Chapitre 3

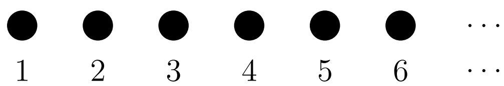
L'apprentissage de la mathématique

3.1. Introduction

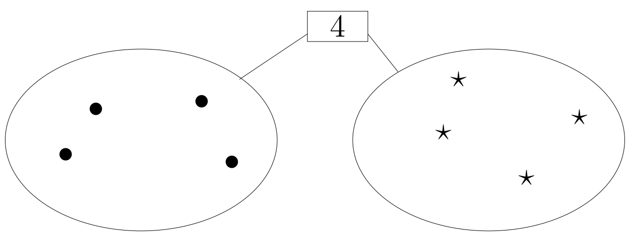
Depuis Piaget et ses travaux sur la psychologie génétique, (voir par exemple [120]), l'attention s'est portée sur le phénomène psychologique de l'apprentissage. Il n'est pas question de présenter ici une vue d'ensemble de ces travaux complexes et aux contours souvent encore imprécis. Nous n'en avons ni la possibilité, ni la capacité. Nous nous limiterons à mettre en évidence, d'une façon sans doute quelque peu naïve, quelques idées qui nous semblent pouvoir être mises à profit par l'enseignant lors de la préparation de ses cours ou de l'observation de ses élèves.

La question est de savoir par quels processus mentaux un concept peut se développer, puis arriver à maturation.

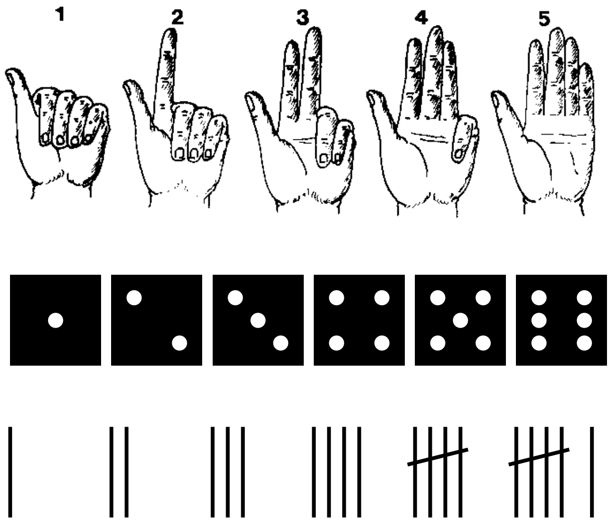
Observons un jeune enfant qui apprend à parler. Son vocabulaire augmente progressivement. Il rencontre notamment des noms de nombres. Très tôt, il peut distinguer un de deux. Peu à peu, il retient la *litanie* des nombres : un, deux, trois, quatre, ... sans bien savoir ce que tous ces mots veulent dire. Toujours de façon progressive, il commence à compter des objets en associant à chacun d'entre eux ce que nous appelons un nombre, mais qui, pour lui, joue plutôt le rôle de numéro :



Dans cette phase, les mots *un, deux, trois, ...*, ont une signification *ordinale* et non *cardinale*. L'enfant est encore loin du *concept* de nombre. Mais lorsque la *procédure* de comptage a été exécutée un nombre suffisant de fois, il prend conscience de ce qu'ont de commun tous les ensembles de deux objets, puis de trois objets, etc.



Simultanément, des activités diverses, notamment des jeux, le mettent en présence d'images « standard » qui vont devenir des *images mentales*.



L'accumulation d'informations numériques sous diverses formes, la formation d'images mentales, l'exécution de procédures de comptage d'abord, de calcul ensuite, entraînent une maturation, une *condensation* qui ont pour conséquence la conceptualisation, c'est-à-dire la création dans son univers mental d'un *objet abstrait*. Malgré ce caractère abstrait, cet objet possède pour l'enfant une existence bien réelle.

Dans le cas de l'apprentissage des nombres naturels, dans un premier temps ceux-ci acquièrent individuellement le statut d'objet. Ce qui caractérise le fait que ce statut a été atteint par un nombre est la possibilité pour l'enfant de lui appliquer avec aisance des procédures, par exemple de le décomposer lorsqu'il intervient dans une addition qui nécessite un « passage à la dizaine supérieure » : pour calculer $8 + 7$, on décompose 7 en $2 + 5$.

Dans un second temps, ce seront des « paquets » de naturels d'un ordre de grandeur donné qui acquièrent simultanément le statut d'objet. Il serait évidemment absurde d'imaginer que *tous* les nombres naturels deviennent jamais familiers à quiconque. Le degré de familiarité d'un individu — quel que soit son âge — avec des nombres dépend des occasions qu'il a de les manipuler.

Pour la plupart d'entre nous, les nombres supérieurs à quelques billions restent des entités mystérieuses, mais dont nous savons qu'elles existent et dont nous acceptons qu'elles aient les mêmes propriétés que les nombres d'usage courant. Cela signifie que le concept de nombre naturel lui-même s'est formé, indépendamment de valeurs particulières et malgré l'impossibilité de « *connaître* » tous les naturels. A ce moment, il devient possible de reconnaître un naturel dans de nouvelles situations. Par exemple, il devient possible de considérer qu'une lettre représente un naturel. Ce sont alors d'autres concepts qui vont entrer en formation, notamment celui de variable.

