

6.2. Algébriser

6.2.1 Algébriser la géométrie

Algébriser est devenu une opération banale depuis la création de la *géométrie analytique* par Descartes, Fermat et quelques autres. Au passage, notons avec une pointe de regret la persistance de l'expression *géométrie analytique* dans laquelle le sens initial du mot *analytique* a été oublié depuis longtemps et qu'il vaudrait beaucoup mieux remplacer par *géométrie algébrique* (très élémentaire bien entendu). ⁽¹⁾

L'algébrisation de la géométrie n'a pas seulement permis de résoudre certains problèmes autrement inaccessibles, elle a également déterminé une évolution importante des conceptions géométriques elles-mêmes. Par exemple, la classification des courbes algébriques selon le degré de leur équation permet de comprendre *pourquoi* des courbes *a priori* très différentes comme une ellipse et une hyperbole sont en réalité de la même famille et susceptibles d'être étudiées ensemble. Elle fournit aussi un moyen de mesurer la complexité d'une courbe. C'est encore l'algébrisation qui permet de considérer et étudier des espaces de dimension supérieure à 3.

L'algébrisation de la géométrie est suffisamment banale pour qu'il ne soit guère nécessaire d'insister sur l'efficacité de la méthode. Mais elle est suffisamment banale aussi pour que nous ne soyons pas toujours pleinement conscients qu'il s'agit bien d'un changement de cadre et qu'avec les élèves des précautions doivent éventuellement être prises. Si le mathématicien confirmé finit par ne plus voir en une droite et l'équation d'une droite que deux facettes d'un même objet, il est loin d'être certain que l'élève du secondaire maîtrise ce changement de cadre avec la même dextérité. Le risque de *perte de sens* est donc très grand.

EXEMPLE 6.2.1 *On a parfois, dans certains manuels des années 70, rencontré des définitions du type suivant :*

- *Un point de \mathbb{R}^2 est un triple de nombres réels non tous nuls, écrits en ligne et donné à un facteur constant près.*
- *Une droite de \mathbb{R}^2 est un triple de nombres réels non tous nuls, écrits en colonne et donné à un facteur constant près.*
- *Une conique est une classe d'équivalence de matrices symétriques non nulles 3×3 données à un facteur constant près.*

⁽¹⁾ On trouve par exemple la définition suivante dans [43], ouvrage qui fut un des classiques du siècle dernier : *La géométrie analytique a pour but l'étude des figures par les procédés du calcul ou de l'analyse algébrique*. A l'époque, le mot *analyse* désigne une des phases de la résolution d'un problème (sens qu'il a conservé jusqu'à nos jours dans l'étude des « lieux géométriques ») et c'est bien l'adjectif *algébrique* qui indique le type des méthodes utilisées.

Si l'exemple qui précède est extrême, la perte de sens peut être effective de façon beaucoup plus insidieuse. N'existe-t-il pas de nombreux élèves parfaitement capables de dessiner une droite d'équation donnée ou de trouver l'équation d'une droite passant par deux points connus qui, cependant, n'ont pas conscience de ce que l'équation d'une droite est une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à cette droite ?

Appliquer la méthode *d'analyse algébrique* passe par le choix d'un repère. Une façon de lutter contre la perte de sens est la mise en évidence systématique des grandeurs invariantes par changement de repère car ces grandeurs correspondent à des propriétés géométriques intrinsèques, de vraies propriétés géométriques.

EXEMPLE 6.2.2

- Dans n'importe quelle base orthonormée d'orientation positive du plan, une rotation centrée en l'origine a une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Le nombre θ (défini à 2π près) est un invariant fondamental de la rotation : son angle.

- Les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique sont liés aux axes de la conique correspondante.
- Dans l'espace de dimension 3, la valeur absolue du déterminant d'une transformation linéaire est le rapport du volume de l'image d'un parallélépipède au volume de ce parallélépipède. Le signe de ce déterminant nous indique si la transformation conserve ou non l'orientation de l'espace.

