11.9. Fiche N° 8 : Le problème de l'eau et du vin

11.9.1 Introduction

Le problème présenté ici a fait l'objet d'un test réalisé auprès d'élèves (des détails de l'expérience sont donnés plus loin), et dont l'un des buts était l'observation de la *compréhension* d'un énoncé lors de sa lecture.

Ceci explique la présence ci-dessous de trois moutures du même problème.

11.9.2 Les énoncés

11.9.2.1 Version « texte »

PROBLÈME 11.9.1 *Un premier seau contient une certaine quantité d'eau, un second seau contient une même quantité de vin.*
On prélève un verre de vin dans le seau à vin, et on le verse dans le seau à eau.
A l'aide du même verre, on prélève ensuite un verre du mélange obtenu dans le seau à eau et on le reverse dans le seau à vin.

- *Y a-t-il plus d'eau dans le seau à vin que de vin dans le seau à eau ?*
- *Y en a-t-il moins ?*
- *Les deux quantités sont-elles égales ?*
- *Qu'est-ce qui change si le second seau contient de l'huile à la place du vin ?*

11.9.2.2 Version « mixte »

PROBLÈME 11.9.2 *Un seau A contient une quantité V d'eau, un seau B contient une même quantité de vin.*
On prélève un volume v de vin dans le seau B , et on le verse dans le seau A.
On prélève ensuite un volume v dans le seau A et on le reverse dans le seau B.

- *Y a-t-il plus d'eau dans le seau B que de vin dans le seau A ?*
- *Y en a-t-il moins ?*
- *Les deux quantités sont-elles égales ?*
- *Qu'est-ce qui change si le seau B contient de l'huile à la place du vin ?*

11.9.2.3 Version « quantifiée »

PROBLÈME 11.9.3 *Un seau A contient* 10 *l d'eau, un seau B contient* 10 *l de vin.*
On prélève 25 *cl de vin dans le seau B, et on le verse dans le seau A.*
On prélève ensuite 25 *cl dans le seau A et on le reverse dans le seau B.*

- *Quel est le volume de vin dans le seau A et quel est le volume d'eau dans le seau B ?*
- *Qu'est-ce qui change si le seau B contient de l'huile à la place du vin ?*

Contexte mathématique

On peut considérer que la situation relève d'une théorie de la mesure des grandeurs. En cela, elle appartient à un courant du développement mathématique dont l'importance n'est plus à démontrer.

Cependant, de ce point de vue, la situation est de portée limitée, et ce sont surtout les facultés de modélisation qui devront être mises en œuvre. En particulier, il convient que l'élève admette qu'un modèle est nécessairement imparfait et qu'il est donc licite — lors d'une première modélisation — de considérer que tout en étant mélangé à l'eau, le vin conserve son volume propre.

Contexte scolaire

Vu le peu de connaissances techniques mises en œuvre, la situation pourrait être présentée à des élèves du début du secondaire. Toutefois, les difficultés liées à la modélisation semblent plutôt la réserver à la fin de cet enseignement.

Contexte méthodologique

La situation pourrait être exploitée en tant que problème isolé, mais non comme problème d'introduction ni comme problème intégré à une séquence organisée visant à l'introduction de concepts mathématiques nouveaux.

Elle pourrait cependant trouver sa place dans une séquence consacrée à un apprentissage de la modélisation.

11.9.3 Les moyens nécessaires

Les prérequis

D'un point de vue mathématique, il suffit de connaître — de façon pratique — le principe de la conservation des volumes et la règle d'addition des mesures de grandeurs disjointes.

Cependant, certaines façons d'aborder la résolution font intervenir des proportions. D'un point de vue physique, il faut dès lors que l'élève puisse distinguer une proportion d'un volume.

11.9.4 Exemple de résolution

11.9.4.1 Première méthode

Cette première méthode présente l'avantage d'être plus concrète, de paraître plus proche du problème. Elle a cependant le défaut d'être techniquement plus compliquée et de ne fournir une solution que dans le cas d'un mélange homogène (à savoir ici le cas de l'eau et du vin, on ne peut généraliser au cas de l'eau et de l'huile). De plus, il ne faut pas tenir compte de ce que le vin contient déjà de l'eau.

