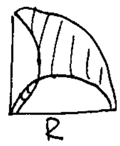
11.2. Fiche N° 1 : Un calcul d'aires

11.2.1 L'énoncé

PROBLÈME 11.2.1 *Déterminer l'aire de l'intersection de deux demi-cercles construits sur les bords rectilignes d'un quart de cercle (de diamètre deux fois plus grand), ainsi que l'aire incluse au quart de cercle et non-incluse aux deux demi-cercles.*



Ce problème est extrait de [7].

Volontairement, le dessin est réalisé grossièrement, afin que la position du point intersection des deux demi-cercles pose problème.

11.2.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

- Savoir déterminer l'aire d'un disque et d'un carré.
- Savoir reconnaître une symétrie axiale.

Les instruments de dessin

Au pire, on utilisera la règle et le compas, mais un bon cerveau est suffisant.

11.2.3 Exemple de résolution

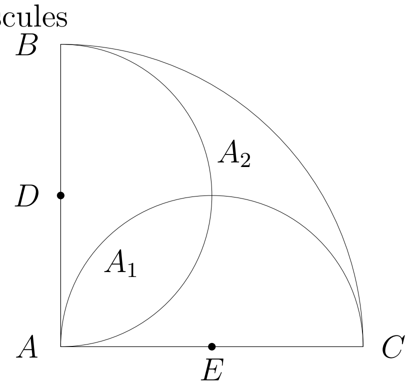
La lecture et l'analyse de l'énoncé doivent déboucher sur :

- La réalisation d'une figure *correcte*.
- La prise de conscience de la symétrie axiale existant dans cette figure, et de ses conséquences (en particulier, le quadrilatère $AEFD$ que nous décrirons plus loin se révélera être un carré).

Nous adopterons les notations suivantes.

Formaliser un énoncé

- Q est le quart de grand disque
- A est son centre
- B et C sont les sommets de Q
- le rayon de Q est noté r
- D_1 et D_2 sont les demi-disques de diamètres respectifs $[A, B]$ et $[A, C]$ et de centres respectifs D et E
- A_1 est la lunule $D_1 \cap D_2$
- A_2 est $Q \backslash (D_1 \cup D_2)$
- S est le secteur angulaire déterminé par l'angle aigu $\widehat{BAE}$
- les aires de chacune des surfaces ci-avant nommées porteront les mêmes noms, mais écrits en minuscules



La bissectrice d de S est un axe de symétrie de Q.

Exploiter les symétries d'une figure

Cette symétrie applique D sur E, donc le disque de centre D et de diamètre $[A, B]$ sur le disque de centre E et de diamètre $[A, C]$. Or, la symétrie envoie les points du premier quadrant sur les points du premier quadrant. Par conséquent, D_1 est envoyé sur D_2.

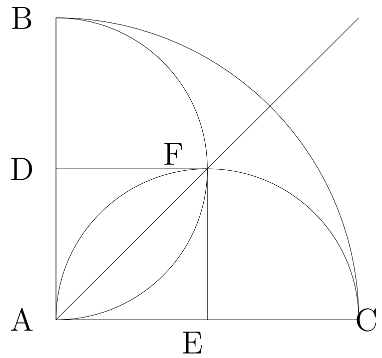
Appelons F l'intersection du bord de D_1 et de d. Ce point est bien entendu fixe pour la symétrie d'axe d, il appartient donc aussi au bord de D_2.

Les bords de D_1 et D_2 se coupent en A et F.

Comme $[D, A]$ et $[D, F]$ sont deux rayons d'un même demi-cercle, le triangle ADF est isocèle, de même que AEF.

De plus, les angles $\widehat{DAF}$ et $\widehat{FAE}$ valent 45°, donc $\widehat{DFA} = \widehat{AFE} = 45°$ et l'angle $\widehat{DFE}$ est droit.

On en arrive donc à la conclusion que le quadrilatère $AEFD$ est un carré. Une justification plus détaillée ne doit pas nécessairement être produite par des élèves.



Comparer des grandeurs

Montrons à présent que les aires a_1 et a_2 sont égales . Remarquons tout d'abord que $d_1 = d_2$ puisque D_1 et D_2 sont chacun la moitié d'un disque de même rayon.

