Chapitre 9

Un problème passé au crible

9.1. Introduction

Nous avons personnellement voulu expérimenter une activité de résolution de problème. Voici un exemple de situation que nous avons rencontrée, et qui nous a plongés dans un environnement problématique. Dans la suite, nous tentons de cerner chacune des étapes de notre résolution.

Les deux « *décalages* » (voir plus loin) que nous avons appliqué au problème de départ montrent notamment comment l'esprit peut vagabonder et tenter de généraliser à partir d'une situation très précise.

Les fausses certitudes du départ (elle prendront leur sens au cours de la résolution) sont différentes des conjectures que l'on peut émettre, en ce sens qu'elles ne découlent pas d'observations, et qu'à aucun moment dans les premières étapes il n'a été envisagé de les remettre en question ou d'essayer de les prouver. C'est donc un facteur à ne pas négliger, des résolutions de problèmes peuvent aider à effacer des idées fausses.

9.2. Origine et exposé du problème

Le point de départ fut l'énoncé suivant :

PROBLÈME 9.2.1 *Une machine automatique distribue des timbres de* 3 *et* 5 *francs. Montrer que pour tout* $n \geqslant 8$, *la machine peut distribuer des timbres pour une valeur totale de* n *francs.*

On peut démontrer la thèse suggérée ci-dessus en employant la récurrence, et en déduire des algorithmes (récursif et itératif) donnant le nombre de timbres de chaque type pour atteindre la somme voulue.

A partir de là, nous nous sommes demandés quels étaient les couples de naturels engendrant tous les naturels à partir de leur somme par combinaison linéaire *naturelle*.

Un premier décalage du problème

DÉFINITION 9.2.2 *Une combinaison naturelle de deux entiers positifs* a *et* b *est une combinaison linéaire* $pa + qb$ *avec* $p, q \in \mathbb{N}$.

Bien entendu, par combinaison naturelle de deux nombres a et b, nous ne pouvons engendrer que des multiples de leur p.g.c.d. Et si nous pouvons les engendrer tous à partir de leur somme $a + b$, alors a et b sont nécessairement premiers entre eux. Dans ce cas, le théorème de Bachet-Bézout :

> *Étant donnés deux nombres entiers* a *et* b*, il existe deux entiers (non nécessairement positifs)* p *et* q *tels que la combinaison linéaire* $p.a + q.b$ *soit égale au p.g.c.d. de* a *et* b

nous permet d'être sûr de l'existence de deux entiers p et q tels que $pa + qb = 1$.

On trouve alors rapidement une condition *nécessaire* pour que deux nombres a et b premiers entre eux engendrent tous les naturels à partir de leur somme. En effet, puisqu'il existe dans ce cas des naturels ℓ et m tels que $a + b + 1 = \ell.a + m.b$, on a aussi

$$1 = (\ell - 1).a + (m - 1).b$$

Et comme $\ell \geqslant 0$ et $m \geqslant 0$, il existe des entiers p et q tels que $p.a + q.b = 1$ et

$$\begin{cases} p \geqslant -1 \\ q \geqslant -1 \end{cases}$$

Les coefficients p et q de la décomposition $1 = p.a+q.b$ ne sont pas uniques mais nous savons désormais que parmi les couples de tels coefficients, il en existe un constitué de deux nombres supérieurs ou égaux à -1. Par exemple, 3 et 5 engendrent tous les naturels à partir de leur somme et on a bien $1 = 2.3 + (-1).5$.

La condition n'est pas suffisante : si elle entraîne bien que $a+b+1$ est combinaison naturelle de a et b, elle n'entraîne pas que $a+b+2$ l'est aussi. Elle permet donc tout au plus de montrer que certains couples de naturels N'ENGENDRENT PAS tous les naturels à partir de leur somme.

