des élèves tout en leur donnant du sens.
- Une approche progressive et active des fractions dans des contextes variés pourrait faire progresser les élèves dans la compréhension du concept de fraction et dans la recherche du résultat d'un fractionnement.
- Aider les élèves à comprendre et à construire la notion de proportionnalité en proposant des problèmes à résoudre qui vont au-delà du simple exercice d'application.

Chaque thématique traitée dans ce recueil de pistes est présentée **selon la structure suivante** :

- un bref retour sur les principaux constats issus de l'épreuve, éclairés par une analyse des difficultés récurrentes des élèves. Ces commentaires établissent le lien entre les difficultés observées et les objectifs visés par les activités ;
- un bref éclairage théorique portant sur les différents concepts utilisés ;
- des propositions d'activités et des indications sur la (les) façon(s) de les exploiter en classe.

Enfin, on se doit de rappeler que les ressources proposées dans les pistes didactiques liées aux évaluations de 2008 et 2011 restent d'actualité[2]. Même si elles sont dues en partie à la sélection des compétences qui a été opérée, les difficultés actuelles des élèves ne sont pas fondamentalement différentes de celles constatées précédemment. En particulier, les enseignants souhaitant travailler avec leurs élèves à la construction et l'utilisation de démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes, sont invités à se référer aux pistes de 2008. Une vaste section y était effectivement consacrée aux pages 73 à 89.

[2] Disponibles sur http://www.enseignement.be/index.php?page=25102&navi=3207

1 DOMAINE DES NOMBRES : LES OPÉRATIONS ET LEURS PROPRIÉTÉS

> *Plus on aura manipulé et travaillé sur les nombres en utilisant les propriétés des opérations, plus les techniques opératoires pourront prendre du sens pour les élèves.*
>
> *R. Charnay*

1.1 | LES CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Les items relatifs à la compétence *Utiliser les propriétés des opérations* ont posé problème à de très nombreux élèves : le résultat moyen pour les 16 items est de 47 %.

Les deux items ci-dessous (11 % et 26 % de réussite) sont hors de portée d'une très grande majorité d'élèves. **Les techniques de compensation parallèle dans la soustraction et la division et de compensation croisée dans l'addition et la multiplication** ne sont manifestement pas encore travaillées en début de 5e année primaire. Les rares élèves qui semblent connaitre la règle ne maitrisent pas les conditions de sa validité puisque l'erreur la plus courante au premier de ces deux items est 500 : comme on a retiré 25 dans le premier membre, les élèves ajoutent 25 au second sans tenir compte du signe opératoire. Ce raisonnement est correct pour l'addition, mais pas pour la soustraction.

QUESTION 15

Sans chercher les réponses, **COMPLÈTE** les calculs.

2 625 – 475 = 2 600 – ______ ☐ 44

2 625 + 475 = 2 600 + ______ ☐ 45

Les techniques pour remplacer un calcul par un autre plus simple sont, elles aussi, mal maitrisées. Pour répondre correctement aux deux items ci-dessous, les élèves devaient appliquer la propriété de la distributivité dans la multiplication qui permet de décomposer un des nombres.

QUESTION 16

Pour chaque opération, **COCHE** le procédé correct sans effectuer.

57 x 99 =

- ☐ (57 × 100) − 57
- ☐ (57 × 100) − 99
- ☐ (57 × 100) − 1
- ☐ (57 + 100) × (57 − 1)

☐ 46

17 x 11 =

- ☐ (20 × 11) − 3
- ☐ (17 × 10) − 11
- ☐ (17 × 10) + 17
- ☐ (17 × 10) + 11

☐ 47

Seuls 28 % des élèves ont répondu correctement à l'item 46. L'erreur la plus courante est, de très loin « (57 × 100) − 1 ». Il convient donc d'aider les élèves à prendre conscience que

$$N \times 99 = (N \times 100) - (N \times 1)$$

et non

$$(N \times 100) - 1$$

comme on le ferait dans le cas d'une addition.

Le même constat peut être posé pour la multiplication « 17 × 11 = », réussie par 26 % des élèves seulement.

Si le caractère neutre du « 0 » dans l'addition et la soustraction semble maitrisé, ce n'est pas le cas du caractère absorbant du « 0 » dans la multiplication : seuls 57 % des élèves indiquent que

« 1088 × 0 = 0 ».

Les quatre items ci-dessous concernaient la commutativité face aux quatre opérations. Ils sont globalement bien réussis (résultats entre 89 % et 64 %). Ceci dit, pour considérer que la compétence est pleinement maitrisée, il faudrait que la règle de la commutativité soit correctement appliquée pour les quatre opérations, or **43 % des élèves seulement répondent correctement aux quatre items**. Une majorité d'élèves ne parvient pas à exprimer le fait que **la commutativité est une propriété de l'addition et de la multiplication, mais**

pas de la soustraction et de la division. Ces résultats portent à penser que les élèves sont bien plus habitués à exécuter un calcul qu'à réfléchir pour donner du sens à une opération.

QUESTION 18

COMPLÈTE par = ou ≠ .

1088 + 2974	____	2974 + 1088	☐ 51
1088 – 2 974	____	2974 – 1088	☐ 52
1088 × 2 974	____	2974 × 1088	☐ 53
1088 : 2 974	____	2974 : 1088	☐ 54

Enfin, les derniers items relatifs à la compétence *Utiliser les propriétés des opérations* concernaient l'association de termes dans une addition pour en faciliter le calcul. Seuls 44 % des élèves réussissent l'item ci-dessous. Parmi les erreurs courantes, on retrouve celle des élèves qui ont associé des chiffres compris dans les nombres, par exemple, dans la première proposition, le « 3 » des centaines avec le « 7 » des unités, ce qui témoigne d'une incompréhension totale de cette technique qui permet de rendre un calcul plus simple.

QUESTION 20

a) **COCHE** la seule opération où **il est utile d'associer** des nombres pour faciliter le calcul. ☐ 57

☐ 2 365 + 339 + 957

☐ 3 254 + 437 + 534

☐ 117 + 34 + 83 + 66

☐ 47 + 26 + 82 + 69

Globalement, l'analyse des réponses des élèves aux items visant la compétence *Utiliser les propriétés des opérations* montre qu'un travail qui vise la **capacité des élèves à donner du sens aux opérations**, à enrichir leurs stratégies numériques, par exemple, les stratégies de compensation ou l'identification de la structure des calculs, semble plus que nécessaire pour de nombreux élèves.

Par ailleurs, l'avis des enseignants sur le niveau de difficulté des questions semble indiquer qu'au début de la 5^{e} année primaire, ces savoir-faire sont peu travaillés en profondeur.

1.2 | INTENTIONS ET COMMENTAIRES

Amener les élèves à développer une aisance dans le domaine du calcul mental est une compétence clé de l'école primaire. Bien qu'à son terme, la plupart des élèves parviennent à appliquer des techniques opératoires variées impliquant les quatre opérations, il apparait qu'ils ont une maitrise très partielle des propriétés de ces opérations.

C'est particulièrement le cas dans le domaine des procédures de compensation : beaucoup d'élèves les mémorisent sans réellement comprendre comment elles fonctionnent ou quels liens elles entretiennent avec les propriétés des opérations.

Sur le plan formel, les liens entre les procédures de compensation et les propriétés des opérations peuvent être exprimés comme suit.

Compensation croisée dans l'addition et la multiplication	
59 + 68 = 60 + 67	
= 59 + (1 + 67)	Associativité
= (59 + 1) + 67	
= 60 + 67	

Compensation parallèle dans la soustraction et la division	
127 – 68 = 129 - 70	
= 127 – (70 – 2)	Distributivité
= 127 – 70 + 2	
= 127 + 2 – 70	Commutativité
= (127 + 2) – 70	Associativité de l'addition
= 129 – 70	

La compensation est parallèle dans la soustraction et la division, car ces deux opérations ne sont pas associatives. Ceci est une clarification à l'intention des enseignants et n'est évidemment pas à présenter tel quel aux élèves.

1.2.1 | ENSEIGNER LES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS, BIEN PLUS QU'UNE MÉMORISATION DE CES PROPRIÉTÉS...

Selon Charnay, développer les propriétés des opérations à l'école primaire a pour but d'expliquer et de justifier les étapes d'un calcul et certaines techniques opératoires. Elles sont donc le plus souvent utilisées de manière implicite et n'ont pas à être nommées à ce moment de la scolarité. C'est également cette idée qui est défendue par les Socles de compétences lorsqu'ils précisent que les élèves doivent être capables à 12 ans d'**utiliser** ces propriétés pour remplacer un calcul par un autre plus simple. C'est donc bien une connaissance dans l'action qui est à développer à ce niveau de la scolarité.

Si, dans les activités habituellement réalisées en arithmétique comme celles centrées sur les stratégies de calculs mentaux, on s'intéresse non pas exclusivement aux résultats des calculs mais également aux démarches aboutissant à ces résultats, il est tout à fait possible d'enrichir la compréhension de concepts mathématiques fondamentaux comme les opérations ou l'égalité. Ainsi, celles-ci ne doivent plus être envisagées seulement comme des procédures pour trouver la réponse d'un calcul, mais comme des opérations ou des relations ayant des propriétés particulières, telles la commutativité, l'associativité dans le cas des opérations ou la transitivité et la symétrie dans le cas de l'égalité (Carraher & Schliemann, 2007).

Une vaste étude longitudinale menée en Nouvelle-Zélande a permis de suivre l'évolution des apprentissages de plus de 800 élèves de 10 à 14 ans (Britt & Irwin, 2011). Ces chercheurs ont pu établir que les élèves qui ont développé, dès l'école primaire, des stratégies raisonnées en matière de calculs parviennent beaucoup mieux que les autres, à comprendre les transformations algébriques lorsque l'algèbre formelle est introduite au début de l'enseignement secondaire. Par ailleurs, il apparait que ces élèves continuent à mieux progresser au cours des deux premières années de l'enseignement secondaire, y compris dans la mobilisation de ces techniques dans des problèmes.

1.2.2 | FOURNIR AUX ÉLÈVES DES SUPPORTS POUR COMPRENDRE EN PROFONDEUR LES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS

La situation suivante, rencontrée dans une classe du primaire, permet de mieux comprendre comment l'exploitation des procédures de calcul mental peut servir de base à la compréhension des propriétés des opérations (Russel, Schifter & Bastable, 2011).

Une enseignante, Céline, demande aux élèves d'effectuer le calcul mental suivant « 17 × 36 ». Elle fait comparer les résultats et les élèves constatent que la réponse correcte est 612. Thomas, un de ses élèves, sait qu'il n'a pas la bonne réponse, mais a pourtant un raisonnement qu'il pense correct : il a arrondi 17 à 20 et 36 à 40. Ensuite, il a fait le calcul 20 × 40, ce qui donne 800 puis a retiré le surplus, c'est-à-dire 7 (les 3 ajoutés pour passer de 17 à 20 et les 4 ajoutés pour passer de 36 à 40). L'enseignante demande aux élèves de la classe d'essayer de comprendre la démarche de Thomas et de trouver une manière d'expliquer, sans passer par la réponse, pourquoi sa technique n'aboutit pas au résultat escompté.

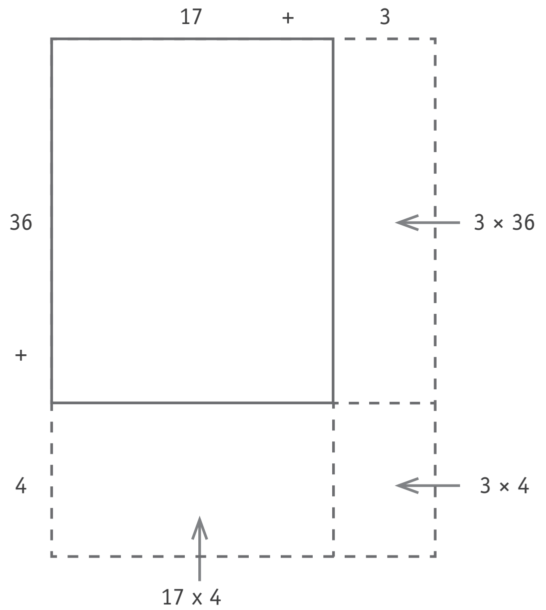
En réalité Thomas a appliqué une technique qui marche pour une opération mais pas pour une autre : si Thomas avait appliqué sa démarche sur le calcul « 17 + 36 », il aurait obtenu la réponse correcte.

$$17 + 36 = 20 + 40 - (3 + 4) = 60 - 7 = 53$$

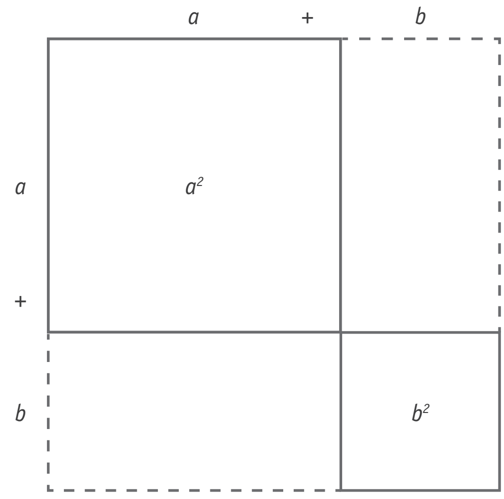
En faisant réfléchir les élèves sur une démarche dans le but d'expliquer pourquoi elle ne fonctionne pas, Céline donne l'occasion aux élèves de réfléchir à une propriété fondamentale de la multiplication (la distributivité), dans le but de comprendre pleinement le rôle du 3 et du 4 que Thomas a additionnés.

La distributivité permet de décomposer en une somme ou en une différence un des facteurs de la multiplication.

Des supports visuels peuvent alors aider les élèves à comprendre les propriétés des opérations.



$$17 \times 36 \neq 20 \times 40 - 7$$



$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

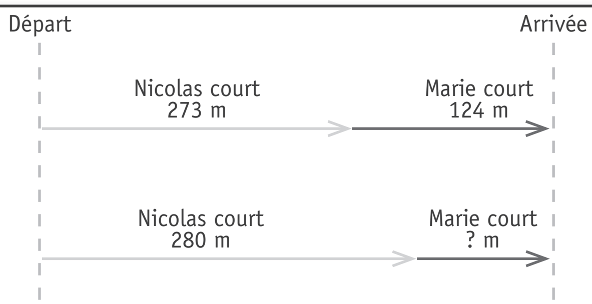
Exemple de modèle pour comprendre la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Des dessins ou des problèmes de la vie courante peuvent également s'avérer des supports utiles pour amener les élèves à donner sens à ces propriétés des opérations fondamentales tant en arithmétique qu'en algèbre, comme l'illustrent les supports suivants permettant de comprendre la compensation dans l'addition et la soustraction.

Nicolas et Marie font plusieurs courses-relais.

À la première course, Nicolas court 273 m et Marie court 124 m.

À la deuxième course, Nicolas court 280 m. Quelle distance Marie devra-t-elle parcourir pour atteindre l'arrivée ?



$$273 + 124 = 280 + ?$$

À la troisième course, Nicolas a trop couru, il a fait 423 m.

Marine a alors dû courir 25 m pour retourner à l'arrivée.

À la quatrième course, Nicolas a encore été trop loin, il a fait 430 m. Combien de mètres Marie a-t-elle dû courir pour revenir à l'arrivée ?

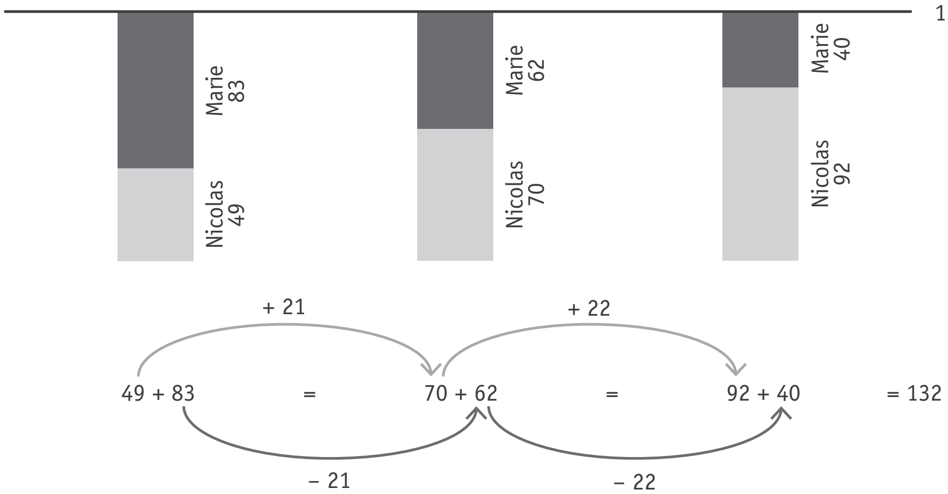
$$423 - 25 = 430 - ?$$

D'autres supports visuels pour expliquer le fonctionnement des techniques de compensation face aux quatre opérations sont proposés à la page 31.

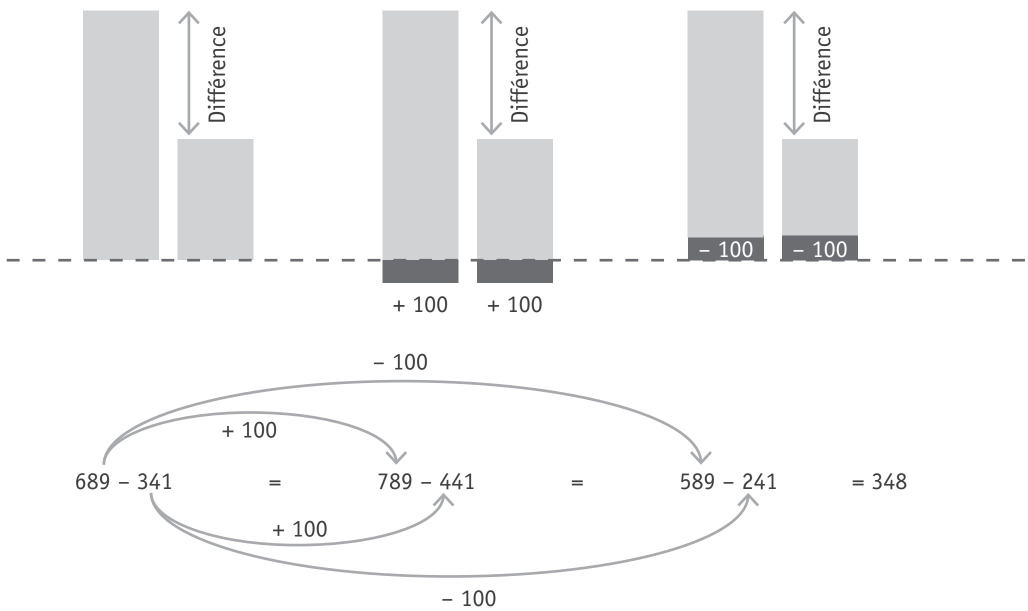
Les supports peuvent être variés du moment qu'ils montrent clairement dans quel sens les modifications apportées à un des termes agissent sur l'autre terme (pour conserver l'égalité).

Nicolas et Marie font des tours avec les 132 cubes dont ils disposent ensemble. Ils empilent les tours qu'ils ont construites chacun de leur côté (ils **additionnent** les cubes de leurs tours).

Plus Nicolas met de cubes dans sa tour, **moins** Marie devra en mettre. À l'inverse, **moins** Nicolas met de cubes dans sa tour, **plus** Marie devra en mettre (pour que la tour de Nicolas **+** celle de Marie = 132 cubes).



Réaliser une **soustraction**, c'est confronter deux grandeurs (ici, deux hauteurs de tours) et rechercher la différence entre elles. Cette différence ne change pas si on augmente ou si on diminue les tours du même nombre.



Amener les élèves, dès l'école primaire, à réfléchir au sens des opérations et de l'égalité est utile à la fois à l'école primaire, pour développer une compréhension fine des stratégies de calcul mental et à l'école secondaire, pour comprendre en profondeur les techniques algébriques.

Les prémisses de ce développement sont abordés dans les *Pistes didactiques 3ᵉ année primaire*, page 81.

DONNER DU SENS AUX OPERATIONS DE LA MATERNELLE A LA 6^E PRIMAIRE

Dès le cycle 5-8 ans, les élèves doivent être amenés à réfléchir sur les nombres et le sens des opérations. À ce niveau d'enseignement, le travail passera essentiellement par des manipulations et l'utilisation de supports visuels. On veillera aussi à contextualiser ces apprentissages car lorsque les opérations (addition et soustraction par exemple) et les écritures symboliques (5 + 3 = 8 par exemple) sont présentées *à priori*, c'est-à-dire en dehors d'une résolution de problème, il est très difficile pour les élèves de leur donner du sens. Effectivement, l'introduction des signes ne peut se faire que lorsque les élèves possèdent déjà les mots pour dire leur pensée.

Avec de tout jeunes élèves, il est déjà possible de faire constater que, s'ils font une tour de 10 cubes jaunes et bleus, plus ils mettent de cubes jaunes, moins ils mettront de cubes bleus. C'est la comparaison des différentes tours réalisées par les élèves qui peut leur faire prendre conscience des prémices des techniques de compensation.

Chez les jeunes élèves, les propriétés seront le plus souvent utilisées de manière implicite. Ainsi, quand les élèves utilisent le passage par la dizaine pour faciliter un calcul, implicitement, ils font intervenir l'associativité.

Exemple

$17 + 8 = 17 + (3 + 5) = (17 + 3) + 5$

Il est intéressant que très tôt, les élèves prennent conscience de la commutativité de l'addition car elle permet de simplifier certains calculs. Par exemple, 8 + 56 est plus facile à calculer si on le remplace par 56 + 8. Très tôt, les élèves doivent également être conscientisés à propos des rôles du « 0 » et du « 1 ». Si l'apprentissage des nombres est effectivement envisagé, il est rarement question du « 0 », comme si cela était évident !

Dès le début de la 3^e maternelle (voire avant) et jusqu'à la fin de la 6^e primaire, il est possible de faire réfléchir les élèves sur les nombres et sur le sens des opérations. À tous les niveaux, les démarches peuvent être assez similaires ; il s'agira de manipuler, de représenter, de verbaliser, de symboliser et de structurer. Ce sont les nombres en jeu, le matériel, les contextes et les méthodes qui évolueront pour être adaptés au niveau des élèves et pour les faire progresser. Par exemple, de la manipulation d'objets concrets, on passera à l'utilisation de la droite numérique pour aider à la compréhension de la propriété utilisée.

On se doit également d'insister sur l'importance de travailler à la compréhension des propriétés et des techniques opératoires face aux **quatre opérations simultanément** de façon à ce que les élèves comprennent finement pourquoi une propriété s'applique dans un cas et pas dans un autre. Ceci est beaucoup plus porteur en termes d'apprentissage mathématique que la simple application de règles ou de « trucs ».

Progressivement, on fera travailler les élèves sur de plus grands nombres de façon à éviter qu'ils se centrent sur la réponse (très facile à calculer avec des petits nombres) sans mobiliser les propriétés et les techniques opératoires. On veillera aussi, petit à petit, à conduire les élèves vers la symbolisation et l'abstraction.

LE POINT SUR L'UTILISATION DES PARENTHÈSES : FAUT-IL ENCOURAGER L'ÉCRITURE DES PARENTHÈSES ?[3]

Théoriquement, il n'y a que deux cas dans lesquels il faut écrire des parenthèses.

❶ **Dans une expression qui comprend deux opérations différentes ou plus, lorsqu'on désire modifier l'ordre de priorité des opérations conventionnellement admis (puissances puis multiplications et divisions puis additions et soustractions).**

Exemples

- 3 + 4 × 2 = 11 [sous-entendu 3 + (4 × 2)]

  tandis que (3 + 4) × 2 = 14

  Dans cet exemple, les parenthèses sont obligatoires si c'est 3 + 4 que l'on veut multiplier par 2.

- 50 – 20 + 5 = 35 [sous-entendu (50 – 20) + 5]

  tandis que 50 – (20 + 5) = 50 – 25 = 25

❷ **Lorsqu'on doit résoudre une opération non associative (soustraction ou division) de trois termes ou plus, il est obligatoire d'écrire les parenthèses si l'on souhaite modifier l'ordre d'exécution de gauche à droite.**

Exemples

- 800 : 20 : 5 = (800 : 20) : 5 = 40 : 5 = 8

  tandis que 800 : (20 : 5) = 800 : 4 = 200

- 136 – 24 – 14 = (136 – 24) – 14 = 112 – 14 = 98

  tandis que 136 – (24 – 14) = 136 – 10 = 126

Même si les parenthèses ne sont strictement obligatoires que dans un nombre restreint de cas, leur utilisation trouve d'autres justifications sur le plan didactique.

Pour garantir la sécurité des calculs, **il est fortement conseillé de prendre l'habitude d'écrire des parenthèses, au moins dans les cas suivants**.

❶ Dans toute addition et multiplication de trois termes ou plus, lorsqu'on désire mettre en évidence un groupement privilégié, pour la facilité des calculs.

Exemples

- 57 + 75 + 25 = 57 + (75 + 25) = 57 + 100 = 157
- 0,75 × 2 × 18 = (0,75 × 2) × 18 = 1,5 × 18 = 27

[3] X. Roegiers (2000). Les mathématiques à l'école primaire. De Boeck, Bruxelles, p. 200-201.

❷ Lorsqu’on a une expression qui comprend un mélange de deux opérations différentes au moins, notamment lorsqu’on utilise la propriété de distributivité.

Exemple

- $57 \times 9 = 57 \times (10 - 1) = (57 \times 10) - (57 \times 1) = 513$

❸ Dans toute opération non associative (soustraction, division) comportant trois termes au moins.

