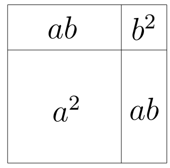
6.3. Géométriser

Construire un modèle géométrique d'une situation donnée ne doit pas être confondu avec « faire une représentation graphique ». Une telle représentation — par ailleurs éventuellement très utile — a pour premier but d'aider l'intuition et le raisonnement en fournissant un support visuel, mais ne fournit pas nécessairement d'outils nouveaux. Un vrai modèle géométrique doit permettre d'utiliser l'arsenal des outils de la géométrie synthétique afin de progresser dans la résolution du problème posé.

6.3.1 Géométriser l'algèbre

Des questions simples d'algèbre peuvent faire l'objet de modèles géométriques. Ainsi, chacun de nous connaît la figure ci-contre qui traduit géométriquement l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:



Ce que l'on sait peut-être moins, c'est que des modèles de ce genre auraient été employés dès la plus haute antiquité pour résoudre des équations du second degré. L'analyse suivante d'une tablette babylonienne est due à J. Høyrup et rapportée par Luis Radford, [126].

Exemple 6.3.1 *Traduit dans notre langue, le premier problème de la tablette babylonienne BM 13901 est le suivant :* J'ai additionné l'aire et le côté de mon carré et trouvé $\frac{3}{4}$.

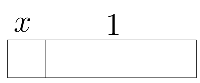
Il s'agit donc de résoudre l'équation $x^2 + x = \frac{3}{4}$. La suite de calculs figurant sur la tablette se traduisent pour nous en la formule

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

d'où $x = \frac{1}{2}$. La seconde racine étant négative n'apparaît évidemment pas chez les babyloniens.

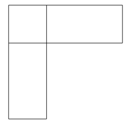
La question qui se pose maintenant est de savoir quelle signification ceux-ci accordaient à la suite de calculs reproduits sur la tablette. D'après Høyrup, l'« algèbre » babylonienne ne peut pas avoir atteint un stade conceptuel suffisamment avancé pour comporter le concept d'inconnue, susceptible d'être l'objet d'opérations arithmétiques. L'interprétation à donner aux calculs babyloniens serait plutôt géométrique. Ils comporteraient quatre étapes :

1. L'expression $x^2 + x$ est modélisée par une figure formée d'un carré et d'un rectangle ayant un côté commun avec le carré et dont l'autre côté mesure 1.

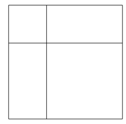


   La somme des aires du carré et du rectangle doit valoir $\frac{3}{4}$.

2. Le rectangle est coupé en deux et l'une des deux moitiés est accolée au côté inférieur du carré. La somme des aires n'a pas changé : $\frac{3}{4}$.



3. On complète la figure obtenue par un carré de côté $\frac{1}{2}$, de façon à constituer une carré d'aire 1.



   On arrive ainsi à l'expression $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 + x$ dont la valeur est $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

4. Puisque le grand carré est d'aire 1, la longueur de son côté est $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ c'est-à-dire 1. Mais cette longueur est aussi $x + \frac{1}{2}$. Donc $x = \frac{1}{2}$.

6.3.2 Géométriser les probabilités

Nous donnerons ci-dessous deux exemples de modélisation géométrique de problèmes posés dans un cadre probabiliste.

EXEMPLE 6.3.2 *Étant donné un nombre réel x, on notera $a(x)$ son arrondi entier, autrement dit, l'entier le plus proche.* (2) *Si x et y sont deux réels, quelle est la probabilité pour que l'arrondi entier $a(x+y)$ de la somme $x+y$ soit égal à la somme des arrondis entiers $a(x)$ de x et $a(y)$ de y ?*

Le problème peut bien entendu s'étendre aux arrondis à la n^{e} décimale, et on conçoit qu'il puisse être important lors de l'exécution de certains calculs numériques.

A priori, les probabilités dont il est question dans cet énoncé ne sont peut-être pas claires : comment déterminer la probabilité pour que l'arrondi d'un réel soit égal à 5 (par exemple) puisque la mesure de l'ensemble des réels est infinie ? Comme c'est souvent le cas, la première chose à faire est donc d'analyser l'énoncé et de le reformuler en termes qui ne prêtent pas à confusion. Ici, il nous suffira de fixer les valeurs de $a(x)$ et $a(y)$:

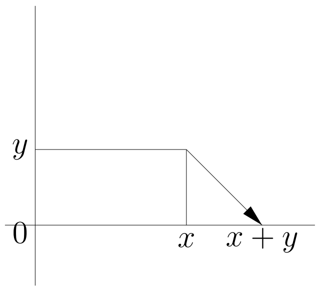
Connaissant les valeurs de $a(x)$ et $a(y)$, quelle est la probabilité pour que $a(x+y) = a(x) + a(y)$?

