

POLYGONES SUPERPOSABLES, POLYGONES DE MÊME FORME : LE TANGRAM À L'ÉCOLE PRIMAIRE

1 Introduction

Le Tangram nous vient de Chine, il est vieux d'environ 2 500 ans et s'utilise comme un puzzle. Il se compose de sept pièces, à savoir un carré, un parallélogramme, et cinq triangles rectangles, deux grands, un moyen et deux petits. En assemblant ces sept pièces de diverses façons, on peut obtenir des centaines de configurations différentes¹. Un assemblage particulier est celui du carré (figure 1).

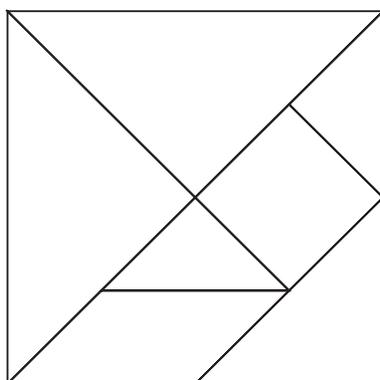


Fig. 1

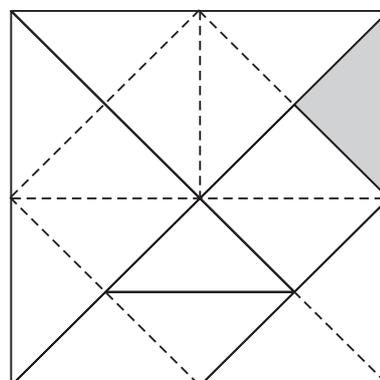


Fig. 2

Les sept polygones ont entre eux des rapports de grandeurs simples². En pavant le carré formé des sept pièces avec le petit triangle (figure 2), on voit apparaître certaines propriétés, à savoir :

certains côtés de polygones ont même longueur ;

¹ D. Picon [1997] présente plus de mille configurations. Nous en avons utilisé quelques-unes.

² La description des propriétés du Tangram est destinée dans un premier temps à l'enseignant exclusivement. C'est l'objectif des activités qui suivent de faire découvrir ces propriétés aux élèves.

les aires de chacun des deux grands triangles valent quatre fois l'aire d'un petit ;

les aires du carré, du parallélogramme et du moyen triangle valent deux fois l'aire d'un petit triangle ;

la construction de la figure fait jouer un rôle aux diagonales et aux points milieux de certains segments ;

le parallélogramme a deux orientations possibles dans le plan : il est orienté différemment selon la face sur laquelle il est posé. La figure 3 montre que lors d'une rotation dans le plan, par exemple un demi-tour sur la table, le parallélogramme garde son orientation. Tandis que la figure 4 illustre le retournement du parallélogramme obtenu en sortant du plan : on passe de la face *A* à la face *B*, qui est orientée différemment.

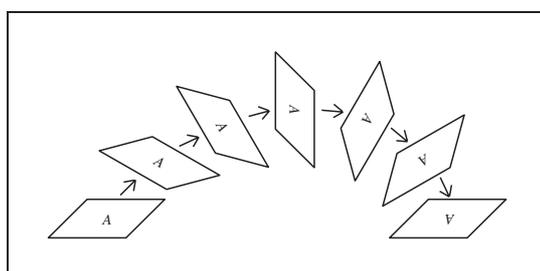


Fig. 3

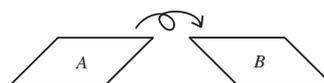


Fig. 4

En règle générale, l'exploitation des figures du Tangram fait appel aux notions de famille de figures, parallélisme, perpendicularité, amplitude d'angle, symétries, pavages, conservation de l'aire indépendamment de la forme, etc. Ces notions sont des enjeux pour chacune des activités.

On trouve des Tangram plastifiés dans le commerce. On peut aussi en faire soi-même dans du carton, en étant très soigneux quant aux dimensions des pièces³ (ceci a beaucoup d'importance pour réussir certaines manipulations).

Les activités ci-après peuvent être proposées de la première à la sixième primaires. Certaines sont aménagées différemment pour les petits et les grands, nous le mentionnons explicitement au moment venu. De plus, nous suggérons que chaque activité fasse l'objet d'une séance commune à la classe, puis soit reprise à d'autres moments sous forme d'ateliers ou de prolongements visant à améliorer les compétences visées.

2 Découverte des pièces du Tangram

De quoi s'agit-il ?

Explorer les possibilités du Tangram en formant librement des configurations, en superposant des pièces, en reproduisant un modèle.

³ Le côté du carré composé des sept pièces doit mesurer au moins 10 cm pour que les pièces soient faciles à manipuler.

Enjeux

Se familiariser avec des polygones simples.

Explorer des égalités et inégalités d'aires et de côtés. Découvrir des formes identiques (en passant d'un Tangram à un autre). Voir chapitre 16, section 3.1.

Compétences. – *Reconnaître, comparer des figures, les différencier. Construire des figures avec du matériel varié.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram⁴ par enfant.

Comment s'y prendre ?

Tout d'abord, on donne les pièces aux enfants et on les laisse manipuler librement, créer des configurations, échanger des propos.

Ensuite, on leur demande de travailler par deux : un enfant crée un assemblage (figure 5 par exemple) et l'autre s'en sert comme modèle pour le reproduire avec ses pièces. Puis, on échange les rôles.

