### 18.3.2 Un problème de projection orthogonale en géométrie synthétique

#### 18.3.2.1 Le contexte du test

Le test a eu lieu le mardi 18 mai 1999 de 14 h 35 à 16 h 15, dans une classe de cinquième transition du Collège Sainte Marie à Mouscron comportant 27 élèves d'option à 6 périodes/semaine en mathématiques, avec Mr Luc Terryn comme titulaire du cours.

Le test était de type relativement classique, avait été annoncé 15 jours à l'avance et voulait vérifier les acquis des élèves sur les activités de démonstration en géométrie synthétique de l'espace. Les élèves étaient regroupés par deux, et un élève a travaillé seul ; ils pouvaient disposer de toutes leurs notes de cours. Chaque équipe avait aussi reçu une maquette d'octaèdre (réalisée avec des pailles et des cure-pipes) en début de test.

#### 18.3.2.2 L'énoncé du problème

*Dans un octaèdre régulier, il y a 6 sommets, 8 faces et 12 arêtes ; les 8 faces sont des triangles équilatéraux, qui se répartissent en 4 couples de faces opposées.*

1. *Démontrez que (les plans des) deux faces opposées d'un octaèdre régulier sont parallèles.*
2. *Démontrez que la droite passant par les centres de gravité* ([6]) *de deux faces opposées est perpendiculaire à ces faces.*
3. *Déterminez la projection orthogonale d'une face sur le plan de la face opposée. Justifiez et commentez votre résultat.*

*Réalisez une (ou des) figure(s) claire(s) permettant de suivre au mieux vos raisonnements.*

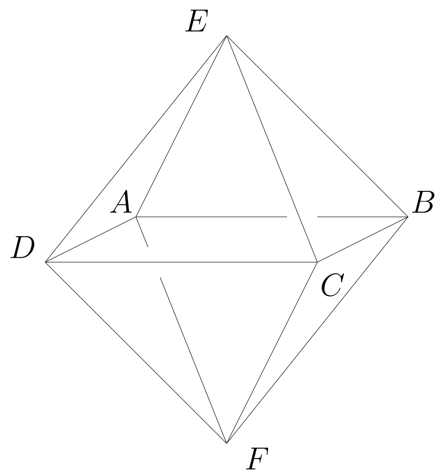
([6]) Ou barycentres : il s'agit des points d'intersection des médianes d'un triangle.

#### 18.3.2.3 Un corrigé relatif

Dans toute la suite de ce corrigé, les sommets de l'octaèdre régulier sont notés comme dans la figure ci-contre.

Les figures partielles sont réalisées de telle sorte qu'elles puissent s'appliquer sur cette même représentation.

On considère les faces opposées $ABE$ et $CDF$, dont on note les plans $\pi_{ABE}$ et $\pi_{CDF}$.




### La phase d'intériorisation pour la question 1

Dans un octaèdre régulier, toutes les arètes sont de même longueur.

Pour démontrer que deux plans sont parallèles, on dispose d'un *critère de parallélisme* : la condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient parallèles est que l'un d'eux soit parallèle à deux droites concourantes tracées dans l'autre.

### La phase de condensation pour la question 1

**Apparition de losanges.**

La figure $AECF$ est un losange parce que (?) l'octaèdre étant régulier, on a les égalités $|AE| = |EC| = |CF| = |FA|$.

Pour des raisons analogues, la figure $BEDF$ est aussi un losange.

**L'efficacité des losanges.**

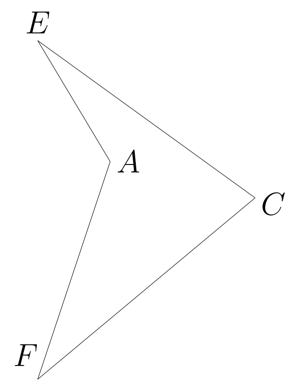
Si la figure $AECF$ est un losange, alors les droites $d_{CF}$ et $d_{AE}$ sont parallèles. Pareillement, si la figure $BEDF$ est un losange, alors les droites $d_{DF}$ et $d_{BE}$ sont parallèles. Le critère de parallélisme de deux plans rappelé plus haut implique alors immédiatement que les plans $\pi_{CDF}$ et $\pi_{ABE}$ sont parallèles, puisque les droites $d_{CF}$ et $d_{DF}$ concourantes en $F$ sont toutes deux parallèles au plan $\pi_{ABE}$.