Les remarques précédentes (dont nous ne pensons pas qu'elles épuisent la question) permettent de formuler des *compétences subordonnées* au changement de cadre *algébriser*, dans le cas de l'étude du plan ou de l'espace :

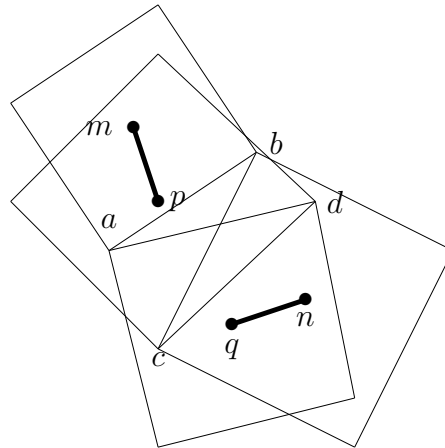
- distinguer différents types de repères (orthonormés ou non),
- distinguer différents types de coordonnées (rectilignes, polaires, ...)
- choisir à bon escient le type de coordonnées à utiliser en fonction du problème posé,
- connaître les invariants associés à un objet géométrique et à un type de coordonnées donné,
- interpréter des résultats algébriques en termes géométriques,
- ...

Plutôt que de donner ici des exemples (que tout le monde connaît) d'emploi de la géométrie analytique, attirons l'attention sur l'existence d'autres techniques d'algébrisation, et notamment de celle qui fait appel aux nombres complexes. Tout nombre complexe peut être représenté (une fois un repère choisi) par un et un seul point du plan. La bijection réciproque peut être exploitée. Elle permet souvent de traduire un problème géométrique en un problème de calcul sur les nombres complexes.

EXEMPLE 6.2.3 *Le problème suivant a été reproduit dans le n° 89 de Mathématique et Pédagogie, accompagné de trois solutions. Une lecture comparative de la première et la troisième de ces solutions montre qu'elles sont « isomorphes », tout en étant formulées dans deux cadres différents. Nous présentons ci-dessous une solution qui utilise les nombres complexes.*

PROBLÈME 6.2.4 *On considère un quadrilatère (plan) quelconque $abcd$ sur lequel on choisit un sens de parcours. Sur chaque côté, on construit un carré de façon qu'il soit situé à gauche du côté par rapport au sens de parcours. On note m , n , p et q les centres des carrés construits respectivement sur $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$ et $[d, a]$. Démontrer que les segments $[m, p]$ et $[n, q]$ sont perpendiculaires et de même longueur (Théorème de Laisant, 1877).*

Identifions le plan au corps des nombres complexes. Nous pouvons nous rendre du point a au point m en parcourant d'abord la moitié du segment $[a, b]$ puis en effectuant un quart de tour à gauche et en avançant d'une longueur égale à la moitié de celle du segment $[a, b]$.



Dans le cadre des nombres complexes, si nous notons m' le milieu $\frac{a+b}{2}$ du segment $[a, b]$, nous avons $m - m' = i(m' - a)$ puisqu'une rotation d'un quart de tour correspond à la multiplication par i . Par conséquent

$$m = \frac{1}{2}(a + b + i(b - a))$$

De même

$$n = \frac{1}{2}(b + c + i(c - b)), \quad p = \frac{1}{2}(c + d + i(d - c)), \quad q = \frac{1}{2}(d + a + i(a - d))$$

On en déduit

$$p - m = \frac{1}{2}(c + d - a - b + i(d + a - b - c))$$

et

$$q - n = \frac{1}{2}(d + a - b - c + i(a + b - c - d))$$

Donc $p - m = i(q - n)$ et le théorème de Laisant est démontré.

6.2.2 Algébriser les probabilités

L'algèbre, en particulier l'algèbre linéaire, fournit le cadre permettant la résolution de nombreux problèmes relatifs à des situations finies ou discrètes. Il n'y a à cela rien d'étonnant, car le phénomène linéaire est l'un des plus simples et plus naturels qui soient. Nous illustrerons ceci à l'aide de problèmes issus des probabilités et faisant intervenir des *graphes de flux* et des *probabilités de transition*.

