11.3. Fiche N^{o} 2 : La longueur d'une ellipse

11.3.1 L'énoncé

PROBLÈME 11.3.1 *Déterminer la longueur d'une ellipse dont le demi-grand axe mesure 10 cm et dont le demi-petit axe mesure 6 cm.*

Contexte mathématique

Si le calcul de l'aire d'une ellipse est déjà réalisé par ARCHIMÈDE (−287,−212), celui de la longueur de cette ellipse s'avère nettement plus difficile. Il faut en effet attendre NEWTON (1642–1727) pour voir apparaître une formule donnant cette longueur sous la forme d'un développement en série.

Un siècle plus tard, Adrien-Marie LEGENDRE (1752–1833) jette les bases de la théorie des fonctions elliptiques avec Niels ABEL (1802–1829) et Carl JACOBI (1804–1851). La longueur d'une ellipse de demi-grand axe a et d'excentricité e est donnée par *l'intégrale elliptique complète de seconde espèce*

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$$

A. M. Legendre

Signalons aussi une formule approchée, due à Srinivasa RAMANUJAN (1887–1920), où a et b sont les mesures des deux demi-axes de l'ellipse :

$$\pi\left(3(a+b)-\sqrt{(a+3b)(3a+b)}\right)$$

La différence de difficulté entre le calcul de la longueur d'une ellipse et celui de son aire est d'origine conceptuelle : la notion de longueur d'une courbe plane n'est pas une notion affine, alors que la notion d'aire d'une partie du plan en est une. De façon précise, l'aire de l'image d'une partie P du plan par une transformation linéaire f de déterminant d est égale au produit de l'aire de P par le réel positif $|d|$. On trouve alors l'aire de l'ellipse de demi-axes a et b en la considérant comme l'image d'un disque de rayon a par un étirement de déterminant $\frac{b}{a}$.

Contexte scolaire

La détermination de la longueur d'une ellipse fait intervenir différents points des programmes de cinquième et sixième années des sections à 6 périodes de mathématique par semaine. Citons les plus importants : notions de conique, de corde et de tangente, de dérivée, de limite, d'intégrale. Elle permet aussi le retour sur la question de la longueur d'un cercle ou de l'aire d'un disque.

Par ailleurs, une caractéristique des intégrales elliptiques est qu'il est impossible d'en donner une expression analytique élémentaire. Seul un calcul numérique approché peut donc être réalisé, ce qui permet de rencontrer un autre point du programme des classes mentionnées et de provoquer l'emploi de moyens de calcul modernes.

Contexte méthodologique

Le traitement que nous présentons ci-dessous ne suppose pas connue la notion d'intégrale. La situation pourrait donc être exploitée lors de la séquence d'apprentissage de ce concept. Ses aspects techniques semblent toutefois un peu trop complexes pour qu'il soit réaliste de vouloir l'utiliser dans la phase d'intériorisation. C'est plutôt au cours de la phase de condensation que nous lui voyons une place.

La situation pourrait aussi servir d'application du concept d'intégrale. Le traitement devrait alors être différent : on partirait de l'intégrale et — devant l'impossibilité de la calculer analytiquement — on en chercherait des approximations par des sommes. Le problème consisterait alors à discrétiser l'intégrale de façon efficace.

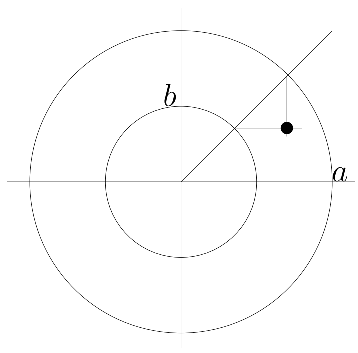
11.3.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

- La notion générale d'ellipse.
- Les équations paramétriques d'une ellipse de demi-axes a et b :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

- La construction d'une ellipse correspondant à ces équations :



- Les formules trigonométriques d'addition et les formules de Simpson.
- La formule donnant la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées.
- La méthode d'approximation de la longueur d'un cercle par inscription de polygones réguliers.
- Éventuellement : une maîtrise de la programmation.

Les moyens de calcul

On pourra être amené à utiliser des machines à calculer programmables ou des ordinateurs. Éventuellement, l'enseignant peut fournir les données et les résultats des calculs.

Les instruments de dessin

Ils sont classiques : règle et compas.

