

Première partie

Analyse théorique

Chapitre 1

Des compétences

1.1	Introduction	7
1.2	En lisant les documents belges	8
1.2.1	Des compétences transversales	9
1.2.2	Des compétences disciplinaires	11
1.3	A l'étranger	13
1.3.1	Les problématiques de l'APMEP	14
1.3.2	Les "standards" du NCTM	17
1.3.3	Le plan d'études suisse	20
1.3.4	Le document du <i>School curriculum and assessment authority</i>	21
1.4	Première synthèse : un essai de définition	22

1.1. Introduction

L'organisation de l'enseignement en Communauté française de Belgique en termes de compétences à acquérir résulte de la volonté du législateur qui dans le « *Décret du 24 juillet 1997 définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre* », [1] ⁽¹⁾, article 6, fixe ainsi les objectifs généraux de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire :

1. promouvoir la confiance en soi et le développement de la personne de chacun des élèves ;
2. amener tous les élèves à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences qui les rendent aptes à apprendre toute leur vie et à prendre une place active dans la vie économique, sociale et culturelle ;
3. préparer tous les élèves à être des citoyens responsables, capables de contribuer au développement d'une société démocratique, solidaire, pluraliste et ouverte aux autres cultures ;
4. assurer à tous les élèves des chances égales d'émancipation sociale.

La notion de *compétence* avait été introduite dans le document *Les socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier degré de l'enseignement secondaire*, [2], publié en 1994 par le *Ministre de l'Éducation et de l'Audiovisuel* qui la définissait comme suit :

DÉFINITION 1.1.1 *Une compétence est un comportement structuré en fonction d'un but dans une situation donnée, c'est-à-dire une possibilité d'action efficace dans un contexte précis.*

Cette définition a ensuite été revue et pourvue d'une forme « légale » dans le *Décret* mentionné ci-dessus :

DÉFINITION 1.1.2 *Compétence : aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches.*

Nous allons dans ce chapitre tenter d'approfondir cette définition en analysant le contenu de divers documents belges ou étrangers.

⁽¹⁾ Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie située à la fin du fascicule.

1.2. En lisant les documents belges

Nous disposons outre le décret [1] et la brochure [2] précités des documents suivants, dont le premier est consacré plus particulièrement aux socles de compétences dans le domaine de l'enseignement de la mathématique.

- *Mathématiques de 10 à 14 ans, continuité et compétences*, Cellule de Pilotage du Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation, 1996, [3].
- *Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au Secondaire*, Commission Pédagogique de la SBPMef, Mathématique et Pédagogie, 102, 5–28, 1995, [4].
- *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Ed. CREM, Nivelles, 1995, [12]

A l'occasion, nous nous inspirerons également des travaux de l'*Université d'Été* organisée les 21, 22 et 23 août 1997 par le *Centre Interfacultaire de Formation des Enseignants (CIFEN)* de l'Université de Liège.

Une distinction est faite entre *compétence transversale* et *compétence disciplinaire* :

DÉFINITION 1.2.1 *Les compétences transversales sont les capacités qui permettent à l'enfant de réaliser des performances dans toutes les situations où il est plongé, [2].*

DÉFINITION 1.2.2 *Compétences transversales : attitudes, démarches mentales et démarches méthodologiques communes aux différentes disciplines à acquérir et à mettre en œuvre au cours de l'élaboration des différents savoirs et savoir-faire ; leur maîtrise vise à une autonomie croissante d'apprentissage des élèves, [1].*

DÉFINITION 1.2.3 *Compétences disciplinaires : référentiel présentant de manière structurée les compétences à acquérir dans une discipline scolaire, [1].*

Les compétences disciplinaires se répartissent elles-mêmes en compétences d'intégration et compétences spécifiques ([2], pages 19 et 20).