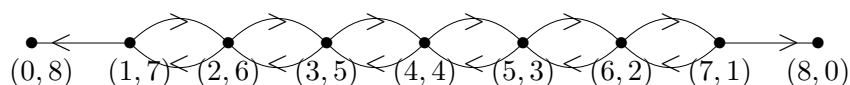
La méthode que nous allons rappeler étudie des *systèmes* susceptibles de se trouver en un nombre fini d'états et de passer d'un état à un autre. Certains états peuvent être *absorbants*, ce qui signifie que lorsque le système arrive en un de ces états, il y reste définitivement. Par contre, à partir d'un état non absorbant, il est possible d'effectuer des transitions vers d'autres états choisis aléatoirement en respectant des *probabilités de transition* invariables.

De nombreux jeux sont régis par des règles de ce genre, le gagnant étant celui des joueurs qui atteint le premier un état absorbant qui lui a été attribué comme but. L'exemple classique est le problème de la *ruine d'un joueur*.

EXEMPLE 6.2.5 Deux joueurs, notés P et F , jouent à « pile ou face » avec une pièce parfaitement symétrique. Au départ, P possède 5 francs et F possède 3 francs. A chaque lancer, celui des deux joueurs qui a perdu donne 1 franc à l'autre (P gagne si pile apparaît, F gagne si face apparaît). Le jeu s'arrête dès qu'un des joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité de ruine de chacun des joueurs ?

Tout en étant maîtrisable par des élèves très jeunes, cette situation fait intervenir un événement aléatoire simple, le lancer d'une pièce, et un événement aléatoire assez complexe, une partie, c'est-à-dire une suite d'un nombre indéterminé de lancers s'achevant par la ruine d'un joueur. Il faut donc distinguer soigneusement entre *gagner lors d'un lancer* et *gagner une partie*.

La modélisation d'une telle situation passe par la reconnaissance des *états du système*. Ici l'état d'un système est donné par l'avoir de chaque joueur. Au départ, le système est dans l'état $(5, 3)$. De là, il peut passer à $(4, 4)$ ou $(6, 2)$, puis, il peut revenir à $(5, 3)$ ou passer à $(3, 5)$ ou $(7, 1)$, etc. Le graphe suivant résume les transitions possibles.



La pièce étant parfaitement symétrique, chacune des deux transitions possibles à partir d'un état donné est de probabilité $\frac{1}{2}$.

L'état de départ est l'état $(5, 3)$. Le joueur P est ruiné si le système atteint l'état $(0, 8)$. La probabilité de ruine de P, que nous noterons x est la probabilité pour le système de passer de l'état $(5, 3)$ à l'état $(0, 8)$ à la suite d'un nombre indéterminé de lancers. Mais après UN lancer, le système a une chance sur deux d'être en $(4, 4)$ et une chance sur deux d'être en $(6, 2)$.

Introduisons deux nouvelles notations :

- y la probabilité pour le système de passer de l'état $(4, 4)$ à l'état $(0, 8)$ à la suite d'un nombre indéterminé de lancers,
- z la probabilité pour le système de passer de l'état $(6, 2)$ à l'état $(0, 8)$ à la suite d'un nombre indéterminé de lancers.

D'après les règles de multiplication et d'addition, nous pouvons écrire

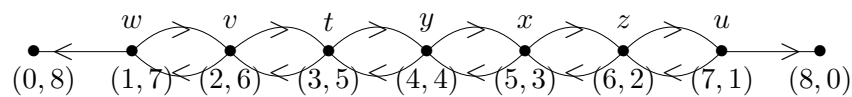
$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

On ramène ainsi le calcul de x à celui de y et z . Ces deux nouvelles inconnues seront elles-mêmes déterminées par la même méthode. Nous sommes donc amenés, pour chaque état non absorbant du système, à introduire une inconnue qui désigne la probabilité pour le système d'atteindre l'état $(0, 8)$ à partir de cet état non absorbant, et cela en un nombre indéterminé de lancers. Comme il y a 7 états non absorbants, nous aurons 7 inconnues, et nous pouvons écrire un système de 7 équations en ces inconnues.