Par exemple, IL N'EXISTE PAS d'entiers $p \geqslant -1$ et $q \geqslant -1$ tels que $p.11+q.13 = 1$:

$$p.11 + q.13 = 1 \iff p = \frac{1 - q.13}{11}$$

et

$$p \geqslant -1 \Rightarrow \frac{1 - q.13}{11} \geqslant -1 \Rightarrow q \leqslant \frac{12}{13}$$

Alors

$$q \geqslant -1 \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \text{ ou} \\ q = -1 \end{cases}$$

Or, si $q = 0$, alors $p = \frac{1}{11}$ et si $q = -1$, alors $p = \frac{14}{11}$. Dans les deux cas, p n'est pas entier. 11 et 13 n'engendrent pas tous les naturels à partir de 24. Par exemple, 25 n'est pas combinaison naturelle de 11 et 13.

Un second décalage du problème

Cependant, nous pouvons essayer de chercher s'il existe toujours un nombre, éventuellement plus grand que $a+b$ *à partir duquel*, deux naturels a et b premiers entre eux engendrent tous les naturels.

Utilisation de nos acquis

Supposons $a < b$. Il est clair que si a et b engendrent a naturels consécutifs n, $n+1$, …, $n+a-1$, alors a et b engendrent tous les naturels supérieurs à n.

En effet, supposons que $n, n+1, \ldots, n+a-1$ sont tous des combinaisons naturelles de a et b :

$$n = p_1.a + q_1.b, \qquad n+1 = p_2.a + q_2.b, \qquad \ldots$$

Alors :

$$n + a = (p_1 + 1).a + q_1.b, \qquad n + a + 1 = (p_2 + 1).a + q_2.b, \qquad \ldots$$

Munis de cette idée, il nous restait à trouver le plus petit n possible tel que n, $n+1$, …, $n+a-1$ soient des combinaisons naturelles de a et b.

9.3. La quête

Analyser des certitudes

Les deux grosses erreurs qui nous ont — dans un premier temps — menés loin de la solution sont déjà présentes à ce moment dans nos réflexions :

- la conviction qu'il n'y a pas de formule simple donnant toujours la plus petite valeur possible de n, et que tout ce que nous pouvons espérer est découvrir un algorithme de calcul de cette valeur,
- la *dissymétrisation* du problème en donnant à a, le plus petit des deux nombres, un rôle particulier alors que ce n'est pas utile. Cette dissymétrisation était induite par la remarque précédente.

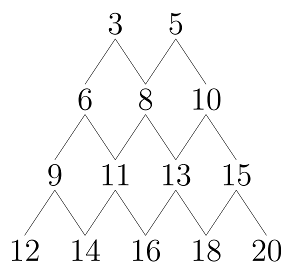
Nous sommes alors partis dans deux directions parallèles, l'une géométrique, l'autre algébrique, dans une quête de la solution entravée par les mauvaises pistes données ci-dessus.

Coordonner des cadres

La voie algébrique

Cette voie fut ouverte par la construction d'un arbre montrant quels nombres peuvent être engendrés par combinaisons naturelles de 3 et 5 :

Utiliser des exemples numériques



Chaque nœud de l'arbre possède deux fils obtenus l'un en ajoutant 3, l'autre en ajoutant 5. Comme les trois nombres consécutifs 8, 9 et 10 apparaissent sur l'arbre et que cette suite est la première à apparaître, on retrouve la réponse déjà connue.

Un graphe analogue, construit à partir de 11 et 13 montre que ces deux nombres engendrent tous les naturels à partir de 120.

Émettre et vérifier des conjectures

Une réflexion sur la construction de ces tableaux nous a menés aux résultats suivants.

Précisons d'abord le fait que, a et b étant deux naturels premiers entre eux tels que $a < b$, tout naturel est une combinaison linéaire à coefficients entiers non nécessairement naturels de a et b.

LEMME 9.3.1 *Il existe deux nombres entiers naturels c_a et c_b vérifiant les deux conditions suivantes :*

- $0 < c_a < b$ *et* $0 < c_b < a$
- *quel que soit le naturel p inférieur à a il existe des entiers $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $p = x_1.a+y_1.b$ et $-c_a < x_1 < 0$ et des entiers $x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $p = x_2.a+y_2.b$ $-c_a < y_2 < 0$.*

On détermine les nombres c_a et c_b de la manière suivante :

Première remarque : Puisque $0 < p < a < b$, dans toute décomposition du type $p = x.a + y.b$, un et un seul des deux coefficients x, y est strictement négatif.

