Chapitre 7

Le point de vue didactique

7.1. Introduction

En préconisant d'utiliser dans les classes une pédagogie centrée sur la résolution de problème, notre intention est de permettre aux élèves de pratiquer des activités mathématiques significatives dans un contexte qui leur soit adapté. L'une des retombées en serait l'appropriation par les élèves d'un plus grand nombre de concepts et de procédures mathématiques.

En particulier, on peut penser qu'ils maîtriseraient mieux des procédures et des concepts inventés ou étudiés dans le cadre d'une résolution de problème et pourraient de ce fait les transférer à d'autres contextes.

Dans ce chapitre, nous allons détailler diverses stratégies de résolution de problèmes, tout en rappelant qu'il n'existe aucune méthode universelle permettant d'arriver au but. La considération de *stratégies* de résolution s'inscrit dans le cadre de l'analyse faite du point de vue didactique au chapitre 4.

Mais avant de commencer, nous tenons à mettre en évidence un élément qui a de l'importance *avant même* que la résolution ne commence. Il s'agit des *systèmes de croyances* que les élèves ont *a priori*.

Ce sont les points de vue de chacun sur le monde des mathématiques, et l'approche individuelle des tâches mathématiques. Ces croyances peuvent modifier la façon d'attaquer un problème, ainsi que les techniques utilisées ou abandonnées. Elles établissent donc le contexte de travail lors d'une résolution de problème ([1]).

> EXEMPLE 7.1.1 *Si l'habitude est prise dans une classe de ne jamais présenter de « problèmes » dont la résolution dépasse les dix minutes (il s'agit alors plutôt d'exercices), un élève de cette classe aura tendance à croire qu'aucune résolution ne doit durer plus longtemps. En conséquence, un tel élève risque de très vite baisser les bras devant un problème sur lequel il aura travaillé sans succès durant plus de dix minutes. Il sera persuadé de son incapacité à trouver la solution et cessera de s'y intéresser.*

([1]) Schoenfeld discerne quatre dichotomies concernant les croyances estudiantines : empirisme et déduction, signification et forme, problèmes et exercices, passivité et activité mathématiques, voir [130].

7.2. Un découpage en épisodes

Les quatre phases de la résolution d'un problème énumérées au chapitre 4 étaient

1. l'analyse du problème
2. l'élaboration d'une stratégie
3. la vérification et la validation de la stratégie
4. la communication du résultat

En parallèle à ces phases, A.H. Schoenfeld a, dans ses travaux (voir [130]), fait ressortir divers types d'*épisodes* (c'est-à-dire des périodes durant lesquelles le chercheur se penche sur une tâche précise ou un ensemble de tâches destinées à atteindre un même but) susceptibles d'apparaître et de se répéter au cours de la résolution.

Seules les trois premières phases sont concernées par les épisodes. La phase de communication soulève en effet des questions d'une nature toute différente.

Les épisodes que nous discernerons sont les suivants :

- <u>Lecture</u>
- <u>Planification</u>
  C'est un type d'épisode dans lequel on tente de structurer la résolution, de la découper en sous-problèmes, de choisir une stratégie.
  Ce type d'épisode peut être *global* (il porte alors sur l'ensemble de la résolution et vient assez tôt) ou *local* (plan d'attaque d'un problème secondaire, qui peut se faire à tout moment).
- <u>Analyse</u>
  Ce sont des séquences de quête de propriétés découlant *directement* des données.
  A défaut d'une analyse suffisante, des méthodes alternatives (et souvent incorrectes) peuvent apparaître. Certains élèves cherchent des structures dans ce qui leur est proposé mais se basent plus sur les apparences que sur le sens. Des lacunes dans l'explication sont alors comblées de façon inadéquate. L'interprétation personnelle peut ainsi se substituer à la compréhension et empêcher le véritable apprentissage.
- <u>Exploration</u>
  Dans ce type d'épisode, l'élève tente de dégager des résultats en utilisant ses connaissances et les résultats des éventuels épisodes d'analyse.

La différence entre ces deux derniers types d'épisode est principalement qualitative puisque les épisodes d'analyse apportent souvent des résultats importants, qu'un peu d'exploration bien menée permet de transformer en la (les) réponse(s) souhaitée(s). La différence devient également quantitative quand on voit à quel point le temps consacré à des épisodes d'analyse peut être court par rapport aux épisodes d'exploration.

- Nouvelles informations

  Dans ce type d'épisode, généralement très bref et pouvant intervenir à tout moment, une nouvelle information importante apparaît. Ce peut être l'un des résultats obtenus au terme d'un épisode d'exploration ou d'analyse, ou encore *au cours* de l'un de ces épisodes. Dans ce dernier cas l'information apparaît un peu par surprise, et son utilité ne sautera généralement pas immédiatement aux yeux de l'élève. Elle ne sera éventuellement utilisée que dans un épisode ultérieur.

- Vérification

  Il s'agit d'épisodes dans lesquels, avant d'aller plus loin dans son analyse ou son exploration, l'élève tente de vérifier si une information, ou une idée, est correcte (ou efficace).

Notons qu'à ces types d'épisodes viennent s'ajouter des moments de transition, des joints entre les épisodes. Les décisions de *contrôle* (dont nous parlons plus loin) se prennent à ces moments. Elle peuvent casser ou mener à bien une résolution.

Nous allons à présent voir comment peuvent se répartir ces épisodes dans les diverses phases principales.

7.2.1 Phase 1 : Analyse du problème

Épisodes mis en jeu : lecture, analyse

La phase 1 est cruciale. Elle comporte toujours un épisode de lecture de l'énoncé. Ce temps consacré à la plongée dans le problème peut parfois être trop court.

