Communauté française de Belgique

Ministère de la Communauté française
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique

D'UNE EPREUVE CANTONALE EN MATHEMATIQUES VERS DE NOUVELLES PRATIQUES DIDACTIQUES UN EXEMPLE D'OUTIL QUI VA AU-DELA DE LA DEFINITION DE STANDARDS D'EVALUATION

Pierre STEGEN
Antoine DI FABRIZIO
Francis RENIER
Equipe de recherche en didactique des mathématiques
Service de didactique générale de l'Université de Liège

Article publié dans
Le Point sur la Recherche en Education
N° 12
Octobre 1999

et diffusé sur
http://www.agers.cfwb.be/pedag/recheduc/point.asp

Service général des Affaires générales, de la Recherche en éducation et du Pilotage interréseaux
9-13, rue Belliard 1040 Bruxelles
Tél. +32 (2) 213 59 11
Fax +32 (2) 213 59 91

Dans cet article, nous allons rapidement évoquer le cadre d'un important dispositif de recherche qui a abouti à la production d'un outil didactique. Dans un second temps, nous illustrerons la démarche proposée dans cet outil .

Un outil au service des enseignants

En mai 1999, l'équipe de recherche en didactique des mathématiques du Service de didactique générale de l'Université de Liège, en collaboration avec le Ressort d'Inspection principale de Mons, a publié une brochure " *D'une épreuve externe en mathématiques, vers de nouvelles pratiques didactiques – Maîtriser les compétences numériques au sortir de l'école primaire* ". Cette publication fait suite à un important travail d'analyse didactique des productions d'élèves qui ont participé à l'examen cantonal du ressort d'Inspection principale de Mons, en juin 1997.

L'objectif de ce dispositif de recherche n'est pas de produire de nouvelles statistiques sur ce que savent ou ne savent pas faire nos élèves en mathématiques au sortir de l'école primaire (" Recherches **sur** l'éducation "). L'enjeu est de dégager, pour les équipes éducatives impliquées dans cette épreuve externe, des pistes de travail pour l'organisation future des apprentissages mathématiques (" Recherches **pour** l'éducation").

Née de l'analyse formative des difficultés rencontrées par les élèves dans la maîtrise des apprentissages numériques, **cette publication ambitionne d'être un véritable outil didactique au service des enseignants**. Elle aborde les questions suivantes :

- ***Peut-on identifier, et avec quels outils, les compétences liées au " savoir dénombrer " et au " savoir calculer " ?***
- ***Comment traduire ces compétences en items d'évaluation ?***
- ***Comment choisir ces items de manière à mettre en place un dispositif d'évaluation valide ?***
- ***Une fois cette épreuve administrée, comment procéder à une analyse formative des productions d'élèves ?***
- ***Enfin, quelles activités d'apprentissage mettre en place pour surmonter les difficultés rencontrées dans l'analyse des erreurs ?***

Les éléments de réponses apportés sont formulés de manière pragmatique au travers des quatre étapes suivantes :

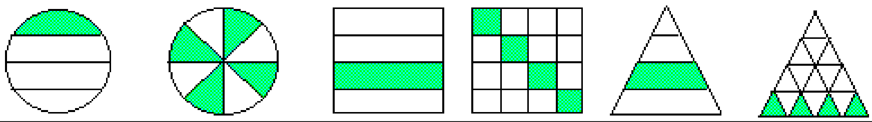
- ***l'étape n°1 tente de baliser les compétences numériques à maîtriser au terme de la scolarité primaire;***
- ***l'étape n°2 détaille les compétences évaluées dans l'épreuve cantonale et aborde la question de la validité de cette épreuve;***
- ***l'étape n°3 présente les différents items d'évaluation retenus, les modalités de réponse des élèves et les réflexions didactiques que nous suggère l'analyse des productions d'élèves;***
- ***l'étape n°4 propose une série de situations d'apprentissage s'inscrivant dans le prolongement des réflexions didactiques développées lors de l'étape n°3.***

Un exemple pour illustrer cette démarche

- **Compétence évaluée** : Comparer des fractionnements
- **Présentation de l'item retenu** :

Observe les figures ci-dessous. Dans chaque cas, on en a colorié une partie.

