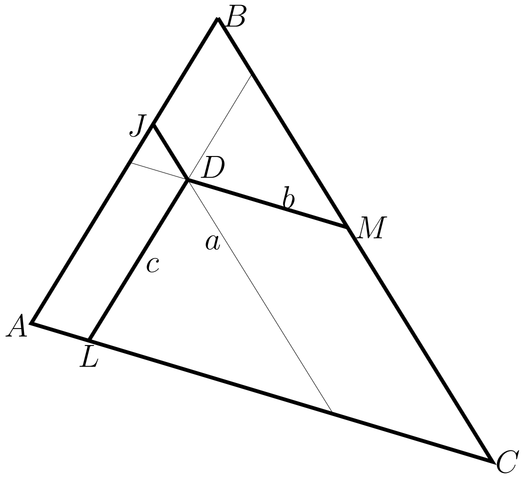
11.4. Fiche N° 3 : Un problème d'aire

11.4.1 L'énoncé

PROBLÈME 11.4.1 *Par un point D intérieur à un triangle ABC, on trace les trois droites a, b et c, parallèles aux côtés BC, CA, AB. On note J, M, L les points d'intersection $a \cap AB$, $b \cap BC$ et $c \cap CA$. Déterminer une position de D pour laquelle les trois trapèzes $JDLA$, $MDJB$ et $LDMC$ ont même aire.*



Ce problème est extrait de [41].

Contexte mathématique

Il n'est pas nécessaire de disserter longuement sur l'importance de la notion d'aire. Nous sommes ici en présence de figures élémentaires, utilisées pour construire des découpages de figures (légèrement) plus complexes, ce qui est un processus mathématique tout aussi fondamental.

Contexte scolaire

Sous la forme donnée dans l'énoncé, le problème est accessible dès la troisième année du secondaire. Des variantes obtenues en considérant des points D situés à l'extérieur du triangle ou en remplaçant celui-ci par un polygone quelconque pourraient être traitées au cours des années ultérieures, y compris jusqu'en rhétorique.

Ces variantes peuvent faire intervenir le calcul barycentrique, des coniques, la notion d'aire orientée, le produit vectoriel. Elles peuvent éventuellement être intégrées à la préparation du calcul intégral. Nous reparlerons de l'une de ces variantes dans la suite.

Contexte méthodologique

S'il est limité à l'énoncé figurant ci-dessus, le problème ne dépasse pas le niveau de l'application de résultats connus, en particulier le théorème de Thalès.

11.4.2 Les moyens nécessaires

Les prérequis

- Le barycentre d'un triangle est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.
- Le théorème de Thalès, les propriétés élémentaires des parallélogrammes.

Les instruments de dessin

Les instruments usuels suffisent. Du « papier triangulé » constituerait une aide intéressante.

Les moyens informatiques

Cabri-Géomètre (ou tout autre logiciel équivalent) facilitera une exploration de la situation.

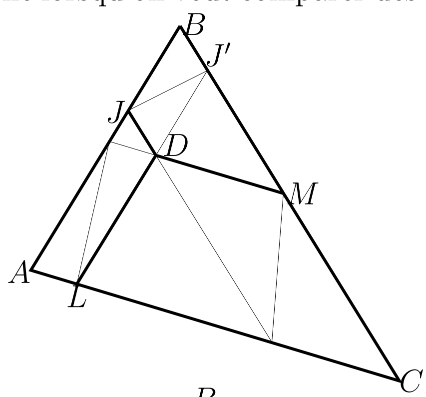
11.4.3 Exemple de résolution

Il nous semble important de remarquer préalablement l'existence de deux énoncés jumeaux du problème. En effet, le lecteur aura compris que l'on peut considérer un autre découpage du triangle selon les traits plus fins (voir la figure). Dans la suite, nous verrons que le résultat du problème *posé dans l'énoncé* est indépendant de ce choix.

