18.3.1 Un problème de géométrie analytique dans un octaèdre

18.3.1.1 Le contexte du test

Le test a eu lieu le mercredi 5 mai 1999 au matin pendant 50 minutes de cours, dans une classe de sixième transition du Collège Sainte Marie à Mouscron comportant 19 élèves d'option à 6 périodes/semaine en mathématiques, avec Mme Chantal Terryn comme titulaire du cours.

Le test était de type tout à fait classique, avait été annoncé 15 jours à l'avance et voulait vérifier les acquis de base des élèves en géométrie analytique de l'espace. Les élèves ne disposaient donc pas de leurs notes de cours pendant la durée du test.

18.3.1.2 L'énoncé du problème

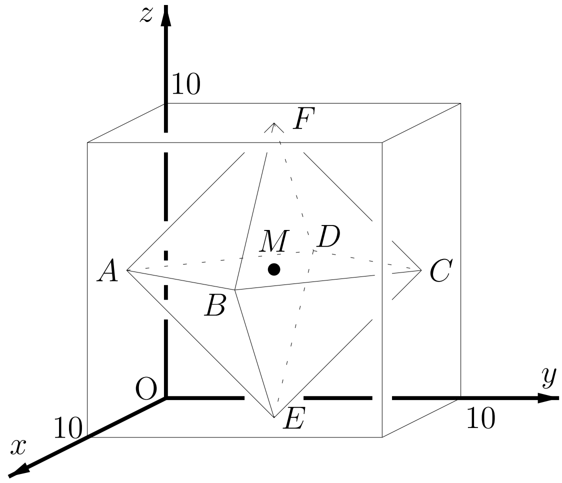
Soit $Oxyz$ un repère orthonormé de l'espace ; on considère le cube dont 4 sommets sont l'origine O et les points $(10; 0; 0)$, $(0; 10; 0)$, $(0; 0; 10)$.

On note M le centre du cube.

On considère enfin l'octaèdre $ABCDEF$ inscrit à ce cube : il est obtenu en joignant les centres des faces du cube.

Choisissez une face de l'octaèdre (et indiquez laquelle sur votre feuille).

1. *Quelle est une équation cartésienne du plan qui contient cette face ?*
2. *Déterminez une équation vectorielle — ou des équations paramétriques, ou des équations cartésiennes — de la perpendiculaire issue de M à ce plan. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de cette perpendiculaire avec le plan ? Quelle est la distance du point M à ce plan ?*
3. *Déterminez les points de percée de cette perpendiculaire dans les faces du cube.*
4. *Aurait-on pu prévoir les résultats sans faire aucun calcul ? Détaillez vos arguments.*



18.3.1.3 Un corrigé relatif

Nous avons choisi ([3]) d'étudier le plan de la face ABF, noté aussi π_{ABF} .

La phase d'intériorisation pour la question 1

On détermine facilement les coordonnées des points utiles :

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Il faut savoir aussi que l'équation cartésienne d'un plan est une expression du type $ax + by + cz = d$, où les coefficients a, b, c et d sont des nombres (connus) et caractéristiques (à un facteur près) du plan, tandis que x, y et z sont les trois coordonnées d'un point quelconque de ce plan.

La phase de condensation pour la question 1

Il y a au moins deux procédés pour déterminer l'équation cartésienne du plan π_{ABF} :

- écrire une équation vectorielle ou des équations paramétriques de ce plan, et en déduire une équation cartésienne par élimination des paramètres,
- exprimer que les coordonnées des points A, B et F vérifient l'équation cartésienne écrite sous la forme canonique $ax+by+cz = d$ et en déduire les coefficients a, b, c et d à une constante (multiplicative) près.

([3]) Suivant en cela la majorité des élèves (11 sur 19) . . .