1.2.1 Des compétences transversales

Le document [2] ne définit les compétences transversales qu'en termes très généraux. Il en distingue néanmoins trois grandes catégories : les compétences relationnelles, les démarches mentales, les méthodes de travail. Ces catégories se retrouvent dans la définition 1.2.3, définition « légale » énoncée dans [1]. Le document [3], consacré plus particulièrement aux mathématiques, revient sur la question. Il considère que

une compétence n'est pas par nature transversale; elle le devient dans la mesure où son champ d'application s'étend à de nouveaux contextes

Plutôt que de compétence *transversale*, on pourrait donc parler de compétence *transférable*. Mais comment le transfert s'effectue-t-il ?

Il est illusoire de tabler sur un transfert simple de ce qui est acquis par exemple en français (la capacité à distinguer l'essentiel de l'accessoire) au domaine des problèmes, car on ne repère pas l'essentiel de la même façon dans un récit, une règle de jeu ou un énoncé de problème. Les recherches en psychologie cognitive ont montré que le transfert ne s'effectue que dans des conditions bien particulières, notamment quand la similarité des situations est grande aux yeux de l'apprenant.

[3], page 13

Le problème du transfert d'une compétence d'un domaine à un autre, ou d'une discipline à une autre, est donc un de ceux pour lesquels nous n'avons guère de réponses.

En fait, ce problème est plus général encore qu'il n'y paraît à première vue car il se pose aussi à l'intérieur d'une discipline déterminée. Pour nous limiter au cas de la mathématique, une méthode ou un raisonnement utilisés dans une situation \mathcal{A} sont très souvent susceptibles d'être réutilisés dans une autre situation \mathcal{B} . Parfois, la situation \mathcal{B} relève du même sujet (algèbre, géométrie, ...) que \mathcal{A} , parfois ce n'est pas le cas. Les transferts s'effectuent d'autant plus difficilement que les sujets sont différents et que des cloisonnements ont été réalisés, consciemment ou non, soit par l'élève, soit par le système éducatif.

Le problème de transfert apparaît comme crucial car c'est cette capacité de transfert qui permet à l'individu de s'adapter à des situations nouvelles pour lui.

Dans son *cadre global*, le CREM cite POLYA, [122], qui donne aux élèves le conseil, après avoir résolu un problème, de reconstituer en détails la démarche qu'ils ont utilisée pour le résoudre.

Expliciter les démarches effectuées permet d'identifier les compétences utilisées et facilite leur transfert à d'autres situations.

Dès lors que la transversalité des compétences se mesure par leur transférabilité, on peut considérer que *toute compétence possède un certain domaine (plus ou moins étendu) de transversalité*. De cette façon, la distinction entre compétence transversale et compétence disciplinaire n'apparaît plus aussi nette qu'on aurait pu le croire *a priori*. Par ailleurs, même les compétences transversales ne peuvent s'exercer en l'absence d'apprentissage d'un contenu (procédural ou conceptuel). Nous revenons ainsi aux compétences disciplinaires.

1.2.2 Des compétences disciplinaires

La définition des compétences, donnée dans [2] et mentionnée plus haut (définition 1.1.1) met l'accent sur l'aspect opératoire : une compétence est une possibilité d'action efficace dans un contexte précis. La définition 1.1.2, extraite de [1] nuance fortement cette idée. La distinction entre compétence disciplinaire d'intégration et compétence disciplinaire spécifique va dans le même sens :

- *Les compétences disciplinaires d'intégration sont des compétences **globales** qui rassemblent et organisent un **ensemble de savoirs, de savoir-faire, et de savoir-être** dans leurs dimensions transversales et disciplinaires, ([2], page 19).*
- *Les compétences disciplinaires spécifiques doivent être développées dans des situations d'apprentissage, pour atteindre au fil du temps, une plus grande maîtrise des compétences d'intégration, ([2], page 20).*

Les auteurs de [3] estiment aussi qu'*une compétence est une capacité de faire face à certaines situations, c'est-à-dire de mobiliser un système de connaissances conceptuelles et procédurales, organisées en schémas opératoires* (p.11). Dans [12], le CREM discute également de cette question. Il situe les connaissances *pas bien loin des compétences* et fait remarquer *que plus un élève a de connaissances, mieux il est armé pour résoudre des problèmes*. Des considérations analogues sont également développées en d'autres textes, notamment [4]. Il n'est donc pas question d'opposer **compétences** à **connaissances**, mais plutôt de considérer que celles-ci font partie intégrante de celles-là.