Dans le cas d'une résolution en classe, la *dévolution* du problème à la classe, c'est-à-dire sa prise en charge par la classe *motivée* par la lecture de l'énoncé est un facteur important de réussite.

Notons que c'est lors de la première phase que les élèves vont délimiter un autre facteur important : les *ressources* dont ils disposent.

Par ce terme, on entend généralement :

- La maîtrise des concepts et des procédures, algorithmiques ou pas, liées au domaine du problème.
- Les concepts et procédures de base qui ne relèvent pas du domaine du problème, mais font partie du bagage mathématique supposé acquis.
- Divers faits particuliers liés au problème.
- Le temps.

Il faut en fait considérer les ressources que l'élève *suppose* siennes (mais qui peuvent être fausses ou inutilisables en vérité). Certains élèves se contentent d'étudier des procédures « mécaniques » dans des domaines sans les assimiler. Ces procédures et ces concepts « appris » non maîtrisés ne sont pas vraiment utiles et peuvent difficilement être considérés comme des ressources.

Après la lecture, un élève passe directement à la phase 2 si une méthode de résolution lui saute immédiatement aux yeux. Sinon, il passe dans un épisode d'analyse dont le but est la compréhension *en profondeur* ([2]) du problème.

Afin d'accomplir cet épisode, l'élève doit pouvoir :

1. isoler la (ou les) question(s) posée(s) dans le problème ainsi qu'éventuellement une ou des réponses possibles (que nous appellerons les *buts*),
2. discerner les données pertinentes,
3. comprendre les liens éventuels entre les données.
4. discerner les transformations applicables aux données (nous dirons les *opérations permises*),

([2]) Cette notion est très subjective et reflète l'avis de l'élève.

5. discerner les contraintes à respecter par les opérations permises,

Notons que cet épisode comprend l'élimination des informations *parasites* (qui n'ont aucune utilité quant à la résolution et peuvent égarer l'élève), et la recherche d'éventuelles informations *implicites* (qui sont parfois bien cachées et cependant très utiles).

EXEMPLE 7.2.1 *Dessiner quatre triangles isométriques au moyen de six allumettes, de façon que tout côté d'un triangle soit une allumette. On ne peut ni couper une allumette, ni en faire chevaucher deux.*

Nous allons appeler *état* du problème à un moment précis l'ensemble des informations disponibles à ce moment (à savoir les objets sur lesquels on opère, les opérations permises, les contraintes, et les éventuels résultats obtenus).

Dans notre exemple, l'état 1 est constitué de :

- BUT *: quatre triangles ayant des allumettes pour côtés,*
- DONNÉES *: 6 allumettes en vrac,*
- OPÉRATIONS PERMISES *:*
  - *positionner les allumettes (ce qui représente beaucoup d'opérations possibles !),*
  - *transformer le problème (modélisation, généralisation, ...),*
- CONTRAINTES *:*
  - *ne pas couper les allumettes,*
  - *ne pas faire chevaucher les allumettes,*

Les transformations du problème sont souvent oubliées, de même que les contraintes et les opérations permises sont souvent mal perçues.

Dans notre exemple, la solution apparaîtra lorsqu'on pensera à utiliser un positionnement tridimensionnel qu'aucune contrainte n'exclut. Si nous n'avons pas directement cette idée, nous pouvons transformer le problème en élaborant un modèle. Nous passerons du cadre « matériel » à un cadre « combinatoire » en dessinant un tableau à deux entrées (d'une part les six allumettes et d'autre part les quatre triangles). Une croix dans la case (A_j, T_k) du tableau signifie que l'allumette A_j est un côté du triangle T_k.

N'exclure aucune possibilité

Changer de cadre

L'état 2 du problème est donc le suivant :

- DONNÉES *: un tableau vide,*

	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1				
A_2				
A_3				
A_4				
A_5				
A_6				

- OPÉRATIONS PERMISES *: inscrire des croix dans le tableau*
- BUT *: disposer les croix de façon qu'il y en ait trois dans chaque colonne (tout triangle a trois côtés) et au moins une dans chaque ligne (toute allumette doit être côté d'au moins un triangle).*
- CONTRAINTES *:*
  - *ne pas couper les allumettes,*
  - *ne pas faire chevaucher les allumettes,*

  Ces deux contraintes ne s'expriment pas en termes de croix. Mais la première est automatiquement satisfaite tant que nous ne plaçons que des croix dans un tableau : nous ne « manipulons » ainsi que des allumettes entières. Il conviendra de vérifier que la seconde contrainte a bien été respectée.

On peut considérer que la construction du modèle achève la phase d'analyse. Il s'agit à présent d'élaborer une stratégie.

7.2.2 Phase 2 : Élaboration d'une stratégie

Épisodes mis en jeu : analyse, exploration, planification

Par le choix d'une stratégie, nous entendons l'élaboration d'une suite d'opérations permises liant les données au but (ou à l'un des buts).

Une stratégie peut apparaître immédiatement. Sinon, un nouvel épisode d'analyse ayant pour but le choix d'une stratégie peut succéder à l'analyse effectuée dans la phase 1. Ou encore, on peut réaliser un épisode d'exploration. c'est-à-dire une recherche plus ou moins heuristique de ce qui peut être utile *autour* du problème initial.