Deuxième remarque : Puisque $b.a + (-a).b = 0$, si $p = x.a+y.b$, alors on a aussi $p = (x+b).a+(y-a).b$. Nous pouvons donc, si $x \leqslant -b$, ajouter b à x autant de fois que nécessaire pour obtenir une relation $p = x_1.a+y_1.b$ avec $-b < x_1 \leqslant 0$. La première remarque entraîne de plus $x_1 \neq 0$, donc $-b < x_1 < 0$.

Troisième remarque : Nous pouvons aussi écrire $(-b).a + a.b = 0$, ce qui nous permet par le même raisonnement, d'écrire $p = x_2.a + y_2.b$ avec $-a < y_2 < 0$.

Faisant varier p de 0 à $a-1$, nous obtenons $a-1$ valeurs de x_1 et $a-1$ valeurs de y_2. Nous noterons c_a le maximum des valeurs absolues de x_1, et c_b les maximum des valeurs absolues de y_2. Le lemme est ainsi démontré.

■

On obtient en conséquence le résultat suivant :

PROPOSITION 9.3.2 *Tout naturel au moins égal à $c_a.a$ ou à $c_b.b$ est une combinaison naturelle de a et b.*

Considérons d'abord $n = c_a.a$. Nous savons qu'il suffit d'établir que $n+1, \ldots, n+a-1$ sont des combinaisons naturelles de a et b. Soit p un naturel, avec $0 < p < a$. D'après le lemme, nous pouvons écrire $p = x_1.a+y_1.b$, avec $-c_a < x_1 < 0$ et $y_1 > 0$. Donc $(c_a + x_1).a + y_1.b$ est une combinaison naturelle de a et b égale à $n+p$. On procède de même pour $n = c_b.b$.

■

Cette proposition nous donne donc deux nombres à partir desquels nous sommes sûrs de retrouver tous les naturels sans pour autant affirmer que le plus petit d'entre eux est la solution optimale. Il suffit de considérer le cas $a = 3$, $b = 5$ pour constater qu'en effet, nous ne trouvons pas ainsi le plus petit naturel à partir duquel tout naturel est engendré par a et b. Remarquons néanmoins qu'il en découle que tous les entiers sont certainement engendrés à partir de $a.b$.

A ce niveau, nous sommes bloqués. Il aurait cependant suffi d'un peu de recul pour détecter la solution finale dans les exemples numériques !

La voie géométrique

Voici un exemple frappant de changement de registre et d'une nouvelle vision des choses qui peut en découler.

Changer de cadre

Toujours en supposant que a et b sont des naturels premiers entre eux tels que $a < b$, on écrit :

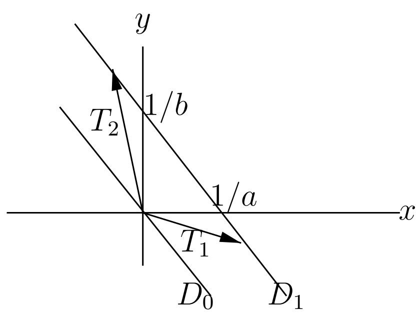
$$\begin{cases} b.a - a.b = 0 \\ -b.a + a.b = 0 \end{cases}$$

Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} \alpha.a - \beta.b = 1 \\ (\alpha - b).a + (a - \beta).b = 1 \end{cases}$$

On s'arrange pour avoir $\alpha, \beta \geqslant 0$ et $\beta < a$. Dans ce cas, $a - \beta \geqslant 0$ et $\alpha - b \leqslant 0$.

Dans $\mathbb{R}^2$, dessinons les droites D_k d'équations $x.a + y.b = k$ où $k \in \mathbb{N}$. Si le nombre k est engendré par a et b, la droite D_k contient un point $\binom{x}{y}$ à coordonnées naturelles. Nous dirons que ce point $\binom{x}{y}$ représente le nombre k. Notre problème consiste à déterminer à partir de quelle valeur de k, la droite D_k passe toujours par un point à coordonnées naturelles (entières et positives ou nulles).



