

Chapitre 19

L'évaluation lors d'une séquence d'enseignement sur les probabilités

19.1	Introduction	651
19.2	Une interrogation	652
19.3	Un modèle de correction	653
19.4	Remarques générales et cas particuliers	654
19.4.1	Pour la question du « pile ou face »	655
19.4.2	Pour la question du « pick-pocket »	657
19.5	Comportements significatifs	659
19.6	Une tentative d'évaluation « vectorielle »	661
19.7	Exploitation des résultats par analyse factorielle	663
19.8	Exploitation des résultats par une méthode d'aide à la décision	668
19.9	Conclusion	672

19.1. Introduction

L'analyse qui suit porte sur une interrogation faite dans le contexte de la séquence de cours concernant les probabilités (voir chapitre 14). Son but est avant tout d'ouvrir des voies vers de nouvelles techniques d'évaluation.

Nous sommes bien conscients qu'il n'est pas concevable de demander aux enseignants de réaliser régulièrement de telles études. Nous voulons au moins montrer qu'une simple cote attribuée à un travail d'élève est loin d'être objective et représentative.

Avant d'aller plus loin, il nous paraît important de citer quelques différences majeures entre les groupes testés, à savoir ceux de M. Paul Dechamps (DP) et de M. Pierre Lepourcq (LP).

CHEZ DP	CHEZ LP
<ul style="list-style-type: none"> • Les élèves n'ont reçu que la figure 14.1 sous forme de photocopie et ont pris note du reste. • La classe comptait vingt élèves. • Les élèves ne connaissaient pas encore les notions de dépendance et d'indépendance au moment du test. • La question du <i>pick-pocket</i> clôturait l'interrogation. 	<ul style="list-style-type: none"> • Les élèves ont reçu l'intégralité des notes photocopées. • La classe comptait dix élèves. • L'interrogation s'est déroulée à la fin de la séquence. • L'interrogation commençait par la question du <i>pick-pocket</i>.

Signalons encore que :

- les élèves de DP ont disposé de moins de temps que ceux de LP pour répondre aux questions ;
- les élèves de Pierre Lepourcq ont répondu aux questions de ce test une première fois avant que ne débute notre séquence de cours, et une seconde fois à la fin (sans avoir été prévenus de cette redite).
Les élèves de Paul Dechamps n'y ont répondu qu'une seule fois, au milieu de la séquence.

19.2. Une interrogation

L'interrogation dont nous parlons ici s'est déroulée pendant près d'une séance de cours dans les deux classes testées.

Les constatations et les analyses qui suivent portent sur l'ensemble des élèves des deux classes, ce qui représente une trentaine d'individus. Il ne nous était pas possible de scinder l'analyse en deux, vu la petitesse de l'échantillon, bien que les conditions du test n'aient pas été les mêmes dans les deux classes.

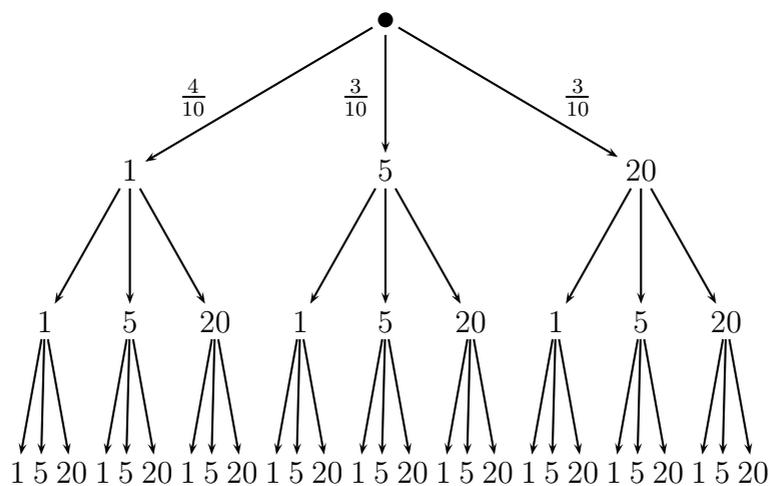
Les questions du test sont les suivantes, elles émanent de Paul Dechamps.

1. On jette trois fois une pièce :
 - (a) calculer la probabilité d'avoir trois fois « face » ;
 - (b) calculer la probabilité d'avoir un nombre impair de fois « pile ».
2. Un pick-pocket plonge la main dans une poche contenant quatre pièces de 1 fb, trois pièces de 5 fb et 3 pièces de 20 fb. Il en subtilise trois. Calculer la probabilité que la somme volée soit :
 - (a) 60 fb ;
 - (b) 30 fb ;
 - (c) > 3 fb.