Pour comparer les aires des trapèzes $JDLA$, $LDMC$ et $JBMD$, une idée est nécessaire. Elle peut résulter d'une exploration de la situation à l'aide d'un logiciel tel que Cabri-Géomètre.

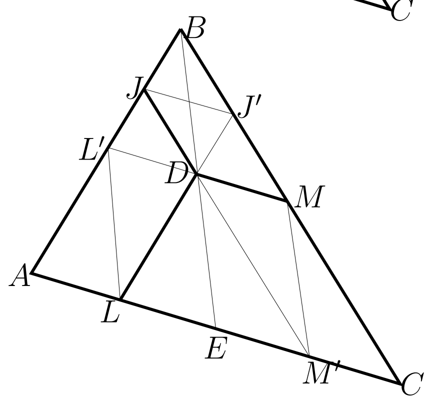
Comparer des aires par découpage

L'idée viendra d'autant plus facilement qu'on découpera chaque trapèze en trois triangles, ce qui n'est pas une démarche artificielle lorsqu'on veut comparer des aires.



Explorer, Justifier

En déplaçant le point D, on remarquera, et on justifiera, que les trois triangles constituant le trapèze $JBMD$ sont isométriques lorsque la droite JJ' est parallèle au côté AC.



Par la même occasion, on constate que le triangle JDL' est également isométrique à BJJ', $JJ'D$ et $J'MD$. On en tire une première conclusion :

> *Les trapèzes $JBMD$ et $JDLA$ ont même aire si JJ' est parallèle à AC* **et** *LL' est parallèle à BC.*

Et par conséquent :

Généraliser

> *Les trois trapèzes $BMDJ$, $JDLA$ et $DMCL$ ont même aire si JJ' est parallèle à AC, LL' est parallèle à BC et MM' est parallèle à AB.*

Mais si $JJ' \mathbin{/\!/} AC$, alors $|L'D| = |DM|$ (considérer les parallélogrammes $JJ'DL'$ et $JJ'MD$). Réciproquement, si $|L'D| = |DM|$, alors $JJ' \mathbin{/\!/} AC$. (Si D est le milieu de $[L'M]$, alors J est le milieu de $[BL']$, J' est le milieu de $[BM]$ et JJ' est parallèle à $L'M$.)

Raisonner déductivement

Ainsi

$$JJ' \mathbin{/\!/} AC \Leftrightarrow BD \text{ est une médiane de } BL'M$$

Or

$$BD \text{ est une médiane de } BL'M \Leftrightarrow BD \text{ est une médiane de } ABC$$

En effet, en notant E le point d'intersection de BD et AC, on a via le théorème de Thalès :

Exploiter un acquis

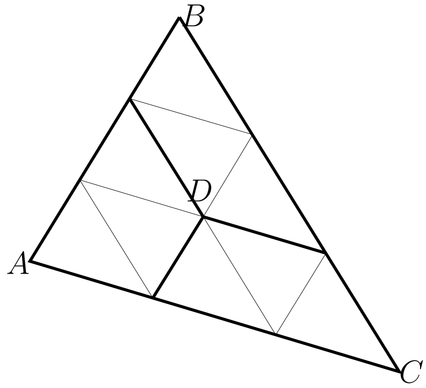
$$\frac{|L'D|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|BE|} = \frac{|DM|}{|EC|}$$

D'où

$$|AE| = |EC| \Leftrightarrow |L'D| = |DM|$$

On a prouvé que

> *Les trois trapèzes ont même aire si AD, BD et CD sont les trois médianes du triangle ABC, c'est à dire si D est le barycentre de ce triangle.*