Puisque $\alpha.a - \beta.b = (\alpha - b).a + (a - \beta).b = 1$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, les deux translations T_1 et T_2 définies ci-dessous appliquent la droite D_k sur la droite D_{k+1} :

$$T_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \qquad T_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \alpha - b \\ y + a - \beta \end{pmatrix}$$

Ces translations T_1 et T_2 appliquent tout point à coordonnées entières sur un point à coordonnées entières, mais pas nécessairement tout point à coordonnées naturelles sur un point à coordonnées naturelles. On pourrait faire remarquer que d'autres translations encore appliquent D_k sur D_{k+1}. Mais il n'est pas bien difficile de voir que si ni T_1 ni T_2 n'appliquent un point donné à coordonnées naturelles sur un point à coordonnées naturelles, alors aucune des autres translations ne le fait non plus.

Ainsi, si le nombre n est engendré par a et b, la droite D_n contient un représentant $\binom{x}{y}$ de n. Si le nombre $n+1$ est aussi engendré par a et b, l'un au moins des deux points $T_1\binom{x}{y}$ et $T_2\binom{x}{y}$ doit aussi être à coordonnées naturelles et représenter $n+1$.

Introduisons les notations suivantes :

$$
\begin{array}{rcl}
P_0 & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \right\} \\
P_1 & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P_0 \middle| \, T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P_0 \text{ ou } T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P_0 \right\} \\
P_2 & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P_0 \middle| \, T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P_1 \text{ ou } T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P_1 \right\} \\
\vdots & & \\
P_n & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P_0 \middle| \, T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P_{n-1} \text{ ou } T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P_{n-1} \right\}
\end{array}
$$

L'interprétation de ces notations est claire. Choisissons un point à coordonnées entières $\binom{x}{y}$ et posons $n = x.a + y.b$:

- $\binom{x}{y} \in P_0$ signifie que n est engendré par a et b.
- $\binom{x}{y} \in P_1$ signifie que n et $n+1$ sont engendrés par a et b.
- $\binom{x}{y} \in P_2$ signifie que n, $n+1$ et $n+2$ sont engendrés par a et b.
- ...

Notre problème revient donc à trouver l'élément $\binom{x}{y}$ de P_{a-1} qui minimise $x.a+y.b$, ce qui peut se faire en construisant P_{a-1}.

La construction est basée sur les deux remarques suivantes :

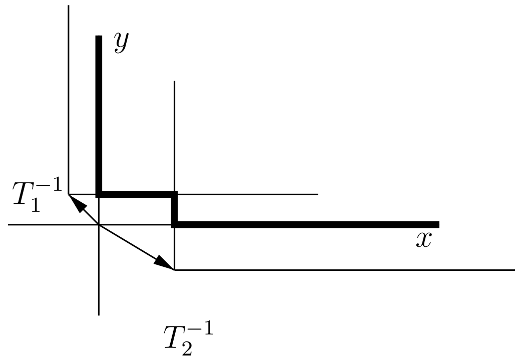
- P_0 est l'ensemble des points à coordonnées naturelles. Graphiquement, il est représenté par le premier quadrant.
- Quel que soit n, $\binom{x}{y} \in P_n \iff \binom{x}{y} \in P_0$ et $\left(\binom{x}{y} \in T_1^{-1}P_{n-1} \cup T_2^{-1}P_{n-1}\right)$

Ainsi, l'ensemble P_1 se construit en translatant P_0 par T_1^{-1} et par T_2^{-1} et en prenant l'intersection avec P_0 de l'union des images. On répète cette construction pour obtenir tous les P_i.

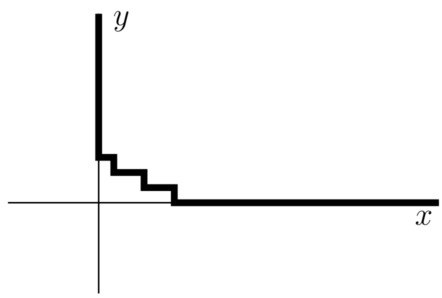
Prenons l'exemple de $a = 4$ et $b = 7$. On a alors $1 = 2.4 + (-1).7 = (-5).4 + 3.7$, donc

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \end{pmatrix}, \qquad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Le *sommet* de P_0 est le point $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, notons-le p_0. Nous en déduisons les coordonnées des trois sommets de P_1 : $p_{11} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $p_{12} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $p_{13} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$. Nous pourrions dire que P_1 s'obtient à partir de P_0 en en y faisant une « encoche ».