19.3. Un modèle de correction

Pour la résolution de la première question, un arbre binaire peut être utilisé. La suite est triviale.

Pour résoudre la seconde question, nous suggérons d'employer l'arbre suivant :



Pour répondre aux trois sous-questions, il reste à extraire les chemins adéquats en y indiquant les probabilités.

- $\mathbb{P}(60) = \mathbb{P}(20, 20, 20) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$
- $\mathbb{P}(30) = \mathbb{P}(20, 5, 5) + \mathbb{P}(5, 20, 5) + \mathbb{P}(5, 5, 20)$
 $= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8}$
 $= \frac{3}{40}$
- $\mathbb{P}(> 3) = 1 - \mathbb{P}(3) = 1 - \mathbb{P}(1, 1, 1) = \frac{29}{30}$

19.4. Remarques générales et cas particuliers

La lecture des travaux d'élèves nous a permis d'observer quelques comportements importants, ainsi que des cas particuliers interpellants :

19.4.1 Pour la question du « pile ou face »

- L'arbre binaire est généralement dessiné.
- Un sérieux problème algébrique :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

qui eût pu être corrigé par une meilleure lecture de l'arbre.

- Des élèves confondent la probabilité d'obtenir 1× pile sur 1 lancer et sur 3 lancers. Ce lapsus peut entraîner des erreurs de calculs comme celles-ci :

$$\begin{aligned} 1^{\circ}) \text{ pr}(3 \times \text{face}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\ 2^{\circ}) \text{ un nombre impair de fois pile sur} \\ & 3 \text{ jets} = 1 \times \text{pile} \text{ ou } 3 \times \text{pile} \\ &= \text{pr}(1 \times \text{pile}) + \text{pr}(3 \times \text{pile}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4+1}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

- Un certain flou sur l'utilisation des lois du produit et de la somme. Dans des cas extrêmes, cette confusion peut conduire à de tels calculs :

$$1^{\circ}) \text{ pr}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \text{pr} \frac{1}{2} \cdot \text{pr} \frac{1}{2} \cdot \text{pr} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ}) \text{ pr}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) &= \text{pr} \frac{1}{6} + \text{pr} \frac{1}{6} + \text{pr} \frac{1}{6} + \text{pr} \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Signalons un élève qui répond bien à la première partie de la question et qui, pour la deuxième partie, se retrouve dépourvu d'idées.

Il écrit alors une réponse que l'on peut qualifier d'« incantatoire » :

2) On peut aussi Cette expérience est une expérience aléatoire, elle dépend du hasard. Elle peut avoir plusieurs issues différentes et on ne peut prévoir laquelle va va être. C'est pourquoi nous ne pouvons pas calculer cette probabilité

$$\begin{aligned} 3^{\circ}) \text{pr}(3F) &= \text{pr}(1F) + \text{pr}(1F) + \text{pr}(1F) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{proba d'avoir plus que } 3F &= 1 - \text{pr}(3) \\ &= \frac{5}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

19.5. Comportements significatifs

Dans l'optique d'une évaluation « vectorielle », chaque élève reçoit — pour chacun des comportements décrits ci-dessous — un code correspondant à son attitude. Il est à noter que la liste de ces comportements a été mise au point en fonction d'une analyse des copies. Une version primitive de la liste présentait des comportements qui se sont avérés être redondants et ont conséquemment été supprimés.

Pour la première question

Compatibilité entre les calculs et l'arbre : variable com1

(trois modalités)

PA1 pas d'arbre
 COM1 compatibilité
 INC1 incompatibilité

Distinction entre les lois de la somme et du produit : variable dis1

(quatre modalités)

O1 oui
 N1 non
 NU1 aucune de ces lois n'est utilisée
 NC1 pas de conclusion possible

Réussite à la sous-question a

OKA1 réussite
 KOA1 échec
 ABA1 abstention

Réussite à la sous-question b

OKB1 réussite
 KOB1 échec
 ABB1 abstention

Pour la deuxième question

Construction des arbres probabilisés : variable con2

(cinq modalités)

NON	absence d'arbre
CONB	arbres concis bien conçus
CONM	arbres concis mal conçus
ACB	arbre complet bien conçu
ACM	arbre complet mal conçu

Dépendance des événements : variable dep2

(trois modalités)

PNDI .	les notions de dépendance et d'indépendance n'apparaissent pas
INDE	indépendance systématique des événements
BON	bonne utilisation de cette dépendance

Compatibilité entre les calculs et l'arbre : variable com2

(trois modalités)

PA2	pas d'arbre
COM2	compatibilité
INC2	incompatibilité

Distinction entre les lois de la somme et du produit : variable dis2

(quatre modalités)

O2	oui
N2	non
NU2	aucune de ces lois n'est utilisée
NC2	pas de conclusion possible

Réussite à la sous-question a

OKA2	réussite
KOA2	échec
ABA2	abstention

Réussite à la sous-question b

OKB2	réussite
KOB2	échec
ABB2	abstention

Réussite à la sous-question c

OKC2	réussite
KOC2	échec
ABC2	abstention

19.6. Une tentative d'évaluation « vectorielle »

Le tableau ci-après reprend les résultats des élèves de DP (de 1 à 20) suivis de ceux de LP (de 21 à 30).