Si on suit la première méthode, une équation vectorielle du plan π_{ABF} s'écrit :

$$\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB} + \ell \cdot \overrightarrow{AF}$$

On en déduit des équations paramétriques :

$$\begin{cases} x - 5 = k \cdot 5 + \ell \cdot 0 \\ y - 0 = k \cdot 5 + \ell \cdot 5 \\ z - 5 = k \cdot 0 + \ell \cdot 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 5k + 5 \\ y = 5k + 5\ell \\ z = 5\ell + 5 \end{cases}$$

D'où l'équation cartésienne $y = x - 5 + z - 5$, ou, plus simplement :

$$x - y + z = 10$$

Si — suivant l'autre méthode — on souhaite calculer les coefficients a, b, c et d de la forme canonique $ax + by + cz = d$ à l'aide des coordonnées des points A, B et F, on obtient le système :

$$\begin{cases} a \cdot 5 + b \cdot 0 + c \cdot 5 = d \\ a \cdot 10 + b \cdot 5 + c \cdot 5 = d \\ a \cdot 5 + b \cdot 5 + c \cdot 10 = d \end{cases}$$

On en tire presque immédiatement $b = -a$ et $c = a$. Si on soustrait membre à membre la troisième équation de la somme des deux premières, on obtient aussi $d = 10a$. L'équation s'écrit donc $ax - ay + az = 10a$. Comme l'ensemble de points π_{ABF} n'est pas tout l'espace : $a \neq 0$, et l'équation cherchée peut donc s'écrire :

$$x - y + z = 10$$

La phase de réification pour la question 1

Dans un premier temps, il suffit par exemple de vérifier que les coordonnées des points A, B et F vérifient bien l'équation $x - y + z = 10$, ce qui ne présente aucune difficulté !

Des raisonnements plus substantiels, et dont les résultats sont éclairants, constituent des réponses à la question 4.

La phase d'intériorisation pour la question 2

On détermine facilement les coordonnées du centre du cube :

$$M = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Les réponses à fournir à la question 2 demandent aussi que les notions et procédures suivantes soient disponibles :

- une droite peut se décrire à l'aide d'une équation vectorielle, d'équations paramétriques ou cartésiennes ; par exemple, l'équation vectorielle d'une droite passant par les points M et N est une expression du type $\overrightarrow{MX} = k \cdot \overrightarrow{MN}$, où X est un point quelconque de cette droite ; le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est un vecteur directeur de cette droite,
- si $ax + by + cz = d$ est une équation cartésienne d'un plan, alors le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à ce plan,
- déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan équivaut à résoudre le système formé — par exemple — par les équations cartésiennes de cette droite et de ce plan,
- la distance entre deux points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ se calcule grâce à la formule $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

La phase de condensation pour la question 2

Notons p_M la perpendiculaire issue du point M au plan π_{ABF}.

L'observation fondamentale est qu'un vecteur directeur de la droite p_M peut être le vecteur des coefficients d'une équation cartésienne du plan π_{ABF}. Des équations paramétriques de la droite p_M s'écrivent alors immédiatement :

$$\begin{cases} x - 5 = k \cdot 1 \\ y - 5 = k \cdot (-1) \\ z - 5 = k \cdot 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = k + 5 \\ y = -k + 5 \\ z = k + 5 \end{cases}$$

Des équations cartésiennes correspondantes sont $x - 5 = 5 - y = z - 5$ ou

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

Les coordonnées du point commun G à la droite p_M et au plan π_{ABF} s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 10 \\ x - y + z = 10 \end{cases}$$

On obtient très facilement :

$$G = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \\ \frac{10}{3} \\ \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

Enfin, la distance du point M au plan π_{ABF} est exactement la distance du point M au point G, c'est-à-dire :

$$\sqrt{\left(\frac{20}{3} - 5\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 5\right)^2 + \left(\frac{20}{3} - 5\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

La phase de réification pour la question 2

La plupart des arguments convaincants à ce stade-ci résulteront des réponses aux questions 3 et 4. On peut bien sûr vérifier que les coordonnées du point G vérifient l'équation cartésienne $x - y + z = 10$ du plan π_{ABF}, ...

La phase d'intériorisation pour la question 3

Les réponses à fournir à la question 3 demandent encore que les résultats suivants soient disponibles :

- la caractérisation, sous une forme ou l'autre, des faces du cube, par exemple la face située dans le plan Oxz est décrite par l'équation cartésienne $y = 0$, ...
- les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan sont les solutions du système formé — par exemple — par les équations cartésiennes de cette droite et de ce plan.