En répétant l'opération, nous construisons les ensembles P_2, P_3 et P_4. A l'étape k, nous considérons les images de P_{k-1} par T_1^{-1} et T_2^{-1} et nous éliminons les parties situées en dehors du premier quadrant. A chaque étape, nous constatons l'apparition d'une encoche supplémentaire. Les sommets sont successivement les points $\binom{5}{1}$ (étape 1), $\binom{3}{2}$ (étape 2), $\binom{1}{3}$ (étape 3). L'étape 4 n'apporte pas de modification à la figure finale :



L'ensemble P_4 est limité par la ligne brisée de sommets successifs $\binom{0}{3}$, $\binom{1}{3}$, $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{0}$. La valeur minimum de $x.4 + y.7$ est atteinte en $\binom{1}{2}$ et vaut 14. On note au passage que cette valeur minimum sera toujours atteinte non en un des sommets des encoches, mais en un des creux créés par ces encoches.

Dans l'exemple traité, une seule encoche supplémentaire apparaissait à chaque étape. Mais cette propriété ne se généralise pas nécessairement. La situation est alors devenue difficile à maîtriser, un nouveau blocage nous a fait abandonner cette voie.

Nous avons pourtant regardé le naturel $(b - \alpha).a + \beta.b = b.a - \alpha.a + \beta.b = b.a - 1$ qui est représenté par le sommet $\binom{b-\alpha}{\beta}$ de la première encoche. C'est ce sommet qui par translations successives engendre les autres sommets des encoches de la ligne brisée obtenue finalement.

Or à chaque translation créant une nouvelle encoche, le naturel représenté par le sommet diminue de 1, et tout sommet de la ligne terminale est obtenu en au plus $a-2$ translations à partir de $\binom{b-\alpha}{\beta}$ Ainsi nous pouvons être sûr que le minimum cherché ne sera pas supérieur à $a.b-1-(a-2)=ab-a+1$. Et même moins puisque clairement, le minimum ne sera pas réalisé en un sommet de la ligne brisée mais en un creux. L'expression $ab-a$ commence à nous trotter dans le crâne et vient mettre en cause la certitude que nous avions au départ, à savoir qu'il n'existerait pas de formule simple donnant la valeur du minimum. Simultanément, l'autre certitude est remise en question et nous voyons clairement apparaître notre problème de dissymétrie !

9.4. Retour à l'algèbre

Ce détour dans le monde de la géométrie, la maturation qu'il a provoqué, nous ont permis d'avoir l'intuition de la bonne réponse. Munis de ce $a.b - a + 1$, et ayant surpassé la dissymétrie, une idée a surgi. Le nombre cherché serait tout simplement $ab - a - b + 1 = (a - b)(b - 1)$. Un rapide contrôle montrait que dans tous les cas rencontrés antérieurement, la réponse était bien donnée par cette formule. Il ne restait plus qu'à trouver une démonstration.

Abandon des fausses certitudes

Nouvelle conjecture

Proposition 9.4.1 *Soient a et b deux naturels premiers entre eux. Alors*

$$n \geqslant a.b - a - b + 1 \Rightarrow \exists\ x, y > 0 : n = a.x + b.y$$

Démontrer

Choisissons d'abord $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $n = a.x + b.y$. Nous pouvons supposer $0 \leqslant x < b$: si cette relation n'était pas satisfaite, nous remplacerions x par son reste x_1 modulo b, et nous ajusterions y en conséquence, le remplaçant par y_1.

Il reste à prouver $y_1 \geqslant 0$. Or, $n > a.b - a - b$, donc :

$$a.b - a - b < a.x_1 + b.y_1 \leqslant a.(b-1) + b.y_1 = a.b - a + b.y_1$$

D'où successivement $-b < b.y_1$, $-1 < y_1$ et enfin $0 \leqslant y_1$.

■

Ainsi tout naturel au moins égal à $a.b - a - b + 1$ est combinaison naturelle de a et b. Pour établir que $a.b - a - b + 1$ est *le plus petit* naturel à partir duquel tous les nombres naturels sont des combinaisons naturelles de a et b, il reste à montrer que $a.b - a - b$ n'est pas combinaison naturelle de a et b.