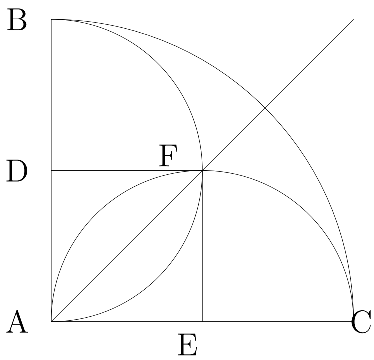
$$q = \frac{\pi . r^2}{4}$$

$$d_1 = d_2 = \frac{\pi . (\frac{r}{2})^2}{2} = \frac{\pi r^2}{8}$$

Nous pouvons aisément exprimer l'aire a_2 en fonction des autres aires. Puisque $Q \backslash A_2 = D_1 \cup D_2$, on a :

$$\begin{aligned} q - a_2 &= d_1 + d_2 - a_1 \\ a_2 &= q - d_1 - d_2 + a_1 \\ &= \frac{\pi r^2}{4} - 2 \times \frac{\pi r^2}{8} + a_1 \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Considérons le carré $AEFD$. Son aire vaut $(\frac{r}{2})^2 = \frac{r^2}{4}$



On a donc :

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 &= \frac{d_1}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{d_1}{2} \\ &= d_1 - \frac{r^2}{4} \\ &= \frac{\pi.r^2}{8} - \frac{r^2}{4} \\ &= \frac{r^2}{8}.(\pi - 2) \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé les deux aires demandées.

11.2.4 Etude d'une expérience menée auprès d'élèves

Nous avons filmé, individuellement ou par groupe de deux, des élèves de dernière année du secondaire provenant de sections auxquelles au moins six heures de mathématiques sont dispensées par semaine. Au cours de ces prises de vues, ils avaient accepté de se soumettre à la résolution d'un problème.

La question posée était celle qui est proposée ci-avant. Les élèves avaient pour consigne de la résoudre en une vingtaine de minutes, sans possibilité d'obtenir un renseignement autre que l'énoncé. Un dessin rapide et imprécis (sur lequel la position du point d'intersection des deux petits demi-cercles n'était pas flagrante) accompagnait cet énoncé.

Afin de mieux saisir nos expériences, nous présentons tout d'abord les faits exhaustifs de l'une d'entre elles. De toutes les expérimentations réalisées, nous avons ensuite réalisé des graphiques, lesquels sont inspirés par les compte-rendus de A.H. Schoenfeld ([130]).

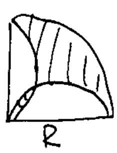
Ces graphiques présentent le temps consacré à chaque *épisode* de la résolution. Les significations que nous donnons (voir chapitre 7) aux divers épisodes ne sont pas *strictement* les mêmes que celles que donnent Schoenfeld, mais elles collent mieux à la présente expérience.

Rappelons que chaque transition entre les épisodes est un moment de remise en question, et que des changements de direction peuvent survenir à cette occasion.

11.2.4.1 Une expérience

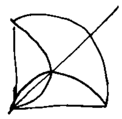
Voici donc le récit de l'expérience ayant abouti au graphique de l'exemple 1, repris ci-dessous. Nous appellerons V l'élève. Celui-ci effectue ses dessins au tableau. Nous les reproduisons ici, aussi fidèlement que possible. Toutefois, nous isolons les fragments utiles de dessin lors des passages où l'entièreté de l'épure est confuse.

1 min 20 s



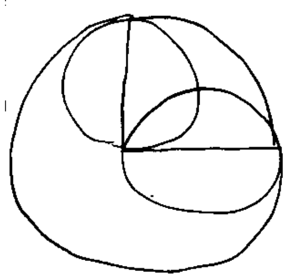
Le dessin est encore incorrect. V nomme R le rayon. L'aire du demi-disque dont le bord rectiligne est horizontal vaut $\frac{R^2}{4}\pi$. Il faudra plus tard enlever cette aire de celle du quart de grand disque.

Ici se terminent successivement de très courts épisodes de lecture, d'analyse (aire du demi-disque) et de planification.



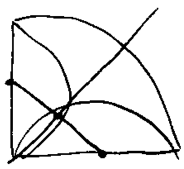
V trace la bissectrice.