Elève	1 ^{re} question				2 ^e question						
	Compatibilité entre les calculs et l'arbre	Distinction lois de la somme et du produit	Réussite à la sous-question a	Réussite à la sous-question b	Construction des arbres	Dépendance des événements	Compatibilité entre les calculs et l'arbre	Distinction lois de la somme et du produit	Réussite à la sous-question a	Réussite à la sous-question b	Réussite à la sous-question c
1	COM1	O1	OKA1	OKB1	NON	PNDI	PA2	NU2	KOA2	KOB2	KOC2
2	INC1	NU1	KOA1	ABB1	CONM	BON	COM2	N2	OKA2	KOB2	ABC2
3	PA1	N1	KOA1	KOB1	NON	PNDI	PA2	NU2	KOA2	KOB2	ABC2
4	INC1	N1	KOA1	KOB1	CONM	INDE	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
5	COM1	NC1	OKA1	ABB1	NON	INDE	PA2	NC2	KOA2	KOB2	KOC2
6	COM1	O1	OKA1	KOB1	CONM	BON	COM2	O2	OKA2	KOB2	KOC2
7	COM1	O1	OKA1	OKB1	ACM	BON	COM2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
8	COM1	O1	OKA1	KOB1	ACB	BON	COM2	O2	OKA2	KOB2	ABC2
9	INC1	O1	KOA1	KOB1	CONM	INDE	INC2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
10	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONM	PNDI	COM2	NU2	KOA2	KOB2	KOC2
11	COM1	O1	OKA1	KOB1	NON	INDE	PA2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
12	INC1	N1	KOA1	KOB1	CONM	INDE	COM2	O2	KOA2	KOB2	ABC2
13	INC1	O1	KOA1	KOB1	CONM	INDE	INC2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
14	INC1	N1	KOA1	KOB1	NON	PNDI	PA2	NU2	KOA2	KOB2	ABC2
15	COM1	NC1	OKA1	ABB1	CONM	BON	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
16	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONM	INDE	PA2	N2	KOA2	KOB2	ABC2
17	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONM	BON	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
18	COM1	O1	OKA1	OKB1	NON	BON	PA2	O2	OKA2	KOB2	KOC2
19	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONM	INDE	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
20	COM1	O1	OKA1	OKB1	ACB	BON	INC2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
21	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONB	BON	COM2	O2	OKA2	OKB2	OKC2
22	COM1	O1	KOA1	KOB1	CONM	BON	COM2	NC2	OKA2	KOB2	KOC2
23	INC1	N1	KOA1	KOB1	ACM	PNDI	INC2	NC2	KOA2	KOB2	KOC2
24	INC1	N1	KOA1	KOB1	ACB	BON	COM2	N2	KOA2	KOB2	KOC2
25	COM1	O1	KOA1	OKB1	ACB	BON	COM2	O2	OKA2	KOB2	OKC2
26	INC1	N1	KOA1	KOB1	ACB	BON	COM2	NC2	OKA2	KOB2	OKC2
27	COM1	O1	OKA1	OKB1	ACM	INDE	COM2	O2	KOA2	KOB2	KOC2
28	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONB	BON	COM2	O2	OKA2	KOB2	OKC2
29	COM1	O1	OKA1	OKB1	CONB	BON	COM2	O2	OKA2	OKB2	OKC2
30	COM1	O1	OKA1	OKB1	ACB	BON	COM2	O2	OKA2	OKB2	KOC2

19.7. Exploitation des résultats par analyse factorielle

Nous utilisons ci-après l'*analyse factorielle des correspondances multiples*, présentée dans l'annexe A.

Nous avons encodé le tableau précédent à l'aide du logiciel CHADOC vs ⁽¹⁾. Seules les colonnes concernant les échecs et les réussites aux diverses sous-questions ont été considérées comme variables principales.

Nous nous sommes contentés d'interpréter les deux premiers axes, qui représentent respectivement 53,72% et 26,12% de l'inertie totale. Les autres axes ne sont pas représentatifs.