Proposition 9.4.2 *Soient a et b deux naturels premiers entre eux. $a.b - a - b$ n'est pas combinaison naturelle de a et b.*

Supposons que $\exists x,\ y \in \mathbb{N} : a.b - a - b = a.x + b.y$

Alors $a.b = a.(x+1) + b.(y+1)$. Donc b divise $a.(x+1)$ et a divise $b.(y+1)$. Comme $\text{PGCD}(a, b) = 1$, on voit que b divise $x + 1$ et a divise $y + 1$.

Autrement dit, il existe des naturels q et r tels que $x + 1 = b.q$ et $y + 1 = a.r$, c'est-à-dire $x = b.q - 1$ et $y = a.r - 1$.

Alors,

$$a.x + b.y = a.b.(q + r) - a - b = a.b - a - b$$

Puisque $a.b \neq 0$, il faut donc $q + r = 1$, ce qui laisse les possibilités :

$q = 0$ et $r = 1$; alors $x = -1$ et $y = a - 1$
ou
$q = 1$ ou $r = 0$; alors $x = b - 1$ et $y = -1$

Dans les deux cas, on arrive à une contradiction puisque x et y sont des naturels.

■

Remarquons qu'il s'en déduit très facilement une condition nécessaire et suffisante pour que deux naturels a et b premiers entre eux engendrent (comme 3 et 5) tous les naturels *à partir de leur somme* :

$$\begin{aligned} (a-1).(b-1) = a + b &\iff a.b - a - b + 1 = a + b \\ &\iff a.(b-2) - 2.b + 1 = 0 \\ &\iff a = \frac{2.b - 1}{b - 2} \text{ avec } b > 2 \end{aligned}$$

Ceci revient à demander que $b - 2$ divise $2.b - 1$ et n'est possible que si $b = 3$ (alors $a = 5$) ou $b = 5$ (alors $a = 3$).

9.5. Commentaires

L'évolution de notre résolution de ce problème illustre diverses étapes par lesquelles on peut passer, et dont nous avons déjà discuté auparavant. La résolution a fait intervenir des épisodes d'analyse, d'exploration, des changements de cadre.

Nous avons fortement exemplifié le problème afin d'en saisir le fonctionnement avant de nous lancer dans sa résolution générale. Nous avons tenté de prouver différentes conjectures en les affinant peu à peu, et nous sommes passés par des phases graphiques nous montrant l'essence du problème sous un autre point de vue. Enfin, lors de nos blocages, nous avons toujours écrit toutes les idées qui nous sont venues, en passant en revue ce qui n'allait pas.

Au sens de [21], le problème que nous venons de présenter peut être qualifié de *problème ouvert* (1). Son énoncé est en effet court, et n'induit ni la méthode ni la solution. Les élèves peuvent s'emparer aisément de la situation.

Ce n'est par contre sûrement pas une *situation-problème*, et on perçoit le défaut de ne pas établir directement de passerelle vers autre chose. A part un peu d'arithmétique et d'algèbre, n'offrant dans ce cadre que très peu de possibilité d'extension, le problème s'arrêtera avec sa résolution, ne laissant finalement pas beaucoup d'*impressions* réutilisables par la suite. Cependant la « gymnastique intellectuelle » intervenue dans les différentes tentatives de résolution n'est pas nécessairement sans intérêt et a permis finalement la maturation débouchant sur l'*eureka* final.

Remarque

Nous avons peu de temps après nous être penchés sur ce problème appris que son énoncé figurait dans *au moins* un recueil de questions de type *Olympiades Mathématiques* (voir [15]).

De plus, il existe un mémoire de licence, réalisé à l'Université de Mons, présentant *le grand frère* de notre problème, puisqu'il s'agit de la résolution dans $\mathbb{N}^3$ de l'équation $a.x + b.y + c.z = n$ avec $a < b < c$ premiers entre eux (voir [35]).

On peut aussi se référer à un article (voir [149]) qui parle plutôt du problème d'origine (celui des timbres) et de deux autres problèmes de combinatoire.

Références

[21], [15], [35], [149].

(1) A condition de ne pas donner le résultat dès le départ.