Les compétences ont simultanément une composante conceptuelle (les savoirs) et une composante procédurale (les savoir-faire).

La distinction entre « compétence d'intégration » et « compétence spécifique » est également analysée dans [3], où l'on fait remarquer qu'une telle qualification dépend fortement du niveau de maîtrise atteint par l'élève : telle capacité qui apparaît complexe et difficile à réaliser pour un élève du secondaire inférieur (par exemple) ne sera souvent qu'un simple exercice routinier pour un élève du secondaire supérieur. Pour le premier, il s'agirait d'une compétence d'intégration, pour le second d'une compétence spécifique. On retrouve là une difficulté que l'on rencontre chaque fois qu'on essaye d'appliquer dans un cas particulier les principes d'une taxonomie d'objectifs cognitifs.

La difficulté qui vient d'être mentionnée ne doit pas nous amener à rejeter la distinction entre *compétence d'intégration* et *compétence spécifique*. Par contre, elle nous amène à considérer qu'une compétence n'est spécifique que relativement à une compétence d'intégration à laquelle elle est subordonnée. Nous serons ainsi conduits à envisager une hiérarchisation des compétences particulières au domaine mathématique. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Précisons enfin qu'une liste de compétences terminales en mathématiques pour les humanités générales et technologiques a été discutée et approuvée par le Conseil de la Communauté française durant les vacances de Pâques 1999 (cfr. le site Internet www.restode.cfwb.be). Ce texte précise, en vue de la certification, les compétences disciplinaires spécifiques et d'intégration suivant les différents profils d'études en mathématiques.

1.3. A l'étranger

Les documents étrangers mentionnés ci-dessous marquent une tendance apparue depuis quelques années et qui vise à déterminer les programmes d'enseignement de la mathématique autrement que par une succession d'intitulés de matières. Nous donnerons dans ce paragraphe un bref aperçu de leur contenu.

- *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Ed. NCTM, Reston (USA), 258 pages, 1989, [11].
- *Plan d'études cadre pour les écoles de maturité du 9 juin 1994*, Ed. Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique, Berne, 139 pages, 1994, [14].
- *Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le second cycle*, Supplément au Bulletin de l'APMEP n°401, décembre 1995, [9]
- *GCE advanced and advanced subsidiary examinations subject cores for mathematics*, Ed. School curriculum and assessment authority, London, 1997, [13]

1.3.1 Les problématiques de l'APMEP

L'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public, (APMEP) recherche dès 1984 une nouvelle approche des programmes d'enseignement des mathématiques. Sa réflexion la conduit à élaborer des *problématiques*. Le mot lui-même (problématique : ensemble de problèmes dont les éléments sont liés), exprime l'idée de mettre en relation les différents éléments du programme d'enseignement, pour aboutir à une autre approche des contenus.

Citons ici nos collègues français, qui analysent la façon dont sont rédigés les programmes :

Une approche traditionnelle, essentiellement centrée sur les contenus, peut satisfaire l'enseignant mathématicien qui est capable d'identifier les objets mathématiques en référence à sa formation universitaire, à sa culture et son expérience des transpositions qui en sont faites dans les manuels, en un mot en référence à la personnalisation de ses savoirs. La linéarisation de leur écriture traduit l'idéologie et l'utopie d'une discipline autonome et unitaire, ainsi que le mythe d'une théorie de l'apprentissage comme processus cumulatif. [...] La cohérence des programmes puise sa légitimité dans l'organisation rationnelle des contenus [...] conduite selon des critères épistémologiques du mathématicien et non de ses « apprentis ». [...] Les difficultés, voire les échecs, dans le cadre et la contrainte d'une pédagogie de masse, nécessitent une approche différente.

[9], page 4

Quelle est cette approche ?

[Les problématiques] cherchent à intégrer, sans intention planificatrice, à la fois :

- *l'essentiel des objectifs de toute nature (connaissances, démarches, processus, comportements, habileté technique, ...)*
- *des contenus mathématiques susceptibles d'atteindre ces objectifs à travers des activités.*

[8], page 1.