Introduisons les inconnues :

- x est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(5, 3)$,
- y est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(4, 4)$,
- z est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(6, 2)$,
- t est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(3, 5)$,
- u est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(7, 1)$,
- v est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(2, 6)$,
- w est la probabilité d'atteindre $(0, 8)$ à partir de $(1, 7)$,

Chacune de ces probabilités doit être comprise comme se rapportant à un nombre indéterminé de lancers. Reportons ces notations sur le graphe, qui servira de support à notre raisonnement.



Nous guidant sur ce graphe, nous écrivons le système d'équations suivant :

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \quad (6.1)$$

$$y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x \quad (6.2)$$

$$z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u \quad (6.3)$$

$$t = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}y \quad (6.4)$$

$$u = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}0 \quad (6.5)$$

$$v = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}t \quad (6.6)$$

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v \quad (6.7)$$

Bien qu'il comporte 7 équations et 7 inconnues, ce système n'est guère compliqué à résoudre. L'équation (6.5) nous fournit $z = 2u$, ce qui nous permet d'éliminer z et nous ramène à un système de 6 équations :

$$x = \frac{1}{2}y + u \quad (6.8)$$

$$y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x \quad (6.9)$$

$$2u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}u \quad (6.10)$$

$$t = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}y \quad (6.11)$$

$$v = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}t \quad (6.12)$$

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v \quad (6.13)$$

De (6.10), on tire alors $x = 3u$, et on élimine x :

$$3u = \frac{1}{2}y + u \quad (6.14)$$

$$y = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}u \quad (6.15)$$

$$t = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}y \quad (6.16)$$

$$v = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}t \quad (6.17)$$

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v \quad (6.18)$$

De (6.14), on tire $y = 4u$ et on élimine y :

$$4u = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}u \quad (6.19)$$

$$t = \frac{1}{2}v + 2u \quad (6.20)$$

$$v = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}t \quad (6.21)$$

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v \quad (6.22)$$

De (6.19), on tire $t = 5u$ et on élimine t :

$$5u = \frac{1}{2}v + 2u \quad (6.23)$$

$$v = \frac{1}{2}w + \frac{5}{2}u \quad (6.24)$$

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v \quad (6.25)$$

De (6.23), on tire $v = 6u$ et on élimine v :

$$6u = \frac{1}{2}w + \frac{5}{2}u \quad (6.26)$$

$$w = \frac{1}{2} + 3u \quad (6.27)$$

De (6.26), on tire $w = 7u$ et on élimine w :

$$7u = \frac{1}{2} + 3u$$

Donc $u = \frac{1}{8}$, et la probabilité de ruine de P vaut $x = 3u = \frac{3}{8}$.

Remarquons que dans cet exemple, nous avons construit successivement deux modèles de la situation étudiée. Le premier est constitué d'un graphe de flux et relève du cadre de la théorie des graphes. Le second est le système de 7 équations à 7 inconnues, il relève du cadre de l'algèbre linéaire.

La même méthode peut être appliquée à de nombreuses situations constituant ce qu'on appelle des *chaînes de Markov* finies, à états absorbants. Certaines situations conduisent à des chaînes sans états absorbants. Le problème consiste alors à déterminer des équilibres du système, qui sont fournis par les vecteurs propres de la matrice des probabilités de transition. Un exemple d'une telle situation est fournie par l'application de la règle du bonus-malus en assurance automobile. On trouvera des indications complémentaires et des énoncés d'exercices sur le sujet dans [104], [106], [5] ou la plupart des ouvrages de probabilités.