11.3.3 Exemple de résolution

Rappelons d'abord les remarques que nous avons effectuées au paragraphe 11.1.3 : la résolution que nous présentons ci-dessous n'a pas pour but de « standardiser » le travail dans les classes. De plus, la rédaction que nous faisons n'étant PAS destinée à être lue par les élèves, nous n'avons fait aucun effort pour qu'elle puisse être comprise par eux. Si d'aventure un collègue désirait traiter le problème de la longueur d'une ellipse dans une classe, il devrait bien évidemment donner à la résolution du problème une forme très différente de la nôtre.

Les élèves ayant beaucoup plus d'imagination que nous, nous n'allons pas non plus essayer de « reproduire » les détails de ce qu'ils pourraient faire, mais prendre du recul et centrer notre réflexion sur la *méthode*. Par exemple, bien que l'énoncé du problème nous invite à utiliser d'emblée des valeurs numériques pour les demi-axes de l'ellipse, nous conserverons le plus longtemps possible ces demi-axes à l'état de variables littérales, notées a et b ($a \geqslant b$). Nous pourrons ainsi vérifier, en supposant $a = b$, que nos formules contiennent celles relatives au cercle comme cas particulier.

Discrétiser

L'idée de la résolution est d'utiliser le schéma qui a servi à déterminer la longueur d'un cercle. Nous allons donc inscrire à l'ellipse considérée des polygones (non réguliers) ayant successivement 4, 8, 16, ... côtés.

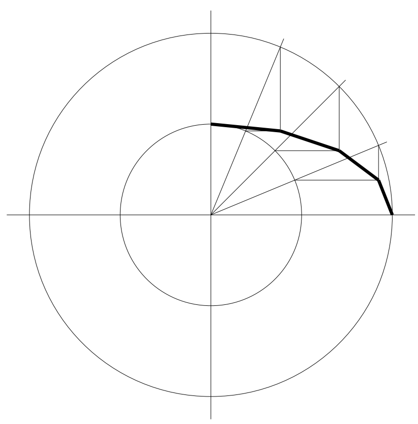
Utiliser des équations paramétriques de l'ellipse

Plus précisément, nous considérons l'ellipse d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Nous y inscrivons un quadrilatère en joignant les points correspondant aux valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ et $\frac{3\pi}{2}$ du paramètre t. Ensuite nous considérons l'octogone déterminé en prenant pour t les valeurs $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{7\pi}{4}$.

Construire une ellipse



D'une façon générale , un polygone à 2^n côtés inscrit à l'ellipse est obtenu en subdivisant l'intervalle $[0, 2\pi]$ en 2^n parties de longueur $\frac{\pi}{2^{n-1}}$. Nous poserons donc

Algébriser

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\pi}{2^{n-1}}, \quad \dots \quad t_k = \frac{k\pi}{2^{n-1}}, \quad \dots t_{2^n-1} = \frac{(2^n-1)\pi}{2^{n-1}}, \quad t_{2^n} = 2\pi$$

puis

$$\begin{cases} x_k = a\cos t_k \\ y_k = b\sin t_k \end{cases} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2^n)$$

et nous noterons P_k le point de coordonnées (x_k, y_k).

La longueur du côté $[P_k, P_{k+1}]$ est donnée par la formule

Utiliser des acquis des années antérieures

$$|P_kP_{k+1}|^2 = a^2(\cos t_{k+1} - \cos t_k)^2 + b^2(\sin t_{k+1} - \sin t_k)^2$$

Appliquant les formules de Simpson, on obtient

$$\begin{aligned} |P_kP_{k+1}|^2 &= 4a^2\sin^2\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\sin^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2} + 4b^2\sin^2\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2} \\ &= 4\sin^2\frac{\pi}{2^n}\cdot\left(a^2\sin^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2} + b^2\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right) \\ &= 4\sin^2\frac{\pi}{2^n}\cdot\left(a^2 - (a^2-b^2)\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right) \end{aligned}$$

Introduisant l'excentricité e de l'ellipse, donnée par la formule

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

nous obtenons

$$|P_kP_{k+1}|^2 = 4a^2\sin^2\frac{\pi}{2^n}\cdot\left(1 - e^2\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2}\right)$$

Et par conséquent, la longueur du polygone à 2^n cotés, inscrit à l'ellipse de demi-axes a et b vaut

Utiliser le signe sommatoire

$$L_n = 2a\left|\sin\frac{\pi}{2^n}\right|\sum_{k=0}^{2^n-1}\sqrt{1 - e^2\cos^2\frac{t_{k+1}+t_k}{2}}$$

Pour trouver la longueur de l'ellipse, ou tout au moins une approximation de cette valeur, il reste à calculer la somme précédente pour des valeurs de n de plus en plus grandes. Ceci pose un problème d'organisation des calculs, puis un problème de programmation.