Exemple

- $173 - 127 - 27 = (173 - 127) - 27 = 46 - 27 = 19$

Dans l’exemple ci-dessus, la tentation est forte d’effectuer en premier lieu 127 – 27, ce qui donnerait un résultat faux. Les parenthèses rétablissent l’ordre d’effectuation correct.

Si elles sont rarement indispensables dans le cadre des opérations à effectuer à l’école primaire, les parenthèses se révèlent donc une aide précieuse dans la résolution de toute expression comprenant au moins trois termes.

Il faut par ailleurs garder à l’esprit que les parenthèses seront utilisées tout au long de la scolarité.

1.3 | LES ACTIVITÉS

1.3.1 | ACTIVITÉ 1 : LES OPÉRATIONS ET LEURS PROPRIÉTÉS AVEC DES NOISETTES

L’activité se déroule en quatre étapes qui ne sont pas nécessairement d’une durée équivalente. Par exemple, en fonction de l’avancement des élèves, la première étape de manipulation pourrait être menée assez rapidement.

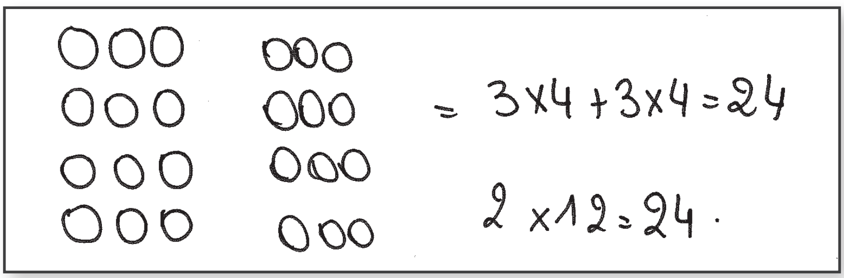
Les élèves travaillent en sous-groupes de quatre. Chaque groupe dispose d’un sachet contenant 24 noisettes (ou n'importe quels autres petits objets) dont on n’annonce pas le nombre.

Étape 1

En groupe, les élèves doivent trouver plusieurs manières différentes d’organiser les noisettes pour pouvoir les compter plus rapidement.

Les élèves manipulent les objets et quand ils sont d’accord sur une disposition, ils la représentent (à l’aide de points ou de ronds par exemple) sur la fiche 1.

Ensuite, ils réfléchissent ensemble à une façon de traduire cette représentation par un calcul. Il est possible que les élèves pensent à plusieurs opérations pour une même représentation. Il est intéressant de les laisser faire ; la confrontation des différentes productions pourra déboucher sur des échanges très riches.



Lors de la mise en commun, les élèves expliqueront comment ils ont organisé les noisettes (importance de la verbalisation), on regroupera les organisations similaires et on examinera et comparera les calculs qui y sont associés. L'enseignant note les calculs au tableau. Cette liste sera complétée lors des étapes suivantes.

Étape 2

Distribution du jeu de 8 photos découpées dans chaque groupe (fiche 2).

Dans chaque groupe, les élèves doivent associer les photos par deux pour former quatre paires de photos.

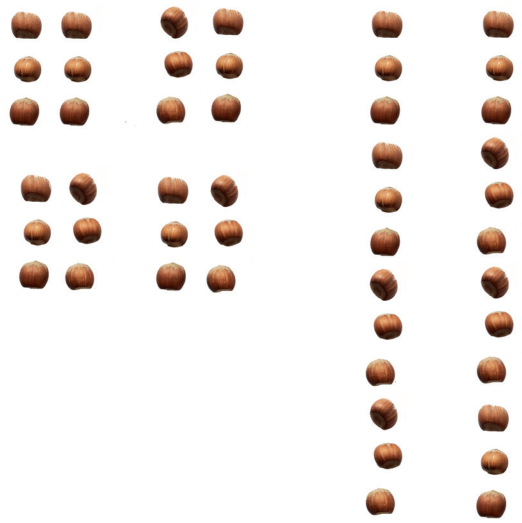
Remarque

En fait, toutes les associations sont acceptables, mais il est probable que les élèves auront apparié des photos qui, selon eux, « vont bien ensemble ».

Ils vont alors traduire leurs quatre associations de photos en paires de calculs. Il est important que leurs calculs montrent bien l'équivalence des deux expressions plutôt que de se centrer sur la réponse.

Chaque élève va alors recopier les quatre paires de calculs et individuellement il va montrer par des flèches, des symboles, des encadrés… comment on passe d'une expression à l'autre, dans quel sens les modifications apportées à un des termes agissent sur l'autre terme (pour conserver l'égalité).

Exemple



J'ai associé les photos 3 et 5 et j'ai écrit

: 2

$$4 \times 6 = 2 \times 12$$

× 2

En groupe, les élèves comparent et discutent du résultat de leur travail : ils peuvent encore améliorer leur production.

Lors de la mise en commun, les élèves confrontent leurs associations de calculs, ils expliquent comment, selon eux, on passe de la première expression à la seconde. L'enseignant complète la liste de calculs commencée à l'étape 1. Sous la conduite de l'enseignant, les élèves sont invités à regrouper les « techniques » qui se ressemblent et à justifier oralement ces regroupements.

Étape 3

Remarque

Cette étape, où les élèves vont travailler sur la base de petites situations problèmes, permet d'une part de travailler sur de plus grands nombres, d'autre part d'impliquer la soustraction et la division qui n'auront probablement pas été abordées lors des deux premières étapes. Enfin, elle permet de disposer d'un plus grand stock d'exemples de calculs en vue de la dernière étape qui visera la synthèse des constats.

Distribution de la fiche 3 à chaque élève. La fiche propose six situations qui impliquent chacune une propriété ou une technique opératoire (compensation). Les élèves doivent traduire ces situations en **une suite de deux calculs** mettant en évidence l'égalité des deux expressions. Il faut insister pour que les élèves ne se contentent pas d'une opération et du résultat. C'est bien **l'équivalence des deux expressions** qui nous intéresse ici, car la simple recherche du résultat n'exige pas des élèves qu'ils utilisent les propriétés.

Les élèves réalisent cette étape individuellement.

Lors de la mise en commun, les réponses des élèves sont comparées, justifiées et l'enseignant invite les élèves à expliquer, comme à l'étape 2, ce qui se passe d'une expression à l'autre, dans quel sens les modifications apportées à un des termes agissent sur l'autre terme (pour conserver l'égalité). L'enseignant complète alors la liste d'opérations au tableau en mettant en évidence, sur proposition des élèves, les changements intervenus entre les deux expressions.

Étape 4

Cette étape est menée collectivement. Elle consiste à faire la synthèse des constats en organisant la liste des opérations collectées au cours des trois étapes dans un tableau à double entrée.

Le nom des propriétés et techniques opératoires peut apparaitre dans le tableau, en guise de repères, mais on ne peut exiger des élèves qu'ils mémorisent ces nomenclatures.

Il revient à l'enseignant d'expliquer, en rappelant les constats des étapes précédentes, comment les trois propriétés et les techniques de compensation fonctionnent de façon à ce que les élèves puissent classer les différentes opérations récoltées durant toute l'activité.

Exemple de synthèse

	Commutativité	**Associativité**	**Distributivité**	**Techniques de compensation**
Addition	10 + 14 = 14 + 10	16 + 25 + 34 = (16 + 34) + 25	___	___
Multiplication	4 × 6 = 6 × 4	Etc.	___	___
Soustraction	24 – 10 ≠ 10 – 24	___	___	___
Division	24 : 4 ≠ 4 : 24	___	___	___

Ce tableau peut être agrandi et affiché en classe comme référentiel pour les élèves.

Fiche 1

La représentation

Le calcul : ....

La représentation

Le calcul : ....

La représentation

Le calcul : ....

La représentation

Le calcul : ....

La représentation

Le calcul : ....

La représentation

Le calcul : ....

Fiche 2

Photo 1

Photo 2

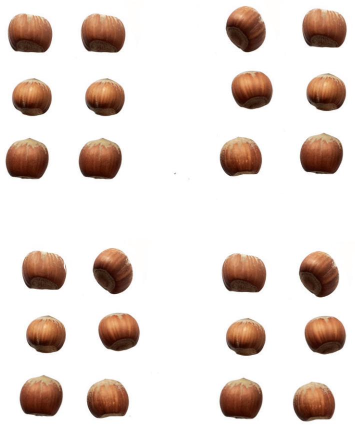


Photo 3

Photo 4

Photo 5

Photo 6

Photo 7

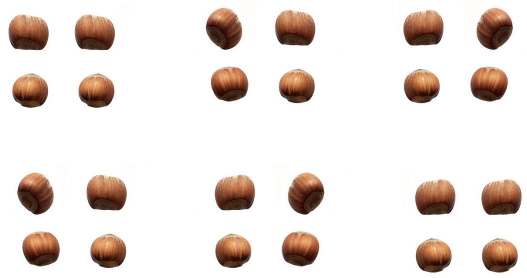


Photo 8

Fiche 3

Situation 1 :
Il y a le même nombre de billes dans 7 sacs de 13 billes que dans 13 sacs de 7 billes.

Mes calculs pour représenter la situation

....

Situation 2 :
Mon professeur a 27 ans et moi j'ai 10 ans. Dans 20 ans, notre différence d'âge sera toujours de 17 ans.

Mes calculs pour représenter la situation

....

Situation 3 :
Au jeu de cartes, j'ai totalisé 16 points à la première manche, 25 à la deuxième et 34 à la troisième. Pour calculer mon gain total, c'est plus facile si je regroupe d'abord 16 et 34 et que j'ajoute ensuite les 25 points.

Mes calculs pour représenter la situation

....

Situation 4 :
5 piles de 8 planches de bois, c'est équivalent à 10 piles de 4 planches.

Mes calculs pour représenter la situation

....

Situation 5 :
Une entrée au parc d'attractions coute 15 €. 46 élèves participent à cette activité. Pour calculer le prix total, l'enseignant simplifie le calcul, il le fait en deux étapes : il fait d'abord comme si l'entrée coutait 10 €, il ajoute ensuite ce qui est nécessaire.

Mes calculs pour représenter la situation

....

Situation 6 :
En distribuant équitablement 210 bonbons à 30 enfants, je me rends compte que chacun a la même quantité que si j'avais partagé 21 bonbons entre 3 enfants.

Mes calculs pour représenter la situation

....

1.3.2 | ACTIVITÉ 2 : LA CALCULATRICE DÉFECTUEUSE

Lors de l'activité « La calculatrice défectueuse »[4], les élèves seront amenés à résoudre des petites situations problématiques en mobilisant des techniques opératoires, notamment la compensation en lien avec des propriétés des opérations et les équivalences. Non seulement, ils effectueront des calculs, mais ils réfléchiront et se questionneront sur ces derniers. Ils utiliseront les relations entre les nombres pour simplifier les calculs et avec l'aide de l'enseignant, ils rendront les relations générales plus explicites, en particulier celles qui sont basées sur des propriétés des opérations.

Étape 1

Dans un premier temps, cinq situations sont présentées aux élèves qui sont invités individuellement à trouver le calcul qui permettrait de les résoudre (fiche 1). Après une brève correction collective, ces calculs serviront de base pour la suite de l'activité. Ils auront été notés au tableau avec un espace suffisant pour y écrire en vis-à-vis les propositions ultérieures des élèves.

Étape 2

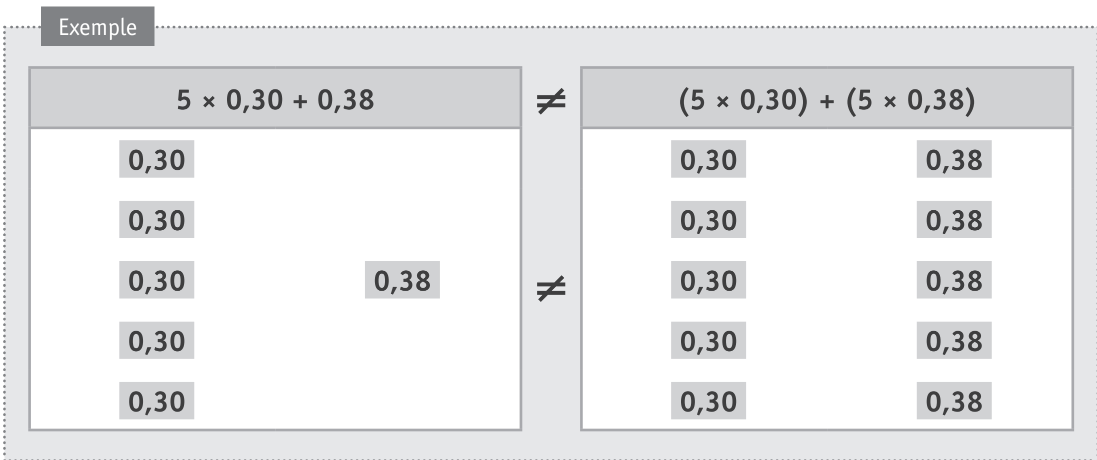
Dans un second temps, les élèves vont « jouer » à la calculatrice défectueuse. Ils devront effectuer les cinq calculs avec leur calculatrice, mais attention… certaines touches ne fonctionnent plus ! Ils doivent donc trouver un autre calcul permettant de trouver la réponse au problème (fiche 2).

L'idée est que les élèves observent la structure des calculs, qu'ils « jonglent » avec les nombres, qu'ils les décomposent, qu'ils utilisent (même intuitivement) certaines techniques ou propriétés des opérations pour découvrir de façon ludique des expressions équivalentes plutôt que de s'intéresser exclusivement à la réponse.

Un des intérêts majeurs de l'activité réside dans l'exploitation et la justification des propositions des élèves et dans le constat que plusieurs opérations différentes peuvent aboutir au même résultat. Il est intéressant de demander aux élèves de venir écrire eux-mêmes leur calcul au tableau. Cela pourra déboucher sur des découvertes importantes. Par exemple, pour le calcul 5 × 0,68, un élève pourrait proposer 5 × 0,30 + 0,38. Écrit de cette façon, il sera facile de faire vérifier par les élèves (avec la calculatrice) que l'on n'aboutit pas à la réponse correcte. Il conviendra alors d'expliquer que si c'est 0,30 + 0,38 que l'on veut multiplier par 5, l'écriture des parenthèses est obligatoire :

5 × (0,30 + 0,38). On peut aussi appliquer (sans nécessairement la nommer) la distributivité :

(5 × 0,30) + (5 × 0,38). Un support visuel peut s'avérer utile.



[4] Inspiré de A. COESSENS, *La pensée relationnelle, un tremplin entre l'arithmétique et une ouverture vers l'algèbre. Mémoire de fin de master en Sciences de l'éducation*, Université de Liège, 2017.

À ce stade (fiche 2), toutes les propositions équivalentes seront acceptées. La mise en œuvre de l'activité dans des classes montre que, spontanément, les élèves utiliseront plus souvent la décomposition des nombres ou la distributivité que les techniques de compensation. Si toutefois, elles apparaissent déjà à cette étape, il convient de faire relever clairement les régularités lors de la mise en commun.

Étape 3

L'activité peut comprendre une étape supplémentaire pour des élèves avec qui on a déjà abordé les techniques de compensation (fiche 3). Au départ des mêmes calculs, ils doivent à nouveau proposer des expressions équivalentes avec la contrainte des touches défectueuses, mais il faut en plus que leurs propositions soient des opérations impliquant deux nombres seulement. De cette façon, ils sont en quelque sorte obligés d'utiliser les compensations croisées pour l'addition et la multiplication et les parallèles pour la soustraction et la division.

La mise en commun sera clôturée par une synthèse et une analyse des constats qui constituent une ébauche de généralisation mathématique (par exemple comme dans le tableau de synthèse proposé à la page 30).

Enfin, il convient de garder à l'esprit qu'une fois ces techniques opératoires et ces propriétés découvertes et comprises, il faut prévoir des étapes de consolidation et d'automatisation.

Exemple d'échanges lors d'une mise en commun (P = enseignant, E = élève)

P : *Dans la 1re situation, vous deviez faire 137 + 66, mais la touche « 3 » de la calculette ne fonctionne pas. Tu as une proposition ?*

E1 : *120 + 17.*

P : *Vas-y, écris-le au tableau. 120 + 17.*
Est-ce que tout le monde est d'accord avec cela ?

E2 : *Le calcul n'est pas complet.*

E3 : *Moi, j'aurais fait…*

P : *C'est à E1 que tu dois parler.*

E3 : *Oui. Moi j'aurais fait 127 + 56.*

E2 : *(s'adressant à E1) Il faut encore faire + 66. Dans ton calcul, tu n'as que 137.*

P : *Comment est-ce que E1 a trouvé 120 + 17 ?*

E3 : *Il a, il a… décomposé.*

E2 : *Oui, il a décomposé.*

P : *C'est une bonne idée, il a décomposé le 137 en 120 + 17.*
Mais, fais un peu le calcul avec la calculette.

E1 : *C'est pas juste.*

E2 : *Il manque le 66.*

E1 : *Oui, avec le 66, c'est juste.*

P : *C'est bien, corrige ta proposition.*

E4 : *Moi, j'ai une autre idée avec 127.*

P : *Viens l'écrire (l'élève écrit 127 + 76)*

E1 : *C'est juste, on n'a pas le « 3 ».*

P : *Effectivement, on n'a pas le « 3 ». Quel est le lien avec le calcul de départ ? Est-ce que c'est bien une bonne proposition ?*

E2 et E3 : *Oui, on arrive à la même réponse parce qu'on a enlevé 10 et ajouté 10 de l'autre côté.*

P : *Oui, c'est bien équilibré. Vous pouvez l'écrire sur votre feuille et expliquer ce que vous avez fait par rapport au calcul de départ.*

E5 : *Moi, j'en ai un avec 147.*

…

Fiche 1

Lis les 5 énoncés et **écris le calcul** qui correspond à chaque situation.

Situation 1 :

Michel et Luc collectionnent des photos de joueurs de foot.
Michel en possède 137 et Luc en a 66.
Combien de photos possèdent-ils ensemble ?

Calcul

....

Situation 2 :

Au petit magasin de l'école, Samuel achète 5 collations à 0,68 € pièce.Combien paiera-t-il ?

Calcul

....

Situation 3 :

Laura possédait 271 billes avant d'en perdre 54 lors d'un tournoi.
Combien de billes possède-t-elle maintenant ?

Calcul

....

Situation 4 :

La salle des fêtes de l'école compte 375 chaises disposées en 15 rangées.
Combien y a-t-il de chaises par rangée ?

Calcul

....

Situation 5 :

Noah a 24 € dans son portefeuille.
Son amie Léa a 6 fois plus d'argent que lui.
Combien d'euros possède Léa ?

Calcul

....

Fiche 2

Effectue les calculs à l'aide de ta calculatrice, mais attention, certaines touches ne fonctionnent plus !
À toi de trouver une autre solution pour résoudre chaque calcul.

	Solution(s) proposée(s)
Situation 1 **137 + 66** ⚠ La touche « **3** » ne fonctionne pas	
Situation 2 **5 × 0,68** ⚠ La touche « **6** » ne fonctionne pas	
Situation 3 **271 – 54** ⚠ La touche « **7** » ne fonctionne pas	
Situation 4 **375 : 15** ⚠ La touche « **1** » ne fonctionne pas	
Situation 5 **24 × 6** ⚠ La touche « **4** » ne fonctionne pas	

Fiche 3

Effectue les calculs à l'aide de ta calculatrice, mais attention, certaines touches ne fonctionnent plus !
À toi de trouver une autre solution pour résoudre chaque calcul **en n'utilisant que 2 nombres**.

	Solution(s) proposée(s)
Situation 1 **137 + 66** ⚠ La touche « **3** » ne fonctionne pas	.... **+** ....
Situation 2 **5 × 0,68** ⚠ La touche « **6** » ne fonctionne pas	.... **x** ....
Situation 3 **271 – 54** ⚠ La touche « **7** » ne fonctionne pas	.... **–** ....
Situation 4 **375 : 15** ⚠ La touche « **1** » ne fonctionne pas	.... **:** ....
Situation 5 **24 × 6** ⚠ La touche « **4** » ne fonctionne pas	.... **x** ....

1.3.3 | ACTIVITÉ 3 : LES TECHNIQUES DE COMPENSATION

Cette activité met en jeu les **techniques de compensation** face aux quatre opérations. En ce sens, elle peut être considérée comme une **activité de synthèse ou d'évaluation diagnostique** qui se déroulera quand les propriétés des opérations auront déjà été travaillées.

Il est important que les élèves réalisent les exercices impliquant les **quatre opérations** (4 fiches) de façon à ce que non seulement ils puissent appliquer ces techniques opératoires, mais qu'ils connaissent également les **conditions de leur validité**. En d'autres termes, qu'ils prennent conscience et qu'ils comprennent que la compensation est croisée pour l'addition et la multiplication et qu'elle est parallèle pour la soustraction et la division.

Pour chaque signe opératoire, trois situations sont proposées (il est possible d'en imaginer une infinité d'autres). Elles sont d'une complexité graduelle : la première situation fait intervenir des nombres entiers exclusivement ; la deuxième implique des nombres décimaux et la troisième implique une symbolisation abstraite : un nombre représenté par une lettre[5] (ou un mot ou n'importe quel autre symbole). Selon le niveau d'avancement des élèves, il convient de leur proposer une, deux ou les trois situations. La troisième ne concernera que les élèves avec lesquels on a déjà introduit la représentation d'un nombre par une lettre ou autre symbole.

Si les tâches paraissent complexes pour les élèves, il est intéressant de leur demander de travailler en duos. Mais, cette modalité ne constituera une aide pour les élèves qu'à la condition de constituer des **duos hétérogènes : 1 fort, 1 faible**. Faire travailler ensemble les élèves les plus forts ou les plus faibles ne garantit effectivement pas des échanges susceptibles de faire progresser les élèves.

Lors de ce travail en duos, il convient de demander aux élèves de réaliser les exercices individuellement dans un premier temps, avant de confronter et de justifier leurs réponses pour arriver à un consensus. Ceci évitera que des élèves moins avancés se reposent entièrement sur leurs condisciples plus avancés. Une autre possibilité est de constituer des groupes de besoins. Il faut alors s'assurer que les élèves plus avancés puissent travailler en autonomie de façon à ce que l'enseignant puisse encadrer le travail des élèves qui en ont le plus besoin.

Il est possible que les élèves trouvent plusieurs propositions différentes menant au résultat correct. C'est un élément qu'il est intéressant d'exploiter lors de la mise en commun. Parmi les différentes façons de faire menant à un résultat correct, y en a-t-il une qui est plus efficace, plus rapide, qui rend le calcul plus facile ?

Si certains élèves sont bloqués et ne comprennent pas, on peut les inviter à expliquer par des flèches comment la méthode de chaque enfant fonctionne, comment et dans quel sens une modification apportée à un des termes agit sur l'autre. MAIS l'exercice sera beaucoup plus riche si, dans un premier temps, on laisse chaque élève observer la méthode et découvrir seul comment elle fonctionne.

Si le niveau d'avancement des élèves ne permet pas de leur proposer les situations 2 et 3, il convient de multiplier les situations de type 1 pour chaque opération. On se situe alors davantage dans une perspective d'automatisation.

L'activité sera clôturée par la **construction avec les élèves** d'une synthèse des constats. Le tableau de synthèse figurant à la page suivante est fourni à titre d'exemple.

[5] Compétence en construction à l'étape 2.

Opérations	Pour remplacer un calcul par un autre plus facile (qui aboutit à la même réponse)	
+	+ 3 **27 + 15 = 30 + 12 = 42** - 3	Si j'ajoute quelque chose à un des nombres, je retire la même chose à l'autre nombre.
×	: 2 **28 × 5 = 14 × 10 = 140** × 2	Si je divise un des termes par un nombre, je multiplie l'autre terme par le même nombre.
–	+ 2 **37 - 18 = 39 - 20 = 19** + 2	Si j'ajoute quelque chose à un des nombres, j'ajoute la même chose à l'autre nombre.
:	× 2 **65 : 5 = 130 : 10 = 13** × 2	Si je multiplie un des termes par un nombre, je multiplie l'autre terme par le même nombre.

Il est intéressant de faire s'interroger les élèves sur la présence du gros trait qui sépare le tableau en deux horizontalement.

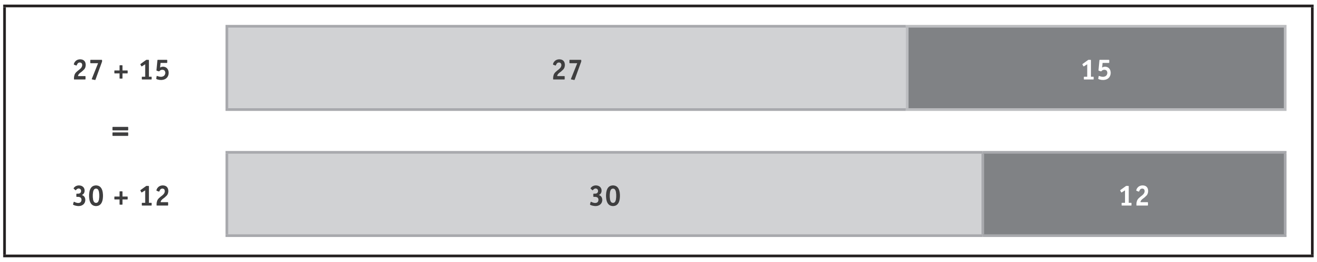
Exemple de réponse d'élève

Pour le « + » et le « × », si on fait quelque chose à un des nombres, on fait le contraire à l'autre. Alors que pour le « – » et le « : », on fait la même chose aux deux nombres.