Dans ce qui suit, une notation telle que « V_{eau} » doit être considérée comme une abréviation de « un volume V d'eau ».

Etape 1 On a V_{eau} en A et V_{vin} en B.

Etape 2 On a $V_{eau} + v_{vin}$ en A et $V_{vin} - v_{vin}$ en B.
La proportion de vin en A est donc de $\frac{v}{V+v}$.

Etape 3 On a $V_{eau} + v_{vin} - v_{mix}$ en A et $V_{vin} - v_{vin} + v_{mix}$ en B.
Puisque le mélange est homogène, la *proportion* de vin dans le volume v_{mix} est la même que dans le seau A. Le *volume* de vin dans le volume v_{mix} est donc $\frac{v^2}{V+v}$.
Par conséquent, le volume de vin restant dans le seau A est v_{vin} auquel on a soutiré $\frac{v^2}{V+v}$, à savoir :

$$v - \frac{v^2}{V+v}$$

D'autre part, le seul volume d'eau présent en B à l'étape 3 est celui qui est dans v_{mix}, à savoir v, diminué du volume de vin dans v_{mix}, ou encore :

$$v - \frac{v^2}{V+v}$$

Les deux volumes sont donc égaux.

Modéliser par un rapport

Maîtriser la conservation des rapports

Repasser d'une proportion à un volume

11.9.4.2 Deuxième méthode

Il n'est en réalité pas nécessaire de déterminer avec précision la quantité de vin dans v_{mix}. On peut donc simplifier la méthode précédente et répondre en même temps à la question de l'eau et de l'huile.

Etape 1 On a V_{eau} en A et V_{vin} en B.

Etape 2 On a $V_{eau} + v_{vin}$ en A et $V_{vin} - v_{vin}$ en B.

Etape 3 On a $V_{eau} + v_{vin} - v_{mix}$ en A et $V_{vin} - v_{vin} + v_{mix}$ en B.

Or, v_{mix} est composé d'un certain volume d'eau et d'un certain volume de vin. On peut écrire :

Distinguer les composants d'un mélange

$$v_{mix} = v'_{eau} + v''_{vin}$$

Remarquons que si l'on est en présence d'huile plutôt que de vin, l'un de ces deux petits volumes peut éventuellement être nul, et cela ne modifie d'aucune façon la suite de la résolution.

Le volume de vin restant en A est en effet :

$$v_{vin} - v''_{vin}$$

et le volume d'eau présente en B est v'_{eau}, c'est-à-dire :

$$v_{mix} - v''_{vin}$$

via la composition du volume v_{mix}. Comme de plus les volumes v_{mix} et v_{vin} sont égaux par hypothèse, la résolution est terminée et vaut pour tous les types de mélanges.

11.9.5 Etude d'une expérience menée auprès d'élèves

Une dizaine d'élèves de cinquième ou de sixième année du secondaire ont été testés, tous suivant six heures de mathématique par semaine et la plupart suivant également deux heures supplémentaires consacrées à la préparation aux études supérieures.

Ces élèves proviennent d'athénées royaux et de collèges. Chacun d'eux a été filmé durant une vingtaine de minutes.

Endéans ce laps de temps, il leur a été demandé de lire les trois énoncés présentés ci-avant, de choisir l'un d'entre eux, puis de résoudre le problème choisi au tableau. La liberté leur était laissée de changer d'énoncé en chemin s'ils en éprouvaient le besoin.

Nous ne pouvons pas appliquer ici le découpage des sessions de résolution en épisodes comme nous l'avons fait à la fiche 1, car ce type d'analyse nécessite que l'élève agisse sans aide extérieure. Or, dans ce problème, nous avons dû sans cesse diriger les élèves afin de pouvoir tirer d'eux des résultats. Ce qui mène à la première conclusion.