Si de nouvelles informations apparaissent au cours d'un épisode d'exploration, il peut y avoir un retour à un épisode d'analyse pour mieux comprendre le problème. Les nouvelles données ou contraintes sont propres au modèle choisi, mais doivent avoir la même signification que les données originelles (sans quoi on perd de vue le problème à résoudre). Nous trouvons donc ici des contraintes et des opérations modélisées. Le gain d'abstraction peut augmenter le nombre de contraintes.

La suite de la phase consiste en la mise au point d'un plan global d'application de la stratégie, l'élève passe donc dans un épisode de planification.

> *Dans notre exemple, la stratégie est assez claire : placer trois croix dans une colonne pour déterminer un triangle, puis trois croix dans la colonne suivante, etc. Mais combien de croix peut-on placer en ligne ? Un épisode d'analyse permet de préciser la stratégie : quatre triangles ont ensemble 12 côtés. Puisque nous avons 6 allumettes, il est normal d'essayer d'utiliser chacune deux fois. On essaye donc de placer deux croix dans chaque ligne et trois dans chaque colonne en tenant compte que deux triangles différents ne sauraient avoir qu'un seul côté en commun. Après quelques essais, on obtient la solution suivante, qui constitue l'état n°3 :*

Essais et erreurs

- DONNÉES *: le tableau*

	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	$\times$	$\times$		
A_2	$\times$		$\times$	
A_3	$\times$			$\times$
A_4		$\times$	$\times$	
A_5		$\times$		$\times$
A_6			$\times$	$\times$

- BUT *: un tableau comportant trois croix dans chaque colonne et au moins une dans chaque ligne,*
- OPÉRATIONS PERMISES *: aucune puisque le but a été atteint,*
- CONTRAINTES *: ne pas faire chevaucher les allumettes.*

Le fait qu'il reste une contrainte est dû à la transformation que nous avons fait subir au problème en construisant un modèle qui ne prenait pas cette contrainte en compte. Nous devons donc encore valider notre solution en retournant dans le cadre de départ : il s'agit de réaliser matériellement la configuration obtenue.

7.2.3 Phase 3 : Vérification et validation de la stratégie

Épisodes mis en jeu : planification, vérification, analyse, exploration

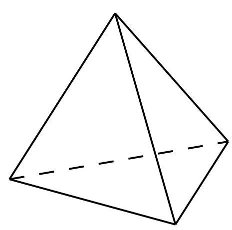
Dans cette phase, l'élève est amené à prendre des décisions majeures pour la résolution du problème, des décisions par lesquelles il *contrôle* son activité.

Ce sont des décisions sur les chemins à prendre, sur les directions à abandonner. Elles ouvrent de nouvelles voies, au risque de tomber sur une impasse ou de demander beaucoup d'efforts pour atteindre la solution.

Notons que les épisodes de planification vécus dans cette phase peuvent être locaux et concerner des sous-problèmes éventuels.

Lors d'une résolution, il arrive très fréquemment que l'on *boucle* sur les phases 2 et 3.

> *Dans notre exemple, la phase de vérification consiste à construire matériellement l'assemblage d'allumettes. Même si l'on est convaincu que les allumettes ne peuvent se placer que conformément aux indications du tableau, un blocage peut persister si inconsciemment on tient compte d'une contrainte inexistante : placer les allumettes dans un plan. Une nouvelle analyse des contraintes doit déboucher sur l'élimination de cette contrainte parasite et permettre de découvrir un tétraèdre régulier qui constitue l'état n°4 :*



7.2.4 Phase 4 : Communication des résultats

Les épisodes dont parle A.H. Schoenfeld ne sont plus concernés ici.

C'est dans la phase 4, au niveau des élèves, que la mise au point finale des idées intervient, que des avis se prennent (lorsque la communication se fait entre groupes), ...

La solution est rédigée de façon précise en respectant le formalisme usuel, qui prend alors tout son sens puisque les idées mises en forme sont celles des élèves eux-mêmes.

Cette quatrième phase de la résolution précède et intervient dans l'étape d'*institutionnalisation* qui a lieu à la fin du travail (voir chapitre 10).

Nous nous penchons plus précisément sur la communication des résultats dans des chapitres suivants, qui relatent des expériences faites en classe. Les unes furent ponctuelles (chapitre 18), et d'autres furent vécues sur un temps plus long (chapitre 20).

7.2.5 En observant ces épisodes

Étudier de divers points de vues l'activité d'un élève en train de résoudre un problème permet de mettre en évidence les épisodes décrits ci-dessus. Lorsque l'on s'attelle à une pareille tâche, il faut cependant veiller à repérer *toutes* les attitudes intéressantes d'un élève d'une part, et à optimiser d'autre part l'objectivité de l'étude. Pour ce faire, il faut distinguer soigneusement ce qui relève du comportement de l'élève des effets dus à l'interaction entre l'élève et l'enseignant.

Pour chaque personne qui résout un problème, on peut dresser un schéma qui ventile la répartition du temps de résolution entre les différents épisodes. C'est ce que nous avons fait à la fiche 2 du chapitre 11. La comparaison de ces schémas a permis à Schoenfeld de constater que les novices ne passent souvent que quelques instants à lire, et consacrent le reste du temps à de l'exploration. Au fur et à mesure que l'élève acquiert de l'expérience, il modifie son activité. Il en résulte que plus d'épisodes interviennent et que la répartition du temps entre les épisodes est modifiée en conséquence.

La difficulté de ce type d'étude est de bien cerner les épisodes, et de parvenir à les évaluer objectivement (notamment les procédures de prise de décision).