A chaque problématique sont associés : des objectifs, des activités, un noyau de savoirs et savoir-faire minimaux, les contenus correspondants.

Après un premier bilan (voir [9]), les programmes des collèges s'en sont largement inspirés, introduisant davantage de cohérence entre les contenus et les méthodes, clarifiant les objectifs et donnant plus de sens aux notions étudiées. Les pratiques pédagogiques ont évolué, les échecs ont diminué, enfin l'image des mathématiques a été revalorisée. ⁽²⁾.

Les dix problématiques proposées pour le second cycle par l'APMEP sont les suivantes :

- Repérage.
- Étude de certaines configurations planes ou spatiales. Représentation et mesures associés.
- Étude de certaines transformations applicables à des configurations. Examen de leurs invariants : anticipation de leurs effets.
- Modélisation d'une situation et résolution de problèmes avec recherche de solutions vérifiant certaines conditions.
- Techniques algorithmiques.
- Changement de registres et de cadres.
- Recueil, traitement, consultation et communication de l'information.
- Traitement et représentation de données statistiques.
- Choix opportun et optimal des outils et méthodes dans des situations sous contraintes.
- Conjectures et preuves.

Certaines problématiques sont formulées en référence privilégiée à des objectifs généraux et d'autres en référence privilégiée à des contenus. L'idée importante reste le fait de définir un nombre restreint de problématiques pour harmoniser les composantes essentielles d'un curriculum et en montrer la récurrence tout le long de son développement.

En plus d'une volonté d'intégration des objectifs–contenus–méthodes, il y a une volonté de donner aux savoirs la puissance qui les rend opérationnels. Les problématiques proposent aussi une réponse à la question du sens que doivent acquérir les contenus en tentant d'identifier des grandes classes de situations-problèmes susceptibles de conduire à la génération des contenus plus ou moins traditionnels : c'est ce qu'on appelle une problématisation des savoirs. Nous aborderons la question des problèmes au chapitre 3.

⁽²⁾ Ces progrès ont été confirmés par M. l'Inspecteur Général, Claude Thelot, de la *Direction de l'Évaluation et de la Prospective*, Paris, dans son intervention lors de l'Université d'Été, organisée en août 1997 par le Centre Interfacultaire de Formation des Enseignants de l'Université de Liège (CIFEN), voir [143]

Parmi les problématiques, épinglons celle qui est intitulée « *Changements de registres et de cadres* », en nous intéressant plus particulièrement aux changements de cadres. Ce terme désigne *non seulement un domaine des mathématiques et les concepts qui lui sont associés, mais également les relations entre ces objets et les formulations correspondantes.*

Par exemple, *la résolution d'un même exercice relatif aux nombres complexes pourra faire intervenir, selon la stratégie de résolution envisagée :*

- *le cadre algébrique (en se plaçant dans \mathbb{C})*
- *le cadre vectoriel (en se plaçant dans le plan vectoriel complexe)*
- *le cadre de la géométrie plane (en se plaçant dans le plan affine complexe)*

Il est clair qu'un changement de cadre opportun peut faciliter la résolution d'un problème en « organisant » un transfert de compétence. Les changements de cadre apparaîtront dans la suite de ce travail comme des nœuds importants d'une hiérarchie de compétences (voir chapitres 5 et 6).

1.3.2 Les "standards" du NCTM

Le document du *National council of teachers of mathematics*, [11], explicite également un désir de changement :

In most democratic countries, common schools were created to provide most youth the training needed to become workers in fields, factories, and shops. [...] Thus, minimum competencies in reading, writing, and arithmetic were expected of all students, and more advanced academic training was reserved for the select few.

[...] Traditional notions of basic mathematical competence have been outstripped by ever-higher expectations of the skills and knowledge of workers; new methods of production demand a technologically competent work force.