## La phase de réification pour la question 1

**Un regard critique sur les losanges de l'espace.**

Il n'est pas évident qu'une figure de l'espace formée de quatre segments consécutifs de même longueur soit un losange ; c'est même — littéralement — faux !

Cela redevient correct dès qu'on est certain que les quatre sommets d'une telle figure sont *coplanaires.*




Et on sent confusément que c'est toute la configuration de l'octaèdre qui force la figure $AECF$ à être un vrai losange. Plus précisément, ce ne sont pas seulement les égalités $|AE| = |EC| = |CF| = |FA|$, mais aussi *toutes* les égalités $|BA| = |BE| = |BC| = |BF| = |DA| = |DE| = |DC| = |DF|$ qui font de la figure $AECF$ une figure plane.

**Un *Deus ex machina* . . .**

Comme il s'agit de forcer une figure à être plane à partir d'égalités de distances, l'outil du plan médiateur s'impose presque naturellement.

Et en effet, les points $E$, $C$, $F$ et $A$ sont dans le plan médiateur du segment $BD$ puisque dans un octaèdre régulier, on a les relations :

$$\begin{array}{ll} |BE| = |DE| & |BC| = |DC| \\ |BF| = |DF| & |BA| = |DA| \end{array}$$

Les quatre points $E$, $C$, $F$ et $A$ étant coplanaires, les égalités $|AE| = |EC| = |CF| = |FA|$ impliquent alors que la figure $AECF$ est un vrai losange. De plus, suivant une propriété caractéristique du plan médiateur d'un segment de droite, la droite $d_{BD}$ est perpendiculaire au plan $\pi_{AECF}$.

Ce raisonnement s'applique pareillement à beaucoup d'autres configurations « en losange » extraites de l'octaèdre régulier : la droite $d_{EF}$ est ainsi perpendiculaire au plan $\pi_{ABCD}$ , les losanges en question sont en fait des carrés, etc . . .

## La phase d'intériorisation pour la question 2

On peut faire appel à un *critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan* : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan est d'être perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans le plan.

De plus, les résultats obtenus lors de l'étude de la question 1 suggèrent d'utiliser le résultat : si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Si on note $G_1$ le barycentre du triangle équilatéral $ABE$ et $G_2$ le barycentre du triangle équilatéral $CDF$, l'énoncé de la question 2 devient alors :

> *Démontrez que la droite $d_{G_1G_2}$ passant par les centres de gravité des deux triangles équilatéraux $ABE$ et $CDF$ est perpendiculaire au plan $\pi_{ABE}$.*

## La phase de condensation pour la question 2

### Il faut une nouvelle idée !

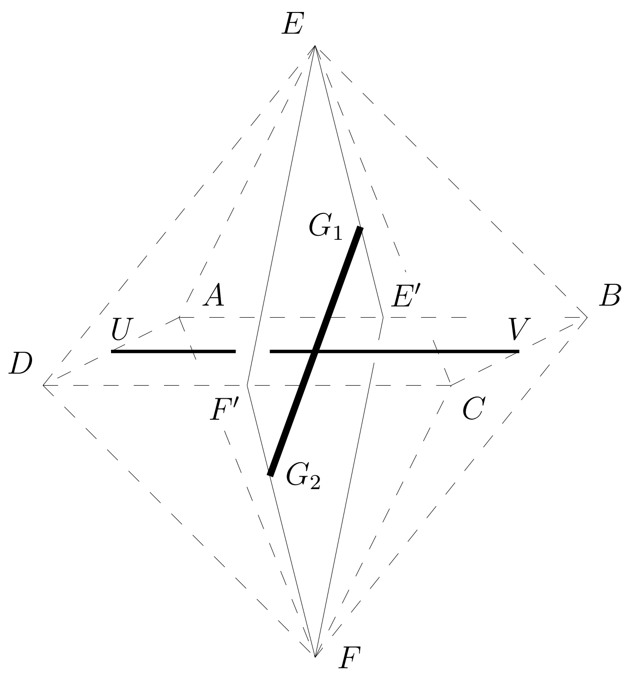
Les éléments disponibles ne permettent pas d'appliquer directement le critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan ([7]) : on ne voit pas à quelle droite dans le plan $\pi_{ABE}$ la droite $d_{G_1G_2}$ serait orthogonale *par hypothèse* ...