7.3. Des stratégies

Mais qu'entend-on au juste par stratégie ? Il s'agit de procédés de résolution (donc de choix d'une suite d'opérations permises) relativement indépendants de la nature du problème étudié. Ce sont en fait des conseils, souvent imprécis, qu'il faut savoir appliquer au moment opportun, mais qu'il faut aussi savoir NE PAS appliquer. De telles stratégies apparaissent chez un certain nombre d'auteurs, dont le plus connu est Georges Polya. S'il n'existe aucune méthode universelle permettant de résoudre n'importe quel problème, les stratégies dont il va être question peuvent aider considérablement à la découverte de la solution d'un problème en évitant de s'engager dans une voie sans issue et en contribuant à faire mûrir la situation jusqu'au point où le chercheur perçoit — souvent de façon intuitive — la démarche qui l'amènera au résultat escompté.

Ces stratégies font partie de l'*heuristique*. Par ce terme, on entend l'art de la recherche et de l'invention. Dans le cadre de la résolution d'un problème, c'est tout ce qui se passe *avant* que l'on ne trouve la « bonne » solution et que l'on procède à sa mise en forme. L'heuristique organise l'utilisation de différents processus mentaux (à divers niveaux de formalisation), y compris l'utilisation temporaire de processus déductifs.

Apprendre à résoudre des problèmes nous transforme en notre propre interrogateur. La résolution peut progresser si des questions pertinentes, permettant d'éviter de fausses interprétations sont envisagées. Parmi les plus fréquentes, on trouve : dénombrement (*Combien ? De combien de façons ?*), maximisation et minimisation, recherche de propriétés, recherche d'analogies, modélisation, ...Ces questions sont posées lors d'épisodes d'analyse ou d'exploration.

Passons à présent en revue quelques stratégies qui nous ont semblé importantes.

7.3.1 Travailler en marche arrière

Cette méthode est utile pour des problèmes satisfaisant à deux critères :

- le but est spécifié de façon unique (par exemple, les problèmes de preuve)
- les opérations permises sont inversibles

Dans cette méthode, on part du ou des buts possibles et on essaie de deviner un état ou un groupe d'états qui les précèdent et y conduisent.

Cependant, le but n'est pas traité en tant que donnée comme dans les démonstrations par l'absurde : la démarche reste orientée dans le sens des données vers le but.

7.3.2 Travailler en marche avant

Il s'agit dans cette méthode de partir des données et de leur appliquer des opérations permises en essayant de se rapprocher de plus en plus du but. On citera dans cette catégorie la modélisation (dont nous avons déjà parlé plus haut) ainsi que la méthode particulière du *Hill climbing* décrite par Wickelgren (voir [159]) et que nous illustrons par l'exemple suivant :

EXEMPLE 7.3.1 *On part de la suite de six bits* $1, 1, 1, 0, 0, 0$. *On demande d'aboutir à la suite* $1, 0, 1, 0, 1, 0$ *en un minimum de mouvements constitués de l'inversion (on remplace* 1 *par* 0 *et vice versa) simultanée de deux bits voisins.*

Les états du problème sont ici les suites de 0 et de 1 auxquelles on peut arriver en appliquant les « mouvements » indiqués. A part les transformations du problème imaginées par celui qui le résout, les seules opérations permises consistent à inverser deux bits voisins. L'état n°1 est donc constitué de

- DONNÉE : la suite $1, 1, 1, 0, 0, 0$,
- BUT : la suite $1, 0, 1, 0, 1, 0$,
- OPÉRATIONS PERMISES :
  - remplacer simultanément deux bits voisins par leurs inverses,
  - transformer le problème,
- CONTRAINTES : il n'y en a pas

Dans la suite, nous n'énumérerons plus systématiquement les données, les buts, les opérations permises et les contraintes pour chaque état.

Pour appliquer le *Hill Climbing*, on définit une fonction d'évaluation qui à chaque état du problème associe un nombre, pouvant être interprété comme étant la distance séparant l'état considéré du but. La stratégie consiste alors, à chaque étape, à effectuer une opération permise qui entraîne une diminution de la valeur de la fonction d'évaluation.

Dans cet exemple, un état est une suite de six bits égaux à 1 ou 0. Les opérations permises sont les inversions de deux bits adjacents. L'avant-dernière étape ne doit donc présenter que deux bits incorrects, et ces deux bits doivent être côte à côte. Dans la position de départ $1, 1, 1, 0, 0, 0$ *en considérant une numérotation de gauche à droite, on voit qu'il n'y a que deux bits incorrects, situés aux positions n°2 et n°5. Ces deux bits sont à la distance 3.*

Nous adopterons comme fonction d'évaluation celle qui associe à chaque état la plus grande distance entre deux bits incorrects. Le but ne comporte aucun bit incorrect. La fonction d'évaluation vaut dans ce cas 0.

Créer une fonction d'évaluation

La stratégie consiste à chaque étape à effectuer une opération permise qui fait diminuer la valeur de la fonction d'évaluation.

Par exemple, de l'état 1 $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$*, il est possible de passer à un quelconque des cinq états suivants :*

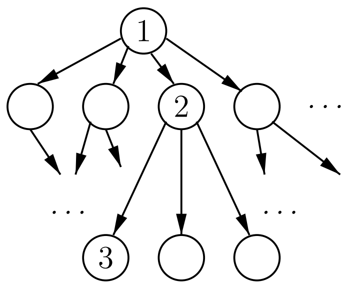
État	*Bits incorrects*	*Évaluation*
$0, 0, 1, 0, 0, 0$	*1 et 5*	*4*
$1, 0, 0, 0, 0, 0$	*3 et 5*	*2*
$1, 1, 0, 1, 0, 0$	*2, 3, 4 et 5*	*3*
$1, 1, 1, 1, 1, 0$	*2 et 4*	*2*
$1, 1, 1, 0, 1, 1$	*2 et 6*	*4*

Choisissant par exemple la suite $1, 0, 0, 0, 0, 0$ *comme état 2, on passe ensuite à* $1, 0, 1, 1, 0, 0$ *(évaluation :1) puis au but* $1, 0, 1, 0, 1, 0$*.*

Choisir la solution la plus efficace

Cette solution est minimale puisque la fonction d'évaluation décroît à chaque étape et que l'on ne peut espérer la faire diminuer de plus d'une unité à chaque étape. Dans cet exemple, un dessin du graphe complet des états permet de déterminer tous les chemins minimaux menant de la donnée au but.