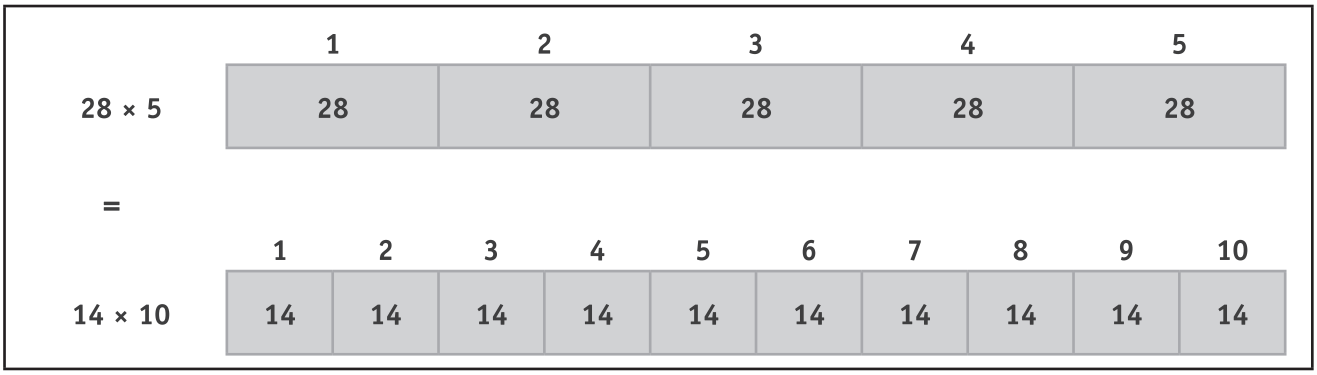
La formulation de la réponse n'est mathématiquement pas très précise, mais le raisonnement est correct et on peut s'appuyer sur cette base-là pour faire préciser progressivement les constats.

On peut associer les constats établis pour chaque opération à des supports visuels qui constitueront une aide précieuse, en particulier pour les élèves faibles, pour comprendre en profondeur le fonctionnement de ces techniques.

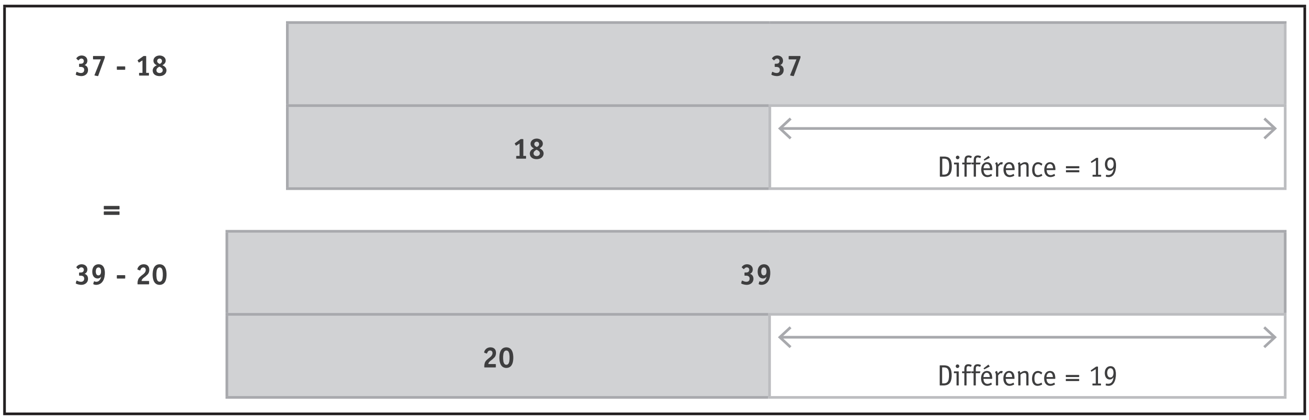
Pour l'addition,



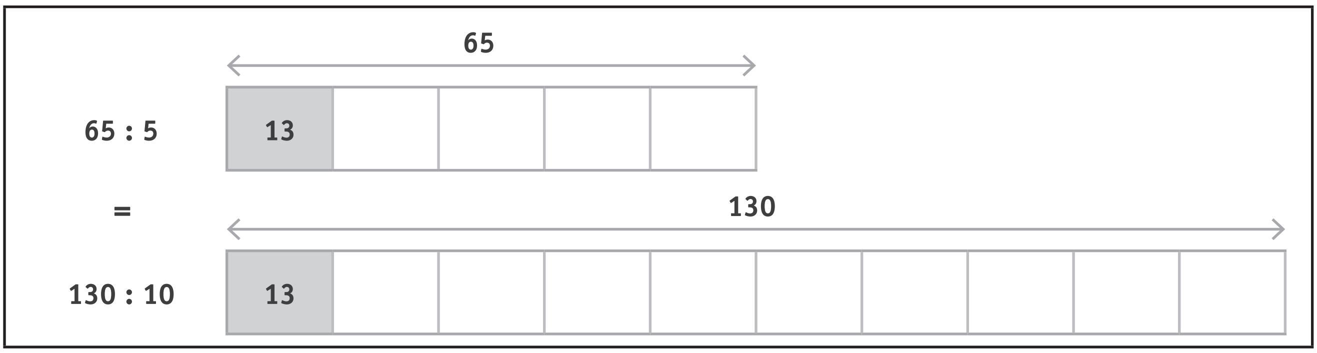
Pour la multiplication,



Pour la soustraction,



Pour la division, si le nombre de départ est 2 fois plus grand, il faudra le diviser en 2 fois plus de parts pour obtenir le même résultat.



Fiche 1

Karim connait une méthode simple pour effectuer mentalement des opérations.

Pour **27 + 15**, il fait **30 + 12 = 42**

Pour **34 + 19**, il fait **33 + 20 = 53**

a. Écris comment tu utiliserais la méthode de Karim pour effectuer **298 + 57**

b. Écris comment tu utiliserais la méthode de Karim pour effectuer **35,7 + 9,8**

c. Utilise la méthode de Karim pour compléter le calcul suivant.

58 + n = 60 + ____________________

Fiche 2

Noémie connait une méthode simple pour effectuer mentalement des opérations.

Pour **28 × 5**, elle fait **14 × 10 = 140**

Pour **16 × 25**, elle fait **4 × 100 = 400**

a. Écris comment tu utiliserais la méthode de Noémie pour effectuer **286 × 50**

b. Écris comment tu utiliserais la méthode de Noémie pour effectuer **4,2 × 2,5**

c. Utilise la méthode de Noémie pour compléter le calcul suivant.

40 × n = 10 × ____________________

Fiche 3

Lucien connait une méthode simple pour effectuer mentalement des opérations.

Pour **37 – 18**, il fait **39 – 20 = 19**

Pour **71 – 43**, il fait **68 – 40 = 28**

a. Écris comment tu utiliserais la méthode de Lucien pour effectuer **182 – 49**

b. Écris comment tu utiliserais la méthode de Lucien pour effectuer **16,1 – 5,2**

c. Utilise la méthode de Lucien pour compléter le calcul suivant.

47 – n = 50 – (____________________)

Fiche 4

Laura connait une méthode simple pour effectuer mentalement des opérations.

Pour **65 : 5**, elle fait **130 : 10 = 13**

Pour **300 : 25**, elle fait **1200 : 100 = 12**

a. Écris comment tu utiliserais la méthode de Laura pour effectuer **850 : 50**

b. Écris comment tu utiliserais la méthode de Laura pour effectuer **4 : 2,5**

c. Utilise la méthode de Laura pour compléter le calcul suivant.

n : 25 = ________________ : 100

1.4 | IMPLICATION DES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS SUR LES CALCULS MENTAUX ET ÉCRITS

« Tout en exerçant le calcul mental, on découvre des propriétés des opérations. On se sert de ces outils pour mettre en place le calcul écrit élémentaire… » (*Socles de compétences*, p. 26).

Dans la partie *Nombres et opérations* de l'épreuve, cinq items impliquaient des opérations écrites. La grande majorité des élèves a été mise en difficulté. Les résultats aux trois items ci-dessous en attestent (respectivement de 29 %, 8 % et 44 %).

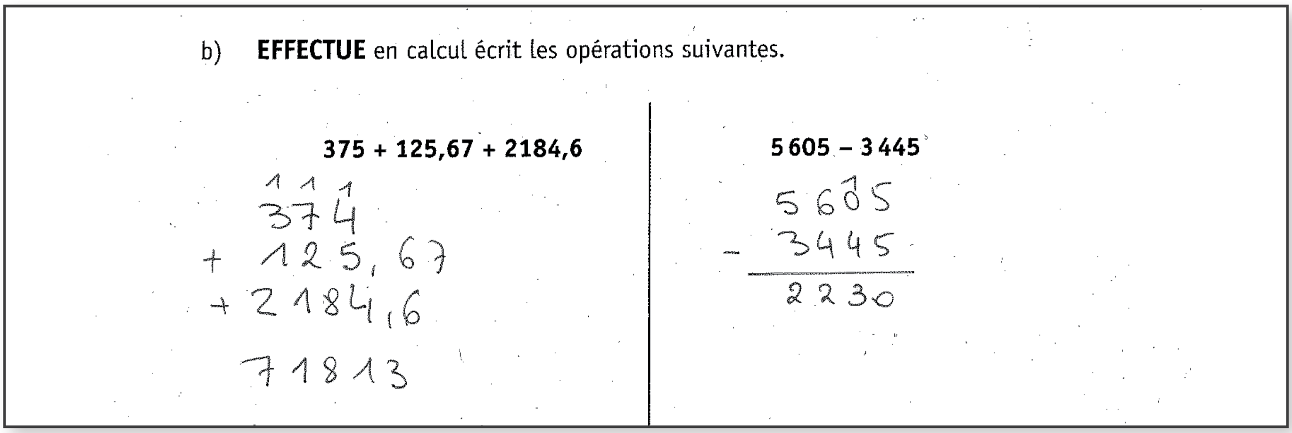
QUESTION 14

a) **COMPLÈTE.**

3 4	
× 6 2	
6 8	**68** est le résultat de l'opération ______ × ______
+ 2 0 4 0	**2 040** est le résultat de l'opération ______ × ______
2 1 0 8	**2 108** est le résultat de l'opération ______________

À la question « 2040 est le résultat de l'opération … × … », une des erreurs courantes est, comme on pouvait s'y attendre, « 6 × 34 ». Dans ce cas précis, l'erreur témoigne d'une connaissance partielle du fonctionnement de la multiplication écrite (et de son lien avec le système décimal), mais d'autres types d'erreurs, comme « 2 × 1020 », témoignent davantage d'une incompréhension de la question. Le même constat peut être fait pour le troisième item « 2108 est le résultat de l'opération… » avec des réponses comme « 2000 + 108 ». Les enseignants sont nombreux à trouver ces trois items trop difficiles, pourtant ils visent des fondements essentiels à la compréhension de toute opération écrite, travail qui n'est peut-être pas encore développé dans toutes les classes à ce moment de l'année.

L'addition écrite de trois nombres, dont un entier, un décimal limité au centième et un décimal limité au dixième n'est, quant à elle, réussie que par 32 % des élèves. Parmi les erreurs courantes, on trouve 268527 (sans virgule). Les élèves qui ont fourni cette réponse ont correctement posé l'opération, ont bien utilisé la technique du report et n'ont pas commis d'erreurs de calcul. Ils ont simplement oublié d'écrire la virgule dans la réponse. On peut penser que ces élèves sont en bonne voie vers la maitrise de ce type de techniques, y compris celles impliquant des nombres décimaux. D'autres erreurs résultent d'un mauvais alignement des nombres (notamment alignés sur le premier chiffre de chaque nombre, comme dans la production ci-dessous). Dans ce cas, le travail qu'il reste à accomplir pour aider les élèves à comprendre le fonctionnement d'opérations écrites (*à fortiori* quand elles impliquent des décimaux) sera probablement plus important.


b) **EFFECTUE** en calcul écrit les opérations suivantes.

375 + 125,67 + 2184,6

1 1 1
374
+ 125,67
+ 2184,6

71813

5 605 – 3 445

5 6 1 0 5
– 3445

2230

La soustraction écrite de deux nombres entiers est réussie par 49 % des élèves. L'erreur la plus courante est la réponse 2240, typique des élèves qui, ne sachant effectuer « 0 – 4 », font « 4 – 0 ». Il y a là une méconnaissance ou une mauvaise utilisation des techniques d'emprunt et de compensation. Pour ne plus commettre ce type d'erreurs, les élèves doivent aussi comprendre que la commutativité s'applique à l'addition et à la multiplication, mais pas à la soustraction et à la division. Dans l'exemple de réponse ci-dessus, on voit que l'élève a une connaissance partielle de la technique d'emprunt et de compensation, il ajoute un « 1 » au-dessus du « 0 » des dizaines, mais il ne compense pas. De plus, il commet le même genre d'erreur que celle décrite ci-dessus : au lieu de faire « 10 – 4 », il tente de faire « 1 – 4 », n'y arrivant pas, il fait « 4 – 1 ».

Le calcul écrit est un des domaines mathématiques qui mobilise, à coup sûr, le système décimal. Y faire référence assure aux élèves une vraie compréhension des différents algorithmes. Françoise Lucas[6] formule quelques principes méthodologiques pour travailler le calcul écrit de façon pertinente :

- partir d'emblée de situations qui nécessitent les techniques de report, d'emprunt et de retenue. Sans cela, il n'y a pas d'obstacle, il n'y a rien de vraiment neuf à apprendre ;
- s'appuyer sur les acquis de calcul mental pour justifier des procédures de calcul écrit. Par exemple, la compensation parallèle de la soustraction en calcul mental pour appuyer la compensation en calcul écrit ;
- ancrer la construction des procédures dans la manipulation de matériels pertinents ;
- réaliser les procédures avec les abaques en arrière-fond au début. Ceci aide les élèves en difficulté d'organisation spatiale de leurs nombres ;
- ne pas entrainer les procédures de calcul écrit outre mesure sur des nombres complexes et décimaux ;
- faire estimer le résultat avant d'appliquer la procédure pour vérifier la plausibilité du résultat après.

Selon Roegiers[7], « l'ensemble des procédés de calcul (écrit ou mental) repose sur deux fondements :

- la numération de position ;
- les propriétés des opérations.

Prenons le cas de la distributivité. Elle est présente aussi bien en calcul écrit (décomposition en produits partiels) qu'en calcul mental (procédés de multiplication par 11, 15, 9, 99... procédés de décomposition en une somme, en une différence...)

[6] F. LUCAS et al, *Élucider la numération pour mieux calculer,* (Collection Math & Sens), De Boeck, 2012, p. 85.
[7] X. ROEGIERS, *Les mathématiques à l'école primaire*, Bruxelles, De Boeck, 2000, p. 199.

Il faudra donc mener très tôt, dès le 2e degré, une découverte intuitive de ces propriétés par les enfants, mais aussi, un peu plus tard, une étude approfondie de ces propriétés qui s'avèrent être les prérequis indispensables à l'approche des techniques de calcul. »

PARALLÉLISME CALCUL MENTAL / CALCUL ÉCRIT

Toutes les techniques d'opérations écrites reposent sur une maitrise parfaite du système de numération en base dix : l'élève qui est incapable de distinguer les unités, les dizaines… dans un nombre sera incapable aussi de réaliser correctement une opération écrite[8] .

La technique de **l'addition** écrite	L'explication mathématique
$\begin{array}{r} {\scriptstyle +1\ +1\ \ \ \ } \\ 4\,7\,2\,3 \\ +\ \ 5\,9\,4 \\ \hline 5\,3\,1\,7 \end{array}$	Double mécanisme : - l'alignement des chiffres d'un même rang - le report $\begin{array}{rcrcr} 4000 & + & 0 & = & 4000 \\ 700 & + & 500 & = & 1200 \\ 20 & + & 90 & = & 110 \\ 4 & + & 3 & = & 7\ + \\ \hline & & & & 5317 \end{array}$

Le mécanisme qui consiste à aligner les nombres vers la droite et utiliser le report est intéressant et simple à comprendre, toutefois, il faut s'assurer que l'élève comprenne l'origine de ces mécanismes sinon il sera vite bloqué face à des difficultés nouvelles. Il risque par exemple d'aligner un calcul avec des nombres décimaux comme ceci

$$\begin{array}{r} 45{,}67 \\ +\ \ \ 38{,}9 \\ \hline \ldots \end{array}$$

[8] D'après X. ROEGIERS, *Les mathématiques à l'école primaire*, De Boeck, 2000, p. 239 et suivantes.

La technique de **la multiplication** écrite	L'explication mathématique

Grâce à la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, il est possible de décomposer une multiplication en plusieurs et d'additionner les produits partiels obtenus

$$\underbrace{(143 \times 2)}_{286} + \underbrace{(143 \times 30)}_{4290}$$

$$\begin{array}{r} 143 \\ \times\ 32 \\ \hline 286 \\ +\ 4290 \\ \hline 4576 \end{array}$$

$286 \longrightarrow 143 \times 2$

$4290 \longrightarrow 143 \times 30$

Le 2e produit partiel est toujours décalé d'un rang vers la gauche puisqu'il représente un certain nombre de dizaines. Dans l'exemple ci-dessus, 143 est pris 3 dizaines de fois, ce qui représente 429 dizaines.

Pour d'autres développements relatifs à la multiplication écrite, voir « *Zoom sur la multiplication écrite* » à la page 38.

La technique de **la soustraction** écrite	L'explication mathématique

Le procédé de l'emprunt

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 5\ +10 \\ 5\ \cancel{6}\ 0\ 5 \\ -\ 3\ 4\ 4\ 5 \\ \hline 2\ 1\ 6\ 0 \end{array}$$

Le procédé de compensation

$$\begin{array}{r} \scriptstyle +10 \\ 5\ 6\ 0\ 5 \\ \scriptstyle +1 \\ -\ 3\ 4\ 4\ 5 \\ \hline 2\ 1\ 6\ 0 \end{array}$$

Ici aussi, les nombres sont disposés les uns au-dessous des autres en respectant les unités de même rang.

Le nombre de dizaines du premier nombre (0) n'est pas suffisant pour retirer le nombre de dizaines du second (4). On emprunte alors une unité au rang suivant, c'est-à-dire une centaine que l'on transforme en 10 dizaines. On peut maintenant faire 10 dizaines moins 4 dizaines. Il ne restera plus que 5 centaines dont il faudra en retrancher 4 centaines.

C'est la règle de compensation parallèle dans la soustraction qui permet d'ajouter 10 dizaines au premier nombre et 10 dizaines sous la forme d'une centaine au second.

À priori, aucun de ces deux procédés n'est meilleur que l'autre. L'idéal est sans doute de proposer les deux procédés et de laisser l'élève choisir celui qui lui convient le mieux. Ce qui est à éviter à tout prix, c'est que l'enseignant d'une année n'impose un procédé et celui de l'année suivante, l'autre procédé.

La technique de **la division** écrite	
1 7 6 4 0	4
- 1 6	4 4 1 0
1 6	
- 1 6	
0 4	
- 4	
0 0	
- 0	
0	

L'explication mathématique

Étant donné qu'on essaye de trouver le nombre maximum de fois que le dividende contient le diviseur, on examine en premier lieu les rangs supérieurs, contrairement aux procédés écrits d'addition, de soustraction et de multiplication.

Dans le cas particulier d'une division dont le diviseur est un nombre décimal, la règle de compensation parallèle dans la division permet de multiplier les deux termes par la plus petite puissance de 10 qui rendra entier le diviseur.

× 10

1764 : 0,4 = 17640 : 4

× 10

ZOOM SUR LA MULTIPLICATION ÉCRITE

Il est intéressant de faire percevoir, et vérifier concrètement par les élèves, la commutativité de la multiplication écrite. Ceci permettra notamment, en cas de multiplicateur à trois ou quatre chiffres (ou plus), d'inverser les deux termes pour éviter des produits partiels trop nombreux (éventuellement source d'erreurs dans les alignements).

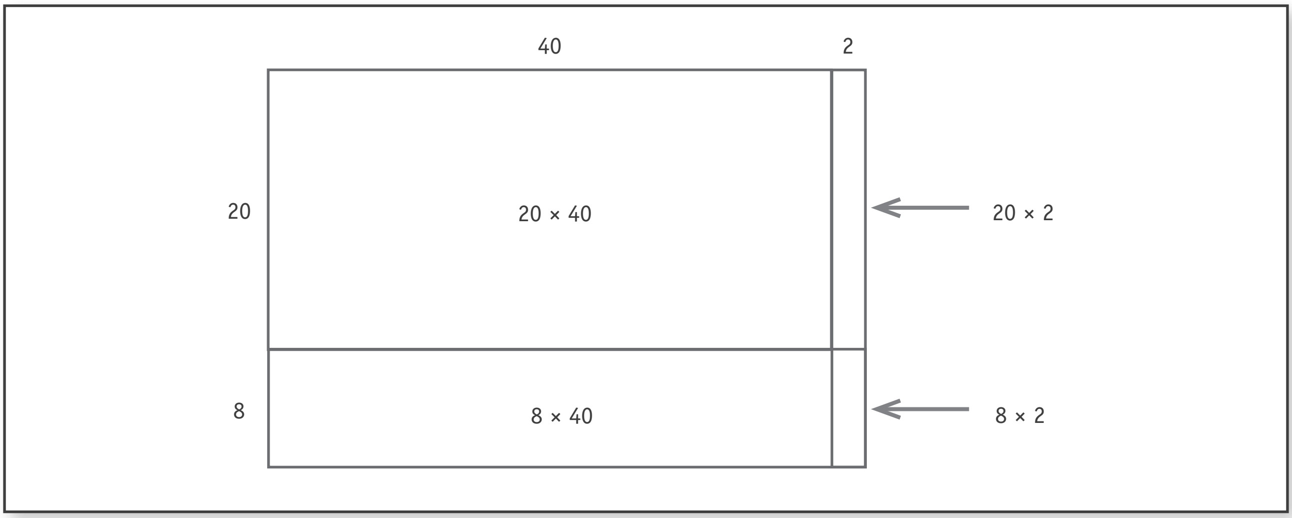
		4	2				2	8
	×	2	8			×	4	2
	3	3	6				5	6
+	8	4			+	1	1	2
1	1	7	6		1	1	7	6

La distributivité de la multiplication sur l'addition permet de décomposer les deux facteurs selon leur écriture décimale. Pour bien le faire percevoir aux élèves, on peut les inviter à écrire tous les produits partiels, ce qui présente en outre l'avantage de ne pas devoir décaler vers la gauche le deuxième produit partiel (également source d'erreurs).

$$42 \times 28 = (2 \times 8) + (40 \times 8) + (2 \times 20) + (40 \times 20) = 16 + 320 + 40 + 800 = \mathbf{1176}$$

$$\begin{array}{rrrrll}
 & & 4 & 2 & & \\
 & \times & 2 & 8 & & \\
\hline
 & & 1 & 6 & \longrightarrow & \mathbf{2 \times 8} \\
 & 3 & 2 & 0 & \longrightarrow & \mathbf{40 \times 8} \\
 & & 4 & 0 & \longrightarrow & \mathbf{2 \times 20} \\
+ & 8 & 0 & 0 & \longrightarrow & \mathbf{40 \times 20} \\
\hline
1 & 1 & 7 & 6 & &
\end{array}$$

Les dispositions rectangulaires peuvent également s'avérer précieuses pour bien faire comprendre le fonctionnement de l'algorithme de la multiplication écrite. Par exemple, quelle est la superficie d'un terrain de 42 m de long sur 28 m de large ?



En appliquant la double distributivité, on peut transposer l'opération dans un tableau opératoire.

$$42 \times 28 = (40 + 2) \times (20 + 8) =$$

×	20	8	
40	**800**	**320**	**1120**
2	**40**	**16**	**56**
	840	**336**	**1176**

Pour d'autres développements sur la multiplication écrite et d'autres techniques (musulmane, égyptienne, chinoise…) le lecteur est invité à se référer par exemple à F. LUCAS et al, *Construire la multiplication et les tables*, (Collection Math et Sens), De Boeck, 2005, p. 38 à 47.

2 DOMAINE DES GRANDEURS : RECHERCHER LE RÉSULTAT D'UN FRACTIONNEMENT

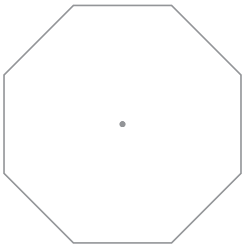
> *Aucun domaine des mathématiques à l'école élémentaire n'est aussi mathématiquement riche, cognitivement compliqué et difficile à enseigner que les fractions, les rapports et la proportionnalité. Ces idées expriment toutes des relations mathématiques : les fractions et les rapports sont des nombres "relationnels". C'est le premier endroit où les élèves se trouvent en présence de nombres qui représentent une relation entre deux quantités discrètes ou continues, tels que 34, plutôt qu'une quantité discrète simple (p.ex., trois pommes) ou continue (p.ex., 4 cm de corde)*
>
> *(Litwiller et Bright, 2002, p. 3, cité dans Mettre l'accent sur les fractions, Ontario, 2015)*

2.1 | LES CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

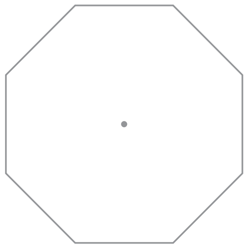
L'opération de fractionnement (partager puis prendre un certain nombre de parts) semble maitrisée, comme l'indiquent les résultats aux deux items ci-dessous (respectivement 77 % et 78 %).

QUESTION 40

a) **COLORIE** les $\frac{3}{8}$ de la figure.



COLORIE les $\frac{3}{4}$ de la figure.