2 min



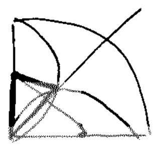
Nouveau dessin, toujours basé sur celui, imprécis, de l'énoncé.

2 min 50 s



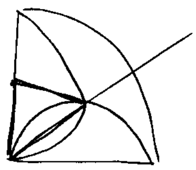
V relie les centres des deux demi-cercles et met en évidence leur intersection avec la bissectrice.

3 min 19 s



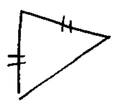
V porte son attention sur un triangle.

3 min 40 s



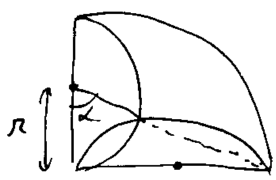
La demi-aire du « fuseau » sera l'aire du secteur circulaire contenant le triangle moins l'aire du triangle.

V vient de finir un épisode d'analyse, qui débouche sur un court épisode de planification.



Le triangle est isocèle, car deux de ses côtés sont en fait des rayons du demi-cercle et ont par conséquent la même longueur.

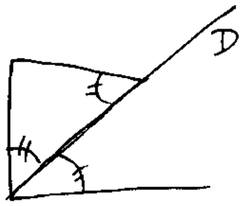
4 min 10 s



V croit que le triangle pourrait peut-être se prolonger en un triangle rectangle (voir dessin). Il essaie alors de calculer l'angle α sachant que $R = 2r$. Cette idée est vite abandonnée.

4 min 40 s

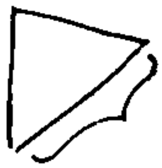
5 min 20 s



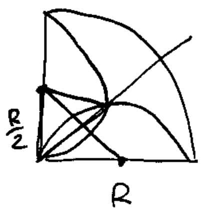
Deux des angles du triangle sont égaux et valent 45° puisque la droite D est la bissectrice d'un angle droit. Le troisième angle du triangle doit donc être un angle droit. Cette dernière constatation étonne l'élève et il croit s'être trompé.

Voilà un épisode d'apparition d'information nouvelle qui prend fin, suivi d'un bref épisode oral de vérification (incomplète). Il faudra encore du temps pour que cette information soit vraiment utilisée. A présent commence une longue exploration.

6 min



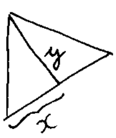
Puis, V veut connaître la longueur de la base du triangle. Il pose $2x =$ base du triangle et écrit



$$\begin{aligned} 4x^2 &= \frac{R^2}{4} + R^2 \\ x^2 &= \frac{5R^2}{16} \\ x &= \frac{\sqrt{5}}{4}R \end{aligned}$$

Il a donc dit que la distance entre les centres des deux demi-cercles est $2x$ aussi, et a appliqué le théorème de Pythagore (il se rend compte, consciemment ou pas, que son losange est un carré). Cependant, il se trompe dans ses notations et écrit R au lieu de $\frac{R}{2}$.

7 min 40 s



V pose $y =$ hauteur du triangle (remarquons qu'il devrait avoir immédiatement $y = x$ puisque c'est ce qu'il avait supposé au départ !).

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{5R^2}{16} &= \frac{R^2}{4} \\ y &= \ldots \end{aligned}$$

Arrivé ici, il voit que quelque chose ne va pas et reprend le calcul de x.

$$\begin{aligned} 4x^2 &= \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} \\ x^2 &= \frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}R^2$$

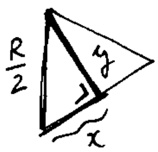
Puis, il corrige à nouveau :

$$x^2 = \frac{R^2}{8}$$
$$x = \frac{R}{\sqrt{8}}$$

Il préfère laisser le $\sqrt{8}$, et reprend le calcul de y.

$$y^2 + \frac{R^2}{8} = \frac{2R^2}{8}$$
$$y^2 = \frac{R^2}{8}$$
$$y = \frac{R}{\sqrt{8}}$$

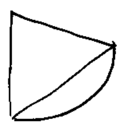
10 min 21 s



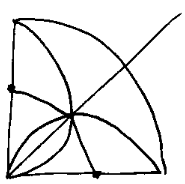
Il estime alors l'aire du triangle à $T = \frac{R^2}{8}$.