11.9.5.1 Première conclusion : un problème trop compliqué ?

D'emblée, avouons que dans le temps imparti, AUCUN élève n'est parvenu au bout de la résolution malgré un soutien plus ou moins appuyé au cours de la session.

Les conclusions suivantes donnent des pistes pour l'explication de cet échec, mais d'après l'aveu de beaucoup d'élèves, la modélisation d'une situation « concrète » a été fortement perturbatrice. De plus, de petits problèmes parasites se sont greffés, comme le décantage du vin dans l'eau ou la différence de densité des deux liquides.

Certains élèves ont exprimé de l'étonnement lorsque nous les avons priés d'utiliser des calculs pour prouver leurs réponses. Ils n'avaient apparemment pas tendance à introduire une quantification dans une situation au départ non quantifiée.

11.9.5.2 Deuxième conclusion : l'appel du numérique

Vu cette peur de la modélisation, il est sans doute tout naturel qu'aucun élève n'ait choisi l'énoncé « texte ».

Les choix se sont répartis équitablement sur les deux autres versions, qui offrent un aspect un peu plus prédigéré et sont plus proches des habitudes.

Remarquons que les élèves ayant choisi la version « mixte » au départ se sont majoritairement orientés par après vers une version contenant des données numériques, soit par changement d'énoncé, soit par l'introduction personnelle de données.

La réflexion chez des élèves de ce niveau tend donc à se baser sur des valeurs numériques, et une généralisation ne se fait qu'éventuellement par la suite. Les expressions littérales ne sont plus inconnues (comme ce serait le cas au début du secondaire), mais ne sont pas encore suffisamment maîtrisées pour servir de support au raisonnement.

11.9.5.3 Troisième conclusion : attention aux *a priori*

Nous avons remarqué une autre conséquence de la présentation ([6]) de l'énoncé.

La plupart des élèves testés furent dès la lecture convaincus d'une réponse, et n'en ont pas démordu jusqu'à la fin. Il était clair pour eux qu'il restait plus de vin en A que d'eau en B, et l'intuition de cette réponse fut forte au point de rendre la résolution totalement triviale aux yeux de certains.

L'origine de l'intuition est claire : visuellement, un verre de *vin pur* est transvasé de A en B, et un même verre de *mélange* est transvasé de B en A. Cette image forte fait oublier les modifications de volumes au cours des opérations (nous en reparlons dans la cinquième conclusion).

Notons encore qu'un élève, par le biais d'erreurs successives, est parvenu à prouver tout le contraire de son intuition de départ. Il était tout aussi convaincu de sa réponse finale qu'il l'était de sa réponse initiale. Ce qui montre encore — si besoin est — une lacune dans l'examen critique de sa propre démarche.

11.9.5.4 Quatrième conclusion : une confusion aux lourdes conséquences

Cette expérience met également en évidence la terrible confusion qui existe entre les *proportions* d'une part et les *volumes* d'autre part.

Une erreur « classique » est la suivante :

> *Le seau A et le seau B ont chacun un volume de 10 litres. On prend $\frac{1}{5}$ de B pour le verser en A, puis on prend $\frac{1}{5}$ de A pour le reverser en B.*

Plus loin, nous donnons le récit d'une résolution dans lequel cette confusion intervient.

Voici un autre exemple, tiré de la résolution d'un élève ayant choisi la version quantifiée de l'énoncé :

([6]) Dans le sens où une présentation en dehors d'un contexte réel n'aurait peut-être pas amené ce type de réaction.

> *Après qu'on ait versé* 25 *cl de vin dans le seau A, le vin représente* $\frac{1}{41}$ *du seau A.* Après beaucoup de soutien, l'élève dit que l'*on a donc aussi* $\frac{1}{41}$ *de vin dans un verre de mélange. En volume, on a donc*
>
> $$\frac{25}{41}\ \mathrm{cl}$$
>
> *de vin dans le verre, et par conséquent, on a*
>
> $$\frac{16}{41}\ \mathrm{cl}$$
>
> *d'eau dans le verre !*

La confusion peut être plus subtile et venir des notations elles-mêmes. Un élève dit :

> *On trouve* $\frac{1}{41}$ cl *de vin dans le seau A lorsqu'on a mis les* 25 cl *de vin dans le seau A.*

Le même élève *écrit* au tableau :

> *En B, il y a* $\frac{40}{41}.25$ cl *d'eau.*

mais il est incapable de réaliser qu'il a répondu à la question, car pour lui, le calcul permettant de trouver le volume n'est pas fini. Il voudrait encore diviser par 25, ou exécuter une autre opération.