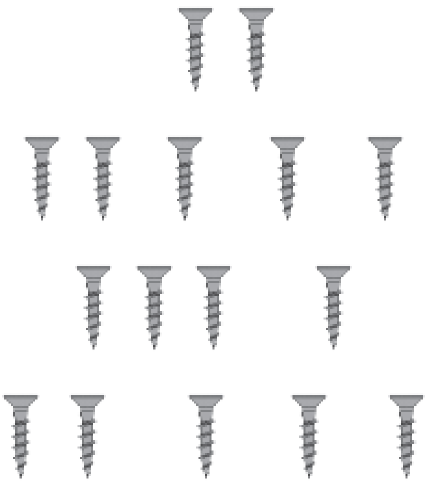


☐ 101

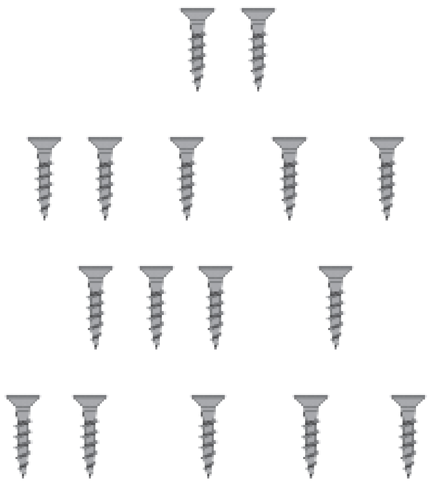
☐ 102

En revanche, rechercher le résultat du fractionnement qui aboutit à un nombre ou le passage à une fraction réduite ou équivalente pose problème à de nombreux élèves. Les items ci-dessous sont réussis respectivement par 51 % et 47 % des élèves. Parmi les réponses incorrectes, de nombreux élèves ont entouré un nombre de vis correspondant au dénominateur (erreur la plus courante) ou au numérateur, voire un groupe de 3 vis et un groupe de 8 vis (ou 4 vis). Avec ces élèves, un travail en profondeur sur la compréhension du concept semble nécessaire.

b) **ENTOURE** les $\frac{3}{8}$ des vis.



ENTOURE les $\frac{3}{4}$ des vis.



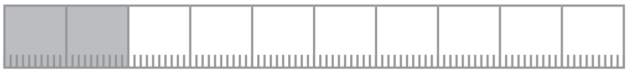
☐ 103

☐ 104

On se rappellera que deux items, situés au début de l'épreuve « *le tiers de 36 =… et 1/4 de 88 =…* » n'étaient réussis que par respectivement 37 % et 41 % des élèves.
Deux autres items illustrent bien les difficultés des élèves pour passer à une fraction équivalente, réduite (voire irréductible).

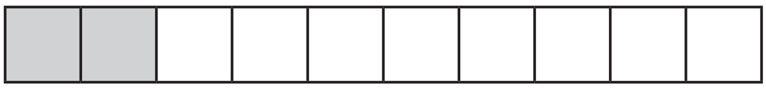
En question ouverte, l'item ci-dessous est réussi par 73 % des élèves. L'erreur la plus courante est $\frac{2}{8}$, deux portions sont grisées, huit ne le sont pas.

La partie grisée vaut $\frac{\quad}{\quad}$ du rectangle. 95



En revanche, dans l'item ci-dessous, proposé en QCM, un élève sur deux seulement fournit la réponse correcte $\frac{1}{5}$. La réponse $\frac{2}{10}$ ne se trouvant pas parmi les propositions, la moitié des élèves n'a pas réussi à considérer $\frac{1}{5}$ comme une fraction équivalente ou la fraction réduite de $\frac{2}{10}$. De ce fait, même de nombreux élèves qui avaient correctement répondu à la question ouverte répondent $\frac{2}{8}$ à l'item ci-dessous.

Quelle partie de la figure est coloriée en gris ?



ENTOURE la réponse. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{8}$

Ces savoir-faire (comprendre ce qu'est le tiers de 36 et établir que $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$) s'avèreront utiles pour participer aux apprentissages des opérations sur les fractions : *additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées* est à certifier au terme de l'étape 2.

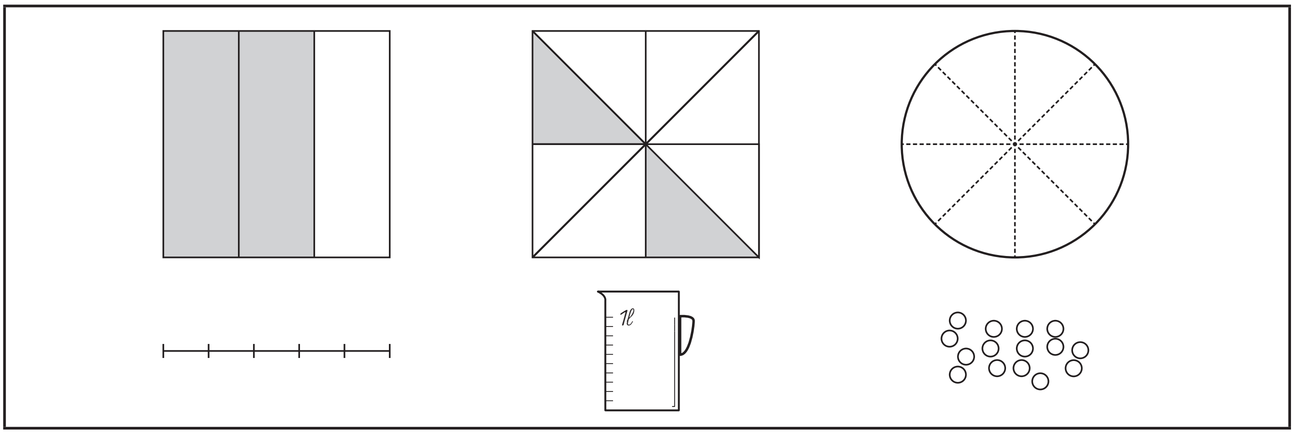
2.2 | INTENTIONS ET COMMENTAIRES

Le travail sur les fractions implique le développement d'une « pensée relationnelle » qui, selon plusieurs auteurs (Empson & Levi, 2008 ; Empson, Levi, & Carpenter, 2011), serait de nature préalgébrique et préparerait en quelque sorte la transition primaire-secondaire.

Le document *Socles de compétences* est clair sur le fait qu'en primaire, l'évaluation du travail sur les fractions vise principalement[9] le domaine des grandeurs. Il s'agira de fractionner des objets (ou collections d'objets), d'additionner (ou soustraire) deux grandeurs fractionnées. Il convient également de travailler, mais sans certifier, dans des situations où l'élève doit composer deux fractionnements d'un objet (par exemple, prendre le quart du tiers d'un objet).

Les Socles de compétences Domaine des « grandeurs »		**II**	**III**
3.3.2. Opérer, fractionner	Fractionner des objets en vue de les comparer.	C	E
	Composer deux fractionnements d'un objet réel ou représenté en se limitant à des fractions dont le numérateur est un.	↗	C
	Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.	C	E
Les Socles de compétences Domaine des « nombres »		**II**	**III**
3.1.3. Calculer	Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées.	C Avec des nombres naturels et des décimaux limités au millième.	C Avec des entiers, des décimaux et des **fractions** munis d'un signe. Y compris l'élévation à la puissance.

Ceci implique que toute activité d'apprentissage (ou d'évaluation) en la matière devra systématiquement proposer à l'élève des supports, des grandeurs, des objets (ou collection d'objets) réels ou représentés.



[9] Dans le domaine des nombres, la seule compétence à maitriser au terme de l'étape 2 impliquant les fractions est *Écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer ou de les utiliser*. Ceci implique une connaissance du lien entre les fractions usuelles et les nombres décimaux.

Tout est partage ... Tout n'est pas fraction !

Partager, on peut l'opérer sur tout.
Fractionner, c'est diviser en parts égales.

La fraction représentée par la partie grisée n'est pas égale à un cinquième ($\frac{1}{5}$) de la bandelette parce que la bandelette a été partagée et non divisée en parts égales[10].

Ceci est une fraction car la bandelette est divisée en 5 parts égales.

La partie grisée est égale à un cinquième ($\frac{1}{5}$) car elle va exactement 5 fois dans la bandelette.

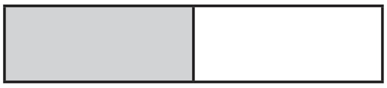
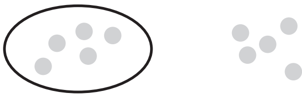
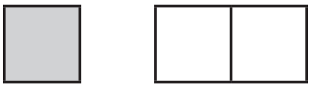
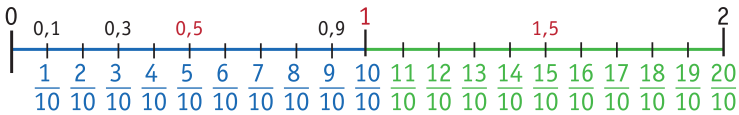
Une fraction est un rapport entre deux nombres naturels composé d'un numérateur et d'un dénominateur différent de zéro.

Les fractions sont des notions mathématiques qui servent à exprimer :

- des fractionnements de grandeurs et de quantités ;
- des rapports, des proportions de grandeurs et de quantités ;
- des nombres rationnels.

[10] Il convient d'être attentif au vocabulaire utilisé : on préfèrera notamment le terme « fractionner » à celui de « partager ». Si on utilise le terme « partager », il est recommandé de préciser systématiquement « en parts égales ».

À première vue $\frac{1}{2}$ parait simple à comprendre … Et pourtant ![11]

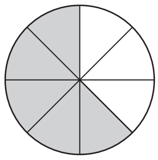
$\frac{1}{2}$ c'est la moitié d'un tout  $\frac{1}{2}$ du rectangle	C'est une partie d'une grandeur continue.	**Fraction opérateur**
$\frac{1}{2}$ c'est une partie d'une quantité  $\frac{1}{2}$ des billes	C'est une partie d'une grandeur discontinue, une quantité divisée en 2.	
$\frac{1}{2}$ c'est un rapport  un pour deux	C'est une comparaison entre deux grandeurs.	**Fraction rapport**
$\frac{1}{2}$ c'est une mesure  $\frac{1}{2}$ litre	C'est un rapport entre une grandeur et une unité de mesure.	
$\frac{1}{2}$ c'est le résultat de la division « 1 : 2 » 	C'est une position ou un intervalle sur la droite numérique, un nombre décimal qui peut s'écrire $\frac{5}{10}$, cinq dixièmes ou 0,5.	**Fraction nombre**

[11] *Formation mathématique : fractions. Des activités, des jeux pour tous les cycles*, CECP.

Couper en parts égales et prélever un certain nombre de parts

Dans ce cas, la fraction apparait comme *opérateur de fractionnement*.

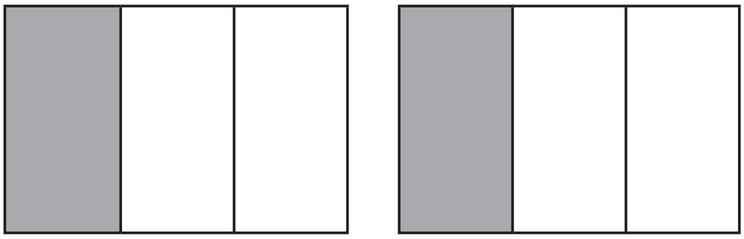
Partager une tarte en 8 parts égales et prendre 5 parts.



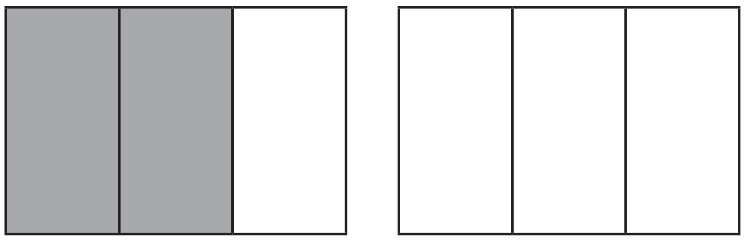
Pour résoudre la situation ci-dessous[12], les élèves doivent disposer des supports pour tester leurs partages.

Partager équitablement deux biscuits entre 3 amis.
Chaque ami reçoit un tiers du 1er biscuit et un tiers du 2e.

Chaque ami reçoit donc $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$



Cela équivaut donc à $\frac{2}{3}$ d'un biscuit

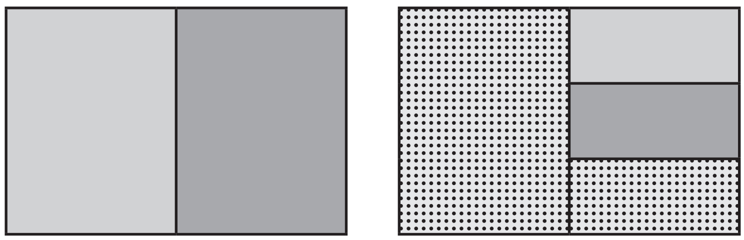


Mais l'élève peut donner d'abord un demi-biscuit à chaque ami, puis partager en 3 parts égales le demi-biscuit restant.

Chaque ami reçoit donc

$\frac{1}{2}$ + ($\frac{1}{3}$ **de** $\frac{1}{2}$)

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



En confrontant les deux démarches, les élèves peuvent être conduits à percevoir l'équivalence entre deux expressions, par exemple : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

[12] D'après I. DEMONTY et al, *Du concret pour abstraire. Un outil à destination des enseignants de 5e - 6e primaires et de 1re - 2e secondaire*, 2015.

LES FRACTIONS DE LA MATERNELLE à LA 6e PRIMAIRE

DE LA FRACTION-GRANDEUR … À… LA FRACTION-NOMBRE… en lien avec la résolution de problèmes…

M1 M2 M3	Partager	↗ un tout ↘ une collection	↖ ↙ Reconstituer
P1 P2	Comparer	↗ les morceaux d'un tout ↘ les parts d'une collection	→ Dégager des équivalences
	Partager	→ en 2 ou 4 parts **égales => FRACTION** Symbolisation	
P3 P4	Fractionner	→ en parts égales	
	Reconnaitre	→ une fraction représentée	
	Représenter	→ une fraction	
	Lire et écrire	→ la fraction en symbole mathématique	
P5 P6	Comparer	↗ des fractions de même dénominateur (dénominateur ≤ 10 et numérateur ≤ dénominateur) ↘ des fractions de même numérateur	
	Reconnaitre	→ les fractions égales à l'unité	
	Simplifier	→ des fractions - jusqu'à la forme irréductible	
	Additionner/ Soustraire	↗ des grandeurs fractionnées ↘ des fractions de même dénominateur	
	Multiplier	→ une grandeur fractionnée par un naturel	
	Transformer	→ les nombres décimaux en fractions décimales et inversement	
	Associer	→ un pourcentage à une fraction décimale et inversement	
	Situer	→ une fraction sur une droite graduée	

2.3 | LES ACTIVITÉS

2.3.1 | ACTIVITÉ 4 : JEU DE CARTES

Matériel

Reproduire les planches « rectangles grisés » (annexe 1) sur des feuilles de couleurs différentes de façon à ce que chaque membre d'un duo dispose d'un jeu de cartes de couleur différente de celui de son « adversaire ». Un jeu par enfant !
Pour la synthèse au tableau noir, reproduire, en grand, les annexes 1 – 3 – 4 – 5.

Remarques

À la planche B de l'annexe 1, il manque l'illustration de $\frac{9}{12}$.

Il ne s'agit pas d'un oubli, ceci est de nature à faire réfléchir les élèves. Ceux qui auront remarqué cette absence font preuve d'une grande implication dans l'activité.

Par ailleurs, dans l'annexe 5 (graphiques circulaires), il y a deux intrus.

On sait que si 3 parts sont grisées et 4 ne le sont pas, certains élèves ont tendance à considérer que la fraction est $\frac{3}{4}$ *plutôt que* $\frac{3}{7}$ *. Le deuxième intrus est* $\frac{5}{11}$ *que les élèves risquent de confondre avec* $\frac{5}{6}$ *.*

Il convient d'être très attentif à ce genre d'erreur et de faire rectifier par l'élève : en combien de parts égales le disque est-il partagé et combien de parts en prélève-t-on ?

Réflexion

Le jeu de cartes est constitué de fractions inférieures à l'unité.
Les cartes sont rangées en fonction de familles de fractions :
- annexe 1, planche A, famille des demis, quarts, huitièmes ;
- annexe 1, planche B, famille dest tiers, sixièmes, douzièmes.

Vous avez toute latitude pour complexifier les activités, en jouant :
- uniquement avec la planche A ;
- uniquement avec la planche B ;
- avec les deux planches ;
- avec d'autres cartes (annexe 2 « Rectangles vierges »).

Les phases proposées ne sont pas nécessairement hiérarchisées. Elles ne sont pas non plus toutes obligatoires. Selon le niveau d'avancement des élèves, on peut par exemple décider de commencer directement à la phase 3, après avoir vérifié la compréhension des concepts de numérateur et dénominateur (voir exemple de synthèse à la page suivante).

Le jeu de cartes peut être :
- le point de départ d'une leçon : une mise en situation sous forme de jeu ;
- une aide à la différenciation : qui mène à des groupes de niveaux d'exercices spécifiques sur les fractions ;
- un renforcement ou une consolidation des acquis ;
- un dépassement.

Il est important de réaliser une synthèse après chaque phase de jeu afin de bien structurer les représentations mentales des enfants.

Organisation spatiale

Pour les phases de jeu, en groupes de deux.
Pour les synthèses, individuellement ou/et collectivement.

Les phases de jeu

1. Le dénominateur (le nombre de parts faites)

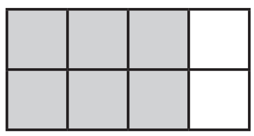
Matériel	Un jeu de cartes pour deux (annexe 1) + feuille pour synthèse.
Consigne	En combien de parts égales est fractionné le rectangle ?
Jeu	Face à face, chacun à son tour, l'enfant abat les cartes une à une en nommant le nombre de parts égales du rectangle.
Synthèse	Individuelle et libre. Sur une feuille de papier l'enfant réalise sa synthèse (dessin, schéma, écriture…) de l'activité.

2. Le numérateur (le nombre de parts prélevées)

Matériel	Un jeu de cartes pour deux (annexe 1) + feuille pour synthèse.
Consigne	Combien y a-t-il de parties grisées sur la carte ?
Jeu	Face à face, chacun à son tour, l'enfant abat les cartes une à une en nommant le nombre de parties grisées du rectangle.
Synthèse	Individuelle et libre. Sur une feuille de papier l'enfant réalise sa synthèse (dessin, schéma, écriture…) de l'activité. Puis synthèse collective.

Attention ! Synthèse collective, sur la base des constats des élèves, pour bien fixer le rôle et la position du numérateur et du dénominateur dans la fraction.

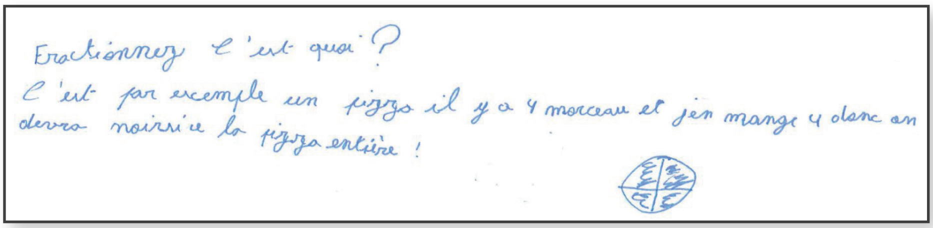
Cette synthèse pourrait comprendre les éléments suivants.

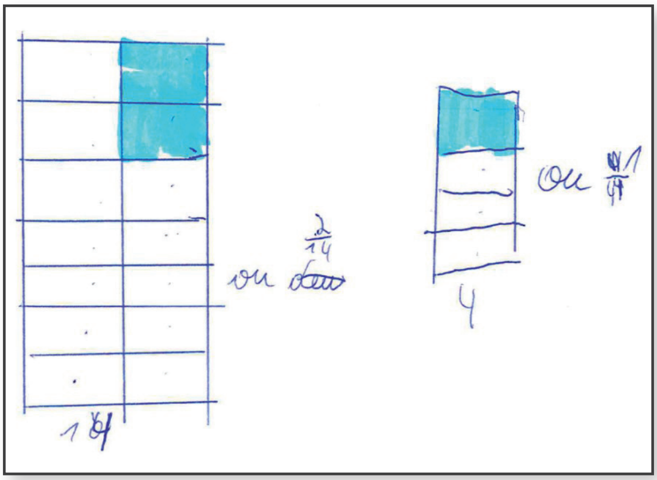
<table>
<tr>
<td>Le rectangle est partagé en 4 parts égales
3 parts sont grisées
$\frac{3}{4}$ du rectangle sont grisés
</td>
<td>Le rectangle est partagé en 8 parts égales
6 parts sont grisées
$\frac{6}{8}$ du rectangle sont grisés
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\frac{3}{4}$ → Numérateur = nombres de parts prélevées
→ Dénominateur = objet partagé en un certain nombre de parts égales</td>
</tr>
</table>

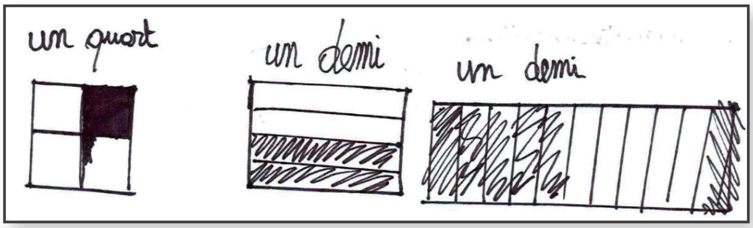
3. La fraction… à la main

Matériel	Un jeu de cartes pour deux (annexe 1) + feuille pour synthèse.
Consigne	Quelle fraction du rectangle représente la partie grisée ?
Jeu	Face à face, chacun à son tour, l'enfant abat les cartes une à une et l'autre écrit la fraction.
Synthèse	Individuelle et libre. Sur une feuille de papier l'enfant réalise sa synthèse (dessin, schéma, écriture…) de l'activité.

Exemples de synthèses libres d'élèves







On voit très bien que dans la dernière production, l'élève a utilisé (consciemment ou non) des fractions équivalentes : un demi = $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ *. C'est un constat intéressant qu'il convient d'exploiter en classe.*

4. La fraction… en lettres

Matériel	Par enfant un jeu (annexe 1, planches A et B) + un jeu (annexe 3).
Consigne	Il faut associer les cartes.
Jeu	Seul, l'enfant va lire la fraction en lettres (annexe 3) et l'associer à sa (ses) représentation(s) (annexe 1).
Synthèse	Confrontation des résultats par deux. Correction collective au tableau noir.

5. La fraction… en chiffres

Matériel	Par enfant un jeu (annexe 1, planches A et B) + un jeu (annexe 4).
Consigne	Il faut associer les cartes.
Jeu	Seul, l'enfant va lire la fraction en chiffres (annexe 4) et l'associer à sa (ses) représentation(s) (annexe 1).
Synthèse	Confrontation des résultats par deux. Correction collective au tableau noir.

Remarque : aux étapes 4 et 5, il est intéressant de faire constater par les élèves qu'il y a plusieurs façons différentes de représenter la même fraction. Pour « forcer » ce constat, la consigne pourrait préciser que ***toutes les cartes de l'annexe 1 doivent être utilisées****.*

6. Le choix de la bonne fraction

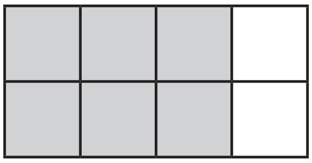
Matériel	Par enfant un jeu (annexe 1) + Pour le tableau noir (annexes 1, 3, 4 et 5) agrandies.
Consigne	Tu me montres la bonne carte !
Jeu	Le maitre du jeu lit, écrit ou montre une fraction (annexes 1 et 5), le joueur montre la bonne carte dans son jeu.
Synthèse	Confrontation des résultats par deux. Correction collective au tableau noir.

7. Défi… fraction

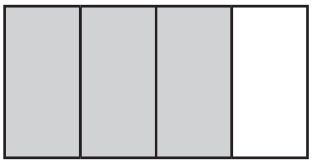
Matériel	Par enfant un jeu (annexe 1) + Pour le tableau noir (annexe 1) agrandie.
Consigne	Exemple : Donne-moi un quart ! Mais il ne peut pas y avoir de 1 (un) ni de 4 (quatre) !
Jeu	Le maitre du jeu donne le défi, le joueur montre la bonne carte dans son jeu.
Synthèse	Confrontation des résultats par deux. Correction collective au tableau noir.

Remarque : on se situe ici dans une ébauche de travail sur la fraction équivalente ou réduite.
La synthèse pourrait par exemple comprendre des éléments comme ci-dessous.