La phase de condensation pour la question 3

Si on souhaite déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite p_M avec la face située dans le plan de coordonnées Oxz, il suffit donc de poser $y = 0$ dans les équations (paramétriques ou cartésiennes) de cette droite : on obtient instantanément le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

De manière analogue — et un peu aveuglément — :

- les coordonnées du point d'intersection de la droite p_M avec la face située dans le plan de coordonnées Oyz s'obtiennent en posant $x = 0$ dans les équations (paramétriques ou cartésiennes) de cette droite : on obtient instantanément le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- les coordonnées du point d'intersection de la droite p_M avec la face située dans le plan de coordonnées Oxy s'obtiennent en posant $z = 0$ dans les équations (paramétriques ou cartésiennes) de cette droite : on obtient instantanément — et encore une fois — le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Etc. (si besoin ...)

La phase de réification pour la question 3

Elle est toute entière l'objet de la question 4.

La phase d'intériorisation pour la question 4

Comme pour tous les énoncés de ce genre — et c'est ce qui en fait la difficulté — la question consiste ... à formuler la question !

Quatre observations.

Puisqu'il s'agit de prévoir les résultats, on va donc d'abord essayer de relever ce qu'ils ont de remarquable. Sans être nécessairement exhaustif, on peut relever les particularités suivantes :

- **Observation 1 :** l'équation cartésienne $x - y + z = 10$ du plan π_{ABF} est particulièrement simple : les coefficients en sont des 1 ou des -1, et le terme indépendant est 10, qui est justement la longueur de l'arète du cube,
- **Observation 2 :** les équations cartésiennes $\frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-5}{1}$ de la droite p_M sont pareillement simples et presque symétriques,
- **Observation 3 :** les coordonnées du point G, écrites sous forme de fractions irréductibles, ont le même dénominateur 3 et des numérateurs qui sont des multiples de 10,
- **Observation 4 :** la droite p_M n'a que *deux* points d'intersection distincts avec l'ensemble de toutes les faces du cube.

La quatrième question peut alors être posée sous la forme plus précise : y a-t-il un fait géométrique qui expliquerait l'ensemble de ces particularités ?

La phase de condensation pour la question 4

L'observation 4 est la plus marquante ! Elle signifie que la perpendiculaire p_M à la face ABF issue du point M est une des diagonales principales du cube. Mais est-ce là le « fait géométrique » recherché, qui permettrait d'expliquer aussi les trois autres observations relevées plus haut ?

Si la droite p_M est une diagonale principale du cube, alors l'observation 2 devient toute naturelle !

Notons $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ les deux extrémités de cette diagonale principale. Le vecteur

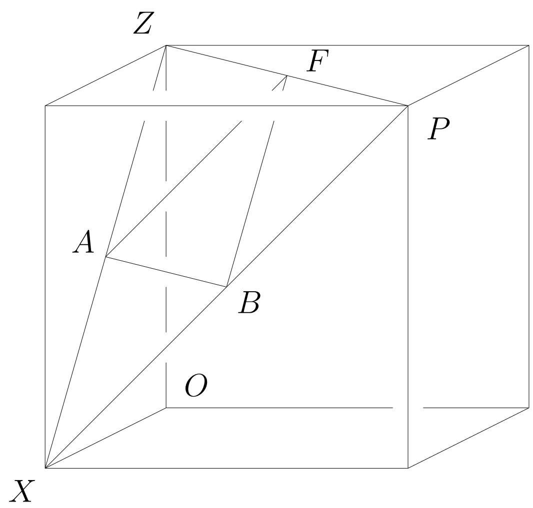
$$\overrightarrow{YY'} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de cette diagonale. Dès lors, le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de cette diagonale, ainsi donc que de la droite p_M. Mais cela achève de rendre compte de l'observation 2 !

Si la droite p_M est une diagonale principale du cube, alors l'observation 1 devient (presque) naturelle !

En effet, comme les coefficients de l'équation cartésienne du plan π_{ABF} doivent être les composantes d'un vecteur directeur de la droite p_M, l'observation 1 est pareillement rencontrée, sauf en ce qui concerne la signification du terme indépendant.

Mais cette signification résulte immédiatement de l'équation cartésienne du plan π_{ABF} . En effet, cette équation s'écrit aussi $z = 10 - x + y$. Or, le point $F = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ appartient évidemment à ce plan et sa troisième coordonnée est bien la longueur de l'arête du cube. Mais comme le point F se trouve aussi à la verticale du point de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'équation $z = 10 - x + y$ montre que sa troisième coordonnée est donnée par $z = 10 - 5 + 5 = 10$: le 10 de l'équation est bien le 10 de la troisième coordonnée du point F, c'est-à-dire la longueur de l'arête du cube ! On peut obtenir la même conclusion de manière plus géométrique. On montre en effet facilement que le plan π_{ABF} coupe les faces du cube suivant le triangle PZX.