Ainsi, même chez les élèves qui ont manifestement compris la différence entre volume et proportion, apparaît une difficulté d'expression due à une maîtrise incomplète des notations appropriées.

Remarquons qu'il n'est pas rare de lire des recettes de cuisine dans lesquelles on dit par exemple : *prenez un volume de vodka pour trois volumes de gin* et autres ... Le contexte concret de notre problème faisant immanquablement appel à de telles références, nous pouvons peut-être voir là une origine de la confusion entre proportion et volume.

11.9.5.5 Cinquième conclusion : des problèmes algébriques

Parallèlement à la confusion mise en évidence ci-dessus, et peut-être à cause d'elle, deux problèmes — liés — surgissent au niveau algébrique.

Oubli de la conservation du volume total

Beaucoup d'élèves oublient que le volume total de liquide présent à chaque instant est constant, et qu'il est donné par $2V$. Cette constante leur offre pourtant une possibilité de contrôle de leurs calculs.

Difficulté de trouver la proportion de vin dans l'eau

> Vu que la modification des volumes n'est pas toujours bien prise en compte, et que les volumes sont confondus avec des proportions, il est vain d'espérer une expression correcte de la proportion de vin dans le seau A (et donc dans le verre de mélange).
>
> Au *mieux* cette proportion est-elle donnée comme étant $\frac{v}{V}$. Et le pas vers le volume n'est alors pas encore franchi.

Notons, en sus, des difficultés de nature purement calculatoire (ne pas pouvoir réduire une fraction comme $\frac{25}{1025}$, ...).

11.9.6 La résolution *in extenso* d'un élève

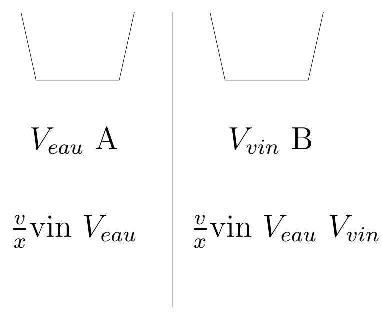
Comme on le constate à la lecture de ce qui suit, la principale difficulté rencontrée par cet élève a été le choix d'une modélisation à l'aide de proportions plutôt qu'à l'aide de volumes.

Après lecture des énoncés, l'élève choisit la version « mixte ». Il décrète très vite qu'il y a plus de vin en A que d'eau en B.

> *Le fait que du vin va revenir de A vers B ne semble pas lui indiquer que le vin présent en A après le premier transvasement va diminuer lors du second transvasement.*

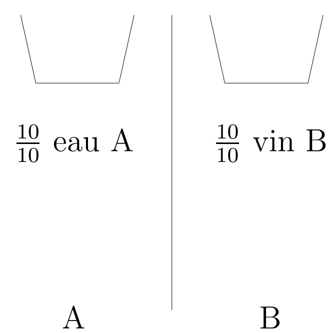
Pour fixer le volume v, il propose de prendre un *volume de* 10% *de B*. Cette suggestion révèle la présence de la confusion, ainsi que d'un attrait — voire d'une nécessité — des exemples numériques.

Il dessine :



Il dit qu'en A, la partie de vin est $\frac{v}{x}$, que la partie d'eau est V, et donc que l'on a montré ce qu'on voulait (sic).

Mais il ne s'arrête pas là et introduit à présent des valeurs.