$\frac{6}{8}$ du rectangle sont grisés



$\frac{3}{4}$ du rectangle sont grisés



On voit bien que la même surface est grisée dans les 2 rectangles ➞ $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

8. Qui gagne ?

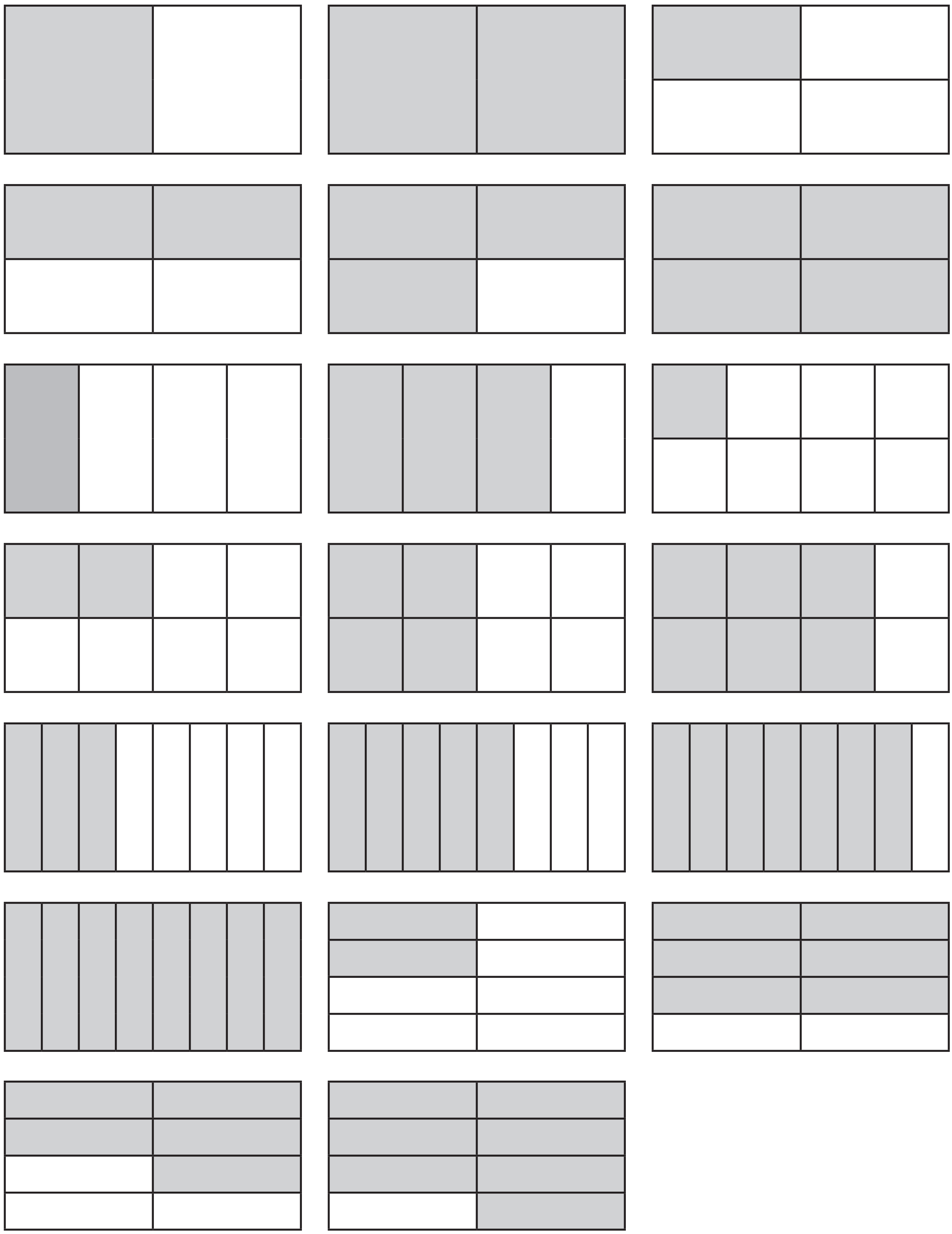
Matériel	Par enfant un jeu (annexe 1) + feuille
Consigne	Bataille parlée… celui qui a le plus gagne !
Jeu	Chaque joueur tire une carte de son jeu. Sans montrer sa carte, il nomme la fraction représentée de celle-ci. L'élève qui a la fraction la plus proche de l'unité gagne. Les élèves vérifient en comparant leur carte. Si deux cartes d'une même valeur sont retournées … il y a bataille ! Le jeu se termine dès qu'un joueur n'a plus de carte.
Synthèse	Confrontation des résultats par deux.

Remarque : cette étape étant complexe pour les élèves, le guidage de l'enseignant sera vraisemblablement nécessaire.

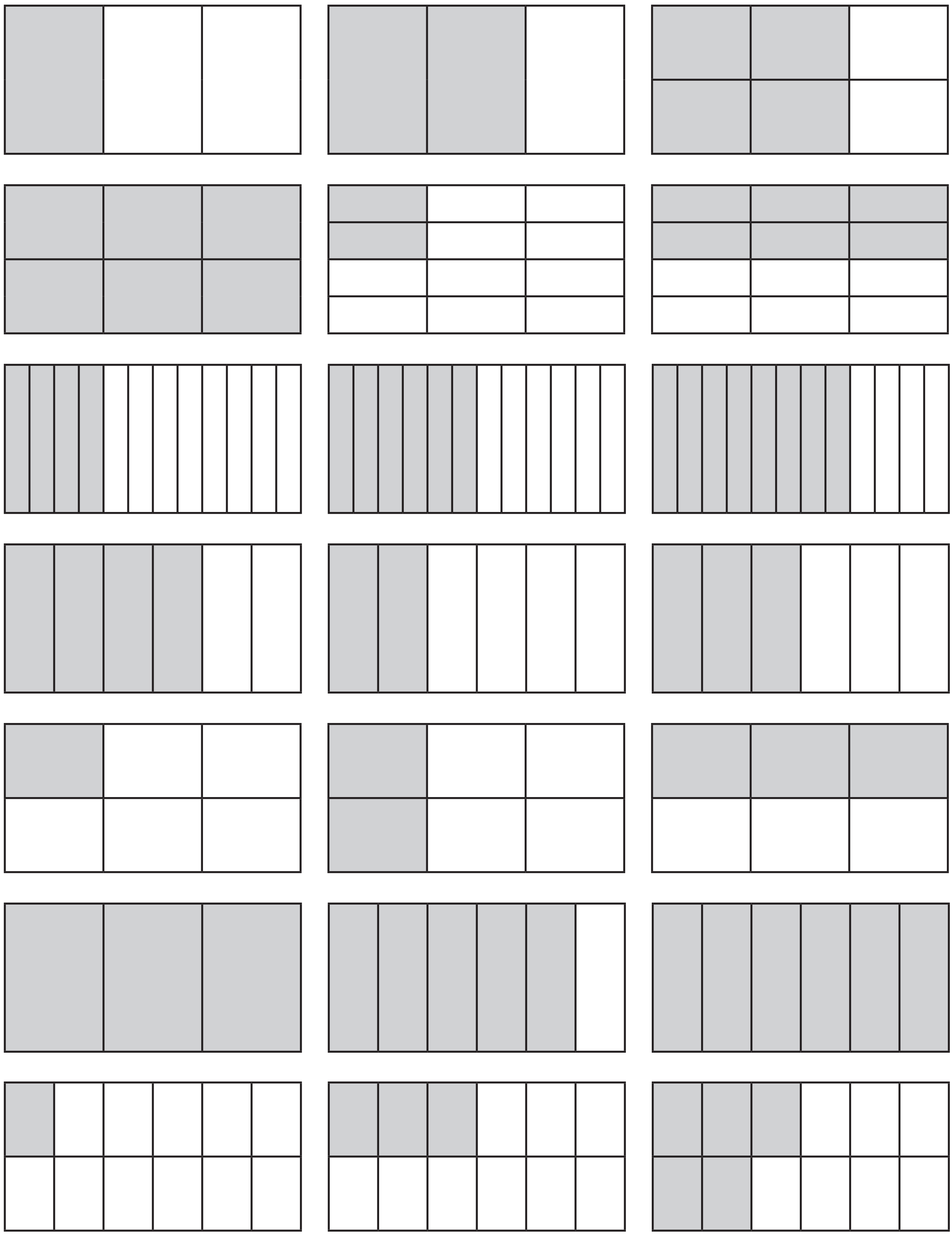
9. Fractions équivalentes

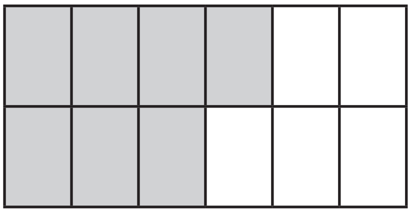
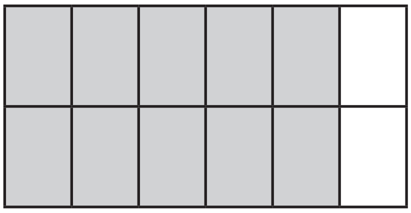
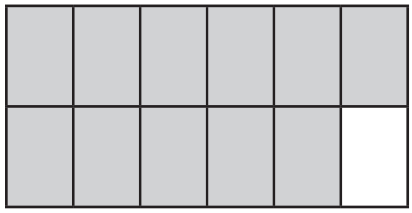
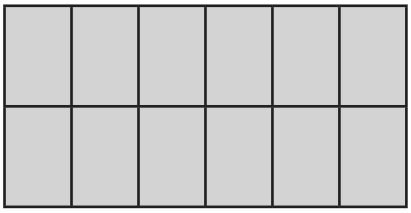
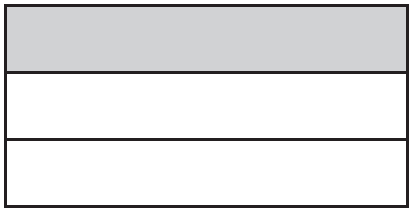
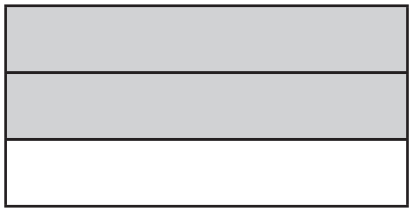
Matériel	Par enfant un jeu (annexe 1, planches A et B) + un jeu (annexe 4) + feuille.
Consigne	Sélectionne toutes les cartes qui ont la même surface grisée.
Jeu	Seul, l'enfant va associer des cartes (annexes 1 et 4) qui vont ensemble en respectant la consigne.
Synthèse	Confrontation des résultats par deux. Correction collective au tableau noir.

Annexe 1 « Rectangles grisés » planche A

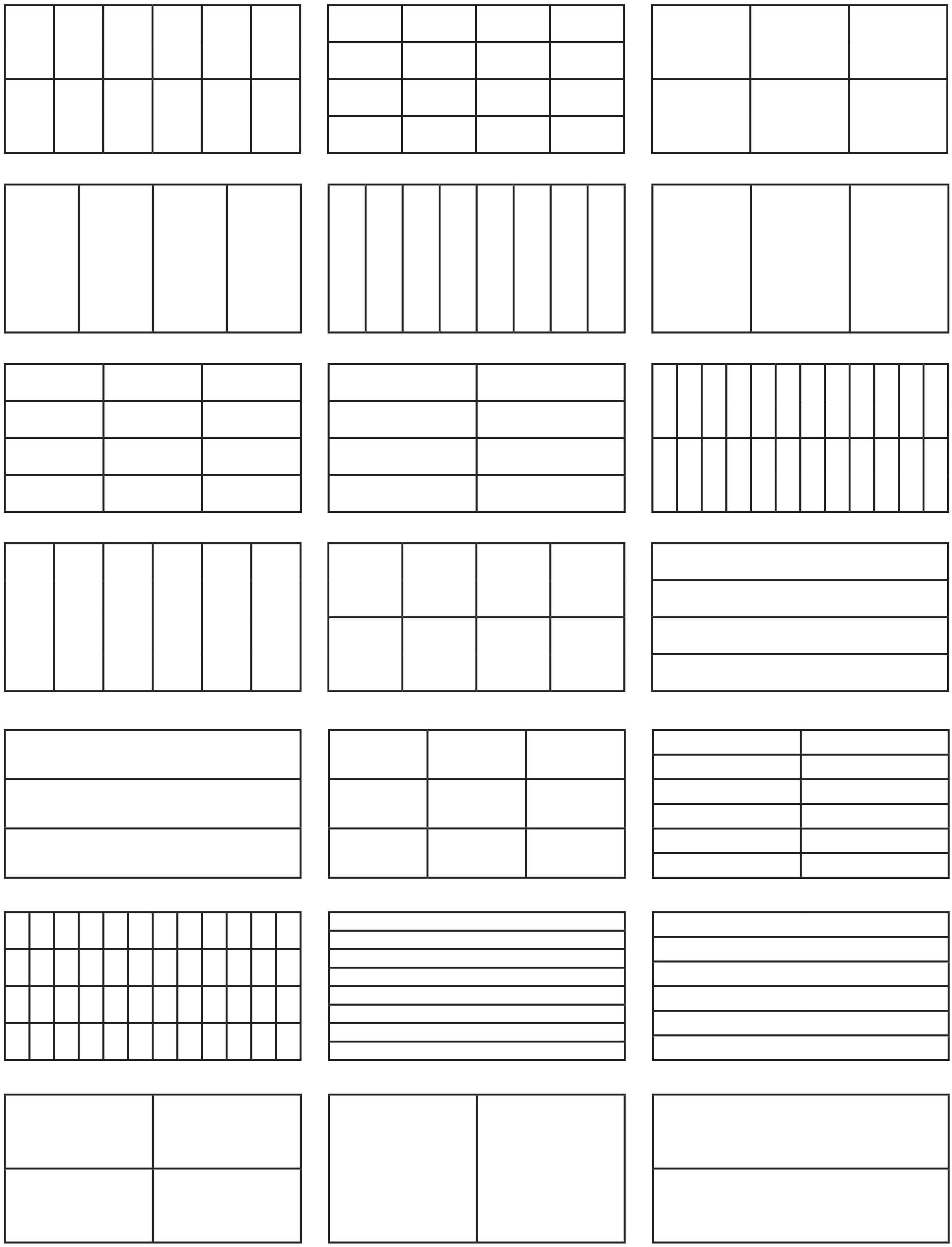


Annexe 1 « Rectangles grisés » planche B



Annexe 2 « Rectangles vierges »



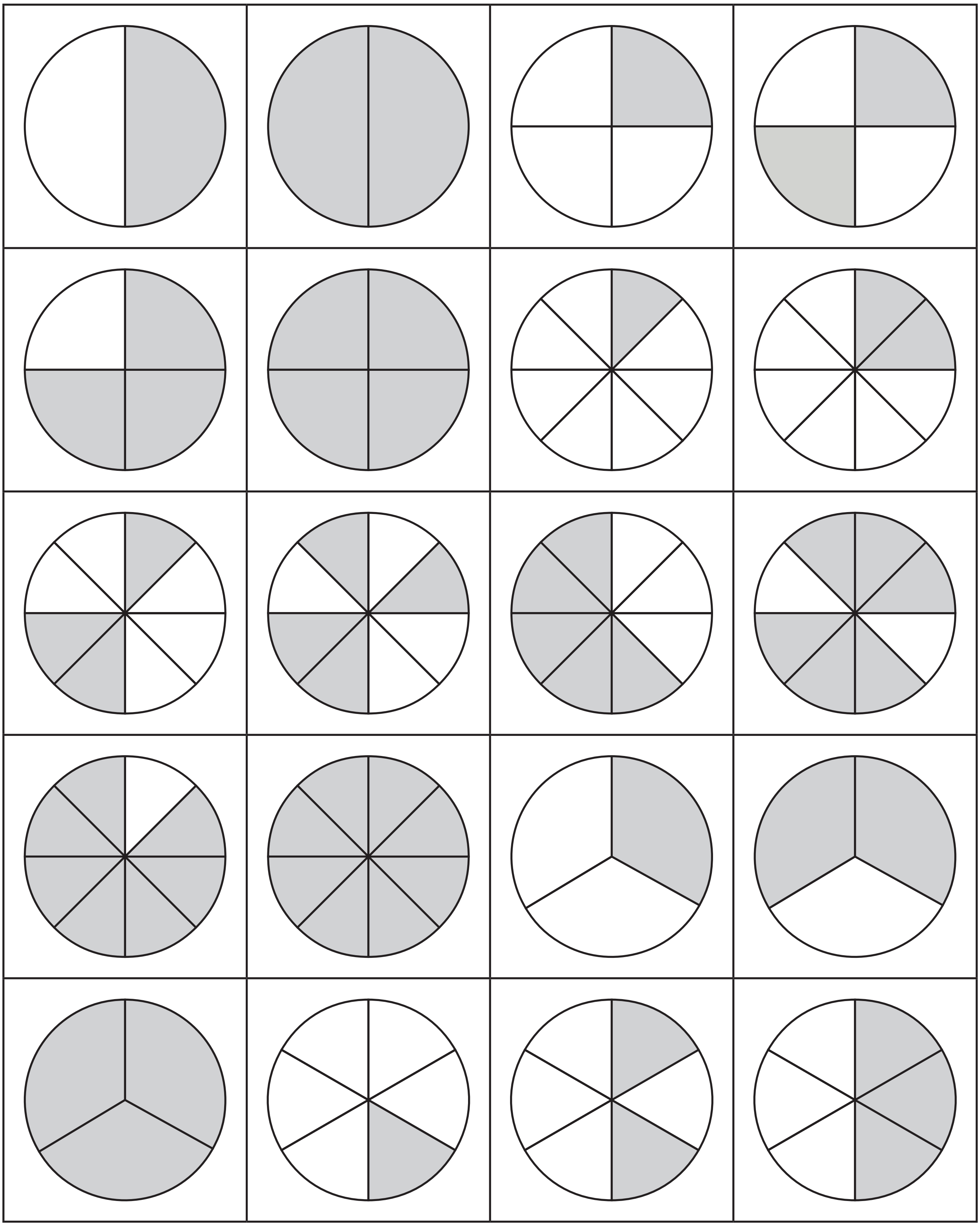
Annexe 3 « Les fractions en lettres »

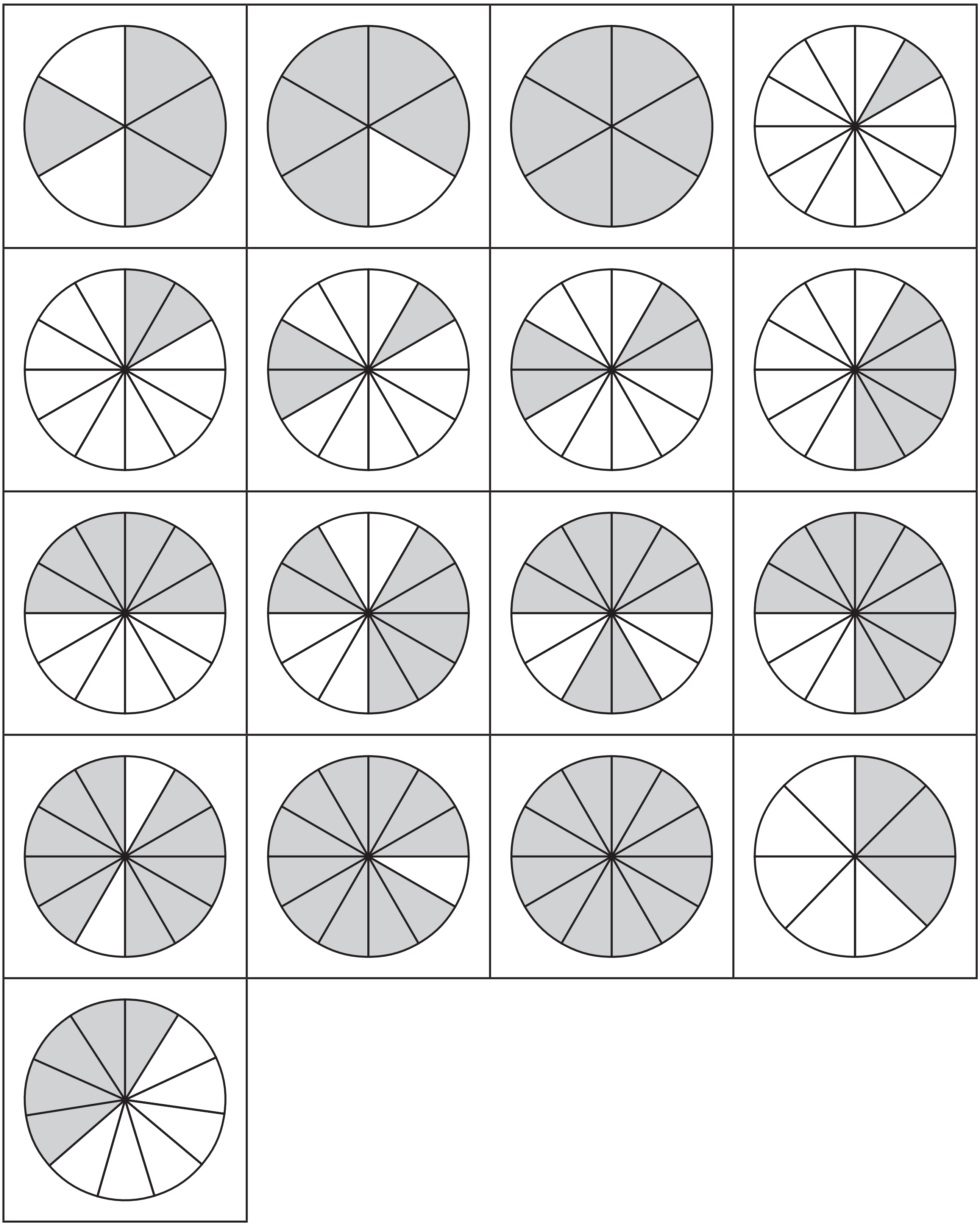
Un demi	Quatre sixièmes	Deux douzièmes
Deux demis	Cinq sixièmes	Trois douzièmes
Un tiers	Six sixièmes	Quatre douzièmes
Deux tiers	Un huitième	Cinq douzièmes
Trois tiers	Deux huitièmes	Six douzièmes
Un quart	Trois huitièmes	Sept douzièmes
Deux quarts	Quatre huitièmes	Huit douzièmes
Trois quarts	Cinq huitièmes	Neuf douzièmes
Quatre quarts	Six huitièmes	Dix douzièmes
Un sixième	Sept huitièmes	Onze douzièmes
Deux sixièmes	Huit huitièmes	Douze douzièmes
Trois sixièmes	Un douzième	

Annexe 4 « Les fractions en chiffres »

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{8}{12}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{9}{12}$
$\frac{4}{4}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{10}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{12}{12}$
$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{12}$	

Annexe 5





2.3.2 | ACTIVITÉ 5 : PUZZLE DE FRACTIONS[13]

L'activité comprend trois étapes principales.

Étapes	Déroulement
1. Construction du puzzle	Par duo, les élèves reconstituent le puzzle (fiche 1 ou 2[14]).
2. Recherche de la valeur des pièces lorsque le puzzle vaut 1 unité	Par duo, les élèves déterminent la valeur des pièces du puzzle en fonction du puzzle qui représente l'unité. *Des mises en commun régulières quant à la valeur des pièces permettront d'assurer le bon déroulement de l'activité.*
3. Vérification que la somme de chaque pièce correspond à l'unité	Par duo, les élèves vérifient que la somme des valeurs trouvées pour chaque pièce à l'étape précédente est effectivement égale à l'unité.

La séquence d'activités permet différentes exploitations, notamment :

- les opérations sur les fractions :
  - addition de fractions (ex. $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$),
  - multiplication d'une fraction par un nombre entier (ex. $2 \times \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$),
  - division d'une fraction par un nombre entier (ex. $\frac{1}{8}$ divisé par 2 est égal à $\frac{1}{16}$ ou la moitié de $\frac{1}{8}$ est égale à $\frac{1}{16}$, ce qui peut aussi s'écrire $\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$),
  - (éventuellement) la soustraction de fractions (ex. $\frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$),
- la réduction de fractions ou les fractions équivalentes (ex. $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$) ;
- la mise au même dénominateur (ex. dans le 2e puzzle $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$) ;
- la variation de l'unité (ex. dans le 2e puzzle, la pièce « d » représente $\frac{1}{4}$ du puzzle ; la pièce « h » représente $\frac{1}{4}$ de la pièce « d » ; la pièce « h » représente $\frac{1}{16}$ du puzzle, elle représente le double de la pièce « e »...) ;

[13] Cette activité est adaptée de I. DEMONTY et al, *L'enseignement de l'abstraction entre 10 et 14 ans. Un outil au service des cours de mathématiques*, 2015, Rapport de recherche disponible sur demande à l'adresse https://orbi.uliege.be/handle/2268/188488. Elle s'inspire de l'activité développée par DE TERWANGNE, HAUCHART et LUCAS présentée dans l'ouvrage « *Oser les fractions dans tous les sens* », De Boeck, 2007.

[14] Deux puzzles de complexité différente sont proposés.

- la manipulation des pièces pour mettre en relation différentes fractions ;
- le fait que deux figures de formes différentes peuvent représenter la même fraction ;
- le sens du signe d'égalité vu comme l'amorce d'un résultat (ex. $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$), mais aussi comme exprimant l'équivalence entre deux expressions ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{6} + \frac{3}{12}$).

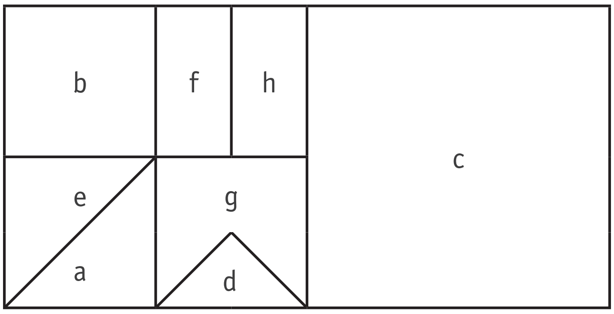
Étape 1 : Reconstitution du puzzle

Le lien avec le support concret permet de donner du sens à ces différentes expressions. Tout au long de l'activité, la manipulation des pièces est importante. Elle permet de mettre directement les pièces du puzzle en relation les unes avec les autres (par assemblage, superposition, comparaison...). Les pièces doivent donc être disposées dans le cadre sans être collées. Elles ne le seront qu'à la fin de l'activité. Il existe plusieurs façons différentes de reconstituer le puzzle.

Étape 2 : Recherche de la valeur des pièces, sachant que le puzzle est l'unité

Le guidage de l'enseignant est primordial. Lors de la recherche de la valeur des pièces, il pourrait suggérer de commencer par certaines pièces pour lesquelles la tâche sera plus simple (par exemple, pour le puzzle 1, la pièce « c » s'appelle $\frac{1}{2}$ car elle va exactement deux fois dans l'unité). Pour faciliter les mises en commun, l'ordre des pièces à déterminer peut être imposé.