En toute généralité, le graphe des transitions entre états est l'inventaire des états possibles ainsi que les opérations permises permettant de passer d'un état à un autre. La représentation par un graphe de ces états et de ces opérations permises peut aider à élaborer une stratégie de résolution. Notons que plusieurs chemins peuvent mener au même but.



7.3.3 Étudier des cas particuliers

Les deux stratégies que nous allons à présent aborder sont très proches, chacune gardant cependant ses spécificités. L'étude d'un cas particulier intervient lorsque l'on a déjà en tête la nécessité d'une généralisation, et il faut s'arranger pour que le cas choisi permette de mettre en évidence les propriétés du problème général.
La recherche d'exemples et de contre-exemples, comme nous le verrons ci-dessous, n'a pas pour objectif principal de généraliser, mais plutôt la familiarisation, la mise au point et la mise à mort de conjectures.

Exemple 7.3.2 *Que vaut la somme des n premiers entiers ?*

A moins d'avoir atteint un niveau conceptuel dans la manipulation des nombres, et qualifier d'exercice trivial ce problème, un élève passera par un cas particulier. Il se donnera une valeur de n, et raisonnera sur cette valeur, à l'instar de Gauss dans sa jeunesse.

Choisissons $n = 100$. C'est un nombre suffisament élevé pour que le calcul ne soit pas évident, et suffisament petit pour être manipulé facilement.

$$\begin{array}{rrrrcrrr} & 1 & 2 & 3 & \dots & 98 & 99 & 100 \\ + & 100 & 99 & 98 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \hline & 101 & 101 & 101 & \dots & 101 & 101 & 101 \end{array}$$

Dans ce cas particulier, on voit donc que la somme vaut $\frac{100\times 101}{2}$ c'est-à-dire 5050. La méthode se généralise facilement, et on conclut :

Généraliser

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Pour donner une autre référence classique, nous aurions pu également déduire la résolution générale du problème des *tours de Hanoï* en partant d'un cas à 6 disques, ...

Signalons à titre d'exemple plus parlant, l'installation du concept de somme de Darboux qui a fait l'objet d'une expérience en classe et dont nous parlerons plus loin (voir chapitre 12). Les élèves commencent par des découpages très simples (2 ou 4 intervalles) sur lesquels ils calculent procéduralement avant de comprendre le fonctionnement et de trouver des algorithmes.

7.3.4 Rechercher des exemples et des contre-exemples

Que dire sur cette stratégie qui ne soit déjà connu de tous ? La recherche d'exemples permet à la fois de s'approprier le problème et d'aboutir à des conjectures (qu'un contre-exemple peut démolir). Nous reprenons en illustration l'exercice cité par J. Mason dans [99].

EXEMPLE 7.3.3 *Prouver que tous les palindromes à quatre chiffres sont divisibles par* 11*.*

Notons qu'une définition peut s'avérer nécessaire (ici pour la notion de *palindrome*), et déjà faire l'objet d'une exhibition d'exemples. Mais l'exemplification lors de la résolution est différente puisque menée dans le but de répondre au problème.

> *Comme il existe* 90 *palindromes à quatre chiffres, compris entre* 1001 *et* 9999*, une vérification sur chacun d'eux serait très longue. On regarde les plus petits d'entre eux :* 1001, 1111, 1221, 1331 *et on peut en tirer une première conjecture :*
>
> > *On passe d'un palindrome à quatre chiffres au suivant en ajoutant* 110*.*
>
> *Or, comme* 1001 *et* 110 *sont divisibles par* 11 *(*$\frac{1001}{11} = 91$ *et* $\frac{110}{11} = 10$*), j'en conclus la thèse.*

Conjecturer

Si d'aventure, on envisageait de s'arrêter là, il serait bon de suggérer la quête de contre-exemples à la conjecture ci-dessus.

> *Si la conjecture était correcte, tous les palindromes à quatre chiffres se termineraient par* 1*. Or,* 2002 *est un palindrome à quatre chiffres, la conjecture est donc fausse. Il faut plus d'exemples pour mettre en évidence le principe de construction.*

Remettre en question en question la conjecture

1881		1991		2002		2112		2222		2332
	+110		+11		+110		+110		+110	

> *Grâce à cette exemplification plus avancée, on est amené à observer le passage au millier supérieur, et à conjecturer :*
>
> > *On passe d'un palindrome à quatre chiffres au suivant en ajoutant* 110 *au sein d'un même millier, et l'on passe au millier suivant en ajoutant* 11.
>
> *Et cette fois, on a couvert tous les cas.*

Cependant, rien n'empêche une première exemplification de mener à comprendre la *structure* de ces palindromes.