Voici les résultats fournis par le logiciel :

modalités	axe 1	axe 2	cos 1	cos 2	poids
OKA1	0,35	-0,30	54,65	39,46	18
KOA1	-0,52	0,44	54,65	39,46	12
ABA1					0
OKB1	0,55	-0,22	76,12	12,58	14
KOB1	-0,53	0,32	64,05	23,29	13
ABB1	-0,27	-0,34	3,88	6,10	3
OKA2	0,53	0,44	53,07	35,99	11
KOA2	-0,31	-0,25	53,07	35,99	19
ABA2					0
OKB2	1,52	0,42	80,02	6,27	3
KOB2	-0,17	-0,05	80,02	6,27	27
ABB2					0
OKC2	1,00	0,71	60,99	31,20	5
KOC2	-0,04	-0,36	0,84	77,40	18
ABC2	-0,62	0,42	44,66	20,84	7

Voici ces mêmes résultats présentés sous la forme de graphiques.

⁽¹⁾ Ce logiciel de traitements statistiques est réalisé et diffusé par le Département Informatique de l'IUT de Nice.

Le premier graphique représente les diverses modalités des variables principales.

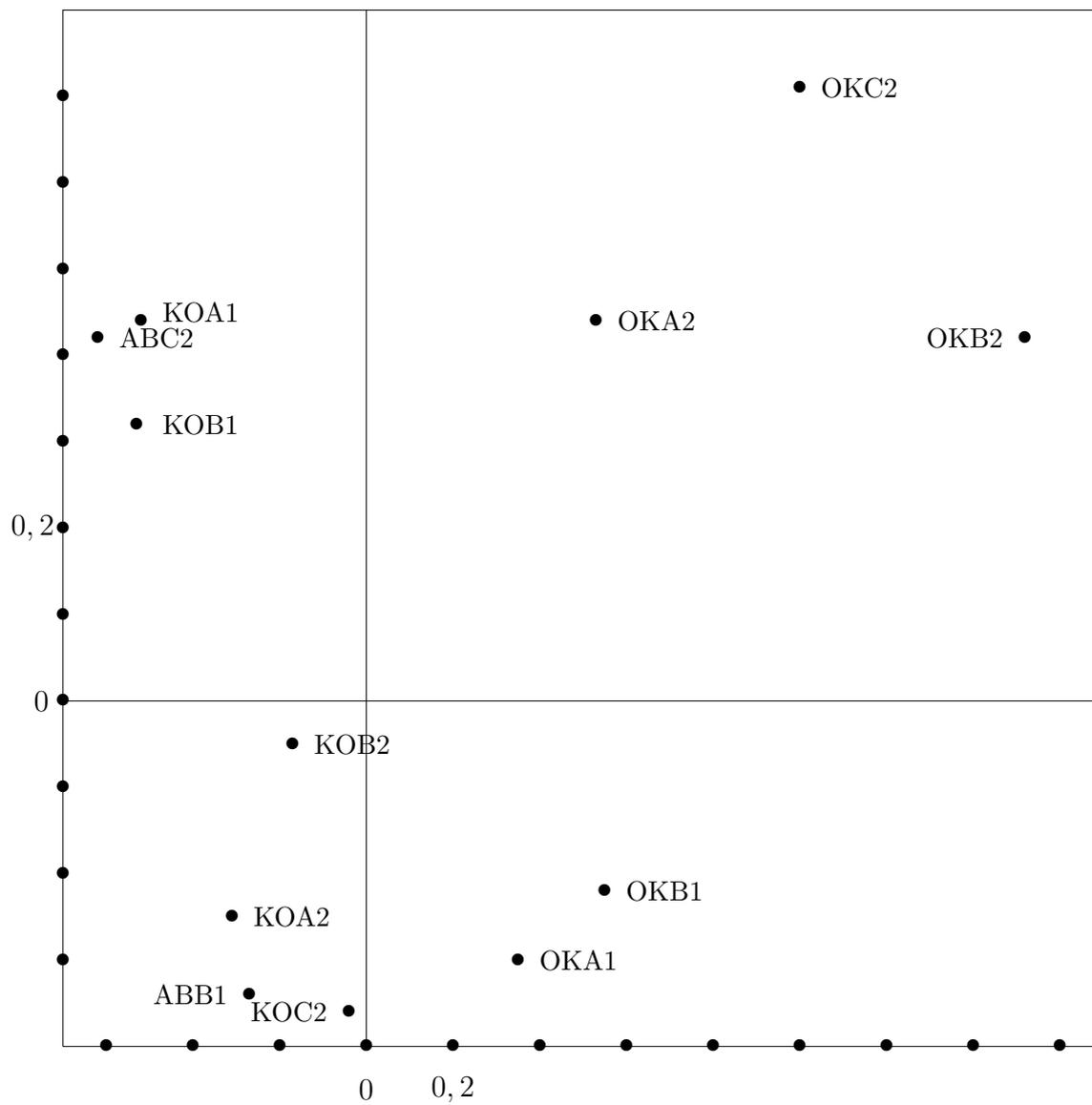


Figure 19.1

Le deuxième représente, projetées sur les mêmes axes, les modalités des variables supplémentaires.