Il convient de laisser les élèves chercher par tâtonnement, plutôt que de les confronter d'emblée à des opérations sur les fractions qui pourraient s'avérer hors de leur portée. Par exemple, la pièce « h » va deux fois dans la pièce « b », la pièce « b » va quatre fois dans la pièce « c », la pièce « c » va deux fois dans l'unité. La pièce « h » s'appelle $\frac{1}{16}$ car elle va 16 fois dans l'unité. Plutôt que de demander d'emblée aux élèves d'effectuer $\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$.



Progressivement, on conduira les élèves vers une écriture mathématique des différentes expressions. Par exemple, une fois que la pièce « c » est trouvée, l'enseignant peut proposer de chercher la valeur de la pièce « b » en la mettant en relation avec la pièce « c ». Cette démarche conduit au calcul $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$, ce qui peut s'écrire $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Ensuite, les élèves déterminent la valeur de la pièce « f » en la mettant en relation

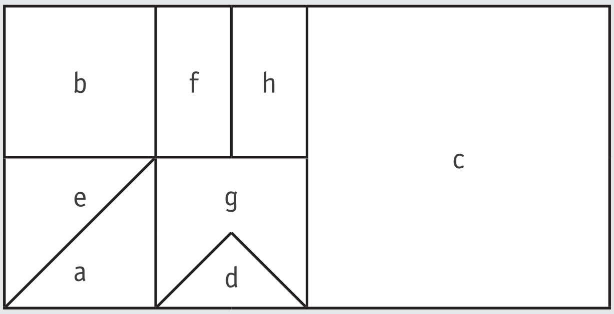
- soit avec la pièce « b » : $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{8}$ autrement dit, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$;
- soit avec la pièce « c » : $\frac{1}{8}$ de $\frac{1}{2}$ autrement dit, $\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

On profitera de l'occasion pour insister auprès des élèves (en leur démontrant avec les pièces du puzzle) que dans le cas d'une multiplication de fractions, on peut multiplier entre eux les numérateurs et les dénominateurs. Mais ce n'est pas le cas quand il s'agit d'additionner (ou de soustraire) des fractions. Si on recherche la valeur de la pièce « b » plus la pièce « f »,

$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \neq \frac{2}{24}$ Il s'agit là d'une erreur courante.

Exemples de démarches pour la recherche des pièces « d » et « g »

(sans doute le plus complexe pour les élèves)



Certains élèves remarquent que la pièce « d » équivaut à la moitié de la pièce « e » (qui vaut $\frac{1}{16}$) en la reportant deux fois dans celle-ci. Ensuite, ils remarquent que la pièce « d » entre trois fois dans la pièce « g ».

E1 : *La pièce « d » on peut la mettre peut-être dans la pièce « e ».*
E2 : *Tu veux faire comment ?*
E1 : *Ben, regarde, si tu la mets comme ça et après comme ça.*
E2 : *Ah oui, bien vu ! Donc ça veut dire que la pièce « d » c'est la pièce « e » divisée en 2… Donc* $\frac{1}{32}$.
E1 : *Oui, mais après, je ne sais pas parce que la « g », on ne sait pas la mettre dans la « b ».*
E2 : *Ou alors coupée en deux ?*
E1 : *Sauf si on met la « d » dans la « g »…*
E2 : *Ben oui, on peut la mettre… 3 fois. Donc 3 × 32, ça fait…*
E1 : *Mais non, c'est* $\frac{3}{32}$.

En revanche, certains élèves parviennent à trouver la valeur de la pièce « d », mais ils se trompent dans la suite des calculs à effectuer pour obtenir la pièce « g ».

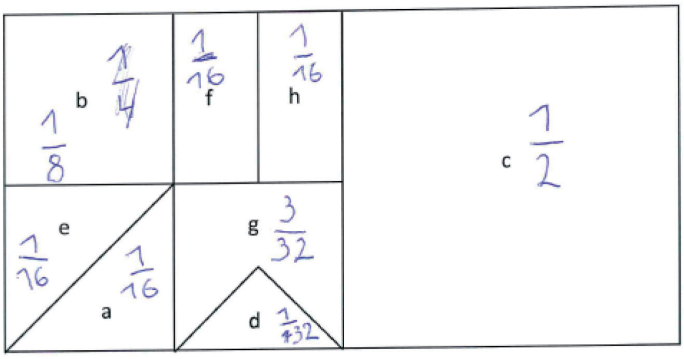
E1 : *Ce qu'on peut faire, c'est la « b » moins la « d » pour avoir la « g ».*
E2 : *Euh, non.*
E1 : *Ben oui, regarde, si on les met ensemble, ça donne la « b ».*
E2 : *Donc ça fait* $\frac{1}{8} - \frac{1}{32}$ *= … euh… non* $\frac{1}{32} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$.

Les élèves inversent les deux termes de la soustraction et ils soustraient les dénominateurs entre eux. Pour aider les élèves, on peut reproduire, avec les pièces, le raisonnement qu'ils appliquent. La pièce « d » est plus petite que la « b ». Pourtant, leur calcul (celui avant inversion) indique qu'ils voudraient retirer la pièce « b » de la pièce « d ». En manipulant les pièces, ils se rendront compte que leur raisonnement n'est pas correct.

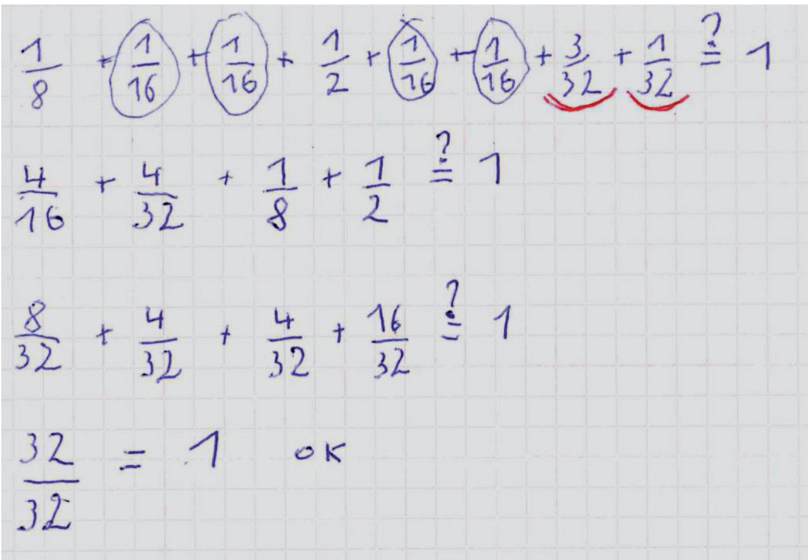
On peut aussi expliquer (ou rappeler) la règle pour soustraire deux fractions entre elles.

Une autre erreur courante des élèves est de considérer que la pièce « b » vaut $\frac{1}{4}$ car ils la comparent à la pièce « c » plutôt qu'au puzzle complet.

Étape 3 : Vérifier que la somme de toutes les pièces correspond à l'unité



L'élève regroupe les fractions qui possèdent le même dénominateur pour pouvoir les additionner. Ceci étant fait, il met toutes les fractions restantes au même dénominateur pour pouvoir à nouveau les additionner et obtenir $\frac{32}{32}$ qui équivaut bien à l'unité.



Prolongement ou dépassement : le puzzle 2

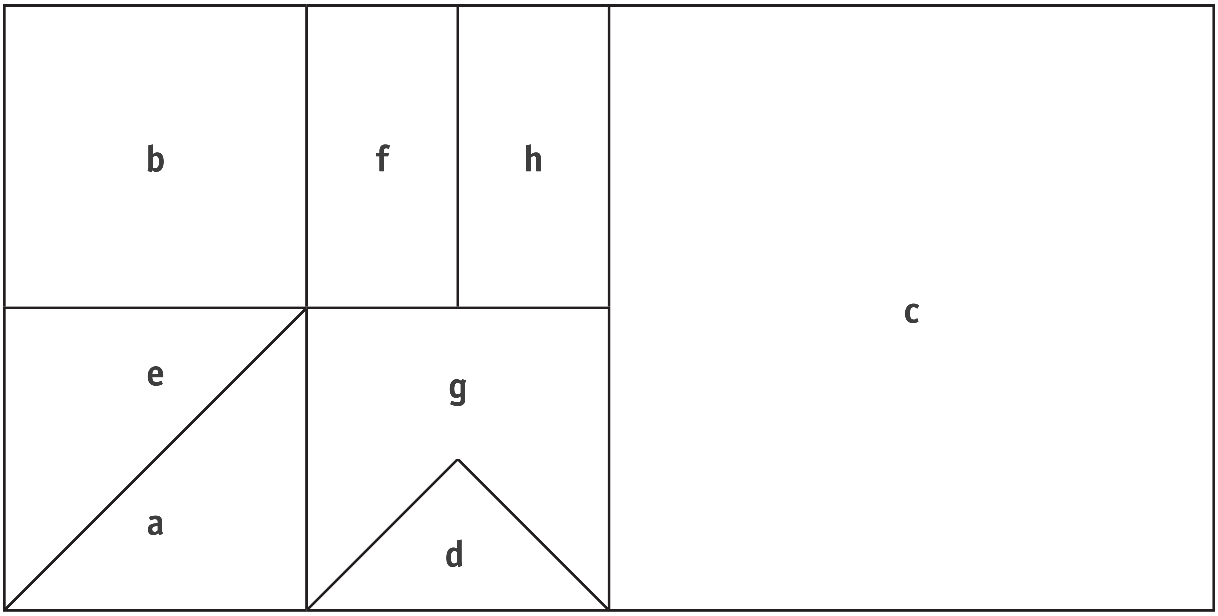
L'activité avec le 2e puzzle est nettement plus complexe, car elle fait intervenir des fractions plus nombreuses et de deux familles :

- la famille des $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$;
- et celle des $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$.

Le lecteur intéressé trouvera d'autres activités du même type, avec des puzzles plus nombreux, de difficulté graduelle, dans l'ouvrage de De Terwangne, Hauchart et Lucas (2007), *Oser les fractions dans tous les sens* aux éditions De Boeck (p. 65 à 83).

Fiche 1

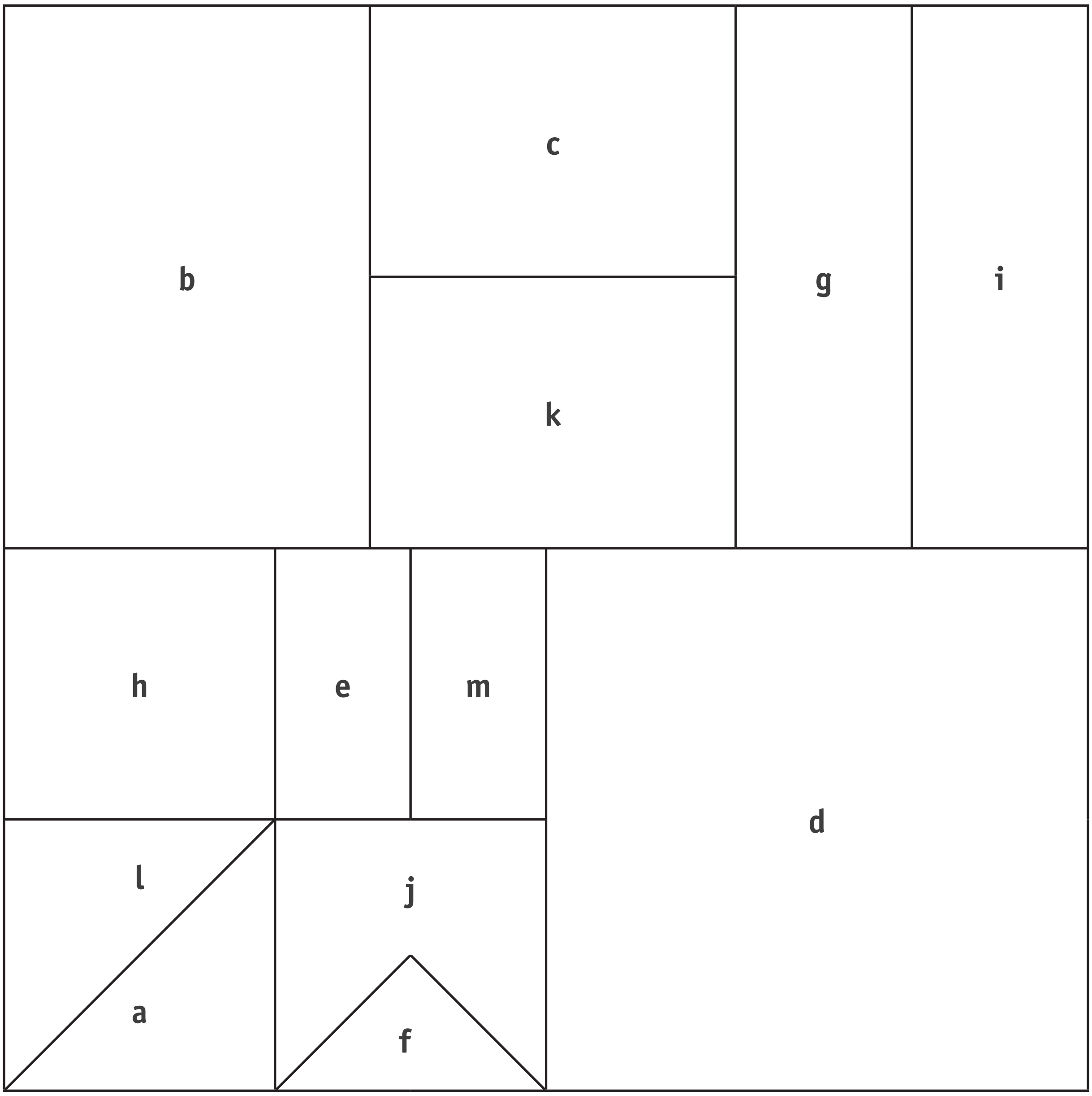
Le puzzle 1 à découper



Le cadre pour disposer les pièces

Fiche 2

Le puzzle 2 à découper



Le cadre pour disposer les pièces

Au garage Fraticar

Ce jeu implique des fractionnements d'une collection d'objets (d'un nombre).

Il peut être utilisé :

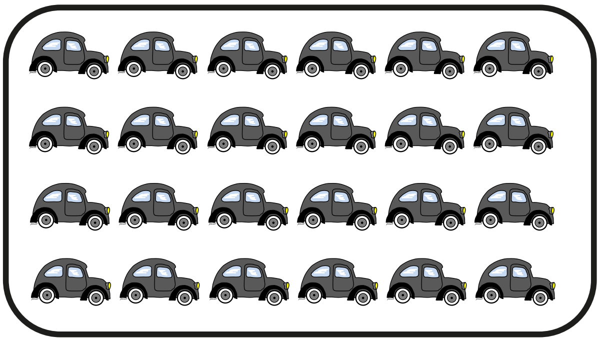
- de manière autonome par un élève en activité différenciée ;
- en groupe-classe pour mener une réflexion.

L'élève reçoit la planche plastifiée du stock de voitures (fiche 1).

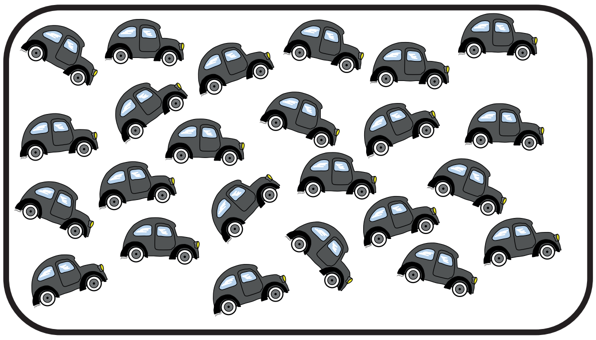
Face A : collection organisée

Face B : collection désorganisée

Face A



Face B



Les élèves peuvent travailler avec un marqueur tableau blanc ou tout autre matériel comme des pastilles.

Étape 1

L'élève prend une carte et y répond.

Côté blanc : consigne

Côté grisé : solution

Coller les cartes

Il vend $\frac{1}{2}$ du nombre de voitures	Il a vendu **12** voitures

Remarque

Il est intéressant de faire jouer les élèves avec ***les deux faces de la planche*** *(collection organisée et désorganisée) et de leur faire expliquer leurs démarches. Par exemple, avec la face A, il est beaucoup plus facile de repérer visuellement la moitié ou le quart du nombre de voitures en utilisant l'alignement. Avec la face B, les élèves doivent davantage travailler sur les nombres.*

On peut évidemment faire jouer les élèves dans l'autre sens : ils examinent d'abord la face grisée (le nombre de voitures) et recherchent la fraction correspondante.

Réalisé de cette façon, le jeu doit être considéré comme une activité de synthèse ou de consolidation qui doit donc intervenir au terme d'une séquence d'enseignement-apprentissage.

Étape 2

Avec le même matériel, il est possible de mener un travail qui soit davantage centré sur la recherche et la compréhension des fractions équivalentes ou réduites. Dans ce cas, il est important de prévoir des phases régulières de mise en commun de façon à pouvoir confronter, guider, réguler les réflexions individuelles des élèves.

Les élèves regroupent toutes les cartes qui aboutissent au même nombre de voitures vendues. En duo, ils examinent les fractions correspondantes au sein de chaque regroupement. Ils sont alors invités à prendre note librement de ce qu'ils remarquent.

Exemple

12 voitures vendues, c'est $\frac{1}{2}$ des 24 voitures

$\frac{2}{4}$ des 24 voitures

$\frac{3}{6}$ des 24 voitures

L'intérêt principal de cette étape de l'activité se situe dans la confrontation des constats des élèves lors de la mise en commun. Il est peu probable que les constats libres des élèves aillent au-delà de l'exemple présenté ci-dessus. L'enjeu est alors de faire apparaitre l'équivalence des différentes fractions.

Étape 3

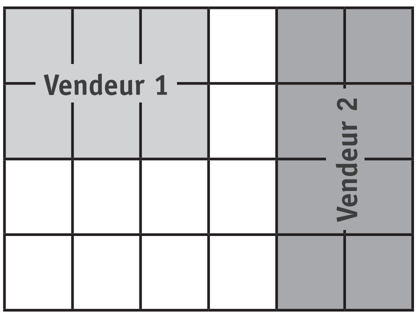
L'activité peut être prolongée en proposant aux élèves de petites situations qui les conduiront à opérer sur les fractions.

Exemple

La semaine dernière, le premier vendeur a vendu $\frac{1}{4}$ des voitures et le deuxième vendeur en a vendu $\frac{1}{3}$.

Quelle fraction du stock ont-ils vendue ensemble ?

Pour mener à bien ce genre de tâche, il est primordial que les élèves recourent au support.



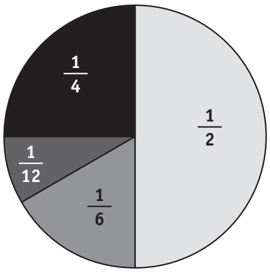
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{6}{24} + \frac{8}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

Concernant le résultat final, on peut faire remarquer aux élèves que s'il est possible de diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre alors on peut réduire la fraction.

Les deux questions de la page suivante montrent bien la différence d'exigence à la fin du primaire (où l'on travaille sur les fractions dans le domaine des grandeurs) et au début du secondaire (où l'on travaille sur les fractions dans le domaine des nombres).

Si dans l'enseignement secondaire, les élèves doivent avoir acquis les techniques qui leur permettent d'opérer sur les fractions dans le domaine des nombres, et donc sans l'aide de supports visuels, en primaire, les élèves doivent pouvoir s'appuyer sur des supports qui leur permettent de donner du sens aux démarches pour additionner ou soustraire deux grandeurs fractionnées (par exemple), comme l'illustre très bien la question ci-dessous, issue du **CEB 2014.**

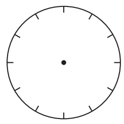
QUESTION 14



EFFECTUE.

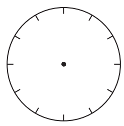
$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} =$

Zone de travail.



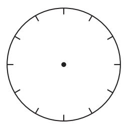
$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$

Zone de travail.



$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$

Zone de travail.



/3

CE1D 2010

Question 19

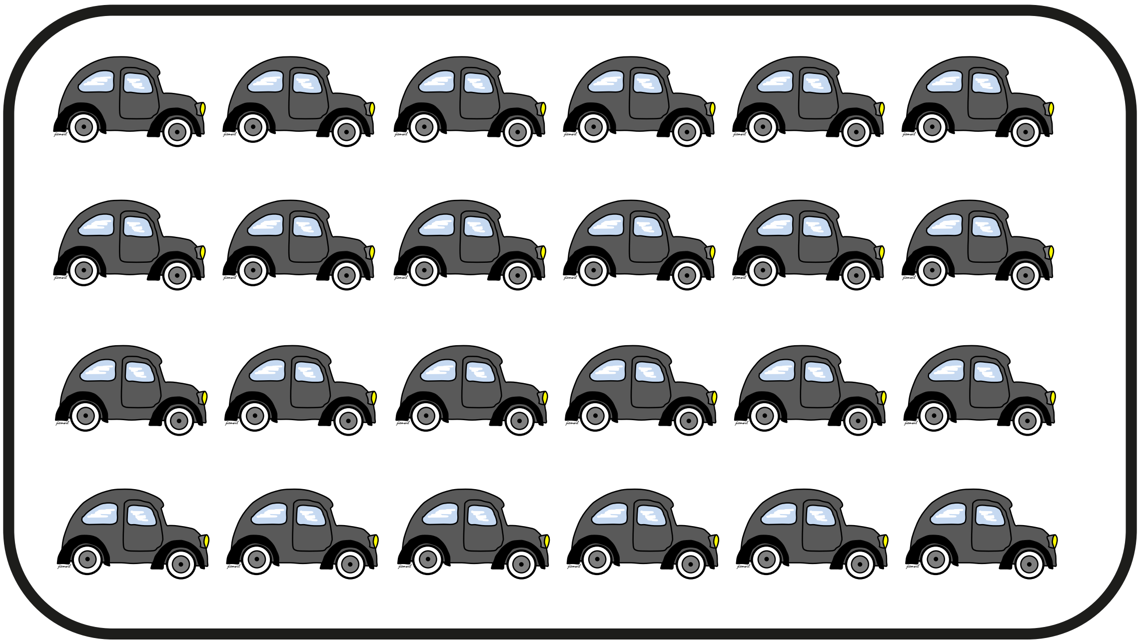
CALCULE en écrivant toutes les étapes et donne ta réponse sous forme irréductible.

$-\frac{1}{2}+\frac{3}{7}=$ ....

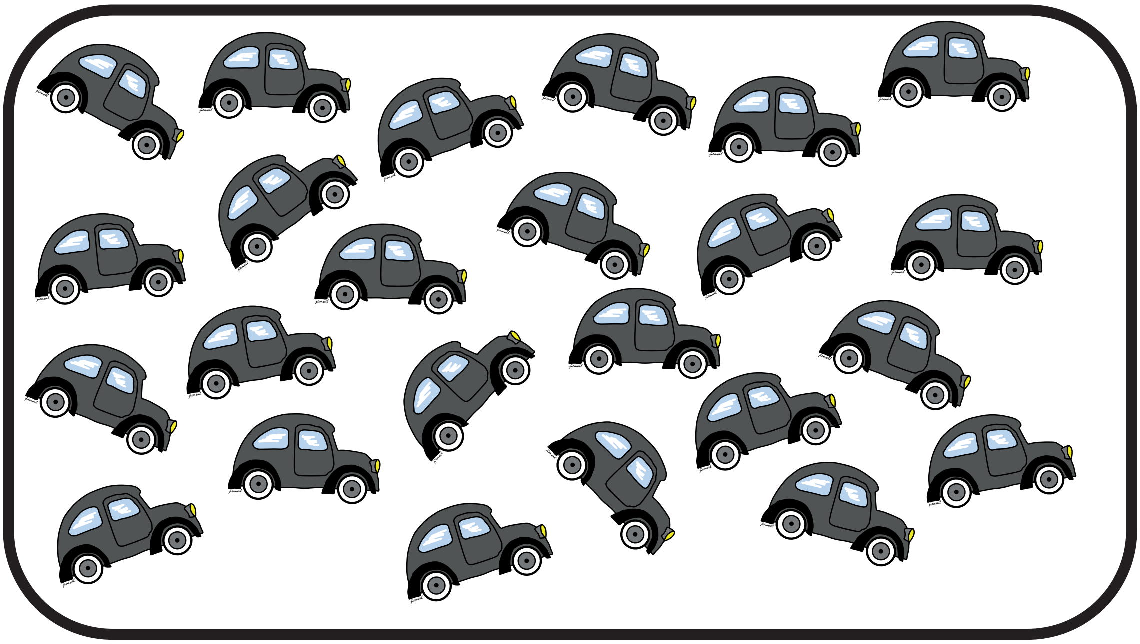
....

Fiche 1

Au garage **FRATICAR**, le concessionnaire organise une vente de voitures.



Au garage **FRATICAR**, le concessionnaire organise une vente de voitures.