Puis, V essaie de trouver l'aire du secteur circulaire correspondant au triangle.

11 min

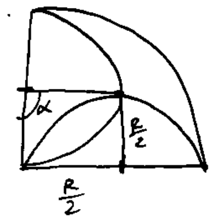


Pour ce faire, il dessine un deuxième triangle. Il réfléchit longuement et dit qu'une fois qu'il aura l'aire du secteur, il aura l'aire du fuseau et trouvera ainsi l'aire du « champignon ». Il décide enfin de faire un nouveau dessin.



Son exploration se termine, il est acculé et doit utiliser enfin son information apparue plus tôt. Il va tout d'abord passer dans un épisode de vérification, puis repartir sur un nouvel épisode d'exploration jusqu'à la fin de sa résolution.

14 min 36 s



Dans le nouveau dessin, les deux triangles forment un carré. L'angle α serait-il un angle droit ? Oui, mais V ne le prouve pas vraiment. Il vérifie ses réponses (les valeurs de x et de y) sur le nouveau dessin.

Il déduit l'aire du secteur $= \frac{R^2}{16}\pi$.

$$\begin{aligned}\text{Aire du fuseau} &= 2\left(\frac{R^2}{16}\pi - \frac{R^2}{8}\right)\\ &= 2\left(\frac{R^2}{8}(\frac{\pi}{2} - 1\right)\\ &= \frac{R^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\end{aligned}$$

Donc l'aire du « champignon » est $\frac{R^2}{4}\pi - \frac{R^2}{4}\pi + \frac{R^2}{4}(\frac{\pi}{2} - 1)$. Il ne voit pas tout de suite la simplification. Lorsqu'il s'en rend compte, ça l'étonne et il croit d'abord s'être trompé.

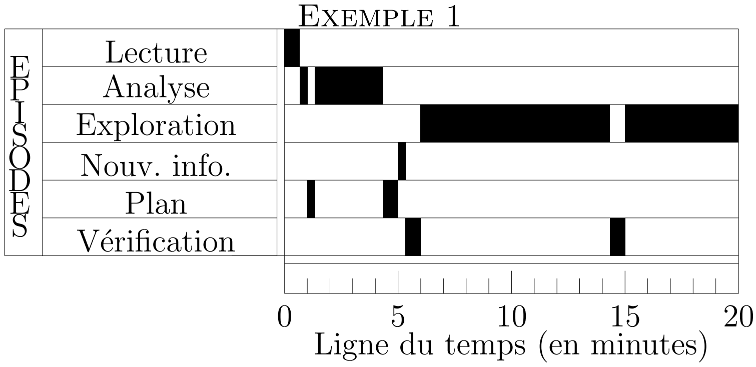
17 min 50 s Il en conclut finalement que les deux aires sont égales.

20 min

11.2.4.2 Graphiques et conclusions

Reportons à présent les divers épisodes décelés dans cette expérience sur un graphique en fonction du temps que chacun d'eux a pris à V.

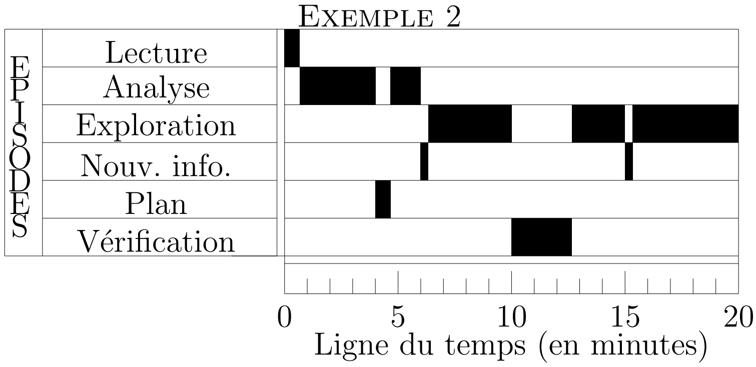
Exemple 1



Dans la suite, nous présentons et commentons des graphiques de ce type tirés d'expériences avec d'autres élèves. Grâce à ce support, le lecteur pourra apprécier synthétiquement des différences et des ressemblances de comportements au sein d'un même problème.

Le graphique de l'exemple 2 résume une expérience très proche de celle que nous venons de relater (de *bons* ([1]) élèves dans les deux cas).