Entoure les figures dont les parties coloriées valent exactement le **quart** de la figure.



- **Présentation des réponses des élèves de 6P (n=2205):**

Tableau 1 : Présentation des réponses des élèves à un des items évaluant la compétence " Pratiquer des fractionnements " (n=1991)

	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5	Figure 6
Non coché	**69 %**	**82 %**	11 %	21 %	**80 %**	41 %
Coché	31 %	17 %	**88 %**	**79 %**	19 %	**58 %**

- **Commentaires :**
  Cet item est assez simple hormis le fait que l'on y a introduit deux sources de difficulté :
  - d'une part, les figures 1 et 5 sont chacune partagées en 4 parties ***non équivalentes*** (une de ces 4 parties étant coloriée);
  - d'autre part, dans les figures 4 et 6, les parties colorées valent cette fois exactement $\frac{1}{4}$ mais, pour obtenir cette fraction, on a chaque fois subdivisé la figure en 16 parties égales dont on a colorié, de manière non conventionnelle, 4 parts ($\frac{3}{5} = \frac{4}{16}$).

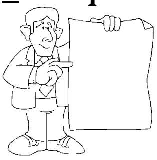
L'introduction de ces sources de difficultés n'est pas sans incidence sur les niveaux de réussite, observés chez des élèves qui terminent leur scolarité primaire.

Ainsi, au niveau de la première difficulté, on constate que :

- la première figure est cochée par plus de 30 % des élèves;
- la figure 5 est cochée par près de 20 % des élèves.

Pour les figures 4 et 6, les équivalences de fractions ($\frac{3}{5} = \frac{4}{16}$) et leur disposition non conventionnelle (coloriage aléatoire des parties) posent également des problèmes aux élèves : respectivement 21 % (figure 4) et 42 % (figure 6) des élèves ne reconnaissent pas cette équivalence.

- **Repères didactiques** :



Ces observations semblent indiquer qu'un grand nombre d'élèves interrogés, en fin de scolarité primaire, possèdent une **conception** incorrecte de la notion de fraction : dans les premiers cas, celle-ci se rapproche davantage de la notion de simple découpage (“ morceau ”) que de la notion de partage en parts équivalentes ... ou du moins qu'il existe un certain seuil de tolérance pour apprécier cette équivalence des parts; un plus grand nombre d'élèves échouent à la figure 1 qu'à la figure 5 où le contraste entre la taille des parts est le plus frappant. Dans les seconds cas, il semble que des élèves éprouvent des difficultés avec des représentations moins prototypiques de partages de formes géométriques. Il n'empêche, ce coup de sonde a permis la mise en évidence de la persistance de conceptions erronées de la fraction opérateur : **de nombreux élèves interrogés identifient celle-ci à un partage d'une figure géométrique en parts équivalentes ou non.**

Ces constats nous amènent à reconsidérer de manière critique les situations d'apprentissage traditionnellement mises en place pour “ enseigner ” et/ou “ faire apprendre ” cette compétence.
Diverses données dont nous disposons[1] semblent, en effet, indiquer que les contextes d'apprentissage dans lesquels les élèves sont amenés (tout au long du cycle 8/12) à mettre en oeuvre la compétence “ ***Pratiquer des fractionnements*** ” ne sont pas assez diversifiés pour induire ces modifications. Ainsi, lors d'une épreuve diagnostique, nous avions présenté ce même item à des élèves de début de 4P, 5P et 6P. Le tableau suivant présente les taux de réussite :

Tableau 2 : Présentation des réponses des élèves (4P, 5P et 6P) lors d'une épreuve diagnostique évaluant la compétence “ Pratiquer des fractionnements ”

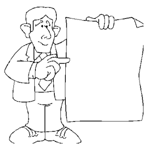
	4P (n=198)	**5P (n=193)**	**6P (n=230)**	**Mons (n=1991)**
Figure 1 : non cochée	**45 %**	**63 %**	**59 %**	**69 %**
Figure 2 : non cochée	**66 %**	**79 %**	**80 %**	**82 %**
Figure 3 : cochée	**76 %**	**88 %**	**87 %**	**88 %**
Figure 4 : cochée	**50 %**	**52 %**	**66 %**	**79 %**
Figure 5 : non cochée	**59 %**	**71 %**	**68 %**	**80 %**
Figure 6 : cochée	**39 %**	**45 %**	**53 %**	**58 %**