Fiche 2

Il vend $\frac{1}{2}$ du nombre de voitures	Il a vendu **12** voitures
Il vend $\frac{1}{4}$ du nombre de voitures	Il a vendu **6** voitures
Il vend $\frac{1}{8}$ du nombre de voitures	Il a vendu **3** voitures
Il vend $\frac{1}{3}$ du nombre de voitures	Il a vendu **8** voitures
Il vend $\frac{1}{6}$ du nombre de voitures	Il a vendu **4** voitures
Il vend $\frac{1}{12}$ du nombre de voitures	Il a vendu **2** voitures
Il vend $\frac{1}{24}$ du nombre de voitures	Il a vendu **1** voiture
Il vend $\frac{1}{1}$ du nombre de voitures	Il a vendu **24** voitures

Il vend $\frac{2}{2}$ du nombre de voitures	Il a vendu **24** voitures
Il vend $\frac{2}{4}$ du nombre de voitures	Il a vendu **12** voitures
Il vend $\frac{2}{8}$ du nombre de voitures	Il a vendu **6** voitures
Il vend $\frac{2}{3}$ du nombre de voitures	Il a vendu **16** voitures
Il vend $\frac{2}{6}$ du nombre de voitures	Il a vendu **8** voitures
Il vend $\frac{2}{12}$ du nombre de voitures	Il a vendu **4** voitures
Il vend $\frac{2}{24}$ du nombre de voitures	Il a vendu **2** voitures
Il vend $\frac{2}{2}$ du nombre de voitures	Il a vendu **24** voitures

Il vend $\frac{1}{16}$ du nombre de voitures	**Opération impossible**
Il vend $\frac{3}{4}$ du nombre de voitures	Il a vendu **18** voitures
Il vend $\frac{3}{8}$ du nombre de voitures	Il a vendu **9** voitures
Il vend $\frac{3}{3}$ du nombre de voitures	Il a vendu **24** voitures
Il vend $\frac{3}{6}$ du nombre de voitures	Il a vendu **12** voitures
Il vend $\frac{3}{12}$ du nombre de voitures	Il a vendu **6** voitures
Il vend $\frac{3}{24}$ du nombre de voitures	Il a vendu **3** voitures
Il vend $\frac{3}{2}$ du nombre de voitures	**Opération impossible**

3 DOMAINE DES GRANDEURS : RÉSOUDRE DES PROBLÈMES SIMPLES DE PROPORTIONNALITÉ DIRECTE

> *La capacité de raisonner en utilisant des relations proportionnelles résulte d'un processus complexe qui est long à assimiler. De nombreuses expériences concrètes variées sont nécessaires pour comprendre la nature d'une relation proportionnelle et il faut plus de temps encore pour acquérir la capacité de faire des applications abstraites*
>
> *(Erickson, Cordel et Mason, 2000).*

3.1 | LES CONSTATS ISSUS DE L'ÉPREUVE

Le résultat moyen pour les 12 items visant la compétence *Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe* est de 51 %.

Les trois items ci-dessous ont mis de nombreux élèves en difficulté (43 %, 64 % et 33 %). Plus de 6 élèves sur 10 ont bien compris qu'avec deux fois moins d'allumettes, le train sera deux fois moins long, mais ils ne sont que 44 % à avoir repéré qu'un train de 32 allumettes aura la même longueur que le train de 12 allumettes + le train de 20 allumettes.

Un tiers des élèves seulement a pu indiquer que pour le train de 240 cm, on utilisera trois fois plus d'allumettes que pour celui de 80 cm. Cet item est considéré comme trop difficile par 40 % des enseignants.

Avec 12 allumettes, le train a une longueur de 48 cm.
Avec 20 allumettes, le train a une longueur de 80 cm.

a) Avec 32 allumettes, le train aurait une longueur de _______ cm.

b) Avec 6 allumettes, le train aurait une longueur de _______ cm.

c) Son frère a construit un train de 240 cm.

Combien a-t-il utilisé d'allumettes ? _______

Seuls 49 % des élèves ont répondu correctement à l'item ci-dessous. Manifestement, rares sont les élèves qui ont perçu la relation particulière entre les deux séries de grandeurs × 3.

Julie réalise des cookies pour les élèves de sa classe.
Elle a adapté une recette de 10 cookies.

ÉCRIS combien de cookies sont réalisés. _______

Pour 10 cookies	Pour ? cookies
150 g de farine	450 g de farine
1/2 cuillère à café de sel	1 et 1/2 cuillère à café de sel
50 g de sucre	150 g de sucre
50 g de beurre	150 g de beurre
100 g de pépites de chocolat	300 g de pépites de chocolat
1 cuillère à café de levure	3 cuillères à café de levure
2 sachets de sucre vanillé	6 sachets de sucre vanillé
1 œuf	3 œufs

3.2 | INTENTIONS ET COMMENTAIRES

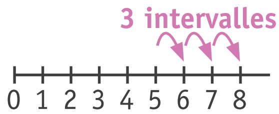
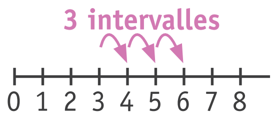
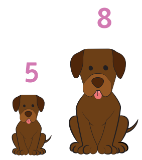
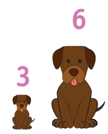
« *Le simple apprentissage mécanique de la règle de trois et de toutes les règles qui en découlent n'est pas suffisant pour donner une véritable connaissance de la proportionnalité, c'est-à-dire une bonne représentation du concept sous-jacent à tous les problèmes, toutes les méthodes de résolution et toutes les propriétés mathématiques qui composent cet apprentissage particulier que l'on désigne désormais sous le terme de proportionnalité* » (Boisnard et al, 1994).

Dès le début de ses apprentissages mathématiques, l'élève utilise le raisonnement proportionnel, par exemple, quand il constate que 10 équivaut à 5 × 2 ou 2 × 5 et pas seulement à « 1 de plus que 9 ». Fondamentalement, le raisonnement proportionnel consiste à considérer les nombres selon leur valeur relative et non selon leur valeur absolue. L'élève applique un raisonnement proportionnel s'il réussit à établir qu'une grandeur qui passe de 3 à 9 subit une augmentation relative plus importante qu'une autre qui passe de 100 à 150. Dans le premier cas, la grandeur a triplé, dans le deuxième cas, elle n'a même pas doublé.

Pour de jeunes élèves, il est difficile de passer d'un raisonnement additif à un raisonnement multiplicatif, d'où l'importance de débuter le plus tôt possible avec des activités adaptées au jeune âge des élèves.

L'exemple[15] présenté ci-dessous illustre particulièrement bien le passage du raisonnement basé sur des valeurs absolues au raisonnement basé sur des valeurs relatives.

Examinons le problème suivant : si le poids d'un chien passe de 5 kg à 8 kg et que celui d'un autre chien passe de 3 kg à 6 kg, quel est le chien qui a le plus engraissé ?

Représentation du raisonnement basé sur des valeurs absolues.	**Représentation du raisonnement basé sur des valeurs relatives.**
Le premier chien a pris 3 kg et le deuxième aussi. Ils ont pris autant de poids l'un que l'autre. **1er chien**  **2e chien** 	Le deuxième chien a engraissé davantage puisqu'il a doublé son poids, tandis que le premier aurait dû atteindre 10 kg pour un gain de poids relativement équivalent. **1er chien**  A moins que doublé son poids **2e chien**  A doublé son poids

Selon Geron, Stegen & Daro[16] (2010), l'enseignement de la proportionnalité a beaucoup évolué depuis une vingtaine d'années : on est passé d'une centration sur les techniques de calcul (règle de trois) à une centration sur

- l'idée d'une relation particulière entre deux grandeurs ;
- l'éclairage apporté par ce concept sur les structures des problèmes ;
- **l'importance à apporter à la résolution de problèmes** (et non à l'application directe d'une technique).

[15] Qu'est-ce que le raisonnement proportionnel ? Document d'appui pour mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques. Ontario, 2012.

[16] Les définitions et exemples qui suivent sont largement inspirés de C. GÉRON, P. STEGEN, S. DARO, *Liaison primaire-secondaire. L'enseignement de la proportionnalité*, 2010, Disponible sur enseignement.be ou à l'adresse *http://www.hypothese.be/upload/files/proportionnalites.pdf*.

Qu'est-ce que la proportionnalité ?

Il s'agit d'une relation particulière entre deux grandeurs (ou plutôt leurs mesures) ou entre deux suites de nombres. Ces deux suites de nombres doivent être multiples l'une de l'autre de telle sorte que toute combinaison linéaire de valeurs de l'une corresponde à la même combinaison linéaire de valeurs de l'autre.

Illustration

: 2

Masse du beurre en g	1000	500	250	750
Prix du beurre en €	9	4,50	2,25	6,75

: 2

Le prix d'un demi-kilo de beurre correspond à la moitié du prix d'un kilo de beurre.

Pour trouver le prix de 750 grammes de beurre, il y a 3 possibilités.

- On peut multiplier le prix d'un kilo de beurre par $\frac{3}{4}$ puisque 750 g = $\frac{3}{4}$ de 1000 g.

$\times \frac{3}{4}$

Masse du beurre en g	1000	500	250	750
Prix du beurre en €	9	4,50	2,25	6,75

$\times \frac{3}{4}$

- On peut additionner les prix de 500 g et 250 g de beurre puisque 750 g = 500 g + 250 g.

500 + 250 = 750

Masse du beurre en g	1000	500	250	750
Prix du beurre en €	9	4,50	2,25	6,75

4,50 + 2,25 = 6,75

- On peut multiplier le prix de 250 g de beurre par 3 puisque 750 g = 250 g × 3.

× 3

Masse du beurre en g	1000	500	250	750
Prix du beurre en €	9	4,50	2,25	6,75

× 3

Différents processus de résolution s'offrent aux élèves

Selon les situations proposées, les élèves peuvent utiliser le **rapport interne**, le **rapport externe**, les propriétés de linéarité (**rapport additif**) et la **règle de trois**. Il est important que les élèves rencontrent et travaillent tous les procédés (sans nécessairement les nommer) dans des situations variées de façon à ce qu'ils puissent choisir en connaissance de cause le procédé le mieux adapté à la situation.

Rapport interne ou rapport externe ?

Pour peindre 16 m², il me faut 2 litres de peinture.
Combien me faut-il de peinture pour peindre 32 m², 64 m² et 8 m² ?

Organisons les données sous forme de tableau.

Rapports internes

$\times \frac{1}{2}$ ou : 2

× 4

× 2

Rapport externe

Aire de la surface à peindre en m²	16	32	64	8
Nombre de litres de peinture	2			

$\times \frac{1}{8}$ ou : 8

Le choix de l'élève d'utiliser le rapport interne ou externe est souvent guidé par les nombres en jeu : il choisira de préférence le nombre le plus petit ou celui dont la table de multiplication est la mieux connue. Quand plusieurs valeurs sont à trouver comme ci-dessus, l'élève pourra choisir le rapport externe qui ne change pas, quelle que soit la donnée de départ alors que le rapport interne change pour chaque donnée.

Le recours au rapport additif (propriétés de linéarité)

Pour résoudre le problème ci-dessous, l'élève peut utiliser une démarche additive (linéaire) ou multiplicative (rapport interne ou externe).

> Louis roule à bicyclette. Il compte le nombre de tours de roue et mesure les distances parcourues.
> Il obtient le tableau suivant.
> Quelle distance aura-t-il parcourue après 43 tours de roue ?

43 = 10 + 10 + 23

Nombre de tours de roue	5	10	23	30	43
Distance parcourue en m	11	22	50,6	66	?

22 + 22 + 50,6 = 94,6

Le rapport externe étant égal à 11/5, peu d'élèves sont susceptibles de choisir cette méthode de résolution. Le rapport interne est quant à lui de 43/5 et ne sera donc pas facile à manipuler. Le recours au rapport additif (propriétés de linéarité) constitue une méthode simple et efficace pour résoudre ce problème.

On le voit, la question posée et les nombres en jeu sont des variables didactiques importantes puisqu'elles influencent la méthode de résolution privilégiée par l'élève et qu'elles permettent de faire varier le niveau de difficulté du problème.

La règle de trois

Jusqu'il y a peu, la procédure classique de résolution de problème de proportionnalité était la règle de trois, avec ou sans passage par l'unité. Aujourd'hui, l'accent n'est plus tant mis sur l'application des techniques de résolution, mais davantage sur la perception d'une relation particulière entre deux grandeurs. Il s'agit dès lors, non pas d'abandonner cette règle de trois, d'autant plus qu'elle est encore beaucoup utilisée lors des cours de sciences notamment, mais de la proposer aux élèves comme un outil parmi d'autres.

Exemples

Pour faire un gâteau pour 4 personnes, il faut 200 g de farine. Quelle masse de farine faut-il pour faire un gâteau pour 7 personnes ?

	$\xrightarrow{:4}$	$\xrightarrow{\times 7}$	
Nombre de personnes	4	1	7
Masse de farine en g	200 g	50 g	?

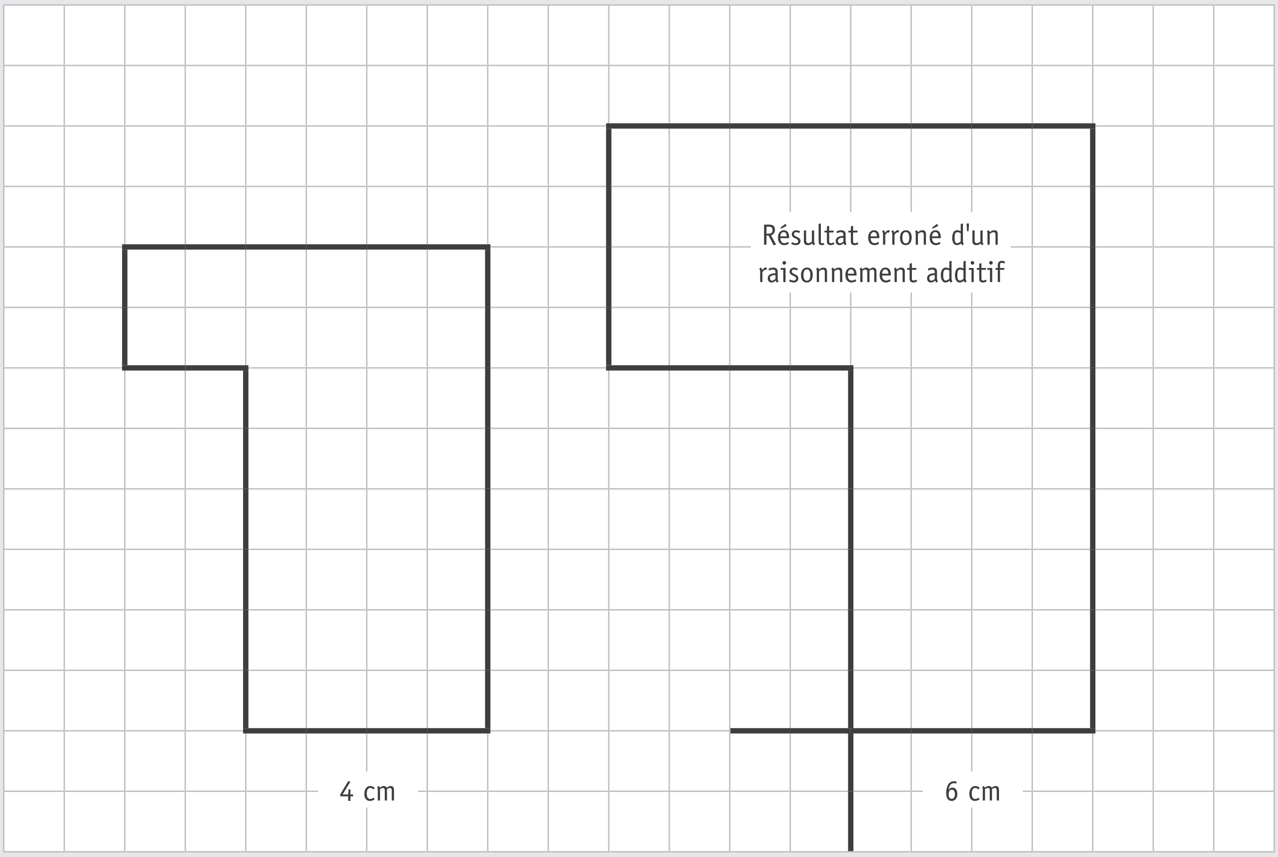
Selon les nombres en jeu, l'élève ne passera pas forcément par l'unité. S'il doit par exemple déterminer le prix de 10 petits pains sachant que 8 petits pains coutent 7 €, il peut très bien « passer par 2 » plutôt que par l'unité.

	$\xrightarrow{:4}$	$\xrightarrow{\times 5}$	
Nombre de petits pains	8	2	10
Prix en €	6 €	1,50 €	7,50 €

Les activités d'agrandissements sont particulièrement appropriées pour faire prendre conscience aux élèves du raisonnement proportionnel basé sur des valeurs relatives plutôt que sur des valeurs absolues.

Exemple

Agrandis la figure en respectant exactement les proportions. La dimension de 4 cm dans la figure de départ aura 6 cm dans la figure agrandie.



L'élève qui n'applique pas un raisonnement proportionnel et qui considère que 6 c'est 4 + 2 n'arrivera pas à terminer correctement son agrandissement.

Il est intéressant d'inviter les élèves à organiser les données dans un tableau.

Dimensions de la figure de départ	Dimensions de la figure agrandie
4 cm	6 cm
8 cm	12 cm
6 cm	9 cm
2 cm	3 cm

Avec des données comme celles-là, l'élève est libre d'utiliser le rapport interne ($8 = 4 \times 2$), le rapport externe ($\frac{6}{4}$, peu probable), le rapport additif (la dimension agrandie de 6 = celle de 4 plus celle de 2) ou la règle de trois ($6 : 4 = 1,5$).

3.3 | LES ACTIVITÉS

3.3.1 | ACTIVITÉ 7 : LA PROPORTIONNALITÉ À PARTIR DE PHOTOS

Quelles sont les photos proportionnelles à celle-ci ?

Lors de la correction collective, explique tes choix.

3.3.2 | ACTIVITÉ 8 : QUELQUES PETITS PROBLÈMES

Toutes les situations d'accroissement (ou de réduction) de valeurs ne sont pas des situations proportionnelles.

Il est intéressant que l'élève soit confronté à des situations variées et qu'il puisse déterminer s'il s'agit de situations proportionnelles ou non. L'élève sera systématiquement invité à expliquer la raison de son choix.

Une bougie d'anniversaire finit de bruler en 10 minutes. En combien de temps les 10 bougies de mon gâteau d'anniversaire auront-elles brulé si on les allume en même temps ?

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

Pour préparer des cookies pour les élèves de sa classe, Julie a adapté une recette de 10 cookies. Combien de cookies va-t-elle préparer ?

Pour 10 cookies	Pour ? cookies
150 g de farine	450 g de farine
1/2 cuillère à café de sel	1 et 1/2 cuillère à café de sel
50 g de sucre	150 g de sucre
50 g de beurre	150 g de beurre
100 g de pépites de chocolat	300 g de pépites de chocolat
1 cuillère à café de levure	3 cuillères à café de levure
2 sachets de sucre vanillé	6 sachets de sucre vanillé
1 oeuf	3 oeufs

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

Pour peindre 16 m², il me faut 2 litres de peinture.
Combien me faut-il de peinture pour peindre 32 m², 64 m² et 8 m² ?

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

Maxime a 10 ans. Il mesure 1,39 m et pèse 35 kg. Peux-tu dire quels seront sa taille et son poids à 20 ans ?

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

Dans un livre de sciences, on voit le tableau suivant.

	Chatte	**Brebis**	**Baleine**
Poids de l'animal	5 kg	50 kg	50 tonnes
Durée de gestation	60 jours	150 jours	365 jours

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

Pour faire une tarte aux pommes, le pâtissier utilise 4 pommes. Combien lui faudra-t-il de pommes pour 12 tartes ?

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

---

2 personnes effectuent ensemble un trajet de 3 heures. Combien de temps faudra-t-il à 5 personnes pour effectuer ce même trajet ?

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

Dans une pâtisserie, on voit :

- 1 meringe : 2,40 €
- 5 meringues : 11 €
- 10 meringues : 20 €

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

S'il faut 6 oranges pour faire 1 litre de jus, alors il faut trois fois plus d'oranges pour faire 3 litres de jus.

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

En 3 h, Pablo parcourt 12 km.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{3\ h} & \longrightarrow & \mathbf{12\ km} & \\ \mathbf{:3} & \mathbf{1\ h} & \longrightarrow & \mathbf{4\ km} & \mathbf{:3} \\ \mathbf{\times 4} & \mathbf{4\ h} & \longrightarrow & \mathbf{?} & \mathbf{\times 4} \end{array}$$

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

À 8 ans, Mila a 24 dents. Combien aura-t-elle de dents à 32 ans ?

Est-ce une situation de proportionnalité ? Explique.

Après la mise en commun, la confrontation et les justifications des réponses des élèves, on peut les inviter à organiser les données pour toutes les situations proportionnelles.

Dans un premier temps, il est préférable de laisser les élèves s'organiser librement pour relever ensuite, lors de la mise en commun, les avantages et les inconvénients des différentes présentations.

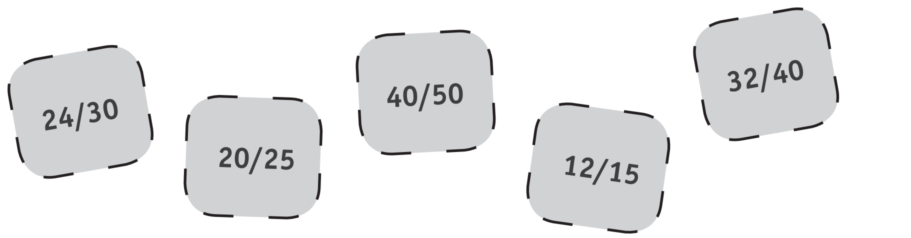
3.3.3 | ACTIVITÉ 9 : COMPARER DES COTES

Les fractions, les rapports et la proportionnalité expriment tous des relations mathématiques cognitivement compliquées et difficiles à enseigner. Cette activité de comparaison de cotes aurait pu trouver sa place aussi dans la section sur les fractions, plus précisément, comme activité de mise au même dénominateur.

L'activité se déroule en alternant les phases de travail en sous-groupe de trois et les mises en commun, confrontations et justifications des réponses des élèves.

Étape 1 : Défi de départ (fiche 1)

Voici les résultats obtenus par Sophia dans les différentes branches au cours de la période.

Math : 24/30 **Français :** 40/50 **Histoire :** 12/15 **Sciences :** 20/25 **Géographie :** 32/40	

À ton avis, dans quelle branche a-t-elle eu les meilleurs résultats ?

L'expérience montre que de nombreux élèves considèrent que c'est en histoire que Sophia a obtenu les meilleurs points car « *il n'y a que 3 d'écart entre 12 et 15. Dans les autres branches, c'est plus* ».

Il faut alors inviter les élèves à observer les résultats et à les comparer.

À ce stade, beaucoup d'élèves constatent que 12/15 et 24/30 vont ensemble, « sont les mêmes », car 24 et 30 sont les doubles de 12 et 15. Ils appliquent le même raisonnement pour 20/25 et 40/50, mais ils ne savent que faire de 32/40 et ils n'établissent pas de lien entre les cinq résultats[17].

Étape 2 : Étape intermédiaire pour aider les élèves (fiche 2)

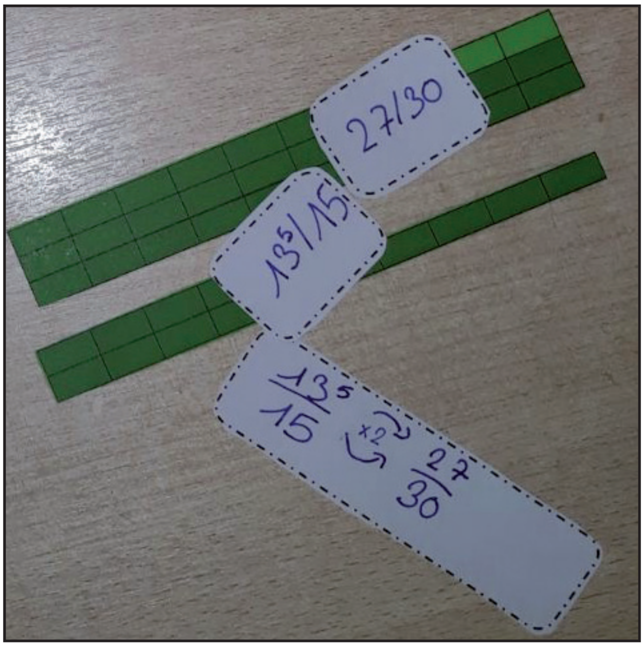
Les élèves découpent et observent les bandelettes vertes. Les parties colorées représentent les résultats d'enfants ($4^5/5$, $13^5/15$, 18/20, $22^5/25$, 27/30, 36/40, 45/50). Les élèves inscrivent les sept résultats sur les petites étiquettes, puis ils comparent leurs réponses.

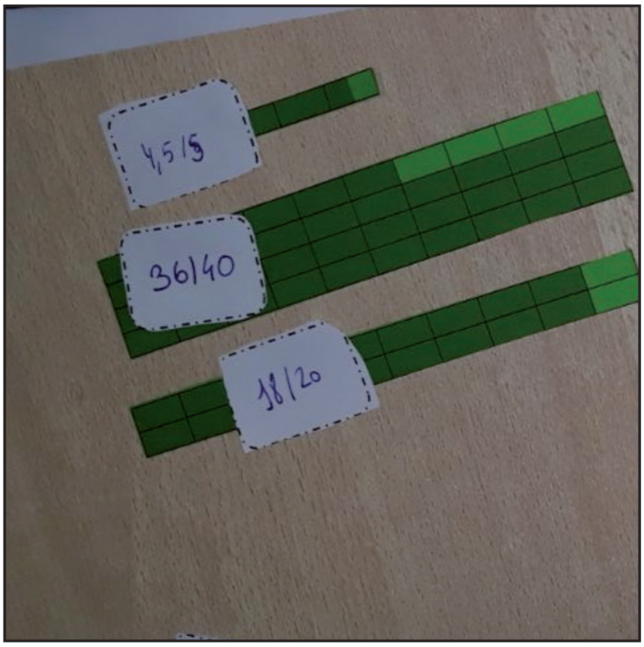
Ils sont alors invités à associer les bandelettes qui « vont ensemble » sachant **qu'aucune bandelette ne peut rester isolée.**

[17] Il est possible aussi que certains élèves appliquent erronément un raisonnement additif. Par exemple, 12/15 devient 47/50 car on ajoute 35 pour passer de 15 à 50, donc on doit ajouter 35 à 12 et on obtient 47.