La formation d'un concept, qui vient d'être décrite dans le cas des nombres naturels, passe toujours par un certain nombre de phases que nous pouvons décrire schématiquement par le « slogan »

Du procédural au structural

Dans cette expression, nous considérons les mots *structural* et *conceptuel* comme synonymes. Nous allons reprendre ci-dessous des idées dues à A. Sfard, [134], D. Tall [142] et d'autres auteurs qui ont été exposées notamment dans l'article [108] dont nous reproduisons de larges extraits.

3.2. Des procédures, des structures et des modèles mentaux

Imaginez que vous devez expliquer de la façon la plus précise possible à un enfant ce qu'est un cercle. Qu'allez-vous lui dire ? Il y a gros à parier que vos explications ne seront pas identiques selon que vous vous adressez à un enfant de 6 ans ou à un autre de 13 ans ou 14 ans.

Dans le premier cas, l'enfant a déjà vu des cercles, il en possède une image mentale mais est sans doute incapable d'en dessiner un de façon précise. Votre explication va se situer au niveau *procédural* :

> *Un cercle est une courbe dessinée à l'aide d'un compas (ou de tout objet ayant une forme circulaire tel qu'un verre, une tasse, . . .) .*

Dans le second cas, non seulement l'enfant possède une image mentale de ce qu'est un cercle, mais il est probablement déjà capable d'en dessiner un. Il s'agit à présent de lui en décrire les propriétés. Votre explication se situera au niveau *structural* :

> Un cercle est l'ensemble des points d'un plan situés à une distance donnée d'un point donné.

Bien entendu les deux énoncés n'ont pas le même statut : l'énoncé n°2 est une véritable définition mathématique, ce que n'est pas l'énoncé n°1. Mais tous deux nous permettent de réaliser notre objectif : expliquer, avec une précision raisonnable, ce qu'est un cercle. Simplement nous ne les utilisons pas dans les mêmes circonstances :

Il est facile de donner de nombreux exemples, dans les divers domaines mathématiques qui montrent la distinction entre les points de vue procéduraux et structuraux.

Les fractions

> La première rencontre d'un enfant avec une fraction se fait à l'occasion d'un partage : traditionnellement, on découpe des tartes en morceaux. La fraction possède alors un statut d'*opérateur*. Très clairement on ne peut assimiler une demi-tarte à deux quarts de tarte. Cette fraction-opérateur possède donc moins de propriétés que la fraction-nombre qui émergera plus tard. Mais certaines procédures peuvent déjà lui être appliquées : il est possible de partager une demi-tarte en trois parties. La multiplication des fractions apparaît ainsi comme une procédure portant sur les fractions-opérateurs, par composition de ceux-ci.

Progressivement, la fraction va acquérir le statut de nombre. Par exemple, le résultat de l'application de la fraction-opérateur $\frac{1}{2}$ au nombre 1 est le nombre $0,5$. L'écriture d'une égalité telle que $1 \times \frac{1}{2} = 0,5$, que l'on simplifie en $\frac{1}{2} = 0,5$ (puisqu'on écrit aussi $1 \times 5 = 5$) constitue une étape dans la conceptualisation de la notion de fraction. D'autres étapes sont parcourues à l'occasion de l'introduction de nouvelles procédures. Par exemple, il est bien connu que la procédure d'addition de deux fractions est nettement plus difficile à acquérir que celle de multiplication. Cela n'est pas tellement dû aux difficultés techniques (réduction au même dénominateur, simplification) qu'au fait qu'une telle addition n'a de sens que si les fractions sont interprétées comme des nombres (quelle occasion a-t-on, à l'école primaire d'additionner deux opérateurs ?).

> L'application de procédures sophistiquées à une « notion » n'est possible que si celle-ci a atteint un niveau conceptuel suffisant. En même temps, elle renforce cette conceptualisation.

Les variables, les formules et l'égalité

L'utilisation de lettres dans des formules se rencontre dès l'école primaire. Ainsi, l'aire d'un triangle est donnée par la formule

$$\frac{b \cdot h}{2}$$

Par là, on peut dire que l'élève a rencontré la *notion* de variable : une lettre qui tient la place d'un nombre. Mais le *concept* de variable n'est pas nécessairement formé pour autant. Dans la formule ci-dessus, les lettres jouent le rôle d'abréviations, elles n'interviennent dans une procédure que pour y être immédiatement éliminées par remplacement par des valeurs numériques. La notion de variable n'a pas dépassé le stade procédural de marqueur indiquant la place où un nombre doit être inséré.

Pour que la notion de variable atteigne le stade conceptuel chez un élève, il faut que celui-ci considère la lettre comme étant un nombre à part entière, qui peut donc intervenir dans des opérations. Comment sinon donnerait-il un sens aux phrases suivantes ?

- la fonction qui applique x sur $2x + 3$
- l'équation $5x - 7 = 3x + 8$

Par la même occasion, nous voyons qu'un autre prérequis est nécessaire : l'élève doit reconnaître que les expressions $2x + 3$ et $5x - 7$ désignent elles-aussi des nombres. Or à l'entrée de l'enseignement secondaire, il éprouve encore des difficultés à maîtriser le fait que l'expression $5 + 8$, qui ne contient pas de lettres, désigne un nombre. (Voir les résultats d'une enquête réalisée par le *Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut*, [27], [28].) Effectivement, lors de ses premières rencontres avec le calcul numérique, l'enfant d'école primaire ne rencontre $5 + 8$ que dans le cadre d'un calcul à effectuer, calcul dont l'exécution est déclenchée par le signe $=$ qui généralement suit immédiatement. L'expression $5+8$ désigne donc exclusivement l'*opération d'addition* de 5 et 8 et non le nombre 13.