### Une configuration intéressante.

On note $U$ le milieu du segment $AD$, $V$ le milieu du segment $BC$, $E'$ le milieu du segment $AB$ et $F'$ le milieu du segment $CD$.

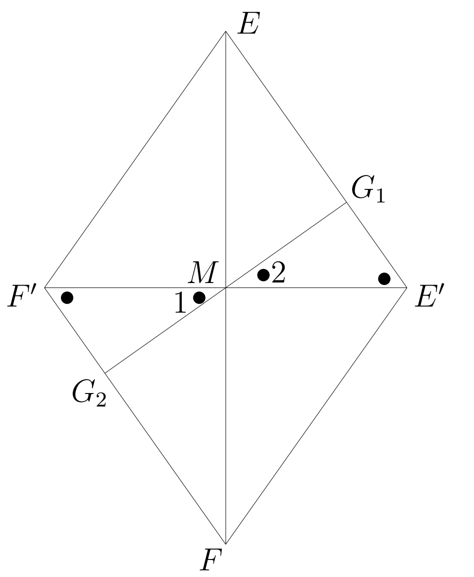
Le plan médiateur du segment $UV$ comporte les quatre points $E$, $E'$, $F$ et $F'$, et la droite $d_{G_1G_2}$ y est incluse. De plus, la droite $d_{UV}$ est perpendiculaire au plan $\pi_{EE'FF'}$.

La figure $EE'FF'$ est un losange.




### Un point bien placé.

([7]) Mais en considérant le cube « dual » de l'octaèdre, on peut raisonner comme dans le problème précédent, et donc suivant une stratégie assez différente de celle qui suit.




Le point $M$, milieu du segment $UV$, est un point du plan médiateur $\pi_{EE'FF'}$ de ce segment.

C'est aussi le point milieu du segment $E'F'$ *dans ce plan médiateur.*

Mais les points $G_1$, $G_2$ et $M$ sont alors alignés : en effet, les triangles $ME'G_1$ et $MF'G_2$ sont isométriques (car $|ME'| = |MF'|$, $|G_1E'| = |G_2F'|$ et $\widehat{E'} = \widehat{F'}$ ), donc les angles $\widehat{M_1}$ et $\widehat{M_2}$ sont égaux, d'où l'alignement annoncé.

Autrement dit, le point $M$ est le point d'intersection de la droite $d_{G_1G_2}$ avec le plan $\pi_{ABCD}$.

**Calculer pour s'en sortir !**

Quelques calculs permettent alors de démontrer que, dans le plan $\pi_{EE'FF'}$, la droite $d_{G_1G_2}$ est perpendiculaire à la droite $d_{EE'}$.

Notons $c$ la longueur d'une arète de l'octaèdre : c'est aussi la longueur du segment $E'F'$ et donc $|EM| = \frac{c}{2}$. Le triangle $ABE$ étant équilatéral, on obtient $|EE'| = \frac{c}{2}\sqrt{3}$.

Dès lors, les triangles $MG_1E'$ et $EME'$ sont semblables, car ils ont l'angle en $E'$ qui est commun, et $\frac{|ME'|}{|EE'|} = \frac{|G_1E'|}{|ME'|}$ puisque d'après les données dont on dispose :

$$\frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3}}{\frac{c}{2}}$$

Mais la figure $EE'FF'$ est un losange : ses diagonales se coupent donc à angles droits. La similitude des triangles $MG_1E'$ et $EME'$ implique dès lors que l'angle en $G_1$ est un angle droit !