[1] cfr. STEGEN, P. Et RENIER, F. op. Cit.é »

Ces chiffres sont donnés à titre indicatif et il convient d'être prudent afin de ne pas exagérer leur signification (ces données renvoient à des mesures ponctuelles auprès de groupes d'élèves différents; ce ne sont pas les mêmes élèves qui sont testés à différents moments de leur scolarité). Il n'empêche, ces chiffres semblent indiquer, qu'en ce qui concerne les figures " sensibles " (1 et 5, 4 et 6), les conceptions des élèves évoluent peu de l'entrée en 4P à la sortie de 6P.

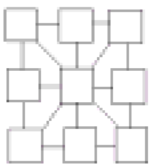
_ **Vers des activités de re-médiation :**

Cette dernière étape s'inscrit dans le prolongement direct de la précédente; elle ambitionne d'apporter des pistes de remédiations aux difficultés mises en évidence par l'analyse formative des productions d'élèves. **Que faut-il entendre par activité de remédiation ?**



On sait depuis longtemps qu'il ne sert à rien de faire répéter, à un élève qui a fait une erreur, le même type d'exercice. De telles pratiques conduisent l'élève, soit à des situations de blocages (en raison d'échecs répétés), soit à une recherche " effrénée " d'indices pas toujours pertinents pour produire, de manière aléatoire, la réponse attendue par le maître. L'analyse des productions d'élèves, développée tout au long de cette recherche, fourmille d'exemples de ce type.
On peut, par contre, partir du principe que **l'erreur fait partie du processus d'apprentissage**. Dans ce cas, il paraît plus opportun, d'analyser finement les types d'erreurs produites par les élèves ... pour proposer de nouvelles situations d'apprentissage susceptibles de favoriser, chez l'élève, une prise de conscience du caractère erroné de ses connaissances.
Il faudra donc entendre le mot " re-médiation " comme une nouvelle médiation entre l'élève et le savoir. Cette conception est très proche de celle adoptée par R. CHARNAY[2] (1997) de l'équipe ERMEL qui définit la remédiation comme " *un acte d'enseignement dont l'objectif est de permettre à l'élève de s'approprier des connaissances après qu'un premier enseignement ne lui ait pas permis de le faire, dans les formes attendues* ".

_ **Proposition d'une situation[3] de re-médiation** : Le carré magique pour faire 1.



Le but de cette activité : il s'agit d'obtenir un nombre fixé (une unité) en alignant trois cartons-nombres (dans ce cas, des fractions-nombres) et ce, de manière horizontale, verticale ou diagonale.

_ **Le plan de jeu** : il se compose de 9 cases, réparties en trois rangées de trois cases reliées entre elles deux à deux.

_ **Des cartons-nombres à placer sur le plan de jeu** (cfr. exemples ci-joints)

_

[2] ERMEL (1997) Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM1. Paris : Hatier

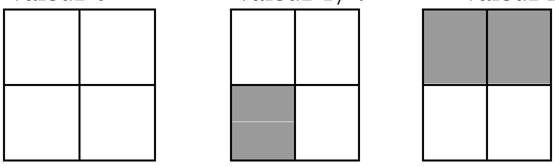
[3] Cette activité est extraite du livre de ANDRIANNE, S., SACRE, A. & STEGEN, P. (1997) **des jeux, des activités … Outils pour construire les nombres**, Bruxelles : Conseil de l'Enseignement des communes et provinces & Service de Pédagogie expérimentale (ULg)

- **Le déroulement** : Chacun des 4 joueurs reçoit trois cartes. Le premier dépose une de ses cartes sur une case du plan de jeu et prend une carte dans la pioche, de manière à en avoir toujours trois en main. Les joueurs suivants font de même. Lorsqu'un des joueurs a la possibilité, en déposant sa carte, de terminer un alignement de trois cartes dont la somme vaut une unité (à l'horizontale, à la verticale ou en diagonale), il empoche ces trois cartes et a gagné un pli. Il met celui-ci de côté, ces cartes ne peuvent être remises en jeu par la suite. Le jeu se poursuit jusqu'à épuisement de la pioche et jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de remporter de pli. Le gagnant est celui qui a réussi à former le plus de plis. Si, à un moment, les neuf cases du plan de jeu sont recouvertes et qu'il est impossible de vider une des lignes de ses cartes, on enlève les 9 cartes et on les replace dans la pioche.