En même temps, nous constatons qu'à ce stade, le signe $=$ n'a pas le sens que lui donne le mathématicien (deux expressions sont égales si elles désignent le même objet), mais joue le rôle de « déclencheur de calcul ». Il est alors impossible de donner un sens quelconque à une égalité telle que $(5 + 8) + 2 = 5 + (8 + 2)$, (qui exprime d'un point de vue conceptuel une procédure que l'on applique en pratique : le passage à la dizaine supérieure).

Les conceptualisations de plusieurs notions sont ainsi liées :

- Les opérations de l'arithmétique élémentaire doivent passer du stade procédural (exécution de calculs) au stade structural en devenant elles-mêmes de véritables objets mathématiques. Une telle *réification* ([1]) est liée à l'étude de leurs propriétés (associativité, commutativité, etc.)
- Le signe $=$ doit passer du stade procédural de signal déclenchant un calcul au stade structural de symbole désignant une relation d'équivalence, sans doute la plus importante de toute la mathématique.
- Les lettres doivent passer du stade procédural de marqueur indiquant l'emplacement où insérer un nombre, au stade structural de variable qui est un nombre dont la valeur n'est pas précisée mais peut intervenir dans des calculs.

Simultanément, on constate que certains symbolismes deviennent ambivalents : $5 + 8$ désigne à la fois le nombre 13 et l'opération d'addition de 5 et de 8. La maîtrise par l'élève de cette flexibilité du symbolisme est un des facteurs de réussite.

Décrivons brièvement quelques exemples supplémentaires.

([1]) Du latin *res*, la chose.

Les fonctions

Le premier contact avec la notion de fonction s'effectue à travers des procédures : pendant longtemps une fonction est une règle, un algorithme qui permet de calculer $f(x)$ quand on connaît x. Bien souvent la fonction s'identifie à la formule qui résume l'algorithme (la fonction « $2 + 3x - 4x^2$ »). Les premières représentations graphiques de fonctions mettent en place des images mentales primitives. Bien du chemin est à parcourir avant d'arriver à la définition ensembliste de fonction. (Une fonction f de A dans B est une partie de $A \times B$ qui ne comprend pas deux couples de même origine.)

Les équations

Quand il apprend à résoudre une équation du type

$$x + 37 = 25$$

un élève n'a besoin que d'effectuer le calcul $25-37$. Son activité se situe au niveau procédural. Mais rapidement, il faudra manipuler les équations, remplacer $2x+3 = 4-x$ par $3x = 1$. On parlera d'équations équivalentes et la procédure de résolution consistera en une suite parfois longue de remplacements d'une équation (ou d'un système d'équations) par une équation équivalente (ou un système équivalent). Les équations ne sont plus alors seulement des procédures, elles sont devenues de véritables objets. L'étape ultime de l'accession au stade conceptuel pour les équations est achevée lorsqu'on accepte de considérer $x = 3$ comme étant une équation comme les autres, à ceci près que sa résolution est triviale.

Les transformations du plan

Au début du secondaire, un élève ne conçoit pas qu'une transformation du plan (par exemple une isométrie) s'applique à l'intégralité du plan. Il ne l'applique d'abord qu'à des figures simples telles que des polygones, (encore dans ce cas ne détermine-t-il que les images des sommets). Appliquer une transformation géométrique à un point s'effectue en manipulant des instruments (règle, compas). C'est bien là un stade procédural. Le stade conceptuel ne sera atteint que lorsque la transformation sera reconnue exister indépendamment de toute construction, ce qui implique qu'elle soit perçue comme s'appliquant à l'intégralité du plan. A ce moment, elle est devenue un véritable objet mathématique, auquel on peut appliquer de nouvelles procédures. A ce moment aussi, on peut considérer et structurer l'ensemble des isométries du plan.

Les limites

En analyse, la notion de limite d'une suite de nombres peut être rencontrée d'abord à travers des procédures. On peut par exemple rechercher des approximations de plus en plus précises d'une racine d'une équation par la méthode de bissection. On peut ensuite rencontrer la notion de limite d'une fonction en un point a au stade procédural en considérant des suites x_n convergeant vers a et les suites correspondantes des valeurs $f(x_n)$. Quant à la formulation traditionnelle en ε, δ, elle relève évidemment du stade structural.

L'implication

La manipulation correcte de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est évidemment essentielle pour l'apprentissage du raisonnement et de la démonstration. Comme toutes les autres notions, celle-ci est rencontrée d'abord au stade procédural : « de $\mathcal{A}$, je peux déduire $\mathcal{B}$ ». C'est suffisant pour de nombreux raisonnements. Mais dans cette interprétation, l'implication n'est pas un objet mathématique, il n'est pas possible de lui attribuer une valeur de vérité : les phrases « l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie » et « l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est fausse » se situent au niveau mathématique, alors que « de $\mathcal{A}$ je peux déduire $\mathcal{B}$ » et « de $\mathcal{A}$ je ne peux pas déduire $\mathcal{B}$ » relèvent du niveau métamathématique. Dans un raisonnement, si « je ne peux pas déduire » alors généralement je ne fais rien, ou je fais autre chose, mais de toutes façons je cesse de considérer cette implication-là.