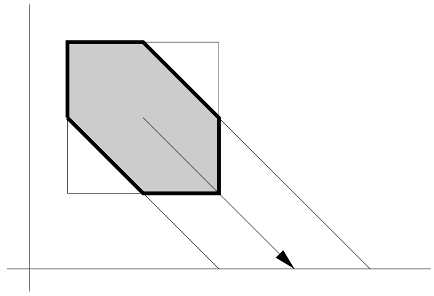
Posons $a(x) = x_0$ et $a(y) = y_0$. Nous nous limitons donc aux valeurs de x comprises entre $x_0 - 0,5$ et $x_0 + 0,5$ et à celles de y comprises entre $y_0 - 0,5$ et $y_0 + 0,5$. Nous nous orientons pour l'instant vers un modèle s'exprimant dans le cadre de la géométrie analytique : l'univers probabilisé est formé des couples (x, y) appartenant au carré $C = [x_0 - 0,5; x_0 + 0,5] \times [y_0 - 0,5; y_0 + 0,5]$. Les probabilités seront donc des rapports d'aires.

Pour achever la construction du modèle, interprétons l'addition en termes géométriques : les points $\binom{x}{y}$ et $\binom{x+y}{0}$ se trouvent sur une parallèle à la deuxième bissectrice. Géométriquement, l'addition est donc représentée par la projection du plan sur l'axe des abscisses, parallèlement à la deuxième bissectrice.

---

(2) Nous laissons au lecteur le soin de choisir lui-même une méthode de détermination de l'arrondi entier d'un réel qui est à égale distance de deux entiers.





Dans ce modèle, le problème revient à déterminer les points du carré C qui se projettent en un point situé entre $x_0 + y_0 - 0,5$ et $x_0 + y_0 + 0,5$.

La réponse est immédiate : ce sont ceux situés entre les deux parallèles à la deuxième bissectrice passant par les deux points $\binom{x_0+y_0-0,5}{0}$ et $\binom{x_0+y_0+0,5}{0}$. L'aire de cette zone, qui est la probabilité cherchée, se trouve facilement être égale à $\frac{3}{4}$.

Dans ce problème, la difficulté n'est pas tant de penser à un modèle géométrique — la situation ne fait évidemment pas intervenir des probabilités discrètes, un modèle continu est donc normal — que de penser à l'interprétation géométrique de la fonction de deux variables $(x, y) \mapsto x + y$*. L'interprétation courante de l'addition est celle d'un opérateur binaire. De cette vision, il faut glisser à celle de fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *et ensuite intégrer le fait, pourtant trivial, que la valeur de la somme* $x+y$ *est invariante au long d'une droite d'équation* $x + y = k$*. De là à penser à la projection oblique du plan sur l'axe des abscisses, il n'y a plus qu'un pas qui vaut la peine d'être franchi car d'une part il peut être réinvesti en d'autres occasions, d'autre part il contribue à la constitution des concepts d'*équation d'une droite *et de* forme linéaire.

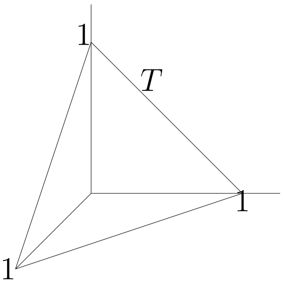
Le problème suivant est presque un classique du genre. Nous le présentons néanmoins car nous aurons l'occasion de le réutiliser dans le paragraphe **Numériser**.

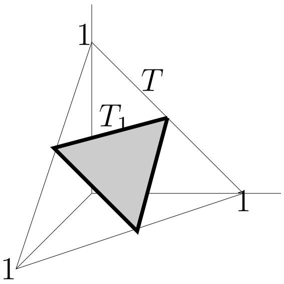
Exemple 6.3.3 *Un bâton est brisé en trois morceaux de longueurs aléatoires. Quelle est la probabilité pour que ces trois tronçons puissent être les côtés d'un triangle ?*

Ce problème peut faire l'objet soit d'un modèle de géométrie plane, soit d'un modèle de géométrie de l'espace. Nous choisirons ce dernier modèle car il respecte mieux les symétries de la situation.

Admettons que la longueur du bâton soit 1 et notons x, y et z les longueurs des trois morceaux.

Ces trois nombres sont donc compris entre 0 et 1 et leur somme vaut 1, ce qui a pour conséquence que le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au triangle T de $\mathbb{R}^3$ de sommets $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Choisir au hasard des nombres x, y et z compris entre 0 et 1 et tels que $x + y + z = 1$, c'est choisir au hasard un point de ce triangle T.





Il existe un triangle dont les côtés ont x, y et z comme longueurs si et seulement si les trois inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} x &\leqslant y + z \\ y &\leqslant x + z \\ z &\leqslant x + y \end{aligned}$$

Mais les équations $x = y + z$, $y = x + z$ et $z = x + y$ sont celles de trois plans passant par l'origine et coupant le plan d'équation $x + y + z = 1$ selon les droites joignant les milieux des côtés du triangle T. Les trois inéquations ci-dessus sont satisfaites si et seulement si le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au triangle T_1 ayant pour sommets les milieux des trois côtés de T. La probabilité cherchée est le rapport de l'aire de T_1 à celle de T, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$

Dans ces deux exemples le modèle géométrique a d'abord été construit dans le cadre de la géométrie analytique. Toutefois, dans les deux cas, ce ne sont pas des méthodes de géométrie analytique qui fournissent la réponse mais bien des résultats de géométrie synthétique qui permettent de déterminer les aires cherchées. Ceci nous permet de classer les modèles construits parmi les modèles géométriques plutôt que algébriques.