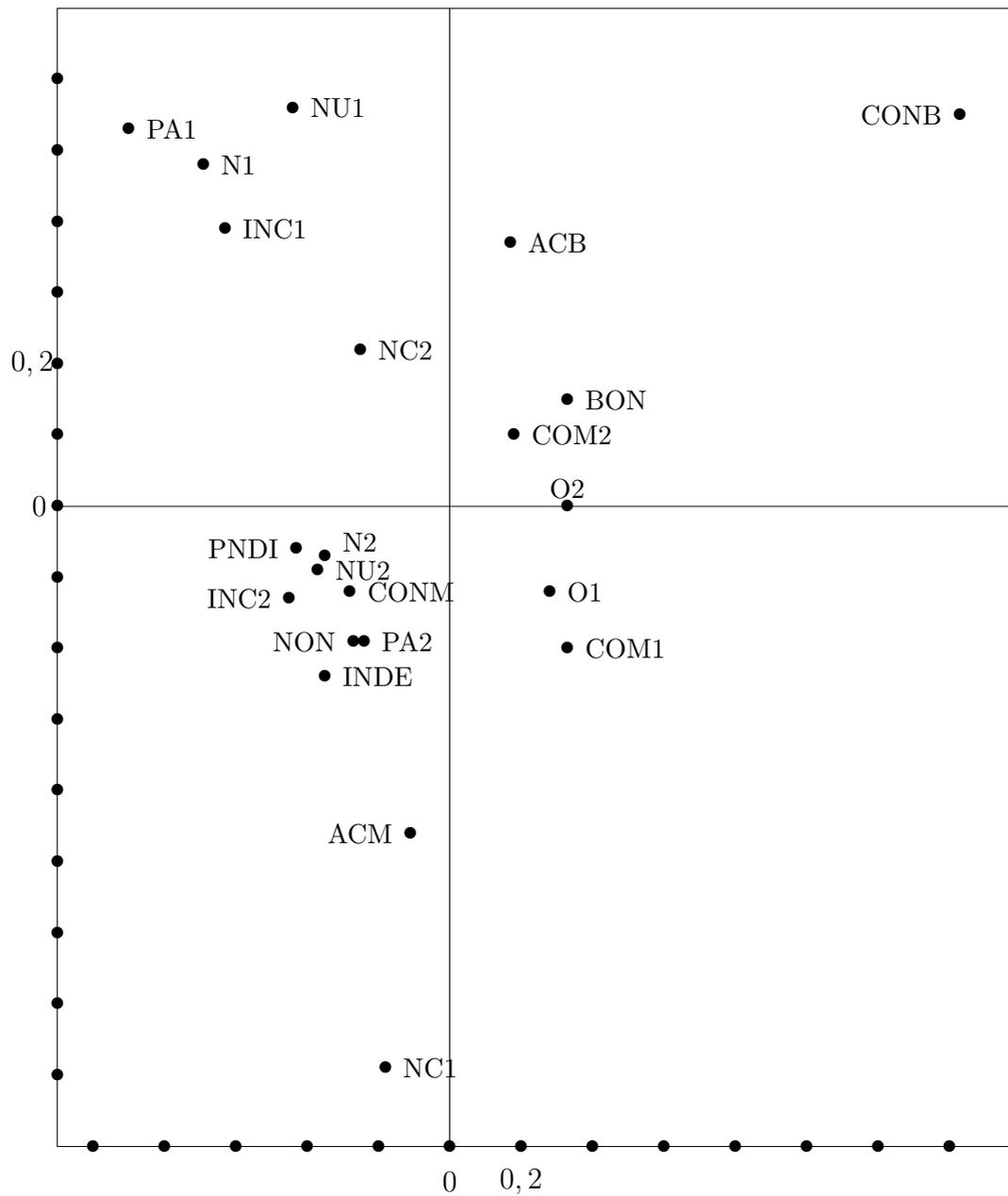


Figure 19.2

Quant au troisième, il nous montre la situation des élèves par rapport à ces axes. Il est susceptible d'aider à l'évaluation.