Or, il arrive que l'on doive manipuler des implications et notamment les nier. Si l'implication n'a pas acquis un statut d'objet mathématique, en l'occurrence celui d'*opérateur binaire* sur l'ensemble $\{vrai, faux\}$, il est bien difficile de donner une signification à une phrase telle que

$$\text{non } (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = \mathcal{A} \text{ et non } \mathcal{B}$$

ou même à accepter que l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, et sa contraposée non $\mathcal{B} \Rightarrow$ non $\mathcal{A}$ sont équivalentes (toutes deux vraies ou toutes deux fausses).

Les quantificateurs

Les quantificateurs $\forall, \exists$ ont « mauvaise réputation », qu'ils soient écrits en symboles ou en français. Personne ne peut cependant contester leur nécessité même si dans certains sujets ils jouent un rôle limité. Il n'est en effet pas nécessaire d'écrire

$$\forall x \forall y : x + y = y + x$$

ou

$$\text{quels que soient } x \text{ et } y,\ x + y = y + x$$

pour faire comprendre que l'addition est commutative, l'égalité $x + y = y + x$ suffit. Le fait que les nombres x et y ne sont pas précisés permet de laisser implicites les quantificateurs universels (bien que d'un point de vue formel, il s'agisse là d'une erreur).

Les difficultés apparaissent surtout lorsqu'une phrase mathématique comporte à la fois des quantificateurs universels et existentiels. Ainsi, retirer les deux premiers quantificateurs de la définition de la continuité

$$(f \text{ continue en } x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon)$$

retire tout sens à cette phrase. Remarquons aussi que cette définition est tout sauf procédurale : l'existence d'un δ adéquat est affirmée sans qu'aucun moyen soit donné pour le calculer. Une *approche procédurale de la continuité* devrait permettre de donner plus de sens aux quantificateurs qui y figurent.

En informatique aussi . . .

L'évolution du procédural vers le structural qui se manifeste à propos de tout sujet mathématique est également présente en informatique. Les premiers programmes informatiques consistaient en une procédure (parfois monstrueuse) constituée de nombreuses instructions parfois enchevêtrées (on parlait alors de *programmation spaghetti*). Afin de maîtriser les programmes, les informaticiens ont ressenti la nécessité d'utiliser une *programmation structurée* en découpant notamment les grosses procédures en sous-procédures plus faciles à maîtriser. La distinction entre *variable locale* et *variable globale* a renforcé l'autonomie des sous-procédures, leur a associé des *structures de données* et a permis l'apparition de la *programmation récursive*.

Le premier contact avec la programmation récursive trouble souvent l'étudiant qui ne voit pas comment fonctionne la procédure de calcul. En fait celle-ci utilise les propriétés de l'objet à calculer plutôt que sa définition alors qu'en *programmation itérative*, c'est celle-ci qui joue le rôle déterminant.

Exemple 3.2.1

En programmation itérative, le calcul de la factorielle d'un naturel n *est effectué à l'aide d'une initialisation* $f = 1$, *puis d'une boucle qui traduit la définition de* $n!$:

$$\text{pour } i \text{ de } 2 \text{ à } n : f = f * i$$

En programmation récursive, ce calcul est basé sur la propriété $n! = n * (n-1)!$:

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ n * f(n-1) \text{ sinon} \end{cases}$$

La programmation récursive a constitué une étape vers la conceptualisation de la programmation. Avec l'introduction de la *programmation orientée objet*, le stade conceptuel est incontestablement atteint. Dans un tel langage, un objet est une structure comportant à la fois des données et des procédures qui manipulent ces données. De plus un objet étant désigné par un symbolisme propre peut même être considéré comme un *procept*, néologisme que nous rencontrerons dans la suite de ce chapitre.

Les exemples qui précèdent avaient pour but de montrer que le savoir mathématique se constitue normalement *du procédural au structural*. L'introduction d'un nouveau savoir se fait généralement soit sous forme d'une procédure, soit par l'intermédiaire d'une procédure. Un modèle mental ([2]) plus ou moins élaboré peut préexister à cette introduction. Dans ce cas les procédures soumises aux élèves ont notamment pour effet de le faire évoluer. Dans d'autres circonstances l'apparition d'un modèle mental sera due à l'application des procédures.

([2]) L'idée d'objet mental a été mise en évidence par H. Freudenthal, voir [73].

Le savoir évolue jusqu'au stade où il se constitue en un nouvel objet mathématique. De nouvelles procédures pourront alors être appliquées à cet objet, et le processus recommence. Par exemple lorsque la vision procédurale des fonctions numériques s'est muée en l'objet *fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, il devient possible de considérer des procédures qui s'appliquent à une ou des fonctions en tant qu'objets. On peut par exemple les additionner, les dériver. La procédure de dérivation va se transformer elle-même en un *opérateur de dérivation*, objet mathématique susceptible d'intervenir dans des procédures du niveau suivant, les transformations de Laplace ou de Fourier par exemple. Il n'y a aucune raison pour que ce processus s'arrête jamais.

Une fois formé, un concept devient autonome par rapport aux procédures qui ont contribué à sa création : je peux concevoir un cercle même sans disposer de compas. Et je peux transposer le concept à d'autres situations en appelant encore *cercle* l'ensemble des points situés à une distance donnée d'un point fixe dans des situations où le référentiel n'est pas le plan usuel. Il pourrait par exemple être restreint aux nœuds d'un quadrillage. Si le concept a été réellement acquis, l'objet *cercle* du quadrillage hérite sans difficulté de certaines propriétés de l'objet *cercle* du plan.