[...] Henry Pollak (1987), a noted industrial mathematician, recently summarized the mathematical expectations for new employees in industry:

- *the ability to set up problems with the appropriate operations,*
- *knowledge of a variety of techniques to approach and work on problems,*
- *understanding of the underlying mathematical features of a problem,*
- *the ability to work with others on problems,*
- *the ability to see the applicability of mathematical ideas to common and complex problems,*
- *preparation for open problem situations, since most real problems are not well formulated,*
- *belief in the utility and value of mathematics.*

[11], pages 3 et 4.

On le voit particulièrement dans ce deuxième extrait : c'est le besoin (économique et social) de massifier l'éducation qui amène à remettre en cause la nature linéaire des programmes d'enseignement des mathématiques.

Il s'agit donc pour le NCTM de

1. identifier des « standards » du cursus scolaire, aussi bien en termes de contenus que d'objectifs,

2. les décrire et les illustrer, rapportés à trois niveaux d'apprentissage,
3. décrire l'évolution dans l'approche d'un même standard en passant d'un niveau à un autre,
4. définir des règles d'évaluation basées sur ces standards.

Parmi la liste des standards ainsi définis, quatre sont communs aux différents niveaux et sont en fait plus proches d'objectifs généraux :

- *mathematics as problem solving,*
- *mathematics as communication*
- *mathematics as reasoning*
- *mathematical connections*

Les autres standards sont plutôt des domaines incluant une description de plus en plus morcelée des contenus. Pour les années n°9 à 12 :

- *algebra,*
- *functions,*
- *geometry from a synthetic perspective,*
- *geometry from an algebraic perspective,*
- *trigonometry,*
- *statistics,*
- *probability,*
- *discrete mathematics,*
- *conceptual underpinnings of calculus,*
- *mathematical structure*

A nouveau, nous retrouvons la difficulté d'intégrer complètement les contenus et les objectifs.

Parmi les standards généraux, *mathematical connections* reprend explicitement nos préoccupations concernant les transferts. Il est détaillé comme suit :

1. *recognize equivalent representations of the same concept,*
2. *relate procedures in one representation to procedures in an equivalent representation,*
3. *use and value the connections among mathematical topics,*
4. *use and value the connections between mathematics and other disciplines.*

Ce standard est plus ou moins équivalent à la problématique « changements de cadres » de l'APMEP. Le but est de relier les différentes représentations des concepts et procédures entre eux, reconnaître les relations entre différents sujets des mathématiques, utiliser les mathématiques dans d'autres activités y compris dans la vie quotidienne. Lorsqu'ils maîtrisent ces relations, les élèves sont en mesure de limiter le nombre de concepts et techniques isolés à retenir, des transferts systématiques leur permettant de reconstituer au besoin les informations qui leur manqueraient. Selon une expression déjà ancienne, il s'agit de montrer et d'exploiter « le caractère unitaire de la mathématique d'aujourd'hui ».

Les « standards NCTM » et les « problématiques APMEP » ne coïncident évidemment pas, mais les points communs entre eux d'une part, avec la philosophie des « compétences » belges d'autre part, sont notables. Outre l'analogie entre « Mathematical connections » et « Changements de registres et de cadres », nous rapprochons notamment

- « Mathematics as problem solving » (USA) de « Modélisation d'une situation et résolutions de problèmes avec recherche de solutions vérifiant certaines conditions » (France).
- « Mathematics as communication » (USA) de « Formation au recueil, au traitement, à la consultation et à la communication de l'information » (France),
- « Mathematics and reasoning » (USA) de « Conjectures et preuves » (France).

1.3.3 Le plan d'études suisse

En Suisse, le « Plan d'études cadre pour les écoles de maturité », [14], s'exprime également en termes de « compétences ». Il distingue des compétences sociales, intellectuelles, communicatives, de développement de la personnalité, concernant les méthodes de travail. Comme les textes français et américain, il remet en cause l'organisation traditionnelle de l'apprentissage des contenus :

Pendant longtemps, il était absolument impossible d'organiser un enseignement scolaire autrement que par le truchement des contenus. Un rapide coup d'œil jeté sur ce type de planification révèle à l'évidence qu'elle mène à leur atomisation et à leur déconnexion. Cette forme d'organisation devenait déjà plus efficace, lorsque les contenus étaient orientés vers des objectifs, c'est-à-dire mis en relation avec autre chose qu'eux-mêmes. [...] Les objectifs, s'ils servent à mettre en perspective les contenus, doivent être choisis dans le champ d'expérience des élèves.