11.4.4 Commentaires

1. Il n'est pas difficile de vérifier que le barycentre D est le seul point *situé à l'intérieur du triangle* qui détermine ainsi trois trapèzes de même aire, en l'occurrence celle de trois petits triangles. Considérons en effet une autre position D' de D. Elle est fatalement située soit au bord soit à l'intérieur de l'un des trois trapèzes déterminés par D. L'un (au moins) des trois trapèzes déterminés par D' aura donc une aire inférieure à celle de trois petits triangles et comme ces trois trapèzes doivent avoir la même aire, leur aire totale ne saurait être celle du triangle ABC, soit celle de neuf petits triangles.
2. Le raisonnement qui précède est basé sur le fait que la somme des aires des trois trapèzes vaut neuf petits triangles et est donc constante lorsque le point D se déplace à l'intérieur de ABC.
3. Nous avons fait remarquer au départ qu'il y a deux façons de découper le triangle ABC en trois trapèzes. Il est clair que le barycentre D est la solution du problème posé quel que soit le découpage choisi.
4. Tel qu'il a été énoncé, le problème posé peut être traité avec des élèves dès que ceux-ci maîtrisent les propriétés élémentaires de géométrie plane. Il n'en va pas de même du prolongement qui suit. Celui-ci fait appel aux techniques et méthodes de la géométrie analytique et de l'algèbre linéaire. C'est donc avec des élèves du 3^{e} degré que la situation pourrait être étudiée. Elle est l'occasion de parler d'aire orientée. Ce concept une fois rencontré, la seule difficulté est d'établir la formule donnant l'aire orientée d'un quadrilatère. La résolution du problème posé est alors régulière, ce qui nous amène ci-dessous à la présenter sous forme expositive.

11.4.5 Prolongeons le problème

Que se passe-t-il lorsque le point D *sort du triangle* ?

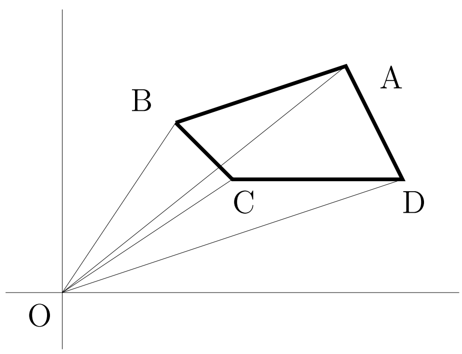
Nous allons chercher des solutions *extérieures au triangle*. Nous nous baserons sur une formule remarquable qui permet de calculer l'aire d'un quadrilatère à partir des coordonnées de ses sommets : si $A = \binom{x_A}{y_A}$, $B = \binom{x_B}{y_B}$, $C = \binom{x_C}{y_C}$, $D = \binom{x_D}{y_D}$, alors l'aire du quadrilatère $ABCD$ est donnée par la formule :

$$\frac{1}{2}\left((x_A y_B - x_B y_A) + (x_B y_C - x_C y_B) + (x_C y_D - x_D y_C) + (x_D y_A - x_A y_D)\right)$$

Cette formule est valable pour autant que l'unité d'aire soit celle du parallélogramme construit sur les vecteurs $\binom{1}{0}$ et $\binom{0}{1}$. Elle est classique. Dans le souci d'être complet, nous la justifierons au paragraphe suivant. Ensuite, nous la mettrons en œuvre.

11.4.5.1 Des aires orientées

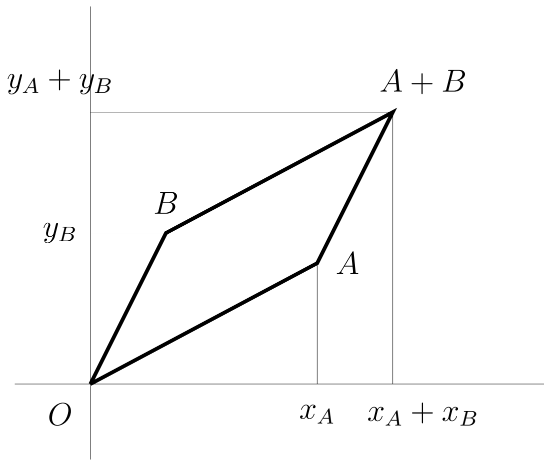
Dessinons un quadrilatère quelconque et joignons chaque sommet à l'origine, faisant ainsi apparaître quatre triangles dont l'origine est un sommet commun :



L'aire du quadrilatère $ABCD$ s'obtient en additionnant les aires des triangles OAB et ODA et en soustrayant de la somme obtenue les aires des triangles OCD et OBC.