Déterminer des approximations

La première chose à faire est de tenir compte des symétries de l'ellipse en limitant la sommation à $k = 2^{n-2} - 1$ puis à multiplier le résultat par 4. La partie du polygone constituée des 2^{n-2} premiers côtés est en effet inscrite dans le quart de l'ellipse située dans le premier quadrant. Ceci a aussi l'avantage supplémentaire que toutes les valeurs considérées des fonctions sin et cos sont positives.

Tirer profit des symétries de l'ellipse

Puisque $\frac{t_k+t_{k+1}}{2} = \frac{2k+1}{2^n}\pi$, il s'agit de calculer

$$L_n = 8a \sin\frac{\pi}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{2k+1}{2^n}\pi}$$

Commençons par déterminer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{2^n}$ et $\cos\frac{\pi}{2^n}$ pour $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$:

Numériser

Pour $n = 1$, on a $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Ensuite, exploitant la formule $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, on remplit la deuxième colonne du tableau suivant. La formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ permet d'en déduire les valeurs mentionnées dans la troisième colonne :

x	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{2^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2^3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{2^4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$\frac{\pi}{2^5}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pour une valeur fixée de n, nous avons aussi besoin des valeurs de $\cos\frac{2k+1}{2^n}\pi$, pour $k = 0, \ldots, 2^{n-2}-1$. La différence entre deux valeurs consécutives de $\frac{2k+1}{2^n}\pi$ vaut $\frac{2\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$. Le plus simple est de calculer $\cos\frac{2k+1}{2^n}\pi$ et $\sin\frac{2k+1}{2^n}\pi$ à partir des valeurs de $\cos\frac{2k-1}{2^n}\pi$ et $\sin\frac{2k-1}{2^n}\pi$. C'est l'occasion de pratiquer un peu de calcul matriciel :

Utiliser des acquis des années antérieures

$$\begin{pmatrix} \sin\frac{2k+1}{2^n}\pi \\ \cos\frac{2k+1}{2^n}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2^{n-1}} & \sin\frac{\pi}{2^{n-1}} \\ -\sin\frac{\pi}{2^{n-1}} & \cos\frac{\pi}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\frac{2k-1}{2^n}\pi \\ \cos\frac{2k-1}{2^n}\pi \end{pmatrix}$$

Construire un algorithme

Avec les éléments qui précèdent, nous pouvons écrire un programme informatique, rédigé ici en « langage d'algorithme » . Il doit bien entendu être traduit dans le langage de programmation correspondant à la machine utilisée. La colonne de droite contient les commentaires explicatifs.

Introduction des données.

`1. Lire (a,b)` — a et b sont les mesures des deux demi-axes de l'ellipse.

`2. Lire (N)` — N est le nombre d'itérations à effectuer.

Initialisation

`3. e2 ← 1-(b*b)/(a*a)` — Calcul du carré de l'excentricité.

`4. c0 ← 0, s0 ← 1`	c0 et s0 contiendront les valeurs de $\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}$ et $\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$. Au départ, $n = 2$.
	Boucle calculant la longueur d'un polygone inscrit
`5. Pour n de 2 à N, faire`	Démarrage
`5.1 c1 ← sqrt ((1+c0)/2), s1 ← sqrt ((1-c0)/2)`	c1 et s1 contiennent les valeurs de $\cos\frac{\pi}{2^n}$ et $\sin\frac{\pi}{2^n}$.
	Initialisation de la boucle de calcul de $\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi}$
`5.2 S ← 0`	S contiendra la valeur de la somme
`5.3 c2 ← c1, s2 ← s1`	c2 et s2 contiendront les valeurs de $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$ et $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$. Au départ, $k = 0$.
`5.4 Pour k de 0 à 2↑(n-2)-1, faire`	Démarrage de la boucle de calcul de S
`5.4.1 S ← S + sqrt(1-e2*c2*c2)`	La valeur de S augmente du terme correspondant à la valeur de k

`5.4.2 ss ← s2`
`s2 ← c0*ss + s0*c2`
`c2 ← -s0*ss + c0*c2`
	Mise en mémoire temporaire de $s2$ et calcul des valeurs de $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$ et $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^n}$ correspondant à $k+1$.