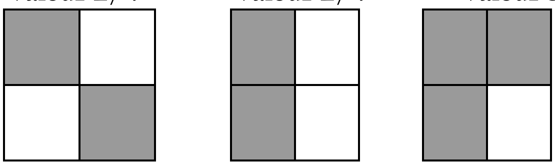
- **Des exemples de cartons-nombres**

Exemples de représentations de cartons

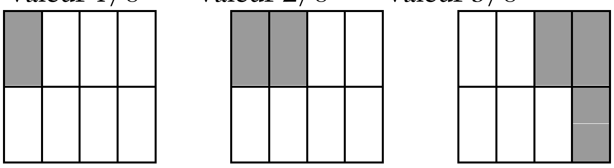
valeur 0 valeur 1/4 valeur 2/4



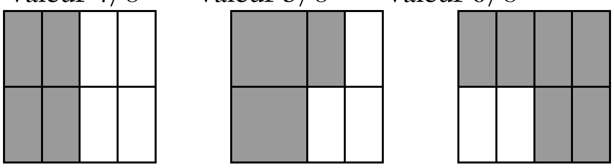
valeur 2/4 valeur 2/4 valeur 3/4



valeur 1/8 valeur 2/8 valeur 3/8



valeur 4/8 valeur 5/8 valeur 6/8



Exemples de séries de cartons-nombres :

- 10 cartons de valeur 0, 5 cartons de valeur 1/2, 6 cartons de valeur 1/4, 2 cartons de valeur 2/4 et 2 cartons de valeur 3/4.
- 10 cartons de valeur 0, 5 cartons de valeur 1/8, 2 cartons de valeur 2/8, 2 cartons de valeur 3/8, 2 cartons de valeur 4/8, 1 carton de valeur 5/8, 1 carton de valeur 6/8 et 1 carton de valeur 7/8.
- 10 cartons de valeur 0, 6 cartons de valeur 1/3, 3 cartons de valeur 2/3.

- 10 cartons de valeur 0, 7 cartons de valeur 1/6, 5 cartons de valeur 2/6, 4 cartons de valeur 3/6 et 2 cartons de valeur 4/6 et un carton de valeur 5/6.
- 10 cartons de valeur 0, 4 cartons de valeur 1/5, 3 cartons de valeur 2/5, 2 cartons de valeur 3/5 et 1 carton de valeur 4/5.

- **Conseils pour la mise en place de l'activité**

  - Dans un premier temps, il est préférable de ne jouer une partie qu'avec des fractions représentant les zéros, les demis et les quarts; on peut ensuite y ajouter progressivement les huitièmes. Lors d'une autre partie, on peut ne jouer qu'avec les zéros, les demis, les tiers et les sixièmes. Lorsque les élèves sont suffisamment familiarisés avec ces nouveaux nombres, on peut mettre tous les cartons ensembles.
  - Les exemples de configuration des fractions représentées doivent être les plus diversifiés possible; ainsi, il ne faut pas que l'élève associe la fraction 1/2 à un seul type de configuration.
  - En cours de jeu, les élèves sont régulièrement amenés à pratiquer des superpositions pour vérifier si les trois cartons alignés représentent bien une unité. C'est très intéressant mais cela suppose aussi que le support soit conçu de manière à permettre cette superposition (la « configuration » de l'unité de départ, par exemple un carré de 4 cm sur 4 cm, doit rester constante quelle que soit la série de fractions utilisées).