[14], page 136

1.3.4 Le document du *School curriculum and assessment authority*

Le document anglais, [13] est plus orienté vers l'évaluation que vers l'apprentissage lui-même. En particulier, il mentionne seulement des compétences à évaluer, tout en mentionnant que *Knowledge, understanding and skills are closely linked*. Les cinq objectifs à évaluer sont les suivants :

Candidates should be able to

- 1. recall, select and use their knowledge of appropriate mathematical facts, concepts and techniques in a variety of contexts;*
- 2. construct rigorous mathematical argument and proofs through an appropriate use of precise statements, logical deduction and inference and by the manipulation of mathematical expressions, including the construction of extended arguments for handling substantial problems presented in unstructured form;*
- 3. use and understand the process of simple mathematical modelling with reference to one or more application areas. This includes abstractions from real-world situations to mathematical descriptions; selection, use and evaluation of mathematical models including critical appreciation of the assumptions made; interpretation, justification and presentation of the results in a form relevant to the original problem;*
- 4. read critically and comprehend a mathematical argument or an example of the application of mathematics;*
- 5. appreciate how to use appropriate technology, such as calculators or computers, as a mathematical tool and have an awareness of its limitations.*

On retrouve à nouveau dans ces différents points plusieurs des préoccupations déjà rencontrées dans les documents précédents.

1.4. Première synthèse : un essai de définition

Le présent travail est consacré à la définition de compétences terminales en mathématiques. L'expression « compétences terminales » est définie dans [1] :

DÉFINITION 1.4.1 *Compétences terminales : référentiel présentant de façon structurée les compétences dont la maîtrise à un niveau déterminé est attendue à la fin de l'enseignement secondaire.*

Puisque le mot « compétence » désigne aussi bien des savoirs que des savoir-faire, nous ne nous aventurons pas trop en précisant :

Les compétences terminales en mathématiques sont **les connaissances et les comportements** que les élèves doivent être capables de mobiliser dans l'étude de situations mathématiques significatives, lorsqu'ils quittent l'enseignement secondaire.

Une telle définition demande, comme préalable, d'expliciter la spécificité du savoir mathématique, sa raison d'être et d'étudier par quel(s) processus se réalise l'apprentissage des savoirs et des savoir-faire dans le domaine mathématique ... Elle entraîne aussi que les compétences terminales doivent être au centre de l'organisation de l'enseignement : dans la définition des contenus, dans l'activité des élèves, dans la méthodologie mise en œuvre par le professeur et — évidemment — dans l'évaluation.

De façon précise, il convient de répondre à plusieurs questions, inspirées de l'intervention de J. Beckers, [30] lors de l'Université d'Été organisée à Liège par le CIFEN :

- De quelles démarches essentielles les élèves doivent-ils être capables dans l'étude de situations mathématiques significatives ?
- Quels contenus retenir pour l'exercice de ces démarches essentielles ? Dans ce cas, y a-t-il des contenus incontournables, et pourquoi le sont-ils ?
- Comment organiser le cours de mathématique de façon que les élèves acquièrent de façon intégrée les démarches essentielles et les contenus incontournables ?
- Comment évaluer l'acquisition des compétences retenues ?

D'après la définition 1.4.1, il ne s'agit pas seulement de dresser une liste de compétences, il s'agit aussi de les structurer. Clairement, cette structuration — nous pouvons aussi parler de hiérarchisation — doit être conçue de façon à contribuer à la mise au point de réponses aux questions précédentes.

Mais une question préliminaire doit être abordée, dont la réponse conditionne les réponses aux questions précédentes : *En quoi consiste l'activité mathématique, quelles sont sa spécificité et sa raison d'être ?* C'est ce point que nous aborderons au chapitre 2.

Références

[1], [2], [3], [4], [12], [122], [11], [14], [9], [13], [8], [143], [30].