En sous-groupes, les élèves comparent leur travail et expliquent ce qui unit les bandelettes qu'ils ont associées. Puis, pour chaque association, ils doivent trouver et écrire sur la grande étiquette une opération qui montre comment on passe d'une bandelette à l'autre.

La majorité des élèves trouve rapidement les associations des résultats « doubles », mais la cote sur 5 les embarrasse davantage, ils l'associent différemment.





Lors de la mise en commun, les élèves doivent arriver au constat que la cote sur 5 peut être associée à toutes les bandelettes car « *toutes les cotes sont dans la table de 5* ».

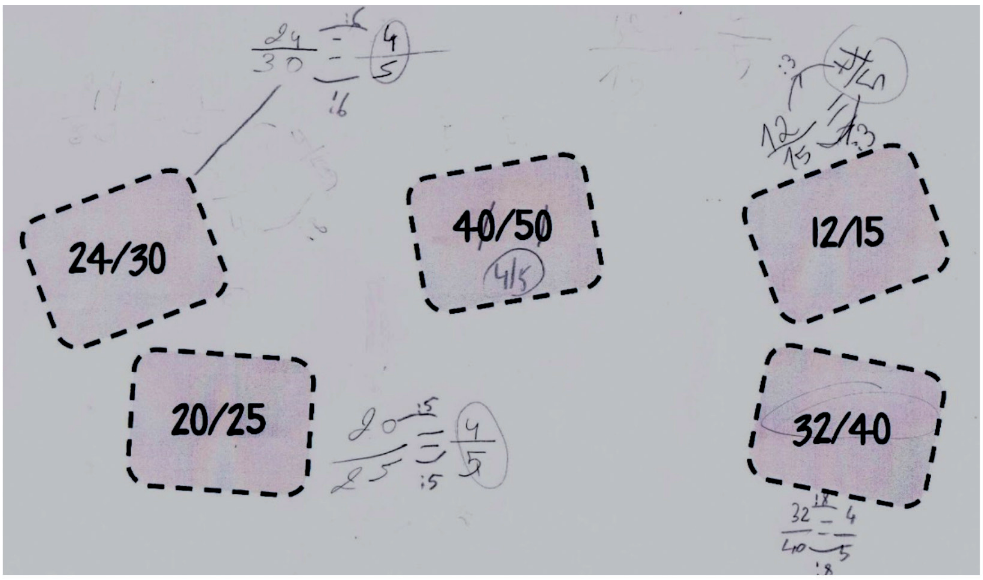
Retour au travail de groupe pour faire le lien entre toutes les bandelettes. À ce stade, les élèves devraient découvrir rapidement qu'elles sont toutes équivalentes. Plusieurs démarches pour arriver à ce constat peuvent toutefois apparaitre : certains mettront toutes les cotes sur 5, d'autres pourraient les mettre sur 10 ou sur 100, etc.

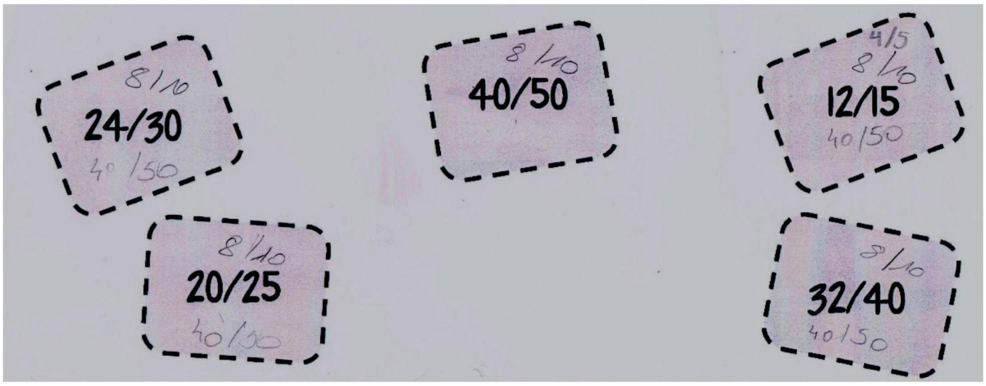
Lors de la mise en commun, les élèves doivent être invités à expliciter leurs démarches. En les confrontant, ils constateront que dans certains cas, une étape (une fraction) intermédiaire est nécessaire pour ramener deux résultats au même dénominateur afin de les comparer. Par exemple, pour ramener tous les résultats sur 10, il faut d'abord passer par 5, pour mettre tous les résultats sur 100, une étape intermédiaire est nécessaire pour les résultats sur 15, sur 30 et sur 40.

Pour renforcer ce constat (et si la démarche de ramener tous les résultats sur 10 n'est pas encore apparue), on peut demander aux élèves de mettre toutes les cotes sur 10. De cette façon, les élèves auront « manipulé les fractions dans tous les sens ».

Étape 3 : Retour au défi de départ

Les élèves peuvent à présent exploiter les nouveaux acquis pour découvrir que Sophia a obtenu le même résultat dans toutes les matières. Certains groupes ramèneront toutes les cotes sur 5, mais d'autres les ramèneront sur 10 ou sur 50 en utilisant les étapes intermédiaires.





En fin d'activité, il est toujours intéressant de faire le point en demandant aux élèves ce qu'ils ont appris ou compris de nouveau.

Exemples de réponses d'élèves

- *On a revu les fractions équivalentes.*
- *On peut calculer nous-mêmes nos cotes.*
- *On sait maintenant que parfois c'est plus facile en passant par un nombre plus petit.*
- *On doit parfois passer par une étape intermédiaire pour comparer des fractions.*

Prolongement possible

On peut évidemment faire varier le niveau de difficulté de l'activité en proposant à la fois des fractions équivalentes et d'autres qui ne le sont pas.

Fiche 1

Math :	Français :	Histoire :	Sciences :	Géographie :
24/30	40/50	12/15	20/25	32/40

24/30

40/50

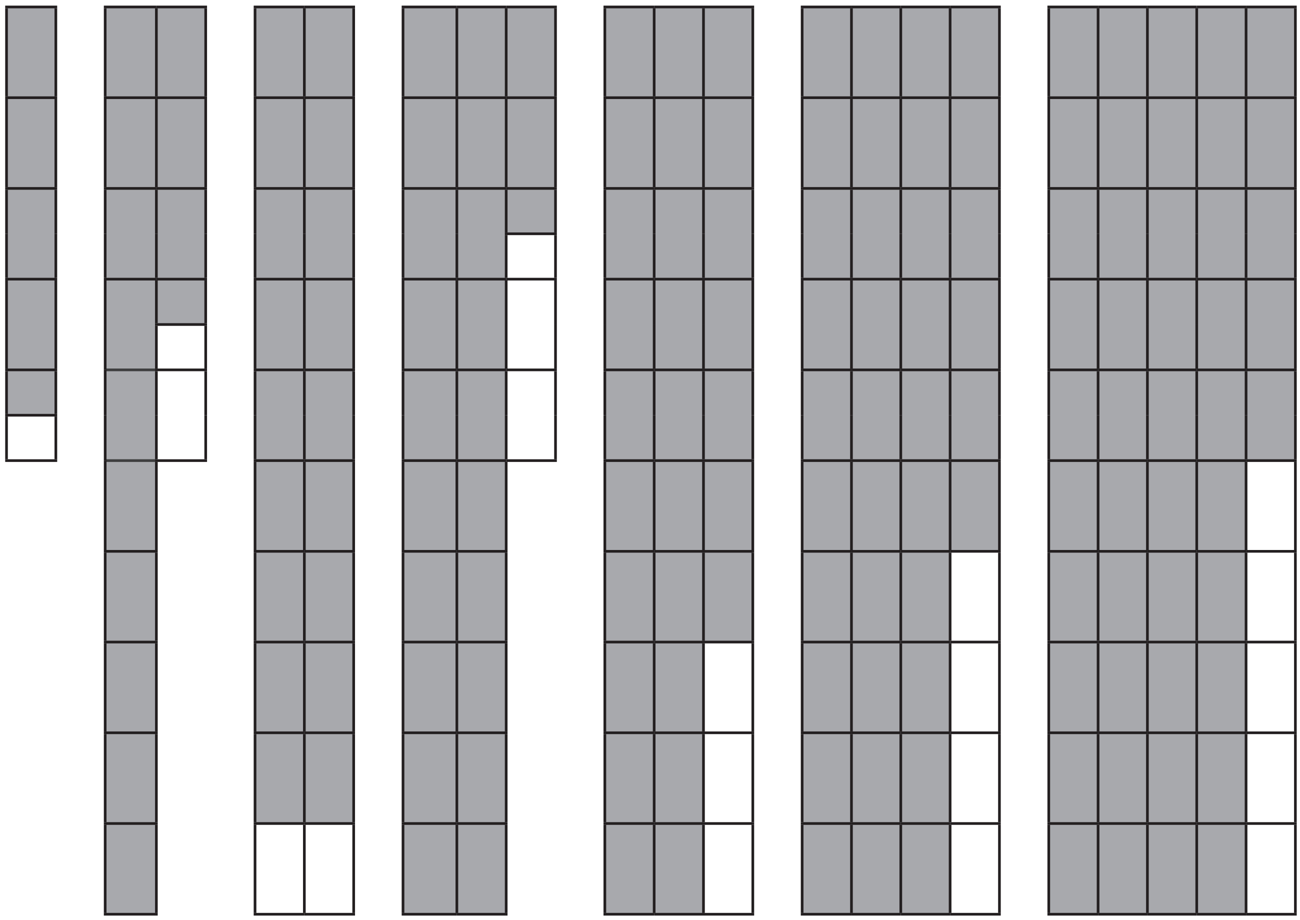
12/15

20/25

32/40

À ton avis, dans quelle branche Sophia a-t-elle obtenu les meilleurs points ?
Observe les résultats et compare-les.

Fiche 2

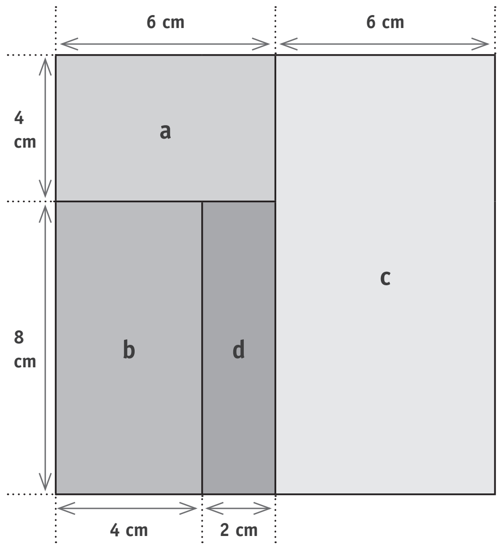


3.3.4 | ACTIVITÉ 10 : L'AGRANDISSEMENT DU PLAN[18]

Les élèves réaliseront cette activité par groupes de quatre : chacun agrandira une pièce différente du plan.

La situation de départ est celle-ci.

Voici le plan d'une maison de 3 pièces et un couloir (a, b, c et d).



Les élèves doivent réaliser un agrandissement du plan, en respectant les proportions, sur la base d'une seule information : le segment qui mesure 4 cm sur le plan fourni devra mesurer 7 cm sur le plan agrandi[19].

Étape 1 En groupe, les élèves examinent le plan (fiche 1). Ils se répartissent les différentes pièces de la maison.

Étape 2 Ensemble, ils se familiarisent avec la situation et échangent sur leur compréhension de la consigne et de la tâche.

Étape 3 Ils découpent le plan et chacun reporte sur sa pièce toutes les dimensions initiales.

Étape 4 Première mise en commun : vérification de l'exactitude des dimensions notées sur les pièces.

Étape 5 Les élèves se mettent d'accord sur une façon de procéder. Chacun note alors au brouillon comment il va agrandir les dimensions de sa pièce.

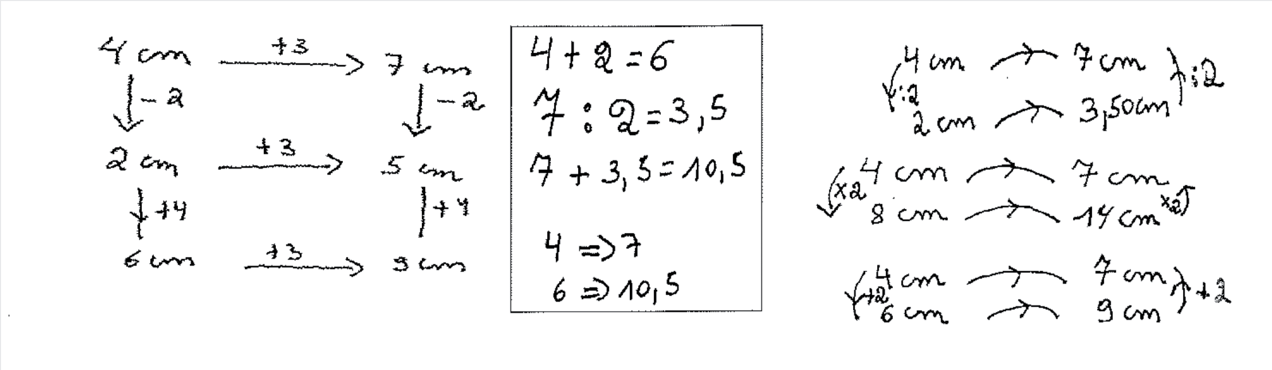
À ce stade, il est conseillé de laisser les élèves travailler de façon autonome. L'enseignant n'interviendra (sans fournir de réponses) que si un groupe est totalement « en panne » pour démarrer le travail.

Il convient de laisser les élèves aller jusqu'au bout de leur raisonnement (même erroné) et de les laisser en discuter en groupe.

[18] Cette activité est adaptée de C. GÉRON, P. STEGEN, S. DARO, *Liaison primaire-secondaire. L'enseignement de la proportionnalité*, 2010, p. 51. Disponible sur enseignement.be ou à l'adresse http://www.hypothese.be/upload/files/proportionnalites.pdf. Cette activité, nommée « Le puzzle » est elle-même inspirée des travaux de Brousseau (1981).

[19] Le niveau de difficulté du problème peut être adapté : par exemple, il sera considérablement simplifié si on demande que le segment de 4 cm sur le plan fourni meure 8 cm sur le plan agrandi.

Exemple de raisonnement d'élèves



Les deux premières productions concernent la recherche des dimensions de la pièce « a » (6 cm sur 4 cm). Dans la première (à gauche), l'élève applique un raisonnement additif dans toute sa démarche.

Au centre, l'élève n'a pas organisé les données sous forme de schéma ou de tableau, mais les calculs qu'il effectue successivement le conduisent aux dimensions correctes.

Dans la production de droite, l'élève applique correctement un raisonnement multiplicatif dans les deux premières étapes, mais il se trompe à la troisième étape en appliquant un raisonnement additif. Il ne semble pas avoir conscience que pour obtenir la dimension agrandie de 6 cm, il peut additionner la dimension agrandie de 4 cm et celle de 2 cm (propriété de linéarité).

Étape 6

L'expérience montre que certains élèves peuvent être assez rapidement démunis lorsqu'ils constatent que la solution « ajouter 3 cm à chaque segment » ne fonctionne pas. Si un trop grand nombre de groupes bloque à ce stade, il est utile d'organiser une mise en commun, non pas pour mettre en évidence des « méthodes qui fonctionnent », mais bien pour leur venir en aide, sans dénaturer la tâche de résolution, en leur demandant par exemple d'observer les dimensions de la pièce « d » par rapport à celles de la pièce « b ».

Étape 7

Chaque élève dessine alors sa pièce agrandie aux mesures qu'il a obtenues. Il la découpe, puis les quatre élèves reconstituent le plan. S'ils ont commis une ou plusieurs erreurs, il leur sera impossible de reconstituer correctement le plan.

Étape 8

Si les élèves ne peuvent reconstituer le plan agrandi, ils recherchent alors ensemble l'origine de l'erreur, ils comparent leurs démarches, s'entraident et recommencent, en groupe cette fois plutôt qu'individuellement, la recherche des différentes dimensions agrandies.

Étape 9

Pendant le travail des élèves, l'enseignant circule entre les groupes. Il dispose du plan agrandi aux dimensions voulues, les mesures n'étant évidemment pas indiquées (fiche 2). Quand un groupe a terminé un essai d'agrandissement, ils peuvent le comparer à l'agrandissement de l'enseignant qui doit s'assurer que les élèves n'en prennent pas les mesures.

Étape 10

Pour la mise en commun finale, l'enseignant aura repéré quelques productions de groupes qui illustrent bien les raisonnements utilisés. Les pièces du plan agrandi auront été collées. Il peut être très intéressant d'utiliser également des raisonnements erronés et de faire réfléchir les élèves sur les explications de la ou des erreurs.

Ces quelques groupes sont alors invités à montrer et à expliquer leurs démarches au reste de la classe. Les échanges auront pour objet d'analyser les différentes méthodes utilisées en distinguant celles qui ont réussi et celles qui ont échoué. Il est préférable de commencer par les procédures qui échouent et de regrouper les stratégies qui se ressemblent.

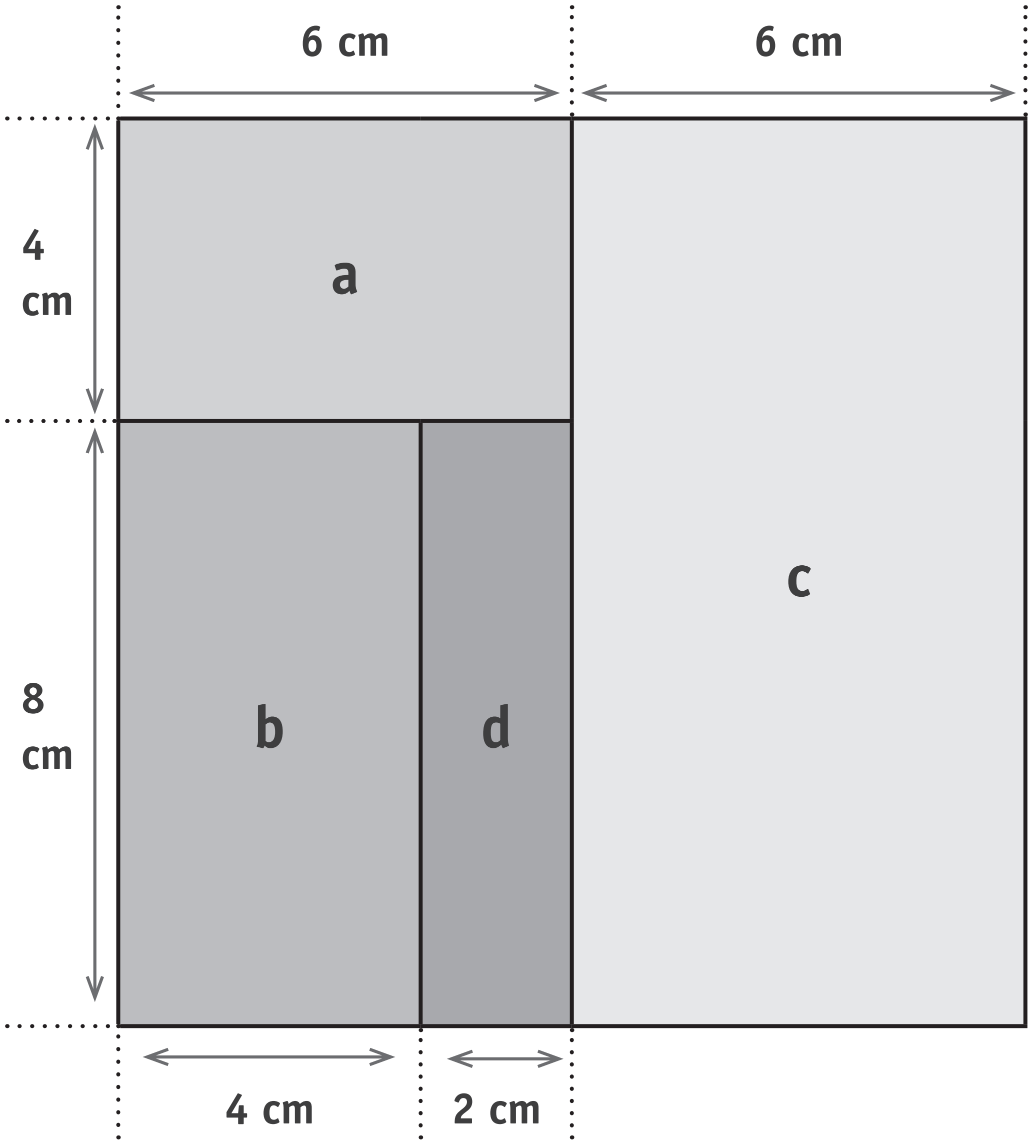
Ce que les élèves doivent retenir au terme de l'activité

- Agrandir, ce n'est pas ajouter la même chose à toutes les dimensions ; de la même manière, réduire une figure, ce n'est pas retrancher la même chose à toutes les dimensions.
- Pour agrandir, on peut examiner les dimensions du plan : celles qui sont identiques sur le plan initial seront identiques aussi sur le plan agrandi. Si la mesure d'un côté est deux fois plus petite qu'une autre sur le plan initial, elle sera également deux fois plus petite sur le plan agrandi.
- La mise en forme des données est très importante. Il convient de construire progressivement avec les élèves un tableau de ce type. Il permet de dégager les rapports.

Dimensions du plan de départ	Dimensions du plan agrandi
4 cm	**7 cm**
2 cm	3,5 cm
6 cm	10,5 cm
8 cm	14 cm
12 cm	21 cm

On peut **consolider les acquis** en répétant l'activité, en modifiant le rapport proportionnel (par exemple, le segment qui mesure 8 cm sur le plan initial mesurera 10 cm sur le plan agrandi) ou en demandant aux élèves de réaliser une réduction du plan (par exemple, le segment qui mesure 4 cm sur le plan initial mesurera 3 cm sur le plan réduit).

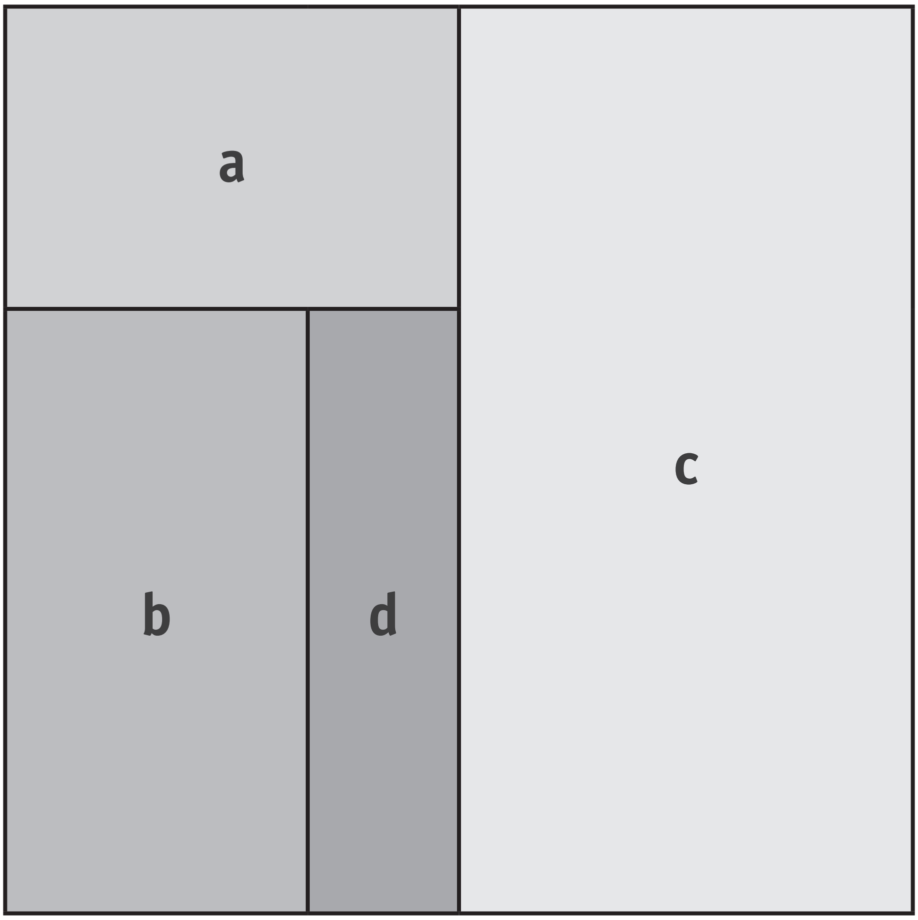
Fiche 1



Fiche 2

L'agrandissement de l'enseignant

Pour obtenir l'agrandissement aux dimensions voulues, il suffit de photocopier ce plan initial en taille réelle sur une feuille A3 à 175 %.



Fédération Wallonie-Bruxelles / Ministère
Avenue du Port, 16 – 1080 Bruxelles
www.fw-b.be – 0800 20 000

Graphisme : Sophie JEDDI - sophie.jeddi@cfwb.be
Octobre 2018

Le Médiateur de la Wallonie et de la Fédération Wallonie-Bruxelles
Rue Lucien Namèche, 54 – 5000 NAMUR
0800 19 199
courrier@le-mediateur.be

Éditeur responsable : Lise-Anne HANSE, Administratrice générale

La « Fédération Wallonie-Bruxelles » est l'appellation désignant usuellement la « Communauté française » visée à l'article 2 de la Constitution