- **Des variantes possibles ...**
  - Au lieu de représenter des fractions dessinées, les cartons peuvent porter des fractions écrites sous une forme écrite conventionnelle : des chiffres séparés par une barre de fraction voire des écritures décimales (pour certaines fractions) ...
  - Dans le courant de la partie, en fonction de stratégies développées par certains élèves (cfr. article précédent), il se peut que la somme des 3 cartons alignés soit supérieure à l'unité. Dans ce cas, on peut introduire la possibilité de combiner soustraction et addition pour arriver à l'unité.

Un exemple de démarche pour construire une facette du concept de nombre rationnel au départ de cette activité

Ce n'est pas par un jeu seul que les élèves construisent des concepts mathématiques. Pour qu'un apprentissage mathématique puisse s'opérer, il appartient à l'enseignant de prévoir et de provoquer des moments de réflexion obligeant les élèves à s'interroger sur les contenus mathématiques qu'ils ont mis en oeuvre dans cette activité mais aussi sur les démarches et les stratégies qu'ils ont utilisées.

Ce va-et-vient entre le jeu et une réflexion *a posteriori* renvoie à une distinction établie par R. DOUADY[4]. Cette didacticienne distingue, pour chaque concept mathématique, son caractère « **outil** » et son caractère « **objet** ».

> « *Par son caractère* ***outil****, nous entendons l'usage qu'il en fait pour résoudre un problème. Un concept prend d'abord son sens par son caractère outil.*
> *Par son caractère* ***objet****, nous entendons le concept mathématique considéré comme ayant sa place dans le savoir mathématique de référence à un moment donné de l'apprentissage* ».

[4] DOUADY, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, **Recherches en didactique des mathématiques**, vol. 7/2, Grenoble : La Pensée sauvage.

Construire les apprentissages numériques au travers de situations ludiques permet certes d'aborder des concepts mathématiques dans leur caractère outil mais, si on en reste à ce stade, néglige totalement le caractère objet. Pour assurer ce passage, cette dialectique outil-objet, nous proposons de prolonger l'activité proposée au départ de la démarche suivante :

Synthèse orale : • Qu'a-t-on appris lors de cette activité ? (contenu) • Comment s'est déroulée l'activité ? (démarche)
Application écrite liée à l'activité
Application générale sans référence à l'activité
Pour aller plus loin : mise en perspective du nouveau concept dans de nouvelles activités d'apprentissage

- **Moments de synthèse orale :**

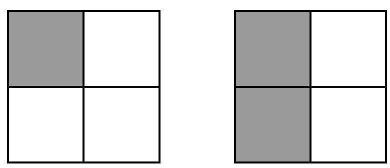
A titre d'exemple, voici des questions qui peuvent servir de fil conducteur pour l'animation de ce moment important :

- Au niveau du contenu de l'activité : Comment a-t-on fait l'unité au cours de ce jeu ? (Rappel des différentes décompositions qui sont apparues et toutes les questions qui sont liées, notamment comment écrire ces décompositions ?)
- Au niveau des démarches utilisées : Comment s'est déroulée cette activité ? Quelles sont les difficultés rencontrées et comment les avez-vous surmontées ?

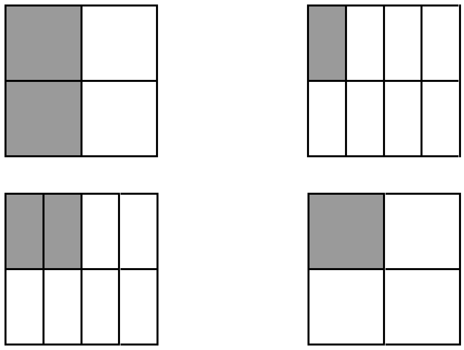
- **Présentation d'application liée au jeu :**

Cette phase intermédiaire n'est pas nécessaire. Toutefois, elle permet à l'enseignant de vérifier le degré de maîtrise de chacun de ces élèves ... ce qui n'était pas évident à réaliser lors de la gestion de la phase de jeu à 4.