## La phase de réification pour la question 2

Rien n'interdit de considérer que les calculs précédents soient classés dans la phase de réification. C'est d'ailleurs le point de vue qu'adopte la grille de lecture qui fait suite à ce corrigé.

### Et sans calculer . . .

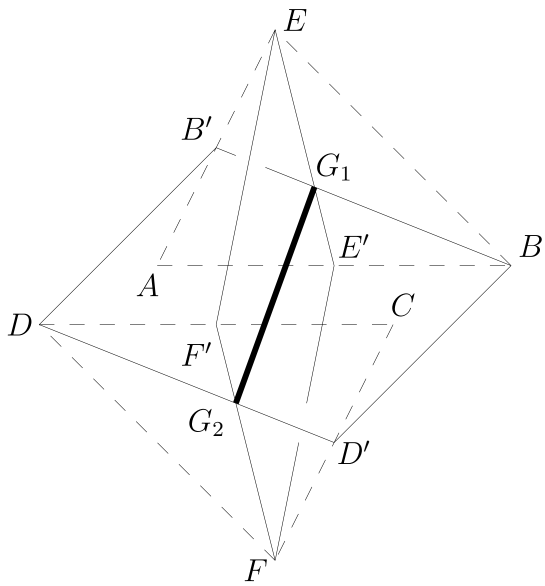
L'idée ([8]) de départ est de démontrer que le plan $\pi_{EE'FF'}$ — construit comme plan médiateur du segment $UV$ — est perpendiculaire au plan $\pi_{ABE}$.

En effet, la droite $d_{AB}$ est perpendiculaire à la droite $d_{E'F'}$ (comme on l'a signalé plus haut, le quadrilatère $ABCD$ est un carré) et à la droite $d_{E'F'}$ (le triangle $ABE$ est équilatéral). Le critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan implique donc que le droite $d_{AB}$ est perpendiculaire au plan $\pi_{EE'FF'}$. Il s'ensuit que le plan $\pi_{ABE}$ — qui contient la droite $d_{AB}$ — est perpendiculaire au plan $\pi_{EE'FF'}$, comme souhaité !

### *Bis repetita placent.*

Une construction et un raisonnement analogues établissent que le plan $\pi_{BB'DD'}$ — où $B'$ et $D'$ sont les milieux des segments $AE$ et $FC$ — est pareillement perpendiculaire au plan $\pi_{ABE}$.

L'intersection des deux plans $\pi_{EE'FF'}$ et $\pi_{BB'DD'}$ est donc nécessairement perpendiculaire au plan $\pi_{ABE}$. Mais cette intersection est la droite $d_{G_1G_2}$ : la cause est entendue !




([8]) Cette idée est celle du *seul* groupe qui ait résolu à peu près complètement la question 2. La copie correspondante est reproduite plus loin.

## La phase d'intériorisation pour la question 3

D'après les résultats obtenus, la question revient à déterminer la projection d'une figure située dans un plan

- sur un autre plan qui lui est parallèle,
- et suivant une direction perpendiculaire à ces deux plans.

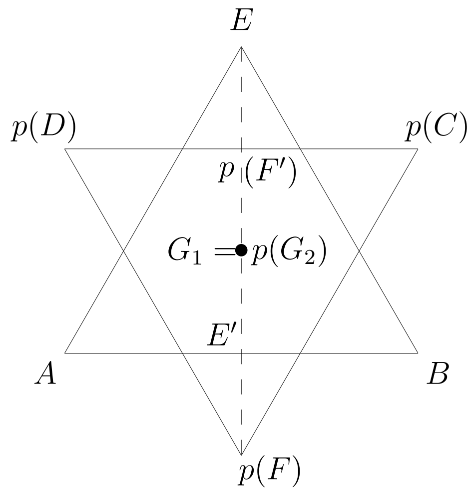
On note $p$ l'opérateur correspondant de projection orthogonale du plan $\pi_{CDF}$ sur le plan $\pi_{ABE}$.