Nous voyons apparaître ici l'utilité d'introduire la notion d'aire *orientée* : une orientation du plan (celle du cercle trigonométrique) étant choisie et baptisée « positive », le sens de parcours d'un polygone convexe détermine le signe de son aire. Des quatre triangles OAB, OBC, OCD et ODA, deux sont parcourus dans le sens positif, les deux autres dans le sens négatif. En utilisant des aires orientées, l'aire du quadrilatère $ABCD$ est la *somme* des aires des triangles OAB, OBC, OCD et ODA. Il nous reste à exprimer l'aire orientée d'un triangle, par exemple OAB, en fonction des coordonnées de ses sommets.

Complétons OAB en un parallélogramme :



L'aire du parallélogramme $OA(A + B)B$ est celle du rectangle extérieur, $(x_A + x_B)(y_A + y_B)$, amputée de celles de deux triangles, $\frac{1}{2}x_Ay_A$ et $\frac{1}{2}x_By_B$ et de deux trapèzes, $\frac{1}{2}x_B(y_A + (y_A + y_B))$ et $\frac{1}{2}y_A(x_B + (x_A + x_B))$.

Développant les calculs, on obtient pour l'aire du parallélogramme $x_Ay_B - x_By_A$. On remarque qu'il s'agit bien d'une aire orientée : en permutant les points A et B, l'aire change de signe. On retrouve bien évidemment une expression liée au produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

L'aire du triangle OAB est la moitié de cette expression et l'aire du quadrilatère $ABCD$ est bien donnée par la formule indiquée plus haut. Cette formule est valable dans tous les cas, même celui des quadrilatères croisés.

11.4.5.2 Retour au problème

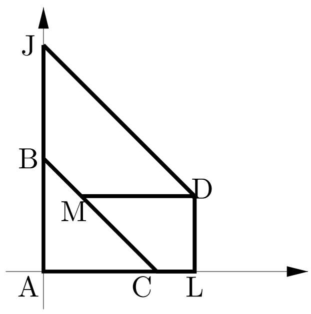
A présent, nous pouvons nous attaquer à la recherche des solutions externes de notre problème de départ. Cette fois, nous devons considérer les deux « découpages » possibles du triangle ABC.

Plaçons-nous dans le cadre de la géométrie analytique, et désignons par D le point de coordonnées encore inconnues (x, y), sommet commun aux trois trapèzes.

Nous allons considérer d'abord le cas particulier où le triangle ABC est isocèle et rectangle en A. Nous discuterons ensuite la façon d'étendre les résultats au cas général.

Prenons le point A comme origine et graduons les axes de façon à avoir $B = \binom{0}{3}$ et $C = \binom{3}{0}$. L'aire du triangle ABC vaut donc $\frac{9}{2}$, l'unité d'aire étant maintenant celle de deux des petits triangles de jadis. Notons aussi que $\binom{1}{1}$ est le barycentre de ABC.

Le plan étant orienté de la façon usuelle, construisons les trois trapèzes, en plaçant tout d'abord le point D au hasard.



Les trois trapèzes (non orientés) sont $BMDJ$, $JDLA$ et $MDLC$. Pour certaines positions de D, certains d'entre eux pourraient être croisés. Comment les orienter ? Décidons de nous inspirer de la figure accompagnant le problème 11.4.1, obtenue lorsque le point D est intérieur au triangle ABC. Dans ce cas, les trois trapèzes doivent être orientés de la même manière, et il est naturel de chosir le sens anti-horlogique. Les trapèzes orientés sont donc $DJAL$, $DMBJ$ et $DLCM$. Nous conservons ces orientations lorsque D est extérieur à ABC.