Or, dans le plan de coordonnées Oxz, la droite d_{XZ} a manifestement pour équation $z = 10 - x$. Et ce 10 est bien la hauteur du point Z, c'est-à-dire la longueur de l'arête du cube, or $z = 10 - x$ est aussi l'équation de la « trace » du plan d'équation $x - y + z = 10$ sur le plan de coordonnées Oxz décrit par la condition $y = 0$.

En translatant suivant le vecteur $\overrightarrow{PZ}$ la droite d_{PX}, on décrit pareillement la « trace » du plan π_{ABF} sur le plan de coordonnées Oyz : on trouve $z = y + 10$, ce qui confirme encore l'équation cartésienne $x - y + z = 10$ du plan π_{ABF}.

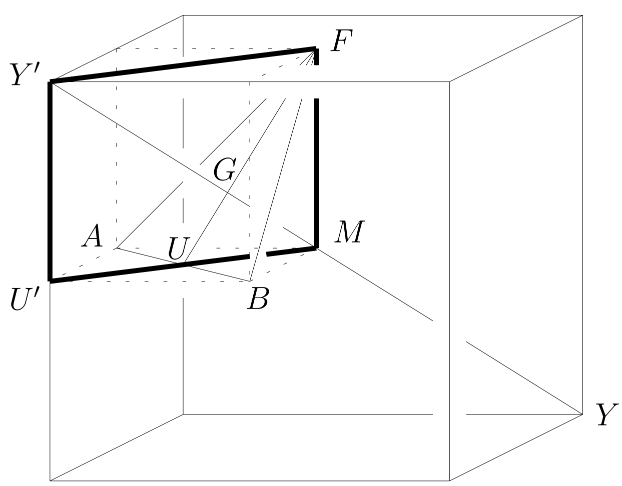
Tout n'est pas encore clair . . .

Car l'observation 3 ne semble pas résulter de manière immédiate de ce que la droite p_M soit une des diagonales principales du cube . . .

La phase de réification pour la question 4

La démonstration d'un résultat-clé.

Il s'agit de prouver que la diagonale principale $d_{YY'}$ est perpendiculaire au plan π_{ABF} de la face de l'octaèdre.



On considère le plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$, et on commence par démontrer qu'il est perpendiculaire au plan π_{ABF}.
Or, les diagonales du carré $AU'BM$ étant perpendiculaires, la droite d_{AB} est perpendiculaire à la droite $d_{U'M}$. Cette même droite d_{AB} est orthogonale à la droite $d_{Y'U'}$, puisque la droite $d_{Y'U'}$ est perpendiculaire au plan $\pi_{AU'BM}$ qui contient la droite d_{AB}.

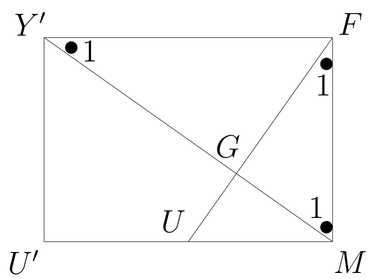
Le critère de perpendicularité droite/plan entraîne alors que la droite d_{AB} est perpendiculaire au plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$. Et ceci implique enfin, par définition de plans perpendiculaires, que le plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$ est perpendiculaire au plan π_{ABF}.

Il reste alors à démontrer que la droite d_{UF} est perpendiculaire à la droite $d_{Y'M}$ pour en déduire que la droite $d_{YY'}$ ou $d_{MY'}$ est perpendiculaire au plan π_{ABF} .

> En effet, on a déjà montré que la droite d_{AB} est perpendiculaire au plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$, ce qui implique que la droite d_{AB} est aussi orthogonale à la droite $d_{Y'M}$, et le critère de perpendicularité droite/plan permet alors d'en tirer — comme souhaité — que la droite $d_{Y'M}$ est perpendiculaire au plan π_{ABF}.

Pour établir que les droites d_{UF} et $d_{Y'M}$ sont perpendiculaires, on ne doit heureusement plus travailler que dans le plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$! Dans le *rectangle* $Y'U'MF$, notons U le point milieu du segment $U'M$.

