

Chapitre 6

Le point de vue mathématique

6.1	Des cadres	92
6.2	Algébriser	94
6.2.1	Algébriser la géométrie	95
6.2.2	Algébriser les probabilités	98
6.3	Géométriser	102
6.3.1	Géométriser l'algèbre	103
6.3.2	Géométriser les probabilités	105
6.4	Approcher	108
6.4.1	Le rejet des approximations	109
6.4.2	Quelques inégalités	111
6.4.3	Un changement de cadre	113
6.4.4	Linéariser	114
6.4.5	Discrétiser	116
6.5	Numériser	117
6.5.1	Numériser l'arithmétique	119
6.5.2	Numériser l'algèbre	122
6.5.3	Numériser l'analyse	125
6.5.4	Numériser les probabilités	127
6.5.5	Numériser la géométrie	131
6.6	Probabiliser	138

6.1. Des cadres

Nous l'avons mentionné au chapitre 4 : d'un point de vue strictement mathématique, résoudre un problème passe généralement par la construction d'un *modèle* de la situation à étudier. Nous allons dans ce chapitre nous attarder — assez longuement — sur cette question, et plus particulièrement sur les caractéristiques des modèles à construire. A l'occasion, nous montrerons aussi à l'aide d'exemples, les dangers de certaines modélisations, et par conséquent la nécessité de les valider. Dans certains cas, il peut s'avérer utile de construire *plusieurs* modèles d'une situation donnée et de comparer les résultats. Un modèle mathématique se situe toujours dans un certain *cadre*. Au chapitre 5, nous avons donné la définition de *cadre* due à Régine Douady (définition 5.3.2). Celle-ci insiste sur le fait que les images mentales jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement des objets du cadre en tant qu'outils. Ainsi, *deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée*.

La notion de cadre est informelle, et n'est clairement pas susceptible d'une définition précise. Faisant intervenir des images mentales, elle est partiellement relative à l'utilisateur. Il n'est donc pas possible de faire un inventaire exhaustif de tous les cadres imaginables, encore moins de les décrire en détails. Nous pouvons cependant regrouper les cadres en familles et mettre en évidence certaines de leurs propriétés. C'est ce que nous ferons dans les paragraphes qui suivent.

La construction d'un modèle par un élève qui résout un problème s'effectue nécessairement dans un cadre qui lui est familier. Il dispose alors automatiquement des procédures et des concepts qui relèvent de ce cadre. Au cours de la résolution, il peut apprendre de nouvelles procédures, enrichir ses concepts. Son cadre de travail est donc susceptible d'évoluer tout en restant dans la même famille.

Mais il peut aussi arriver que les circonstances amènent l'élève-chercheur à abandonner la construction d'un modèle dans un cadre donné pour la réaliser dans un cadre différent. Nous avons donné un exemple de *changement de cadre* au chapitre 5. Nous en rencontrerons d'autres dans la suite. Si un changement de cadre fait progresser la résolution d'un problème, c'est qu'il permet d'utiliser des procédures et des concepts différents, et/ou de s'appuyer sur des images mentales différentes.

Pour être pleinement efficace lors de la résolution d'un problème difficile, un changement de cadre suppose de la part de l'utilisateur une conceptualisation suffisante des objets relevant des deux cadres. Mais un changement de cadre, réalisé à l'occasion d'un problème de difficulté limitée, peut aussi aider à la conceptualisation des objets d'un cadre grâce à la référence à ceux qui leur correspondent dans l'autre cadre.

La description des cadres et des changements de cadre qui suit fait apparaître — de façon exemplative et non exhaustive — toute une série de compétences d'ordre mathématique, qu'un élève doit maîtriser pour être en mesure de construire effectivement des modèles mathématiques. Nous ne les expliciterons pas systématiquement précisément parce que notre liste ne saurait être exhaustive. Le titre de chacun des paragraphes qui suivent est constitué d'un verbe faisant référence à une famille de cadres. Par exemple, sous l'intitulé « algébriser », nous examinerons quelques questions liées à la construction de modèles dans un cadre algébrique.