> *Les palindromes à quatre chiffres s'écrivent $ABBA$ où A et B sont des chiffres. On peut donc écrire :*
>
> $$\begin{aligned} ABBA &= 1000.A + 100.B + 10.B + 1.A \\ &= 1001.A + 110.B \\ &= 11.(91.A + 10.B) \end{aligned}$$
>
> *et on a la thèse.*

C'est là une résolution toujours basée sur l'exemplification, mais empreinte d'un niveau beaucoup plus conceptuel. Les manipulations sont effectuées sur la structure des palindromes, et non plus sur les palindromes eux-mêmes.

7.3.5 Changer de registre ou de cadre

Nous avons rencontré les changements de cadre et de registre aux chapitres 5 et 6. Contentons-nous d'attirer l'attention sur l'utilité de faire — en début d'une activité de résolution de problème — l'inventaire des cadres dans lesquels le problème peut éventuellement être traduit.

Le choix du registre, c'est-à-dire du mode d'expression, peut également influencer le travail de la résolution de façon substantielle. Trop souvent les registres graphiques sont méconnus. Abordons ce point.

7.3.6 Effectuer des représentations graphiques

Nous avons déjà parlé des images mentales au chapitre 3. Le passage à une représentation graphique est un changement de registre, nous n'allons donc pas modifier la nature des objets impliqués.

Sans même aller jusqu'à une manipulation possible dans le registre graphique, la réalisation (à des niveaux variables d'élaboration) d'un schéma représentant la situation peut aider à soutenir la pensée, voire à faire naître des idées neuves.

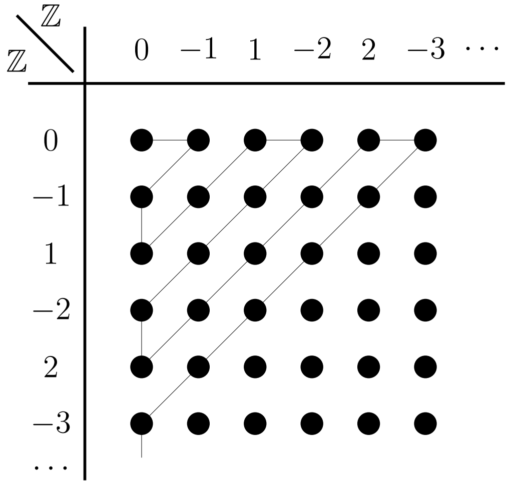
Exemple 7.3.4 *Etablir une bijection entre l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ et l'ensemble des $\mathbb{Q}$ des rationnels.*

On constate d'abord que tout rationnel est donné par un couple d'entiers, mais que des couples d'entiers différents peuvent donner le même rationnel. La réflexion sur des nombres peut n'aboutir à rien. Mais il n'est pas trop difficile de dessiner un tableau dans lequel chaque point représente un couple d'entiers.

Dessinons le tableau suivant :

$\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}$	0	-1	1	-2	2	-3	$\cdots$
0	●	●	●	●	●	●	
-1	●	●	●	●	●	●	
1	●	●	●	●	●	●	
-2	●	●	●	●	●	●	
2	●	●	●	●	●	●	
-3	●	●	●	●	●	●	
$\cdots$							

Le problème revient à relier tous les points en continu. On peut procéder de la manière suivante :



> *Nous avons ainsi concrétisé et défini une bijection* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$*. De là, on passe à une bijection* $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *en éliminant les redondances.*

Notons l'efficacité de cette représentation graphique qui nous a permis non seulement de trouver la bijection, mais de la définir rapidement, sans avoir à écrire son *algorithme* de construction. Ecrire cet algorithme et le programmer constitueraient un autre problème.

7.3.7 Raisonner par élimination

Une telle stratégie peut être envisagée lorsque le problème posé est ouvert, en ce sens qu'il n'énonce pas explicitement le but à atteindre ou qu'il énonce plusieurs buts possibles mais dont un seul est effectivement réalisable à partir des données et des opérations permises. L'exemple le plus simple d'une telle situation est celui d'une question à choix multiples, où le nombre de buts possibles reste généralement assez petit.

On peut alors effectuer une partie du chemin en partant des données, puis partir d'un but possible en tentant de remonter là où le chemin descendant s'est arrêté. Parfois, les deux morceaux de chemin ne peuvent pas se raccorder. Dans ce cas, on élimine le but qui vient ainsi d'être testé, et on essaie à partir d'un autre.

On peut considérer qu'une démonstration par l'absurde est un raisonnement par élimination : on élimine la négation de la thèse. Notons toutefois que dans ce cas, on ne construit pas un chemin remontant à partir de la négation de la thèse, mais bien un chemin descendant.

Il est possible que le nombre de buts possibles soit très grand, voire infini. On parle dans ce cas d'un *grand espace de recherche*. On applique alors la méthode à des classes de buts.

EXEMPLE 7.3.5 *Parmi* 24 *pièces de monnaie apparemment identiques, une pièce plus lourde que les autres s'est immiscée. On dispose d'une balance à deux plateaux. Comment retrouver la pièce plus lourde en un minimum de mouvements ?*

Chacune des pièces est un but possible. L'espace de recherche est donc assez grand. Nous diviserons les pièces en trois tas de huit pièces, et nous comparerons les poids de deux de ces tas. S'ils ont même poids, alors la pièce lourde est dans le tas restant. Sinon, elle est dans le plus lourd des deux tas pesés. Seize des buts possibles sont déjà éliminés !

Il nous reste huit pièces, dont nous extrairons deux tas de trois pièces. Si ces deux tas s'équilibrent, alors la pièce lourde est l'une deux pièces restantes, et une pesée de plus permet de la trouver. Sinon, elle est dans le plus lourd des deux tas et une comparaison de deux des trois pièces de ce tas, permet de découvrir la pièce lourde.