L'apprentissage de la mathématique peut donc être vu comme une succession, dans un parcours en spirale, de phases qui alternent l'acquisition de nouvelles procédures et celles de nouveaux concepts.

Notons aussi que des procédures peuvent être équivalentes en ce qu'elles fournissent le même résultat à partir de données identiques. Ce fait amène certains auteurs (voir [83]) à distinguer « processus » et « procédure ». Un processus serait un ensemble de procédures qui à partir des mêmes données, fournissent le même résultat. Elles amèneraient donc aussi la conceptualisation du même objet nouveau. Cette distinction généralise celle que nous pourrions opérer entre « fonction » et « algorithme » : pour calculer la fonction $x \mapsto 3x^2 + 2x + 5$, nous pouvons utiliser (au moins) les deux algorithmes différents suivants

$$\begin{array}{l} y \leftarrow x * x \\ y \leftarrow y * 3 \\ z \leftarrow 2 * x \\ z \leftarrow z + y \\ z \leftarrow z + 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} y \leftarrow 3 * x \\ y \leftarrow y + 2 \\ y \leftarrow y * x \\ y \leftarrow y + 5 \end{array}$$

Les procédures

1. Une procédure est une succession d'actions réalisées en vue d'obtenir un résultat (une sortie) à partir de données (des entrées).
2. Une procédure a un caractère dynamique : son déroulement a une dimension temporelle.
3. Plusieurs procédures peuvent être enchaînées, permettant ainsi la construction de procédures complexes à partir de procédures élémentaires.
4. Une procédure peut
   - soit introduire, par construction un nouvel objet : le comptage fait apparaître les nombres naturels
   - soit se transformer elle-même en un nouvel objet : la fraction, la transformation géométrique, l'équation . . .

Les concepts

1. Un concept est un objet auquel peuvent s'appliquer des procédures.
2. Un concept a un caractère statique : il est intemporel.
3. Plusieurs concepts peuvent se combiner pour en engendrer de nouveaux à l'aide de procédures adéquates.
4. Plusieurs procédures peuvent correspondre au même concept.
5. Un concept est autonome par rapport aux procédures qui l'ont engendré.

Un concept admet aussi souvent plusieurs représentations et ne peut donc s'identifier à aucune d'entre elles. Le concept de nombre rationnel ne se réduit ni aux fractions, ni aux expressions décimales limitées, de même que le concept de nombre réel ne s'identifie ni aux expressions décimales illimitées, ni aux fractions continues, ni encore aux limites de suites, aux classes d'équivalence de suites de Cauchy, ou aux coupures de Dedekind. Ces notions constituent autant de facettes différentes du concept de nombre réel, de sorte que toute définition trop précise de ce concept est réductrice. Nous retrouvons ici une ambivalence et une flexibilité dont la maîtrise conditionne la réussite en mathématique.

Une autre manifestation de flexibilité réside dans le fait que si un concept est autonome par rapport à la ou aux procédures qui l'ont engendré, il leur reste néanmoins associé. Par exemple après que le concept de fonction se soit constitué, il demeure possible d'utiliser une fonction comme une procédure de calcul de valeurs numériques.

Selon les circonstances, un concept peut donc être utilisé soit comme un *outil* par exemple lors de la résolution d'un problème, soit comme un *objet* quand on le considère dans ses relations avec d'autres concepts. Cette *dialectique outil-objet* a été étudiée par Régine Douady dans [63] qui en fait, avec les *changements de cadres* (dont nous parlerons plus loin) et les *résolutions de problèmes* un procédé de *construction effective des connaissances mathématiques*.

La dualité outil-objet a aussi amené Gray et Tall à introduire dans [83] le néologisme *procept* (procédure-concept) pour désigner l'entité constituée par un concept dans son double rôle d'outil et d'objet, dès qu'un *symbole* a été choisi pour la désigner.

Exemple 3.2.2 *Le procept* $37 + 78$ *désigne tant la procédure d'addition de 37 à 78 que le nombre 115 qui est la somme de 37 et 78.*

3.3. Du procédural au structural

Si l'apprentissage des mathématiques suppose, pour chaque élément de savoir un parcours du procédural au structural, la question qui se pose alors est de déterminer comment ce parcours se réalise, quelles en sont les étapes, quelles activités le ponctuent, et finalement, comment construire un enseignement qui en facilite la réalisation par l'élève. Le processus à analyser ne relève pas de la mathématique, mais de la psychologie cognitive. Il serait bien hasardeux de prétendre apporter des réponses simples et claires aux questions posées. Nous ne pouvons qu'essayer de faire le point sur le sujet.

Intéressons-nous donc à l'activité de structuration, en nous inspirant des travaux de A. Sfard, [134], E. Gray et D. Tall, [83], [142].

3.3.1 Les trois phases de Sfard

A. Sfard distingue trois phases dans la formation d'un concept, phases qu'elle appelle *intériorisation*, *condensation* et *réification* .