`5.4.3 Fin Faire`	Incrémentation de k et retour au début de la boucle.
`5.5 L ← 8*a*s1*S`	Calcul de la longueur du polygone à 2^n côtés.
`5.6 Écrire (L)`	Affichage de la longueur L de ce polygone.
`5.7 c0 ← sqrt((1+c0)/2)` `s0 ← sqrt(1-c0*c0)`	Calcul des valeurs de $\cos\frac{\pi}{2^n}$ et $\sin\frac{\pi}{2^n}$.

`5.8 Fin Faire`	Incrémentation de n et retour au début de la boucle.
`6. Fin`	Fin du programme

Numériser

Exécuté avec les données indiquées dans l'énoncé du problème ($a = 10$, $b = 6$), ce programme a fourni les résultats suivants, affichés ici avec six décimales :

Nombre de côtés	Longueur du polygone
4	46,647 615
8	49,766 482
16	50,726 600
32	50,972 025
64	51,033 497
128	51,048 872
256	51,052 716
512	51,053 677
1024	51,053 918
2048	51,053 978
⋮	⋮

11.3.4 Commentaires

1. La résolution que nous venons de détailler se termine avec la réponse à la question posée : on obtient une approximation de la longueur de l'ellipse. Nous ne demandons pas à l'élève d'expliciter l'intégrale sous-jacente. C'est à l'enseignant de reprendre le contrôle de la classe et de dégager ce concept du travail réalisé.
   Si la situation a été traitée lors de la phase de condensation de la séquence d'apprentissage de l'intégrale, il n'est plus nécessaire d'expliquer que l'intégrale est une limite de sommes de produits, mais il convient de faire apparaître quelle est la fonction que l'on intègre, ce qui n'est pas toujours si simple.
   Repartons de la formule de calcul de la longueur L_n du polygone à 2^n côtés inscrit à l'ellipse :
   $$L_n = 8a\sin\frac{\pi}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi}$$
   Nous devons lui donner l'aspect d'une « somme de Riemann » : $\sum_{k=0}^{N}\Delta t_k\cdot f(t'_k)$ où $\Delta t_k = t_{k+1}-t_k$ est la longueur du k^{e} intervalle de subdivision et où t'_k est un point de cet intervalle.

   Faire le lien avec une autre matière

   Dans la formule ci-dessus, on constate d'abord que $N = 2^{n-2}-1$: l'intervalle d'intégration est découpé en 2^{n-2} sous-intervalles $[t_k, t_{k+1}]$, avec $t_k = \frac{k\pi}{2^{n-1}}$. La fonction à intégrer est la fonction $\sqrt{1-e^2\cos^2 t}$, les nombres t'_k sont les points milieux des intervalles $[t_k, t_{k+1}]$: $t'_k = \frac{t_k+t_{k+1}}{2} = \frac{2k+1}{2^n}\pi$.
   Mais la largeur $\Delta t_k = \frac{\pi}{2^{n-1}}$ de l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ n'apparaît pas dans l'expression de L_n. En lieu et place, nous trouvons l'expression $\sin\frac{\pi}{2^n}$. Mais lorsque n tend vers l'infini, $\frac{\pi}{2^n}$ tend vers 0. On pourra alors exploiter la formule $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. On écrira donc
   $$\sin\frac{\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^n}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}$$
   La longueur de l'ellipse est donc
   $$\begin{aligned}
   L &= \lim_{n\to\infty} L_n \\
   &= \lim_{n\to\infty} 8a\sin\frac{\pi}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi} \\
   &= \lim_{n\to\infty} 8a\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\frac{\pi}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi}
   \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 8a\frac{\pi}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 4a\frac{\pi}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-2}-1}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi}$$

Nous avons cette fois obtenu la forme classique des sommes de Riemann. Ainsi

$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$$

2. La résolution comporte deux phases. La première se termine avec l'établissement de la formule de L_n. Il reste alors à programmer le calcul numérique. Cette phase n'est réalisable que si les élèves ont déjà une certaine maîtrise de la programmation. Si ce n'est pas le cas, l'enseignant pourrait ne demander aux élèves d'appliquer la formule que pour des petites valeurs de n (2 ou 3, ce qui correspond aux polygones à 4 et 8 côtés), et donner lui-même les résultats des calculs pour les valeurs suivantes, afin de mettre en évidence la convergence de la suite des valeurs approchées.
3. Une autre possibilité, une fois établie la formule donnant la valeur de L_n serait non d'en calculer des valeurs particulières, mais de l'utiliser pour déterminer des encadrements de la longueur de l'ellipse . Partant de la relation $\sqrt{1-x} \leqslant 1-\frac{x}{2}$, nous obtenons

