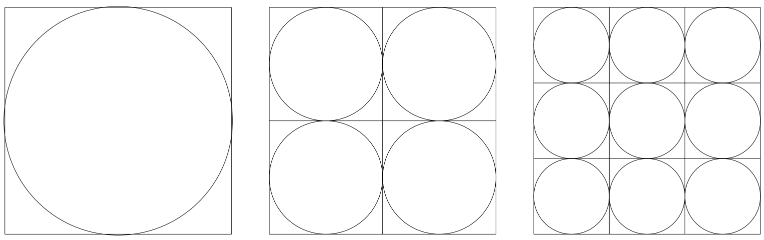
11.8. Fiche N^o 7 : Le problème des confetti

11.8.1 L'énoncé

PROBLÈME 11.8.1 *Un fabricant de confetti parfaitement ronds décide de découper ses confetti dans des feuilles de papier carrées selon un réseau carré (voir dessin).*

Comment la proportion de papier perdue varie-t-elle en fonction du diamètre des confetti ? Considérer en particulier le cas de diamètres de plus en plus petits.



Extrait de [158].

Contexte mathématique

Le problème posé, bien que très élémentaire, est connecté à des questions mathématiques avancées. On peut en effet l'associer

- à des problèmes d'optimisation : comment disposer des disques dans un carré de façon à minimiser la place perdue. Ce problème a son équivalent en dimension 3 où il a des applications pratiques non négligeables (problèmes d'empilement) ([5]).
- à des problèmes de pavage du plan (ou de l'espace) : à l'aide de quelles formes géométriques peut-on paver un plan (ou l'espace de dimension 3).
- à des problèmes de théorie de la mesure et de dimension : si après avoir découpé des confetti dans un carré, on inscrit de nouveaux confetti les plus grands possibles aux parties connexes du complémentaire, et si on poursuit le processus à l'infini, quelle est la dimension de Hausdorff de l'ensemble résiduel, et quelle est sa mesure ?

Contexte scolaire

Le problème peut être traité dès les premières leçons de géométrie du degré d'observation. On peut aussi le rencontrer beaucoup plus tard lorsqu'on introduit en 5e année les notions de suite et de limite de suite.

Contexte méthodologique

([5]) La conjecture de Kepler consistait à affirmer que l'empilement de sphères le plus dense est celui *du maraîcher*. Elle a *enfin* été démontrée au début de l'année 1999.

Pour des élèves du premier degré, l'énoncé est un problème destiné à appliquer et entretenir les connaissances acquises. Il est relativement ouvert dans la mesure où certains paramètres peuvent être modifiés facilement : notamment la taille et la forme du papier, où la forme des confetti.

En 5e année, l'énoncé n'est pas vraiment un problème, tout au plus un exercice d'illustration destiné, par exemple, à montrer que des suites constantes peuvent apparaître naturellement. C'est aussi l'occasion de rencontrer une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$. »

11.8.2 Les moyens nécessaires

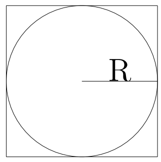
Les prérequis

Les formules donnant l'aire d'un carré ou d'un disque sont les seuls prérequis « techniques ». Le concept de variable intervient également.

11.8.3 Exemple de résolution

Prenons d'abord le cas d'un confetti unique, inscrit à la feuille de papier, c'est-à-dire dont le diamètre $2R$ est égal au côté du carré.

Dessiner



On constate que le rapport

Appliquer une formule

$$\frac{\text{aire du disque}}{\text{aire du carré}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4}$$

est indépendant de la valeur de R.

De plus, lorsque l'on considère une surface constituée d'un nombre arbitraire $n \in \mathbb{N}_0$ de carrés de côté $2R$ munis de disques inscrits de rayon R, le rapport

Généraliser

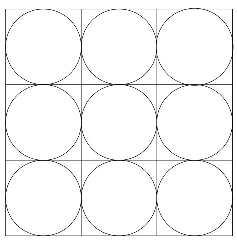
$$\frac{\text{aire des disques}}{\text{aire totale}} = \frac{n\pi R^2}{n(2R)^2} = \frac{\pi}{4}$$

reste encore constant.