- Au cours de la phase d'intériorisation, l'élève se familiarise de plus en plus avec la notion étudiée, et cela à travers les procédures élémentaires qui la manipulent. Il ne quitte donc pas encore le stade procédural. Par exemple, lors de l'apprentissage du concept de fonction, il calcule de nombreuses valeurs de fonctions, il analyse les algorithmes utilisés, il rencontre la notion de variable, accepte qu'une lettre puisse prendre des valeurs différentes.
- Pour que la phase de condensation puisse avoir lieu, il faut que l'élève ait poussé l'analyse suffisamment loin pour distinguer l'essentiel de l'accessoire, les détails techniques des idées importantes. Sa connaissance des procédures s'organise (se structure). Il perçoit une procédure comme composée d'unités interconnectées dont il connaît l'usage propre et dont il peut retrouver les détails de fonctionnement sans devoir les mémoriser. Il peut ainsi débarrasser son cerveau de ces détails et se concentrer sur la structure. On peut considérer que le concept est apparu même s'il n'est pas encore maîtrisé.

  Dans le cas des fonctions, la phase de condensation est marquée par le fait que l'élève devient capable de se faire une idée globale du comportement de la fonction considérée, d'en dessiner le graphe, de la manipuler, de lui appliquer une transformation. Il peut par exemple transformer le graphe de la fonction $f(x)$ en celui de la fonction $f(kx)$ ou de la fonction $f(x-2)$. Il peut aussi dessiner le graphe de la fonction réciproque.
- L'élève en reste au stade de condensation tant que le concept reste dépendant de la procédure qui lui a donné naissance. Ce n'est que lorsque ce cordon ombilical tombe que s'opère la *réification* : l'élève conçoit le nouveau concept comme une entité autonome ayant désormais un caractère statique, la structuration s'achève, les liens entre différentes représentations et entre différents contextes d'apparition sont établis, les objets nouvellement conceptualisés s'organisent en structures, d'autres processus pourront être définis qui les prendront comme données.

Par exemple, une fonction numérique peut désormais être reconnue comme une formule, aussi bien que comme un ensemble de couples ou comme une courbe coupée en un seul point par toute parallèle à l'axe des ordonnées, et l'élève est capable de passer d'un de ces registres à l'autre. De plus, cette fonction peut aussi désormais être reconnue comme un élément d'un ensemble, ce qui permet de considérer en particulier l'intégrale comme une fonction définie sur un ensemble de fonctions. A ce moment, un nouveau processus de structuration (portant sur l'intégrale), du niveau suivant, peut commencer.

3.3.2 Les modèles mentaux

Nous avons déjà mentionné la possibilité que dès avant le début du processus de transition du procédural vers le structural, l'élève soit équipé d'un modèle mental correspondant plus ou moins au concept à acquérir. Si ce n'est pas le cas, un tel modèle mental pourra apparaître durant les phases d'intériorisation et de condensation.

Sur la base des exemples qui lui ont été montrés, l'élève réalise — plus ou moins consciemment — un inventaire de propriétés qui lui semblent caractéristiques du nouveau concept et utilise cet inventaire, plutôt que la définition précise, lorsqu'il se trouve devant la tâche d'identifier un exemplaire du nouveau concept. La liste des propriétés retenues peut être incomplète comme elle peut comporter des propriétés se déduisant les unes des autres. Elle est fortement dépendante du choix d'exemples effectué par l'enseignant, ainsi que de l'importance que celui-ci a accordée aux éléments constitutifs du nouvel objet.

Par exemple, un élève de la fin de l'école primaire peut reconnaître un rectangle à plusieurs caractéristiques :

- *un rectangle possède quatre côtés,*
- *ses quatre angles sont droits*
- *les côtés opposés ont même longueur*

Ce modèle mental est redondant en ce sens qu'il n'est pas nécessaire de vérifier toutes les propriétés qui ont été mentionnées. Dans une phase ultérieure de son évolution, l'élève apprendra qu'en effet, certaines propriétés se déduisent d'autres. Mais même s'il apprend à ne vérifier qu'un ensemble minimal de propriétés pour *démontrer* qu'un quadrilatère est un rectangle, il est très possible qu'il continue inconsciemment à se référer à l'ensemble des propriétés lorsqu'il s'efforce de reconnaître un rectangle dans les lignes constituant une figure.

Il est aussi possible que le modèle mental soit entaché d'informations parasites. Si les enseignants n'ont pas fait attention à varier la taille, les proportions et l'orientation des côtés des rectangles qu'ils placent sous les yeux de leurs élèves, ceux-ci pourraient ne pas reconnaître un rectangle dans le cas où celui-ci est fortement allongé, ou encore si ses côtés ne suivent pas les directions « horizontale ou verticale ». A l'occasion, des « conflits cognitifs » apparaissent entre le modèle mental présent chez un élève et les informations contenues dans la situation qu'il étudie. Ces conflits seront fructueux s'ils permettent de faire évoluer le modèle mental du sujet vers un modèle plus perfectionné et plus correct. Mais si l'évolution n'a pas lieu, si le modèle mental incorrect a une prégnance trop forte, un blocage très grave peut se produire.

Nous voyons que l'évolution des modèles mentaux peut constituer un élément inhérent à la construction du savoir par un processus d'affinements successifs. Ce processus s'achève lors de la phase de réification au cours de laquelle les modèles mentaux trop particuliers, ne rendant compte que partiellement du nouveau concept, doivent laisser la place à celui-ci dans sa forme (au moins provisoirement) finale.