Les triangles *rectangles* FUM et $FY'M$ sont semblables puisque $\frac{|FM|}{|UM|} = \frac{|FY'|}{|FM|}$, c'est-à-dire $\frac{5}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{5}$ (ce qui résulte de $|FM| = 5$ et $|FY'| = 5\sqrt{2}$). On en déduit que les angles F_1 et Y'_1 sont égaux.
Partant du triangle $Y'FM$, on calcule alors : $\widehat{M_1} = 1\text{dr.} - \widehat{Y'_1} = 1\text{dr.} - \widehat{F_1}$, d'où on tire que $\widehat{G} = 1\text{dr.}$



On peut aussi utiliser la trigonométrie du triangle rectangle : le raisonnement reste le même (4) !

Une bonne surprise concernant l'observation 3.

En travaillant dans le même plan diagonal $\pi_{Y'U'MF}$, on établit aussi — et indépendamment de ce qui précède — que $|UG| = \frac{1}{3}|UF|$.

En effet, les triangles UGM et $Y'FG$ sont homothétiques, donc semblables. Dès lors, $\frac{|UG|}{|GF|} = \frac{|UM|}{|Y'F|} = \frac{1}{2}$. La relation annoncée s'ensuit immédiatement.

Cette « surprise » permet de tirer au clair l'observation 3 : le point G étant situé au $\frac{2}{3}$ de la médiane du triangle équilatéral ABF est donc le barycentre de ce triangle. Ce résultat permet de retrouver immédiatement les coordonnées du point G.

En guise de conclusion . . .

Ce qui permet de comprendre et de relier entre elles les quatre observations initiales, c'est la géométrie particulière du rectangle $Y'U'MF$.

Les calculs n'y sont pas légion, mais le détail des raisonnements n'est pas anodin . . . On n'a rien pour rien !

(4) Cfr. à ce sujet une remarque dans un commentaire de copie plus loin.

18.3.1.4 La grille de lecture : son contenu particularisé au problème, et quelques exemples

Une grille de lecture.

Le corrigé relatif suggère de construire une grille de lecture qui s'attache à relever, d'après les différentes questions, les éléments suivants.

Pour la question 1,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les coordonnées des points utiles,
  - l'identification des types d'équations à déterminer ;
- pour la phase de condensation :
  - la réalisation des calculs utiles ;
- pour la phase de réification :
  - la vérification des calculs.

Pour la question 2,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les coordonnées des points utiles,
  - l'identification des types d'équations à déterminer,
  - l'identification du vecteur normal à un plan à partir de son équation cartésienne,
  - la formule de distance entre deux points ;
- pour la phase de condensation :
  - le choix du vecteur directeur de la droite p_M ,
  - la réalisation des calculs utiles ;
- pour la phase de réification :
  - éventuellement, la vérification de certains calculs, sinon on se reporte à la question 4.

Pour la question 3,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les éléments à relever sont identiques à ceux de la question 2 ;
- pour la phase de condensation :
  - la réalisation des calculs utiles ;
- pour la phase de réification :

– la limitation justifiée des calculs au strict nécessaire, sinon on se reporte à la question 4.

Pour la question 4, la classification suivant les trois phases des différentes étapes de sa résolution n'a rien d'indispensable : d'abord parce que la question en elle-même est du domaine de la (seule) réification, ensuite parce que vu le temps imparti à l'épreuve en classe, il ne fallait pas s'attendre à des réponses aussi exhaustives que celles du corrigé. Les éléments suivants ont été retenus

- pour la phase d'intériorisation : les observations pertinentes,
- pour la phase de condensation : l'analyse des relations entre les observations,
- pour la phase de réification : la synthèse de cette analyse, et en particulier le choix — avec justification(s) — d'un fait géométrique qui rend compte de l'ensemble des observations.

Quelques exemples

Les extraits de copies d'élèves présentés ci-après sont l'occasion de quelques commentaires relatifs à la grille de lecture et à sa pertinence ([5]).

Une réponse à la question 1.

Sur la copie n° 1, les phases d'intériorisation et de condensation sont dans l'ensemble bien maîtrisées : les éléments utiles sont explicitement présents et la structuration (équations vectorielle, paramétriques, cartésienne) est signalée opportunément. Mais malgré la forme particulièrement parlante de l'équation cartésienne du plan choisi (ici le plan π_{ABE}), aucune vérification n'en est proposée : par exemple, pourquoi ce plan passe-t-il par l'origine des coordonnées, comme son équation $x - y + z = 0$ l'indique ?