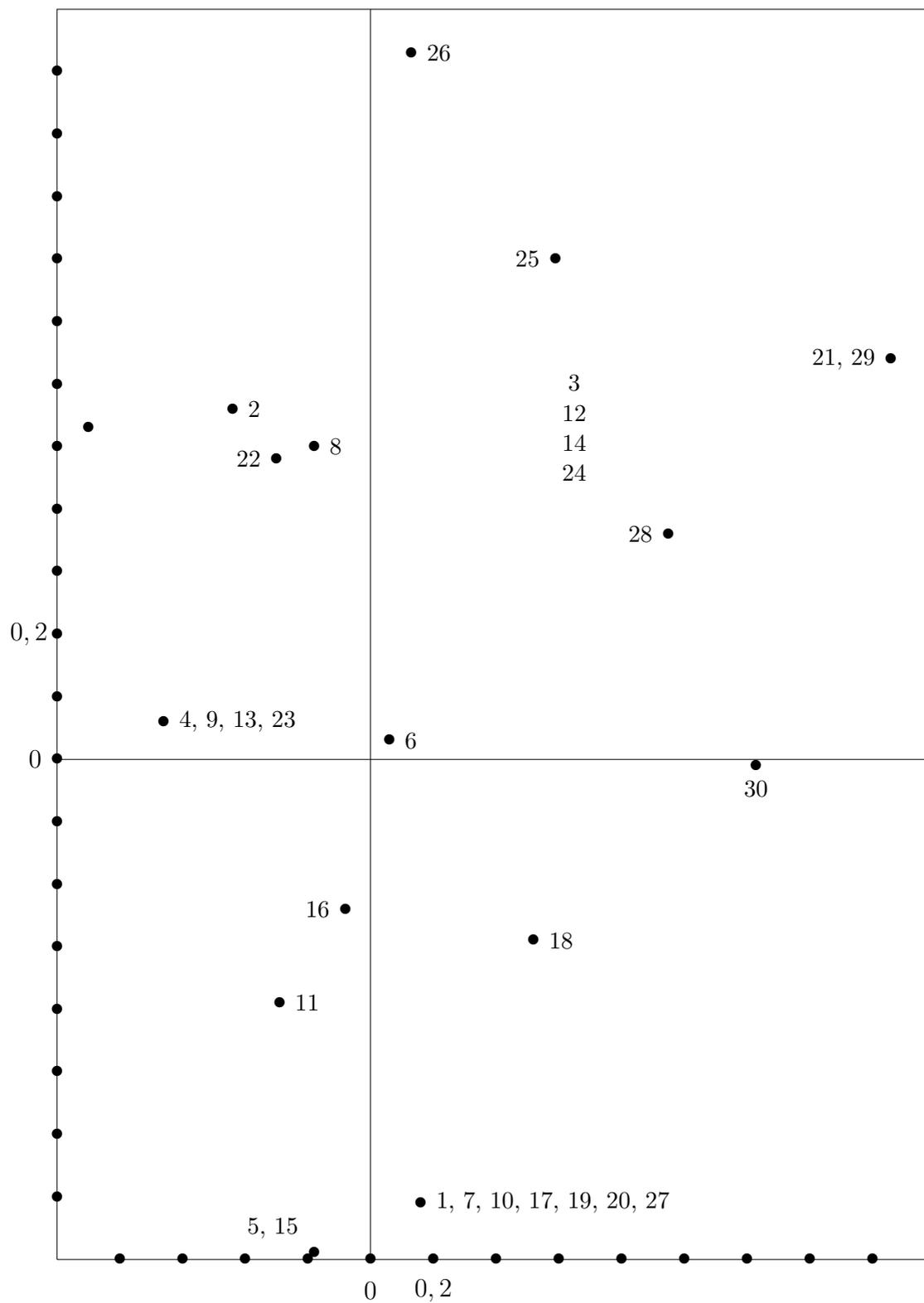


Figure 19.3

Interprétation du premier axe

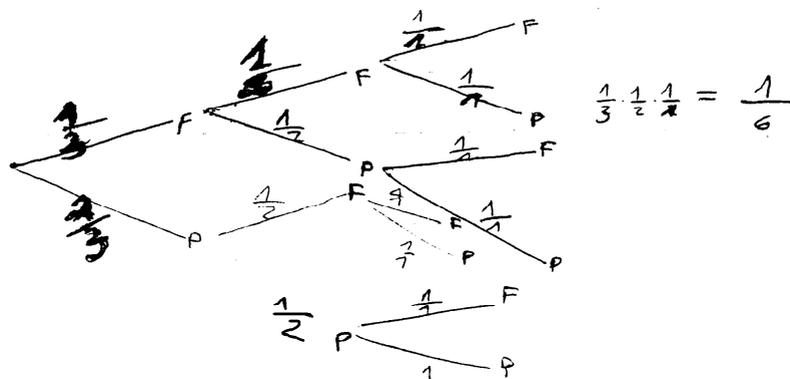
Il apparaît clairement que cet axe opère la scission entre les comportements de réussite, d'une part, et les comportements d'échec et d'abstention, d'autre part.