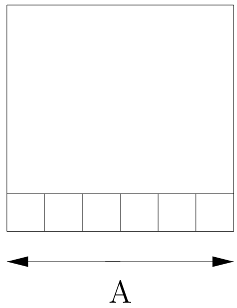
Comme n est arbitraire, on peut le choisir tel que $n = m^2$ avec $m \in \mathbb{N}$ de façon à pouvoir configurer nos n carrés sous la forme d'un seul grand carré.

Organiser

Exemple : $m = 3$ donc $n = 9$.



Jusqu'ici tous ces carrés avaient même côté $2R$. On peut à présent s'arranger pour que le côté A du grand carré soit toujours égal à 1 en choisissant correctement R.



Comme une bande contient m petits carrés, il faut que $m(2R) = 1$, donc que $R = \frac{1}{2m}$. De cette façon, lorsque m croît dans $\mathbb{N}$, R décroît dans $\mathbb{Q}$. On découpe de plus en plus de confetti dans la feuille carrée de côté 1, mais ceux-ci sont de plus en plus petits et le rapport

$$\frac{\text{aire des confetti}}{\text{aire totale}}$$

reste constant et vaut $\frac{\pi}{4}$

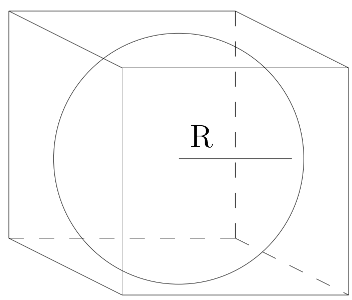
Comme on a choisi une aire totale fixe (même papier à chaque fois), l'aire utilisée pour la fabrication des confetti reste constante.

Conclure, valider

11.8.4 Passage à la dimension 3

Ci-dessus, nous avons recouvert notre feuille de papier d'un quadrillage régulier, à savoir un réseau carré.

Prenons à présent un cube, que nous allons munir d'un réseau cubique dont les mailles s'affineront au fil des étapes.



$$\frac{\text{volume de la sphère}}{\text{volume du cube}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = \frac{\pi}{6}$$

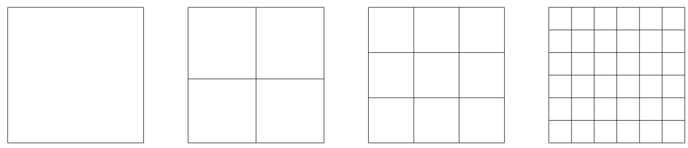
Prenons deux naturels n et m tels que $n = m^3$. Un cube de côté 1 contient m^3 petits cubes de côtés $\frac{1}{2m}$. Le rayon de la sphère inscrite à un tel cube est aussi $R = \frac{1}{2m}$ et le rapport

$$\frac{\text{volume des sphères}}{\text{volume du cube}}$$

sera toujours égal à $\frac{\pi}{6}$. Le volume total des sphères reste constant.

11.8.5 Mise en évidence de quelques suites

- Suite des réseaux :



- Suite A (m, Nombre de subdivisions d'un côté du grand carré) : 1, 2, 3, 4, ...
- Suite B (R, Rayon des confetti) : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, ...
- Suite C (n, Nombre de confetti) : 1, 4, 9, 16, ...
- Suite D (Aire d'un confetti) : $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{36}$, $\frac{\pi}{124}$, ...
- Suite E (Aire de tous les confetti) : $\frac{\pi}{4}$, $4\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$, $9\frac{\pi}{36} = \frac{\pi}{4}$, $16\frac{\pi}{124} = \frac{\pi}{4}$, ...
- Le terme général de la suite E est

$$\pi R^2 n = \pi \left(\frac{1}{2m}\right)^2 m^2 = \frac{\pi}{4}$$

  et c'est bien un nombre constant.

La suite A n'est autre que la suite des naturels. Chacun d'entre eux correspond à un quadrillage particulier.

Les élèves peuvent se rendre compte que C est une sous-suite de A, et que la suite E est constituée des produits des éléments des suites C et D, respectivemenent croissante et décroissante.

11.8.6 Prolongements possibles

Des pavages plans
Réseaux triangulés, hexagonaux (nids d'abeilles).

Des pavages de l'espace
Empilements de boulets, réseau cubique à faces centrées, ...

Références

[71], [114],[158].