Dans [24], Bakar et Tall rapportent les résultats d'une enquête menée auprès de deux groupes d'étudiants afin de déterminer leurs modèles mentaux du concept de fonction. Dans le premier groupe, constitué d'élèves de 16 à 17 ans de la fin de l'enseignement secondaire anglais, ils constatent l'existence de modèles exigeant que les fonctions soient définies sur l'intégralité de la droite réelle, ou encore de modèles qui acceptent qu'une fonction prenne plusieurs valeurs en un point. C'est ainsi qu'un cercle est considéré comme pouvant être le graphe d'une fonction par 64% d'élèves de ce groupe. Ces conceptions sont installées de façon durable, car elles se retrouvent dans le second groupe, constitué d'étudiants de première année universitaire en sciences mathématiques. 65% des étudiants de ce groupe considèrent également qu'un cercle peut être le graphe d'un fonction. Donner le cercle sous forme analytique, par son équation $x^2+y^2 = 1$ ne modifie pas sensiblement ce pourcentage. A noter aussi que dans ce groupe, l'équation $y = 4$ n'est reconnue comme définissant une fonction que par 30% des étudiants, cependant que la droite d'équation $y = 4$ est reconnue être le graphe d'une fonction par 55% d'entre eux. Ainsi dans leurs modèles mentaux, la notion de fonction suppose l'idée de *variation*. On comprend d'où provient cette malformation du concept : il a été créé pour étudier les quantités qui varient vraiment et non les autres, bien que finalement il doive englober les fonctions constantes.

Dans [127], Aline Robert étudie les modèles mentaux du concept de suite convergente, et met en évidence, dans une population d'étudiants français de DEUG scientifique, la prégnance du *modèle monotone* pour lequel le prototype de suite convergente est une suite monotone bornée. Seuls les étudiants ayant les meilleurs résultats arrivent à se forger un modèle statique, correspondant vraiment au concept. D'autres exemples pourraient être cités, notamment le fait que les représentations qui sont faites des fonctions continues tendent à faire passer (involontairement) un message parasite d'après lequel toute fonction continue est *monotone par morceaux*.

Pour résumer cette question, nous pouvons citer Bakar et Tall qui concluent leur article en disant qu'il faut faire face à un formidable obstacle :

> *The learners cannot construct the abstract concept of function without experiencing examples of the function concept in action, and they cannot study examples of the function concept in action without developing prototype examples having built-in limitations that do not apply to the abstract concept.*

3.3.3 La compression des idées

Comme on l'a constaté, Sfard s'attache à décrire l'évolution du procédural au structural dans sa globalité. Gray et Tall considèrent plutôt des éléments particuliers susceptibles de favoriser la structuration d'une notion donnée. Reprenant une idée de Thurston, [144], ils considèrent que le phénomène qui permet à une notion d'atteindre le stade structural est un phénomène de compression des idées, associé à un mécanisme qui relie cette notion à des connaissances antérieures. La compression permettrait non seulement de conceptualiser une notion, mais aussi de mettre en œuvre les concepts déjà formés en vue de comprendre une situation, résoudre un problème ou tout simplement approfondir une théorie.

La compression des idées est un phénomène difficile à décrire, mais il est familier à tous ceux qui ont étudié — et compris — des mathématiques non triviales. C'est peut-être le phénomène qui rend possible l'activité mathématique. Grâce à la compression, le cerveau ne doit plus mémoriser les aspects secondaires. Les liaisons établies lui permettent en cas de besoin de retrouver les détails utiles. Elles permettent aussi, et peut-être même surtout, de percevoir la notion étudiée dans des perspectives nouvelles, variées. Le cerveau étant concentré sur l'essentiel, les notions apparaissent plus simples, l'individu les maîtrisant plus facilement.

Mais en quoi consiste ce phénomène de compression des idées ? Il n'y a pas de réponse unique ni même de réponse tout à fait claire à cette question. Mentionnons ici les points relevés par Gray et/ou Tall.

- **La formation d'images mentales**

  Il est bien connu qu'un petit dessin vaut mieux qu'un long discours. Car un dessin fournit une image globale d'une situation. Comment saisir les propriétés de croissance et de décroissance d'une fonction, ses limites, ses asymptotes éventuelles sans disposer de son graphique ?

  Un dessin permet aussi, *a contrario*, de représenter des propriétés locales. Une fonction n'est-elle pas continue en un point si son graphe au voisinage de ce point a l'aspect d'un segment horizontal, à condition d'étirer suffisamment ce voisinage ? Et n'est-elle pas dérivable si, en zoomant suffisamment (dans les deux directions), le graphe a l'allure d'un segment (non nécessairement horizontal) ?

  Mais cet exemple des fonctions risque de mobiliser trop l'attention et de faire croire que la visualisation se limite à des situations mathématiques ayant des interprétations géométriques.

Dans tous les domaines, des représentations graphiques viennent au secours du mathématicien. Faut-il citer les diagrammes de Venn, qui aident à la compréhension de l'algèbre ensembliste, ou les nombreux diagrammes sagittaux ou schémas en arbre qui servent de support au raisonnement ?

A côté de ces images géométriques, réalisables sur papier, il en est sans doute d'autres, beaucoup plus difficiles à décrire, impossibles à dessiner et variables d'un individu à un autre, de vraies images *mentales* dont le rôle n'est pas moins important pour celui qui les conçoit. Hadamard parle d'images « vagues ».

- **Le symbolisme.**

  La création et l'utilisation d'un système de symboles permettant à la pensée de s'exprimer aisément jouent également un rôle capital dans la formation des concepts. Viète, considéré comme un des fondateurs de l'algèbre, utilise encore des notations compliquées pour désigner les carrés et les cubes : *A quadratus* et *A cubus*. Comment avec de telles notations manier aisément les puissances quelconques et mettre en place des procédures débouchant ensuite sur une conceptualisation ?