On trouve facilement les coordonnées des différents points :

Point	Abscisse	Ordonnée
A	0	0
B	0	3
C	3	0
D	x	y
J	0	$x+y$
L	x	0
M	$3-y$	y

Il ne nous reste qu'à appliquer trois fois la formule donnant l'aire d'un quadrilatère. Nous trouvons

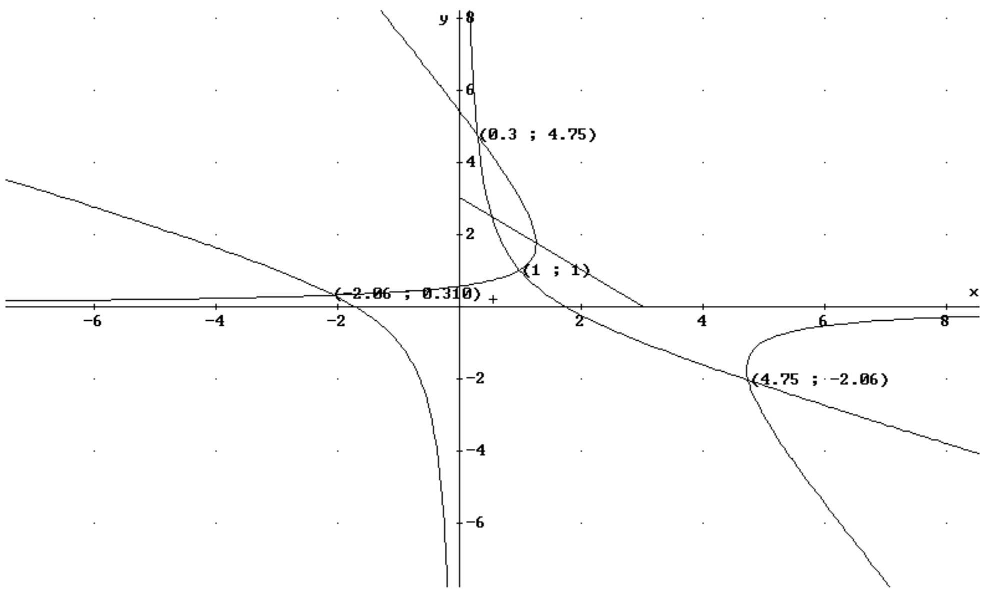
$$\begin{aligned}
\text{aire } (DJAL) &= \frac{1}{2}(x^2+2xy) \\
\text{aire } (DMBJ) &= \frac{1}{2}(-x^2+y^2-6y+9) \\
\text{aire } (DLCM) &= \frac{1}{2}(-y^2-2xy+6y)
\end{aligned}$$

Une simple addition, et nous constatons que la somme des aires des trois trapèzes est constante, égale à celle du triangle ABC. Ainsi si un point D, intérieur ou extérieur au triangle ABC, détermine trois trapèzes de même aire orientée, celle-ci ne peut valoir que $\frac{3}{2}$. Le point D doit donc être situé sur les trois hyperboles d'équations :

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy &= 3 \\ x^2 - y^2 + 6y - 9 &= -3 \\ y^2 + 2xy - 6y &= -3 \end{aligned}$$

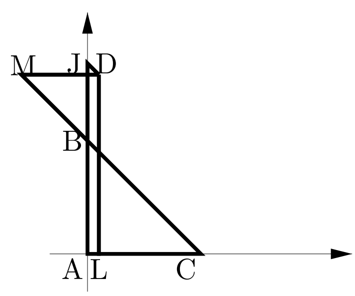
La troisième équation étant la différence des deux premières, nous sommes ramenés à rechercher l'intersection de deux de ces trois hyperboles.

La figure ci-après représente la première et la troisième hyperbole. Elles se coupent en quatre points qui sont les quatre solutions du problème. (Une d'entre elles est celle qui est intérieure au triangle ABC : le point $\binom{1}{1}$).



Les coordonnées notées sur les dessins sont des évaluations des positions des points cherchés via les possibilités graphiques du logiciel DERIVE. Remarquons que la transformation affine $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 3-x-y \end{pmatrix}$ laisse fixe la solution $\binom{1}{1}$ interne au triangle et permute cycliquement les trois autres.