Une réponse à la question 2 (l'équation de la droite p_M).

Des commentaires analogues à ceux apportés à la copie n° 1 s'appliquent à la copie n° 2.

Une réponse aux questions 3 et 4.

On a $Oxyz$

Face de l'octaèdre ABE

① Eq du plan π_{ABE}

On a <u>éq vectorielle</u>

$\pi_{ABE} \equiv \vec{OP} = \vec{OE} + l\,\vec{EB} + m\,\vec{EA}$

On a Coord E : $(5,5,0)$

Coord B : $(10,5,5)$

Coord A : $(5,0,5)$

Et $\vec{OE}$: $(5\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k})$

$\vec{EB}$: $(5\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k})$

$\vec{EA}$: $(0\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k})$

Dc on a $\vec{OP} = (5\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}) + l(5\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}) + m(0\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k})$

<u>éq param.</u>

$$\begin{cases} x = 5 + 5l + 0m \\ y = 5 + 0l - 5m \\ z = 0 + 5l + 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 5l \\ y = 5 - 5m \\ z = 5l + 5m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-5}{5} = l \\ -\frac{y-5}{5} = m \\ z = 5l + 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{x-5}{5} \\ m = \frac{5-y}{5} \\ z = \cancel{5}\cdot\left(\frac{x-5}{\cancel{5}}\right) + \cancel{5}\left(\frac{5-y}{\cancel{5}}\right) \end{cases}$$

<u>éq cart.</u>

$z = x \cancel{-5} \cancel{+5} - y$

$z - x + y = 0$

$\boxed{\pi_{ABE} \equiv x - y - z = 0}$

question n°2

données : . H (5, 5, 5)

. éq $\pi_{ABF} \equiv x - y + z - 10 = 0$

. $\vec{v}$ du plan (1, -1, 1)

demande : une éq vectorielle ou des paramétrique ou des cartésiennes de la droite passant par H et ⊥ plan ABF

recherche : d ∩ pl ABF = H'

recherchons les éq. cartésiennes

éq. cartésienne générale d'une d

soit - un pt de la d (α, β, γ)

- un vecteur directeur de la d : (a, b, c)

$\Rightarrow d \equiv \frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}$

H ∈ d. et $\vec{v}$ (1, -1, 1) est le vecteur directeur du plan ABF qui est ⊥ à d

donc :

$$d_{HH'} \equiv \frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-5}{1}$$

$$\equiv x-5 = \frac{y-5}{-1} = z-5$$

Copie n° 2

3) • point de percée avec XOZ

on a : $\begin{cases} y = 0 \\ x - 5 = 5 - y \\ x - 5 = z - 5 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \\ z = 10 \end{cases}$

$I (10, 0, 10)$

• avec YOZ

on a : $\begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 5 - y \\ x - 5 = z - 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \\ z = 0 \end{cases}$

$I_2 (0, 10, 0)$

L'intersection avec les quatres autres faces aura les mêmes coordonnés $(10, 0, 10)$ et $(0, 10, 0)$ car les points trouvés sont les coins du cubes et sont donc communs à trois plans.

4) le plan ABF et le plan XOZ forment un angle de $45°$ donc la perpendiculaire passant par le milieu du cube doit obligatoirement passer par les 2 sommets opposés.

La copie n° 3 est intéressante parce que l'élève s'est limité au calcul des coordonnées de seulement deux points d'intersection de la droite p_M avec les plans de coordonnées avant de conclure que cela règlait la question : on peut interpréter cette observation comme un indice de réification.

Il faut aussi noter que sa réponse à la question 4 suggère d'effectuer des calculs d'angles, mais prend en compte un angle dont nous ne comprenons pas ce qu'il signifie dans la configuration à étudier. De plus, même si la diagonale principale à considérer forme un angle égal à $\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec le plan horizontal, et que le plan π_{ABF} forme un angle égal à $\arctan \sqrt{2}$ avec ce même plan horizontal, cela ne suffit pas pour montrer que la diagonale principale en question est perpendiculaire au plan π_{ABF}.

([5]) Il n'est pas question de faire ici la moindre analyse critique des copies en ce qui regarde l'enseignement dispensé, puisque nous n'y avons pris aucune part et ne disposons donc d'aucune information suffisante pour une étude objective.