Interprétation du second axe

Ce second axe est moins évident à interpréter. Nous avons dû recourir aux copies d'élèves pour mettre en évidence les caractéristiques des comportements impliqués.

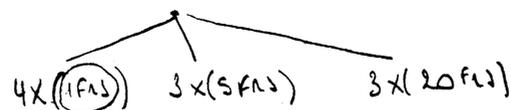
Du côté positif semblent se situer les comportements des élèves qui ont osé se dégager des modèles enseignés. Cette attitude peut, ou peut ne pas, mener vers la réussite. Les élèves se situant dans le premier quadrant ont de plus visiblement compris — voire maîtrisé pour certains — les concepts enseignés. Ils ont dépassé la phase d'intériorisation (de Sfard). Les élèves que l'on trouve dans le deuxième quadrant ont, quant à eux, des raisonnements parfois complètement farfelus.

Par exemple,



Du côté négatif, par contre, on trouve des comportements propres aux élèves qui se sont contenté de reproduire des modèles établis en classe en les adaptant — avec plus ou moins de bonheur — à la situation proposée. Ces élèves n'ont probablement pas dépassé la phase d'intériorisation.

Dans l'exemple suivant, l'élève a tenté de reproduire un arbre comme ceux qui ont été faits en classe, simplement pour faire plaisir au professeur. Il n'a visiblement pas compris l'utilité des arbres et ne les exploite pas. Nous sommes clairement en présence d'une réponse incantatoire :



19.8. Exploitation des résultats par une méthode d'aide à la décision

Nous utilisons ici le logiciel d'aide à la décision MACBETH (voir [157]), développé à l'UMH par Jean-Claude Vansnick, Jean-Marie De Corte et Carlos Bana e Costa.

Les variables prises en compte ici sont celles qui ne concernent pas l'échec, la réussite ni l'abstention (à savoir COM1, DIS1, CON2, DEP2, COM2 ET DIS2) pour des raisons que nous donnons ci-après.

Voici les étapes successives dans notre analyse MACBETH :

Première partie : élaboration d'une cote vectorielle

- parmi les modalités de chacune des variables, nous en choisissons une « bonne » et une « neutre » ;

Variable	Modalité neutre	Bonne modalité
com1	PA1	COM1
dis1	NU1	O1
con2	NON	CONB
dep2	PNDI	BON
com2	PA2	COM2
dis2	NU2	O2

- pour chaque variable, nous comparons les modalités deux par deux en signalant au logiciel *notre* préférence de l'une par rapport à l'autre selon un critère ⁽²⁾ préalablement choisi.
Sept nuances allant de *nulle* à *extrême* sont proposées par MACBETH pour incarner cette préférence ;
- MACBETH convertit ces jugements qualitatifs en appréciations quantitatives, en attribuant une cote α à chacune des modalités (la modalité *neutre* reçoit toujours la cote 0 et la *bonne* la cote 10) ;

⁽²⁾ Ici, notre critère est la capacité de la modalité à mener l'élève vers la réussite de façon efficace.

com1	COM1 : 10	PA1 : 0	INC1 : -7,51		
dis1	O1 : 10	NU1 : 0	NC1 : 0	N1 : -10	
con2	CONB : 10	ACB : 8,46	CONM : 3,08	ACM : 0,77	NON : 0
dep2	BON : 10	PNDI : 0	INDE : -5		
com2	COM2 : 10	PA2 : 0	INC2 : -7,51		
dis2	O2 : 10	NU2 : 0	NC2 : 0	N2 : -10	

- chaque modalité est à présent munie d'une cote, on obtient donc pour les élèves l'évaluation vectorielle suivante :

Elève	1 ^{re} question		2 ^e question			
	com1	dis1	con2	dep2	com2	dis2
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	10	10	0	0	0	0
2	-7,51	0	3,08	10	10	-10
3	0	-10	0	0	0	0
4	-7,51	-10	3,08	-5	10	10
5	10	0	0	-5	0	0
6	10	10	3,08	10	10	10
7	10	10	0,77	10	10	-10
8	10	10	8,46	10	10	10
9	-7,51	10	3,08	-5	-7,51	-10
10	10	10	3,08	0	10	0
11	10	10	0	-5	0	10
12	-7,51	-10	3,08	-5	10	10
13	-7,51	10	3,08	-5	-7,51	-10
14	-7,51	-10	0	0	0	0
15	10	0	3,08	10	10	10
16	10	10	3,08	-5	0	-10
17	10	10	3,08	10	10	10
18	10	10	0	10	0	10
19	10	10	3,08	-5	10	10
20	10	10	8,46	10	-7,51	-10
21	10	10	10	10	10	10
22	10	10	3,08	10	10	0
23	-7,51	-10	0,77	0	-7,51	0
24	-7,51	-10	8,46	10	10	-10
25	10	10	8,46	10	10	10
26	-7,51	-10	8,46	10	10	0
27	10	10	0,77	-5	10	10
28	10	10	10	10	10	10
29	10	10	10	10	10	10
30	10	10	8,46	10	10	10