Réaliser des encadrements

$$\begin{aligned}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi} &\leqslant 1-\frac{1}{2}e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi\\ &\leqslant 1-\frac{1}{2}e^2\left(\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2k+1}{2^{n-1}}\pi\right)\right)\\ &\leqslant 1-\frac{1}{4}e^2\end{aligned}$$

Dès lors

$$L_n \leqslant 8a\sin\frac{\pi}{2^n}2^{n-2}\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)$$

Par passage à la limite, on obtient alors

$$L \leqslant 2a\pi\left(1-\frac{1}{4}e^2\right)$$

De même, pour tout k, on a $\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{2k+1}{2^n}\pi} \geqslant \sqrt{1-e^2}$. Par conséquent

$$L_n \geqslant 8a\sin\frac{\pi}{2^n}2^{n-2}\sqrt{1-e^2}$$

et par passage à la limite :

$$L \geqslant 2a\pi\sqrt{1-e^2}$$

Un intérêt de ce calcul d'encadrements est précisément la manipulation d'inégalités.

4. Les équations paramétriques de l'ellipse $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ peuvent être interprétées comme décrivant le mouvement d'un point mobile sur l'ellipse. Le paramètre t est alors le *temps*. L'expression $\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = a\sqrt{1-e^2\cos^2 t}$ n'est autre que la longueur du vecteur dérivé, c'est-à-dire du vecteur vitesse. Les produits $a\Delta t_k\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{t_k+t_{k+1}}{2}}$ qui apparaissent dans les sommes de Riemann sont des produits d'un intervalle de temps par des vitesses, donc représentent bien des longueurs.
5. La formule obtenue pour la longueur d'une ellipse est aussi un cas particulier de la formule générale qui donne la longueur d'une courbe définie par des équations paramétriques $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b)$:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

6. Pour résoudre le problème, l'élève doit d'abord penser à inscrire un polygone dans l'ellipse et à augmenter indéfiniment le nombre de côtés de ce polygone. Ayant rencontré cette démarche lors du calcul de la longueur d'un cercle (détermination du nombre π), il doit effectuer un transfert. Toutefois, vu que c'est en 4^e^ année que la détermination de la longueur d'un arc aura été rencontrée d'après les programmes actuels, il est à craindre que le transfert soit particulièrement difficile à réaliser. Il serait donc utile que le cas du cercle (et donc du calcul de π) soit revu à l'occasion de l'apprentissage du concept de limite d'une suite (en 5^e^ année).

effectuer un transfert

7. Il ne suffit pas que l'élève pense à inscrire des polygones dans l'ellipse. Encore faut-il que ces polygones soient bien choisis pour que les calculs ne soient pas inextricables. L'utilisation de la représentation paramétrique de l'ellipse permet d'orienter l'élève vers un choix acceptable. Le travail en coordonnées cartésiennes ne paraît pas présenter les mêmes avantages. Il ne semblerait pas en tous cas judicieux de placer les sommets des polygones aux points d'intersection avec l'ellipse des droites qui font des angles t_k avec l'axe des abscisses.
8. Une fois franchis les deux obstacles qui viennent d'être mentionnés, les difficultés restantes sont essentiellement techniques. Les élèves peu habitués à la manipulation d'expressions formelles devraient néanmoins arriver à certains résultats en se limitant à des petites valeurs particulières du nombre de côtés des polygones.
9. On remarque aussi qu'à tout moment, la démarche peut être contrôlée en vérifiant que la formule obtenue est correcte dans le cas du cercle, c'est-à-dire dans le cas $a = b$.

Vérifier

10. Outre la capacité à réaliser un transfert, les plus importantes des compétences activées au cours du travail relèvent de la *discrétisation* (remplacer une courbe par un polygone), de l'*approximation* (évaluer une longueur par un passage à la limite) et de l'*algébrisation* (convertir un problème de géométrie synthétique en un problème de géométrie analytique, voire d'analyse).

    A des niveaux plus bas dans la hiérarchie des compétences, on trouve la manipulation des formules trigonométriques ainsi que des expressions formelles.

    L'aptitude à *numériser* (calculer des valeurs numériques d'une expression littérale), qui implique la maîtrise des instruments de calcul, doit également être signalée.