Exemple 2

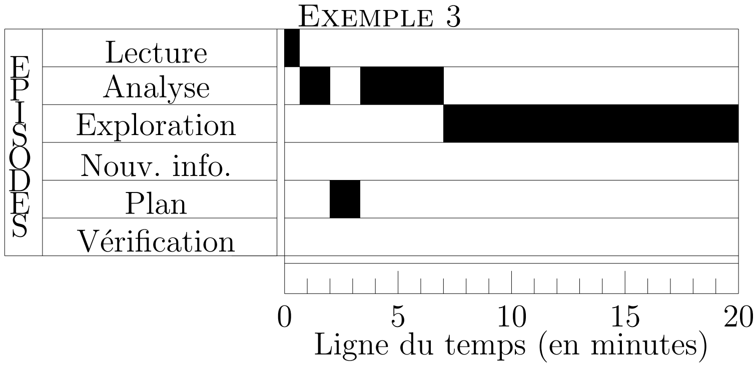


Les deux premiers exemples reflètent une période *chaotique* après la lecture de l'énoncé. Ce chaos, qui échappe souvent à toute analyse, semble propre aux esprits les plus dégourdis en mathématique. Chez des *experts*, ce chaos peut devenir quasi-instantané et inconscient.

Notons également, dans ces exemples, des épisodes de vérification bien placés (par rapport à la résolution menée par ces élèves). Ces épisodes sont d'autant mieux situés que des raisonnements préalables ont pu se baser sur des faits non vérifiés (rappelons l'emploi par V du théorème de Pythagore pour obtenir un résultat, avant même d'avoir montré que le triangle est bien rectangle).

Ce type d'élèves montre une disposition à pouvoir appliquer diverses stratégies à un même problème, et à pouvoir en changer le cas échéant. L'exemple suivant est une illustration de l'*absence* de cette maîtrise.

Exemple 3



Ici, nous ne voyons pas apparaître de nouvelle information, car l'élève pense d'*emblée* à la position du point d'intersection des petits demi-cercles. Cette information n'est donc pas ici un résultat mais une intuition.

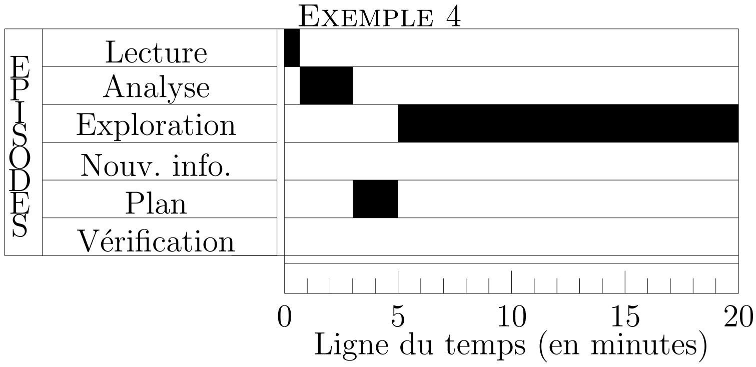
([1]) Adjectif employé sans intention péjorative.

Cependant, la façon de penser de l'élève est fortement analytique, et il n'arrive pas à passer à un registre géométrique. La conséquence en est que, malgré la possession de l'information cruciale, l'élève va tenter d'*intégrer* pour connaître la surface a_1 au lieu de raisonner géométriquement. L'élève ne produira d'ailleurs que peu de dessins, alors qu'il y en avait une pléthore dans l'exemple 1. Il y a bien ici une impossibilité de changer de stratégie, l'attaque restant analytique jusqu'au bout et ne permettant pas d'arriver à la solution endéans les vingt minutes.

Il semblerait donc qu'un *mauvais* dessin au départ est troublant au point de perturber encore ceux qui parviennent à le corriger, mais n'ont pas suffisamment de *recul*, de maîtrise des stratégies.

Il serait intéressant de refaire cette expérience en donnant avec l'énoncé un dessin rigoureusement correct, quitte à l'inclure dans un quadrillage.