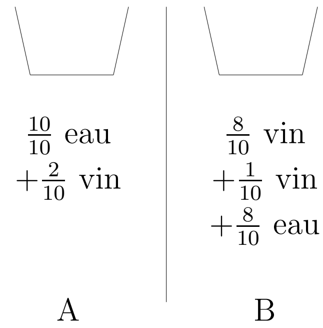


Il prend $\frac{2}{10}$ de vin en B et les verse en A. En A, on a donc :

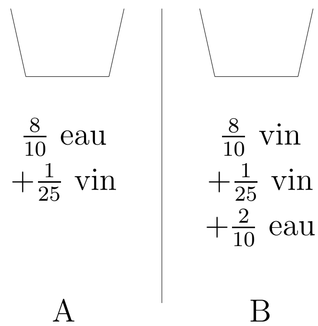
$$\frac{10}{10}\ \text{eau} + \frac{2}{10}\ \text{vin}$$

Comme l'eau et le vin sont mélangés, lorsqu'on prend $\frac{2}{10}$ de A, on prend en fait $\frac{2}{10}$ de l'eau et $\frac{2}{10}$ du vin.

Ici, l'élève ne se rend donc pas compte que $\frac{2}{10}$ de $\frac{12}{10}$ ne donne pas le même volume que $\frac{2}{10}$ de $\frac{10}{10}$.



Il réfléchit, puis « corrige » sa réponse :



Comme $\frac{1}{25} < \frac{2}{10}$, il y a donc plus d'eau en B que de vin en A, et on a prouvé ce qu'on voulait.

> *A ce stade, l'élève a donc prouvé le contraire de ce qu'il avait proposé. Ce résultat ne le gène aucunement, puisqu'il semble avoir oublié lui-même sa thèse de départ.*

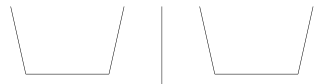
Nous lui suggérons alors de compter le total des volumes présents.

Il trouve $\frac{18}{10} + \frac{2}{25}$ et voit que ce n'est pas égal à $\frac{20}{10}$. Il avait donc de plus omis la conservation du volume total. Il recommence son calcul.

Il va prendre $\frac{1}{5}$ du seau A — où se trouvent $\frac{10}{10}$ d'eau et $\frac{2}{10}$ de vin — pour le verser en B où se trouvent $\frac{8}{10}$ de vin.

L'élève n'a toujours pas exprimé de volume, et nous lui demandons de relire l'énoncé. Nous lui demandons si le volume pris en B ($\frac{1}{5}$) et le volume pris en A ($\frac{1}{5}$) aux étapes idoines sont égaux.

Il revoit son calcul :



A	B
$\frac{8}{10}$ eau	$\frac{8}{10}$ vin
$+\frac{8}{50}$ vin	$+\frac{2}{50}$ vin
	$+\frac{2}{10}$ eau

Et comme $\frac{2}{10} > \frac{8}{50}$, il y a donc plus d'eau en B que de vin en A.

L'élève n'a apporté de correction qu'à son erreur de calcul $\frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{2}{10}$*, mais sa méthode de résolution reste inchangée.*

Cette fois, nous lui disons que les deux parts de $\frac{1}{5}$ qu'il considère ne correspondent pas au même volume. Cette discussion dure quelques minutes, mais il ne comprend toujours pas la distinction entre le volume et la proportion. Les idées préconçues sont donc tenaces et très difficiles à renverser.

Nous lui suggérons alors d'essayer de reprendre le problème avec des seaux contenant chacun 10 litres de liquide, mais il avoue ne pas savoir comment s'y prendre.

Enfin, un déclic se fait, et il comprend. L'instant est clairement marqué sur son visage lorsque l'on visionne la bande vidéo !

Il prend $V = 10\ l$ et $v = 2\ l$, puis dit que l'on doit en fait prendre $\frac{1}{6}$ des $\frac{10}{10}$ eau$+\frac{2}{10}$ vin pour avoir le même volume que le $\frac{1}{5}$ de vin pris au départ.

En effet,

$$\frac{1}{6} \text{ de } 12l = \frac{1}{5} \text{ de } 10l$$

Le temps imparti s'achève ici, mais l'élève aurait sans aucun doute abouti à la bonne réponse avec quelques minutes de plus.