## La phase de condensation pour la question 3

**Des invariants de projection.**

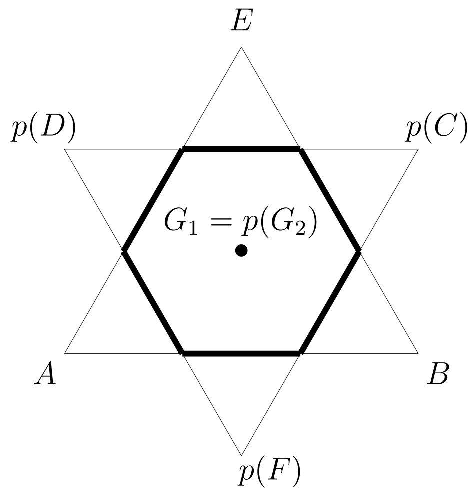
Comme il s'agit de projection parallèle, le parallélisme est conservé. Le plan $\pi_{CDF}$ étant parallèle au plan $\pi_{ABE}$, les longueurs sont conservées par projection. Le triangle équilatéral $CDF$ se projette donc en un nouveau triangle équilatéral $p(C)p(D)p(F)$ dont les côtés sont parallèles à ceux de $ABE$.

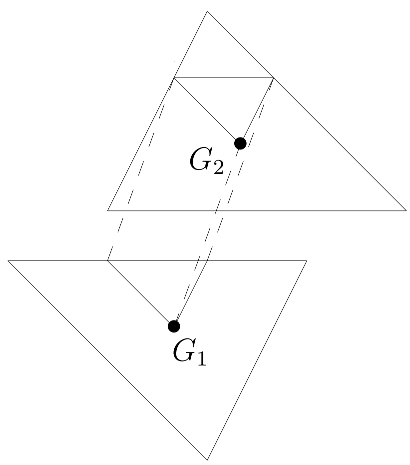
Enfin, la droite $d_{G_1G_2}$ étant perpendiculaire aux deux plans $\pi_{ABE}$ et $\pi_{CDF}$ , on a $p(G_2) = G_1$.
Avec un peu de bon sens, on en arrive à la figure de projection ci-contre.

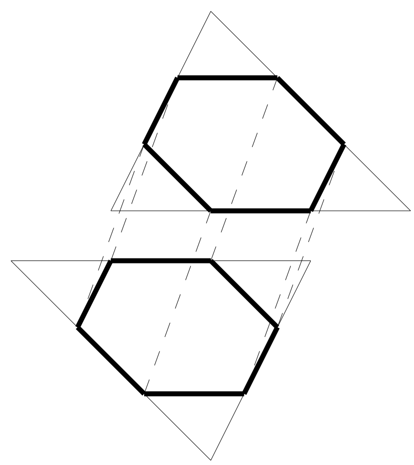



## La phase de réification pour la question 3

Elle est plus visuelle que formelle, et consiste à faire voir comment les sommets de l'hexagone central dans la figure de projection correspondent à des points précis sur les côtés du triangle $CDF$. Comme la projection $p$ conserve les longueurs, on vérifie facilement à l'aide du théorème de Thalès que ces points sont situés au $\frac{1}{3}$ et au $\frac{2}{3}$ de chaque côté des triangles équilatéraux considérés.
Les dessins ci-dessous démontrent — et sinon suggèrent — tout ce qu'il faut ...



#### 18.3.2.4 La grille de lecture : son contenu particularisé au problème, et quelques exemples

**Une grille de lecture.**

Le corrigé relatif suggère de construire une grille de lecture qui s'attache à relever, d'après les différentes questions, les éléments suivants ([9]).

Pour la question 1,

- pour la phase d'intériorisation :
  - les éléments utiles d'un octaèdre régulier,
  - l'énoncé du critère de parallélisme de deux plans ;
- pour la phase de condensation :

([9]) Malgré le caractère déjà plus ouvert de ce problème, les éléments retenus sont raisonnablement exhaustifs puisque le corrigé est construit au départ des réponses des élèves.