On trouve donc la solution en trois pesées, à condition de s'intéresser à des *classes* (dans ce cas, des tas) de buts (ici, les pièces).

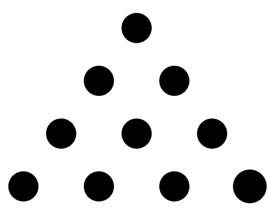
7.3.8 Raisonner par analogie

Le raisonnement par analogie est la quête de *structures* communes dans des problèmes différents, qui ne sont pas équivalents (c'est-à-dire dont les différences ne se limitent pas à la présentation ou au vocabulaire employé).

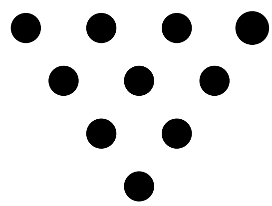
Un exemple facile serait la reprise du problème de la *pièce lourde* évoqué ci-dessus, mais avec un nombre de pièces ayant d'autres diviseurs que ceux de 24. Avec 25 pièces, par exemple, nous devrions résoudre le problème différemment, tout en reprenant le principe de la résolution à 24 pièces.

Considérons le problème des *boules de bowling* :

EXEMPLE 7.3.6 *Passer de la configuration A à la configuration B en ne déplaçant que trois quilles.*

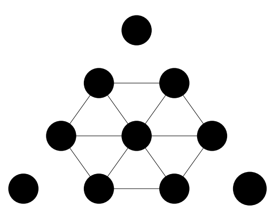


configuration A

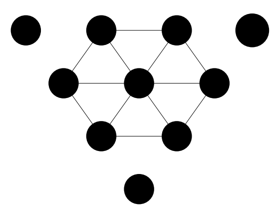


configuration B

On ne peut modifier la position que de trois quilles. Par conséquent, sept d'entre elles restent fixes. Essayons donc de trouver sept quilles dont les positions subsistent en passant de la configuration A à la position B. Seules les quilles suivantes vérifient cette condition :



configuration A

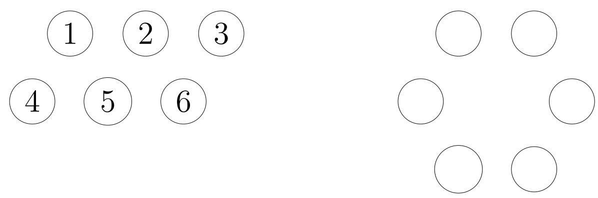


configuration B

La façon de déplacer les trois quilles restantes saute aux yeux.

Il est utile de se remémorer la résolution de ce problème de quilles lorsque l'on s'attaque au problème analogue suivant, le problème *des jetons* :

Exemple 7.3.7 *Passer de la configuration A à la configuration B en ne déplaçant que deux jetons.*



configuration A configuration B

On réinvestit la résolution du problème précédent en s'arrangeant pour trouver un ensemble de quatre jetons fixes. Ici, les jetons $(1, 2, 4, 6)$ *font l'affaire, ou encore les jetons* $(1, 3, 5, 6)$*. Il suffit de déplacer les deux jetons restants.*

Le raisonnement par analogie n'est bien entendu efficace que si l'on a déjà résolu beaucoup de problèmes auparavant, et que l'on a une bonne mémoire. Il faut donc essayer de se construire une « *problèmothèque* ».

7.3.9 Essayer et exploiter d'éventuelles erreurs

On distingue les méthodes :

- aléatoire (essayer tout et n'importe comment),
- systématique (on garde le souvenir de ce qui se passe à chaque essai),
- classificatrice (on range les divers essais dans des classes menant au même type de résultat).

7.3.10 Tenir compte des symétries des données

Cette méthode consiste à déterminer les données qui jouent le *même rôle*, et notamment à n'introduire des dissymétries dans le problème *que si* on a de bonnes raisons de le faire.

L'exemple du problème des lunules, dans la fiche 1 du chapitre 11 illustre cette méthode : une fois que l'on a compris la symétrie du problème, la solution devient presque triviale.

7.3.11 Rechercher des invariants

Lorsque l'on passe d'une étape à une autre dans la résolution d'un problème, il reste parfois des éléments qui ne varient pas.

On sait par exemple que le $PGCD$ de deux nombres naturels a et b tels que $a > b$ est égal au $PGCD$ de b et r où r est le reste de la division euclidienne de a par b. A chaque étape de ce calcul par l'*algorithme* d'Euclide, le $PGCD$ est donc un invariant, et l'on se sert de cette propriété dans la résolution.

7.3.12 Éliminer tout présupposé quant au résultat à obtenir

Nous donnerons plus loin un exemple dans lequel cette stratégie se révèle utile (voir le chapitre 9).

Cette section est à rapprocher des sections précédentes à propos des symétries des données et des invariants.

7.3.13 Communiquer à d'autres, oralement ou par écrit, le résultat, même partiel et provisoire, de ses cogitations

Voilà une stratégie qui, bien qu'informelle, est sans nul doute l'une des plus efficaces dans le milieu de la recherche, ainsi qu'au sein de groupes d'élèves résolvant des problèmes.

La découverte d'un contre-exemple, une remise en question par d'autres conjectures, l'apport de résultats inédits sont entre autres les avantages d'un travail de groupe.

Cette stratégie permet de coordonner toutes les autres, et de les faire fonctionner *en parallèle*.

7.4. Le contrôle de son activité par l'élève

Lors d'un *contrôle*, l'élève évalue son activité et la réoriente éventuellement dans une nouvelle direction. C'est par exemple au niveau du contrôle que sont gérées les ressources disponibles : les a-t-on toutes prises en compte ? Ne les a-t-on pas transformées ou altérées ?