Deux cartons sont déjà alignés sur le plan de jeu:



Parmi les cartons suivants, coche celui que tu vas déposer pour faire l'unité, et donc ramasser le pli:

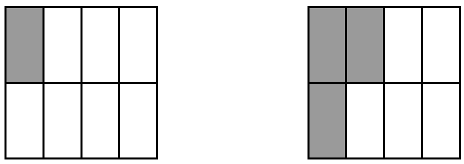


_ **Applications écrites mathématisées liées au jeu :**

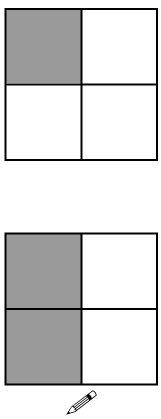
Cette phase a pour objectif de se détacher progressivement du contexte de jeu pour en venir à travailler le concept de nombre rationnel comme objet d'étude. Cette phase intermédiaire nous paraît essentielle vu la complexité du concept de nombre rationnel. Le retour sur le support jeu permet également de construire, pour certains élèves en difficultés, une sorte de référent (au même titre que la droite graduée) sur lequel ils vont pouvoir s'appuyer pour développer le concept de nombre-fraction.

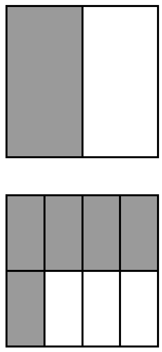
Pour ce faire, on peut imaginer l'activité suivante :

1) Deux cartons sont déjà alignés sur le plan de jeu. C'est au tour de Tom de jouer.



Parmi les cartons suivants, il choisit de déposer celui qui est coché:



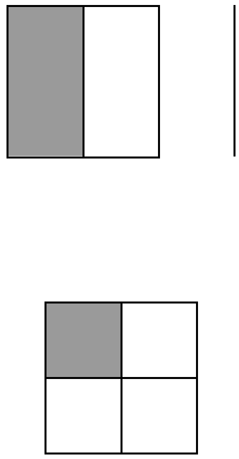


Tom écrit ensuite le calcul qui explique ce qu'il a fait:

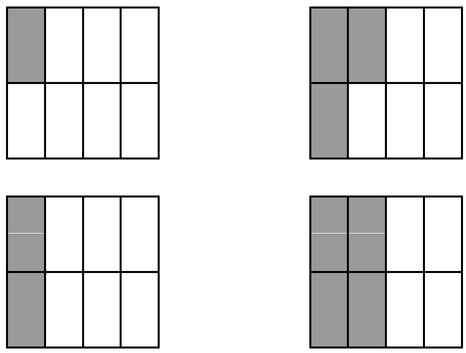
1/8 + 3/8 + 2/4 = 1

A ton tour maintenant :

Voici les deux cartons déjà alignés:



Parmi les cartons suivants, coche celui que tu choisis pour obtenir l'unité:



Ecris le calcul qui explique ce que tu choisis :

....

_ **Application générale sans référence au jeu :**

Au cours de cette phase, les élèves travaillent directement les décompositions additives de fractions-nombres.

Complète les calculs suivants. Si tu ne trouves pas la réponse, tu peux toujours t'aider des cartes du jeu "Le carré magique (pour faire l'unité)" :

1/4 + 2/4 + ... = 1

1/2 + ... + 1/8 = 1

2/8 + ... + ... = 1

.... + ... + ... = 1

...

En conclusion

La démarche que nous avons proposée est donnée à titre d'exemple. Il ne nous paraît pas opportun de la généraliser systématiquement au terme de l'introduction d'une nouvelle activité, à l'exception bien sûr de la phase de synthèse orale qui nous semble intimement liée à toute situation d'apprentissage par le jeu.

Pour terminer provisoirement cette réflexion, il ne nous reste qu'à proposer aux enseignants du cycle 10/12 de mettre en place le dispositif présenté ici et de nous faire parvenir leurs remarques et commentaires de manière à enrichir l'outil didactique. Celui sera très prochainement disponible via Internet ou, sur format papier, au prix coûtant[5].

[5] Pour plus d'informations, on peut contacter Pierre STEGEN à l'adresse suivante : Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education, B32 Sart Tilman 4000 Liège Tél. : 04/366.46.62 (Email : Pierre.Stegen@ulg.ac.be)