  - le relevé de droites parallèles (à l'aide de losanges par exemple),
  - l'application du critère de parallélisme ;
- pour la phase de réification :
  - la démonstration de coplanarité.

Pour la question 2,

- pour la phase d'intériorisation :
  - la simplification de l'énoncé à partir des résultats de la question 1,
  - l'énoncé du critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan ;
- pour la phase de condensation :
  - la construction d'éléments supplémentaires tels que certains plans auxiliaires,
  - l'étude de certains points caractéristiques tels que le point $M$ ;
- pour la phase de réification :
  - les démonstrations ou calculs détaillés.

Pour la question 3,

- pour la phase d'intériorisation :
  - le détail de la situation relative des éléments à projeter ;
- pour la phase de condensation :
  - le relevé des invariants de projection pertinents,
  - la construction de la figure de projection ;
- pour la phase de réification :
  - les justifications ou la visualisation de la construction de cette figure de projection.

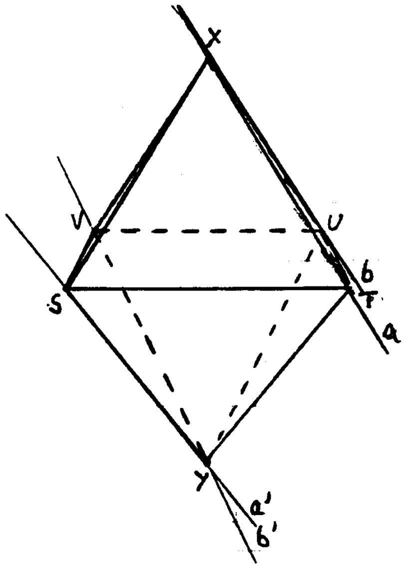
Dans le cas d'une correction effective, il ne faudrait pas perdre de vue que les élèves disposaient d'une maquette fidèle d'un octaèdre.

#### Quelques exemples

Les extraits de copies d'élèves présentés ci-après sont — encore une fois — l'occasion de quelques commentaires relatifs à la grille de lecture et à sa pertinence.

#### Une réponse à la question 1.

Ce qui fait l'intérêt — et la difficulté d'appréciation — de la copie n° 4, c'est qu'y coexistent des erreurs de logique et de représentation avec une idée correcte mais insuffisamment exploitée. Les résultats et théorèmes utilisés ne sont presque jamais explicités. On peut supposer que ce groupe d'élèves rencontre des obstacles sérieux dès la phase de condensation.




Hypothèses:

. plan α et plan β

. droites a et b sécantes dans α. (α étant le plan contenant le triangle équilatéral SVY)

. droites a' et b' sécantes dans β (β étant le plan contenant le triangle équilatéral TUX)

Thèse:

α // β

Démonstration:

On va démontrer par l'absurde que α et β sont sécants car 2 plans parallèles sont en opposition avec 2 plans sécants.

Nous considérons que la droite p est l'intersection de α et β

. Soit a ⊂ α

a' ⊂ β

a // a'

p = α ∩ β

de cela on en conclu que p // a. [...]

Copie n° 4 (1re partie)

• de même que.

$b \subset \alpha$

$b' \subset \beta$

$b \parallel b'$

$p = \alpha \cap \beta$

on en conclu donc que $p \parallel b$. (2).

• de (1) et (2) il en ressort que. a et b sont paralleles.

Ceci contredit notre deuxième hypothèse qui était :

les droites a et b sont sécantes ds $\alpha$.

Conclusion : Ma supposition de départ qui était que $\alpha$ et $\beta$ étaient sécants est fausse.

Donc $\alpha$ et $\beta$ sont parallèles.

Je peux aussi démontrer que dans le carré STUV.

[SV] et [UT] sont parallèles car ds un carré, les côtés sont parallèles 2 à 2.