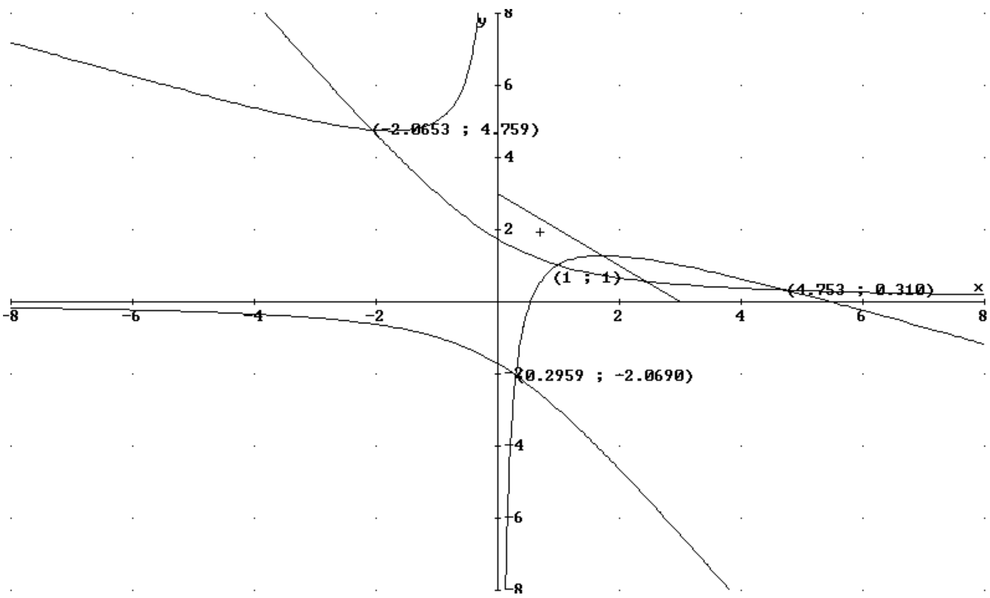
La figure ci-contre correspond à la solution $\binom{0.3}{4.75}$.



Nous pouvons procéder à la même recherche en ce qui concerne le second découpage du triangle. Nous trouvons cette fois des points différents, aux intersections des hyperboles d'équations :

$$\begin{aligned} x^2+2xy-6x &= -3 \\ x^2-y^2-6x+9 &= 3 \\ y^2+2xy &= 3 \end{aligned}$$

On note que ces hyperboles s'obtiennent à partir des précédentes en permutant x et y, donc en appliquant une symétrie par rapport à la première bissectrice. Une image nous montre les points :



Il reste à envisager le cas d'un triangle ABC quelconque. Il se ramène à celui que nous venons de considérer. En effet, étant donnés deux triples de points non alignés (A, B, C) et (A_0, B_0, C_0), on peut toujours trouver une transformation affine h qui applique A sur A_0, B sur B_O et C sur C_0. Comme les transformations affines conservent les rapports d'aire, la solution du problème pour ABC s'obtient en appliquant la transformation réciproque h^{-1} aux solutions obtenues pour $A_0B_0C_0$.

Dans le cas particulier considéré ci-dessus ($A_0 = \binom{0}{0}$, $B_0 = \binom{0}{3}$, $C_0 = \binom{3}{0}$), à chacun des deux découpages possibles correspondaient quatre solutions (dont une, le barycentre du triangle, était commune aux deux découpages) situées aux intersections de deux hyperboles. Il en est donc de même dans le cas général.

De plus, pour un découpage donné, les trois solutions autres que le barycentre, sont appliquées cycliquement l'une sur l'autre par une transformation affine qui respecte les symétries éventuelles du triangle considéré. Il serait anormal qu'il en soit autrement ! Par exemple si ABC est un triangle équilatéral, cette transformation est une rotation de 120°.

Référence

[41].