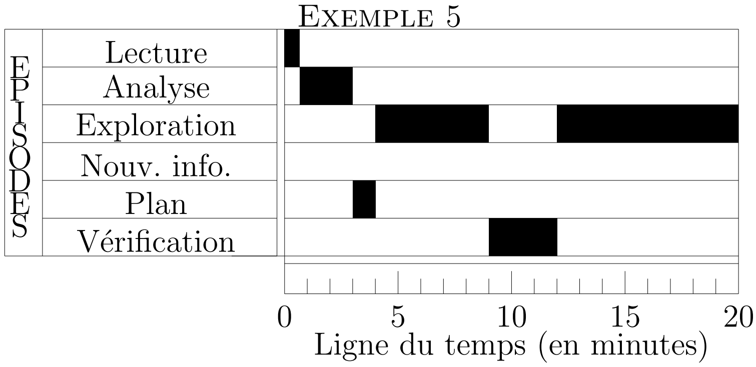
Exemple 4



Voici un schéma *classique*, relevé d'autre part par A.H. Schoenfeld, de la production d'un élève moyen : lecture, éventuellement une très rapide analyse (se limitant à des propriétés immédiates, comme ici l'aire du quart de cercle) précédant ou suivant un épisode d'exploration couvrant le reste du temps disponible.

Dans ce cas, l'élève est parvenu à dégager l'égalité des aires a_1 et a_2, presque par hasard. C'est l'occasion de remarquer que dans cette expérience, les élèves ont *toujours* voulu exprimer a_2 à partir des autres aires. Cette aire est donc manipulée comme un *objet* qui a atteint un stade conceptuel. Cependant, l'aire a_1 a *très souvent* été calculée comme le résultat d'une intégration. On reste au stade procédural. Chez les élèves qui intègrent de la sorte, la notion d'aire n'est pas encore totalement maîtrisée, passant selon les cas d'un stade à l'autre.

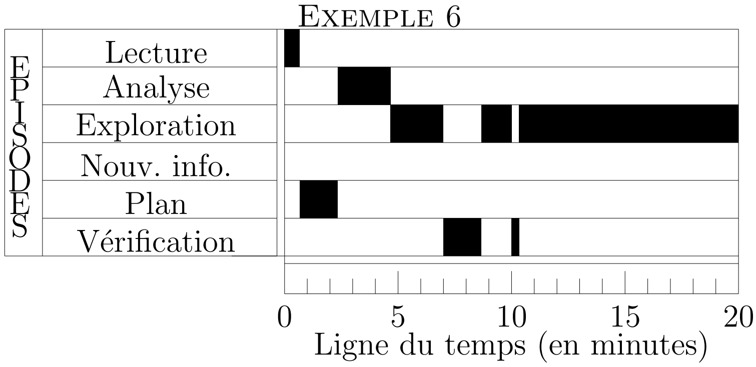
Exemple 5



Cet exemple est proche du précédent, à ceci près que nous voyons apparaître un épisode de vérification coupant l'exploration. Ici, deux élèves sont interrogés simultanément. La forte influence de l'un sur l'autre et le besoin de se mettre d'accord expliquent la présence de cette longue vérification.

Les calculs déjà accomplis sont effectués à nouveau pour tenter de mettre en évidence une erreur encore indéterminée. Ces élèves n'arriveront à aucun résultat. Ils avoueront avoir été gênés par l'absence de valeurs numériques dans l'énoncé. Les calculs formels les rebutent donc, ainsi apparemment que la géométrie, puisqu'à nouveau l'intégration est invoquée.

Exemple 6



Cet exemple est à rapprocher des deux premiers, car c'est le graphique qui peut se rencontrer chez quelqu'un qui ne manque pas d'idées, mais qui à force de vouloir être trop général finit par s'embrouiller.

Il n'est pas clair ici que les aires n'aient pas atteint un stade conceptuel, ni que diverses stratégies puissent être maîtrisées. Mais il est clair que ce type d'élève fonce trop vite dans une méthode d'attaque.

Dans ce cas, l'élève a gardé pour la fin (mais il n'en a pas eu l'occasion) le calcul de la position du point d'intersection des deux petits cercles. Il a déployé une lourde machinerie analytique (intégration) pour calculer a_1. S'il avait décidé de calculer d'emblée la position du point crucial, peut-être aurait-il évité le calcul intégral (qui lui aurait pris bien plus de vingt minutes pour être mené à bien).

Références

[7], [130]