  Le symbolisme est parfois considéré comme un obstacle à la compréhension des mathématiques. Il faut rappeler que les mathématiciens n'utilisent des symboles que parce que cela permet de comprendre ce que l'on fait, de simplifier les raisonnements. Par exemple, il est certainement possible de se passer complètement du symbolisme vectoriel ou matriciel. Mais, par sa concision, ce symbolisme permet à l'utilisateur d'appliquer des procédures en se plaçant successivement à plusieurs niveaux. Si A et B sont deux matrices connues de taille $n \times n$, si y est un vecteur connu appartenant à $\mathbb{R}^n$ et si x est une colonne de n inconnues, on peut résoudre le système d'équations linéaires $Ax = By$ en restant dans une première étape au niveau matriciel : $x = A^{-1}By$. Ensuite, il sera bien entendu nécessaire de redescendre au niveau des nombres pour calculer le second membre. Ne pourrait-on dire que la notation matricielle permet de *décrire* le calcul à effectuer *avant* de l'effectuer ? On distingue ainsi plusieurs *niveaux de calcul*.

  Une telle démarche constitue un atout pour celui qui la maîtrise. Cependant, il n'est guère possible de mettre en place un calcul du second niveau tant que le calcul du premier niveau n'a pas été maîtrisé. Ceci constitue un exemple de ce que, dans certaines circonstances, le phénomène de compression des connaissances doit déjà avoir commencé pour que l'introduction d'un symbolisme concis soit ressentie comme une simplification par l'élève et ait pour conséquence de renforcer cette compression.

  Il semble assez naturel de demander que le symbolisme utilisé soit en harmonie avec le concept dont on vise l'apparition. Mais parfois, si un concept possède plusieurs facettes, il est bon d'adapter le symbolisme à la facette utilisée. Par exemple, on n'additionne pas deux translations, on les compose. Cependant une translation peut être assimilée à un vecteur, auquel cas il s'imposerait de parler d'addition.

Nous venons de retrouver la flexibilité des concepts et des symboles dont il a été question plus haut. Cette ambivalence constituerait également une des composantes du phénomène de compression en facilitant la maîtrise du sujet.

Par exemple, il est de coutume de désigner l'addition modulo 5 dans l'ensemble $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tout simplement par le signe + : $3 + 4 = 2$ signifie alors $(3+4)$ modulo $5 = 2$. En utilisant le même signe pour désigner l'addition dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}_5$, on induit chez l'élève le fait que cette addition dans $\mathbb{Z}_5$ possède les mêmes propriétés que l'addition usuelle. Qu'une telle affirmation doive être justifiée n'empêche pas que le phénomène de compression ait été favorisé par le choix de la notation.

D'après [83],

> *This ambiguous use of symbolism is at the root of powerful mathematical thinking and makes it possible to overcome the limited capacity of short-term memory. It enables a symbol to be maintained in short-term memory in a compact form for mental manipulation or to trigger a sequence of actions in time to carry out a mathematical process. It includes both concepts to know and processes to do.*

Apprendre les différentes interprétations d'un symbolisme donné est donc une des composantes du processus de structuration. Utiliser une interprétation du symbolisme ne relevant pas du stade procédural ne peut que poser des problèmes aux élèves qui n'ont pas encore dépassé ce stade pour le sujet étudié. Par exemple, l'expression $x + 3 = 7$ ne saurait être interprétée comme une équation que si l'élève a compris que dans ce cas, le signe + ne désigne pas une opération à effectuer.

- **La mémoire**

  La mémoire à court terme possède une capacité limitée. Le phénomène de compression permet de diminuer la quantité d'informations à mémoriser en donnant à l'utilisateur la possibilité de reconstituer cette information en cas de besoin. Il est cependant des séquences procédurales que l'on ne peut se permettre de reconstruire chaque fois qu'on en a besoin, sous peine de détourner l'attention de l'essentiel. La mémorisation (à long terme) de telles séquences routinières permettant de les appliquer d'une manière automatique contribue dans ce cas à la compression des connaissances.

  D. Tall ajoute immédiatement que les individus qui ne parviennent pas à comprimer suffisamment les informations mathématiques, utilisent cette troisième méthode — la mémorisation de procédures — comme mécanisme de défense. Mais ils ne peuvent appliquer ces procédures qu'une à la fois, et se condamnent alors à une vue procédurale des mathématiques, sans en acquérir une perspective globale. De plus les difficultés s'accumulent car « *it is more difficult to co-ordinate processes than manipulate concepts* ». Il conclut

  > *The failing student fails because he or she is doing a different kind of mathematics which is harder than the flexible thinking of the successful mathematician.*

3.4. Troisième synthèse : retour aux problèmes

Après avoir ainsi parcouru les étapes de l'apprentissage d'un sujet mathématique, après avoir désigné la résolution de problèmes comme étant la compétence terminale la plus importante en mathématique, il s'impose de chercher à intégrer les deux types de considération en étudiant leurs influences possibles sur l'organisation de l'enseignement.

C'est ce que nous ferons dans plusieurs des chapitres suivants, mais auparavant, nous devons approfondir notre réflexion relative aux problèmes.

Références

[24], [27], [28], [63], [73], [83], [108], [120], [127],[134], [142], [144].