Seconde partie : élaboration d'une cote scalaire unique

- On définit :
 - des élèves fictifs présentant chacun une seule « bonne modalité », leurs autres comportements étant « neutres » ;
 - un élève fictif « neutre » vis-à-vis de toutes les variables ;
- on compare ensuite ces élèves fictifs deux par deux, et MACBETH établit — comme pour les modalités — un classement global en attribuant une cote β à chacun d'eux ;

L'élève fictif ...	est neutre ...	et reçoit la cote ...
A_0	partout	0
A_1	partout sauf com1 = COM1	$\beta_1 = 4$
A_2	partout sauf dis1 = O1	$\beta_2 = 10$
A_3	partout sauf con2 = CONB	$\beta_3 = 6$
A_4	partout sauf dep2 = BON	$\beta_4 = 10$
A_5	partout sauf com2 = COM2	$\beta_5 = 5$
A_6	partout sauf dis2 = O2	$\beta_6 = 10$

- à partir de l'évaluation vectorielle obtenue par chaque élève « réel » dans la première partie, on calcule une cote numérique via un produit scalaire : la cote d'un élève vaut la somme des produits des α_i correspondant à cet élève et des β_i ;
par exemple, l'élève (réel) n°1 reçoit la cote

$$10 \times 4 + 10 \times 10 + 6 \times 0 + 10 \times 0 + 5 \times 0 + 10 \times 0$$

qui sera ramenée dans l'intervalle $[0, 10]$ via une affinité (on attribue les cotes 0 et 10 respectivement aux élèves ayant obtenu la plus petite et la plus grande cote MACBETH).

Élève	Cote MACBETH [0, 10]	Cote professeur (sur 10)
21	10	9
28	10	8,5
29	10	10
8	9,849	4
25	9,849	4,5
30	9,849	8,5
6	9,323	6
17	9,323	6
18	8,205	6
15	7,691	2

Élève	Cote MACBETH [0, 10]	Cote professeur (sur 10)
22	7,691	3,5
19	6,876	6
27	6,649	3,5
10	6,060	5
7	5,834	4
11	5,758	4
20	5,158	4
1	4,943	6
26	3,812	1,5
2	3,286	1

Élève	Cote MACBETH [0, 10]	Cote professeur (sur 10)
16	2,797	5
5	2,496	3
4	2,470	0
12	2,470	2
24	2,181	2
9	1,042	2
13	1,042	2
3	1,027	2
14	0,537	0
23	0	1,5

Lorsque l'on compare les classements donnés respectivement par MACBETH et les professeurs, on observe une forte corrélation. Globalement, les deux classements sont assez semblables.

Cependant, il existe certaines discordances. Des élèves sont en effet classés parmi les meilleurs pour MACBETH alors qu'ils obtiennent moins de la moitié des points auprès de leurs professeurs.

Mais l'explication en est simple : une correction « standard » et notre correction MACBETH ne portent pas sur les mêmes variables. En effet, plutôt que de nous intéresser à la réussite globale à chaque question, nous avons analysé les comportements plus précis décrits par les variables com1 à dis2.

19.9. Conclusion

Des méthodes de correction différentes mettent l'emphase sur des comportements différents. Les évaluations qui en découlent peuvent conduire à des conclusions différentes également.

La méthode la plus objective n'est pas nécessairement celle qui est habituellement utilisée.

Nous avons voulu ici mettre en évidence deux autres techniques qui, si elles ne sont pas faciles d'emploi, éliminent manifestement une bonne dose de subjectivité. Celle-ci ne se manifeste plus que dans l'établissement des critères ⁽³⁾ de jugement.

Ces méthodes présentent également l'avantage de mettre un peu plus en évidence les lacunes à combler chez l'apprenant, et permettent de le mieux situer au sein d'un groupe.

Références

[106], [75], [154], [134], [20], [32], [47], [92], [95], [97], [140], [148], [57], [157].

⁽³⁾ A savoir les variables et leurs diverses modalités.