La surveillance et l'auto-évaluation permanentes ainsi que le souvenir des essais infructueux, sont des composantes majeures d'un contrôle effectif de la résolution. Si le contrôle est efficace, toute ressource fait toujours l'objet d'un intérêt potentiel, et est prise en compte lors d'un changement de cap ([3]).

Nous distinguons trois sources de « points de contrôle » importantes qui peuvent apparaître au cours d'une résolution de problème.

- Les joints entre les épisodes.
- Les épisodes faisant apparaître des informations nouvelles, susceptibles de permettre une approche nouvelle. Ces apparitions peuvent avoir lieu au cours d'un épisode, mais ce n'est cependant qu'à la fin de celui-ci que l'élève les prend en compte.
- La présence de petites difficultés mineures indiquant qu'il y a peut-être quelque chose qui cloche (cette dernière catégorie est plus subtile).

([3]) Le lecteur trouvera un exemple de changement de cap chez un élève au cours d'une expérience réelle dans la fiche 1 du chapitre 11 (lorsque l'élève décide d'utiliser enfin l'information cruciale qui lui est apparue plus tôt).

7.5. Du côté des professeurs

Le travail des acteurs de l'enseignement varie de l'un à l'autre. Que font les enseignants lors d'une activité de résolution de problèmes ?

Faire travailler des élèves sur un problème requiert une certaine approche sociale (difficulté du travail en équipe, en classe), une bonne culture mathématique, une documentation importante et des moyens technologiques adéquats.

Dans ce cadre, les enseignants doivent être aussi des étudiants de l'apprentissage des élèves en situation de résolution de problème au lieu d'être eux-mêmes ceux qui résolvent les problèmes.

Le professeur doit pouvoir observer ses élèves, et ne donner des informations qu'au bon moment. Il ne faut pas qu'il en dise trop, et doit jouer un rôle de naïf vis-à-vis de ce que les élèves lui soumettent afin que les résultats soient *véritablement* obtenus par eux, et acquièrent un sens qui les convainque de l'efficacité de leurs méthodes et de la valeur de leurs résultats.

L'observation par le professeur peut parfois modifier involontairement le comportement de l'élève. Conscient de ce fait lorsqu'il pose des problèmes oralement, Allan Schoenfeld (voir [130]) intervient le moins souvent possible afin d'évaluer l'importance et le développement de certains phénomènes. Une autre raison de ce non-interventionnisme est que des remarques faites sur un premier problème (« *pourquoi as-tu choisi cette voie ?* », « *comment savoir si cette construction va aboutir à quelque chose ?* ») peuvent influencer la façon de résoudre un second problème. L'observation est alors faussée.

Lorsqu'un professeur et un élève dialoguent avec des appréhensions différentes des règles qui gouvernent leur discussion, il y a de grandes chances de voir apparaître de mauvaises interprétations et de l'incompréhension mutuelle. Afin de faire une étude utile, les réponses et le comportement de l'élève doivent être interprétées dans son référentiel propre, et non dans celui du professeur.

Illustrons ce type de dialogue de sourds par l'exemple suivant, tiré d'un copie d'un élève de rhéto (4 heures de math/semaine).

Exemple 7.5.1

$$-0{,}02 = 0{,}05 \sin\left(\frac{2\pi . 5}{1{,}5} - \frac{2\pi . 6{,}2}{\lambda}\right)$$

$$-0{,}4 = \sin\left(\frac{10\pi}{1{,}5} - \frac{12{,}4\pi}{\lambda}\right)$$

$$-2{,}5 = \sin\left(1200 - \frac{2232}{\lambda}\right)$$

$$-\frac{2}{5\sin} - 1200 = \frac{-2232}{\lambda}$$

$$-22{,}947 - 1200 = \frac{-2232}{\lambda}$$

$$-1222{,}947\,\lambda = \underline{-2232}$$

$$\lambda = \frac{-2232}{-1222{,}947}$$

$$\lambda = 1{,}825 \ldots$$

Tout d'abord, on y voit une confusion entre le nombre π et un angle de π radians, puisque le *symbole* π est allégrement remplacé par 180. Dans l'exemple, ce remplacement n'a pas de conséquence — sous la condition que l'élève aie remarqué que l'on prend alors la fonction sinus sur les angles en degrés et non plus sur les réels — mais on obtient une première source de conflit élève/professeur.

En effet, mettons-nous dans la peau de quelqu'un qui n'a aucun intérêt pour la mathématique, mais qui se voit *obligé* d'en pratiquer pour des raisons sociales. Il suffit pour résoudre l'exercice de remplacer π par 180. Pourquoi se compliquer la vie en tentant de comprendre la raison de cette possibilité de remplacement ? La conséquence devient alors la cause : « π vaut 180 », et le conflit naîtra dans d'autres exercices où interviennent des expressions comme $\sin(2\pi - \frac{2}{6})$.

Dans l'extrait ci-dessus, une seconde source de conflit se marque par l'apparition à la cinquième ligne du nombre $22,947$. Ce nombre est la valeur donnée à l'expression $\frac{2}{5\ \sin}$.

Dans le référentiel de l'élève, le sinus n'est autre qu'une touche sur une calculatrice, et l'exécution de la suite de commandes $2/(5\ \sin)$ donne le résultat $22,947$.

A un tel élève, il est très laborieux de faire comprendre que, bien que la machine donne un résultat, ce résultat ne correspond pas à la situation.

Références

[130], [159], [99].