Or [SV] $\subset \beta$ et [UT] $\subset \alpha$

Conclusion : $\alpha \parallel \beta$

Copie n° 4 (2e partie)

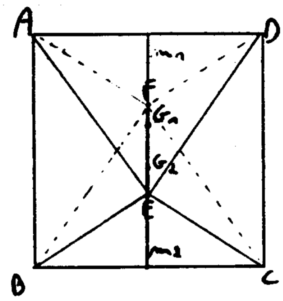
**Une réponse à la question 2.**

La copie n° 5 est celle qui a inspiré la réponse apportée à la question 2 dans le corrigé relatif. La plupart des éléments caractéristiques de la maîtrise de la phase de condensation sont présents. On observe qu'ici aussi les théorèmes utilisés sont rarement explicités, mais directement employés sans citation. Si les outils sont disponibles pour développer la phase de réification, on ne peut pas encore pour autant prétendre qu'elle soit achevée. En particulier, la figure n'aide à comprendre le texte que partiellement ([10]).

**Une réponse à la question 3.**

Avec la copie n° 6, voici un autre exemple de phases d'intériorisation bien développées, et de phase de condensation en devenir. Les éléments de raisonnement sont à la disposition des élèves et commencent à être rassemblés en (petits) îlots déductifs, mais les justifications organisées, et les démonstrations manquent encore.

([10]) Rappelons que les élèves disposaient d'une bonne maquette de l'octaèdre.




Supposons une droite $\rho$ étant perpendiculaire au triangle ADE et passant par $G_1$ (→ barycentre du $\Delta$ ADE)

* On peut dire que la médiane ($m_1$) du $\Delta$ ADE passant par E est $\perp$ à $\rho$ (car $\rho$ est $\perp$ au plan ADE et $m_1 \subset$ ADE)

Elle est aussi parallèle à la médiane $m_2$ du $\Delta$ FBC passant par F (car plan ADE // plan FBC et AD $\perp$ $m_1$ et BC $\perp$ $m_2$, de plus AD // BC et $m_1$ // $m_2$)

~~donc~~

Ces 2 droites $m_1$ et $m_2$ forment donc un plan ($\alpha$) $\perp$ aux 2 triangles ADE et FBC où $\rho$ y est inclus (car le plan est $\perp$ aux 2 triangles et ...

→ donc $\rho$ passe par $G_1$ et par un des points de $m_2$ (1)

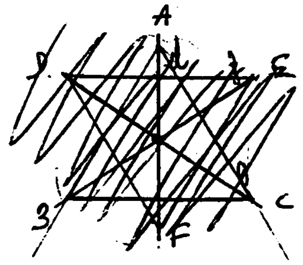
* On peut dire la même chose pour la médiane ($m_4$) du $\Delta$ ADE passant par D et celle du $\Delta$ BCF passant par B ($m_3$)

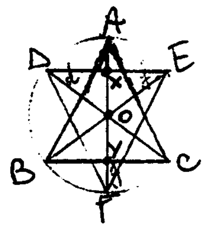
donc $\rho$ passe par $G_1$ et par un des points de $m_3$ (2)

* de (1) et (2) on peut dire que l'intersection des 2 plans ($\alpha$ et $\beta$) est la droite $\rho$ et qu'elle passe par $G_2$ et elle est donc $\perp$ aux 2 faces opposés

$\beta$ = plan formé de $m_3$ et $m_4$

Copie n° 5




* les 2 Δ obtenus (ABC et DEF) conservent leurs longueurs par projection orthogonale car ces 2 plans sont parallèles.

* [DE] // à [BC]
[DF] // à [AC]
[AB] // à [FE]
car segments // de l'octaèdre régulier (voir avant ①)
Donc par project° orthogonale le parallélisme est conservé.

* La droite p par projection orthogonale devient hauteur. (Lh étant la droite reliant les centres de gravité des 2 Δ // FBC et DAE) → voir dessin de la 1e démonstr

~~* les hauteurs des 2 Δ se superposent et forment des hauteurs communes (voir dessin ci-dessus) et ces hauteurs communes~~

* lorsqu'on relie les sommets opposés (E et B) (D et C) (A et F), leur intersection (O) est le centre d'un cercle reliant ces sommets

Copie n° 6