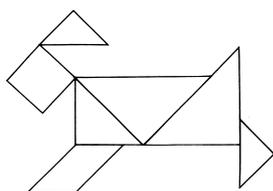


Fig. 5

Par le va-et-vient entre le modèle et la reproduction, les élèves approfondissent les possibilités du Tangram et les différences entre les pièces. L'enfant qui reproduit le modèle, analyse sa composition, les positions relatives des pièces, leur orientation (important pour le parallélogramme). Il est amené à distinguer le petit, le moyen et le grand triangle, à juxtaposer des côtés de même longueur, etc. Les deux élèves discutent de ce qui est réalisé avec un vocabulaire plus ou moins précis, mais néanmoins efficace dans l'action. Ils peuvent superposer les triangles pour vérifier leur conformité au modèle.

Échos des classes

Les enfants ne se lassent pas d'imaginer des assemblages. Les manipulations libres ont été proposées au début de chaque séance dans toutes les classes et les élèves ont été créatifs. Au fil du temps, ils ont enrichi leur pratique de ce qu'ils avaient découvert précédemment : ils refaisaient spontanément une partie d'activité qui leur avait particulièrement plu. Lors de ces manipulations libres, les échanges oraux entre enfants ont été nombreux : ils ont expliqué ce que représentait leur dessin, se sont mutuellement lancé des défis, etc.

En outre, les réalisations libres n'ont pas toutes été planes : certains ont empilé les pièces, les ont dressées en les faisant tenir en équilibre ou en les calant avec d'autres pièces. L'enseignant les a laissé faire.

En première et deuxième primaires en particulier, l'enseignant a proposé la même activité en ajoutant une limite de temps. Il a donné le signal du départ pour que le premier enfant de chaque équipe de deux crée son modèle et il a compté jusqu'à 20. Au bout du compte, le modèle devait être terminé. L'enseignant a compté à nouveau jusqu'à 20 pour fixer le temps de reproduction du modèle par le deuxième enfant de chaque équipe. La limitation du temps a été particulièrement stimulante pour les enfants. En effet, à défaut de cette limitation, certains passaient trop de temps à créer

⁴ Dans la section *De quoi a-t-on besoin ?* de toutes les activités, nous entendons par Tangram les sept pièces en vrac.

leur modèle et l'autre enfant de l'équipe s'impatientait ou se désintéressait. De plus, ce fut un bon exercice pour ceux qui ne maîtrisaient pas bien la comptine orale des nombres et qui anticipaient difficilement la limite du temps imparti. On aurait également pu proposer à l'un des enfants de compter jusqu'à 20 en gardant un certain rythme ou encore de compter à rebours.

3 Reproduction d'un modèle

Après avoir découvert le Tangram et travaillé uniquement des modèles de même grandeur, on propose à présent des modèles plus grands ou plus petits (plus de superposition possible). On va également introduire un vocabulaire spécifique au travers d'explications orales.

3.1 Repérage visuel

De quoi s'agit-il ?

Reproduire avec son Tangram un assemblage des sept pièces placé au tableau.

Enjeux

Reconnaître des polygones de même forme et de grandeurs différentes. Créer une configuration semblable à un modèle plus grand. Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences. – *Reconnaître, comparer des figures, les différencier. Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Un grand Tangram qui adhère au tableau et dont les pièces sont facilement déplaçables⁵.

Des fiches portant chacune un modèle d'assemblage - à une échelle différente des pièces que manipulent les enfants - (voir en annexe les fiches 5 et 6 aux pages 79 et 80).

Comment s'y prendre ?

Tout d'abord, l'enseignant prépare un assemblage au tableau. Chaque enfant doit reproduire ce dessin sur son bureau avec ses pièces.

Puis, c'est au tour d'un enfant de créer le modèle au tableau, si possible hors de la vue des élèves pour qu'ils ne soient pas guidés par les étapes de la construction, mais bien par le dessin achevé.

Ensuite, l'enseignant place au tableau une fiche avec un assemblage (fiches 5 et 6) : un élève compose ce modèle au tableau avec le grand Tangram

⁵ On peut utiliser un matériel magnétique qui adhère aux surfaces métalliques de certaines armoires ou tableaux. On peut aussi placer du velcro au dos des pièces et couvrir le tableau d'un drap de feutrine qui permet de les y accrocher. On peut tout simplement mettre du papier collant double face sur les pièces, mais cette solution est moins pratique car le papier collant tend à se détacher au fur et à mesure des manipulations.

pendant que les autres réalisent la même chose sur leur bureau. Puis, on vérifie collectivement si la composition de la fiche et celle du tableau sont semblables. La comparaison porte sur les positions relatives des pièces, les écarts angulaires entre elles (dont il faut estimer à vue l'amplitude), les côtés adjacents, etc. Les enfants essaient de verbaliser les différences pour que celui qui est au tableau corrige. Si les remarques ne sont pas assez précises, ils viennent montrer au tableau les différences entre la fiche et le Tangram. Ce faisant, chacun vérifie ce qu'il a composé sur son bureau.

Enfin, chacun travaille individuellement avec ses pièces sur son bureau. Pour cela, les enfants reçoivent une série de fiches qui leur servent de modèles.

Échos des classes

La reproduction du modèle passe d'abord par une reconnaissance globale de la forme : « Ça ressemble à un bonhomme (figure 6), c'est un grand rectangle (figure 7), on dirait un carré avec des trous dedans (figure 8)... »

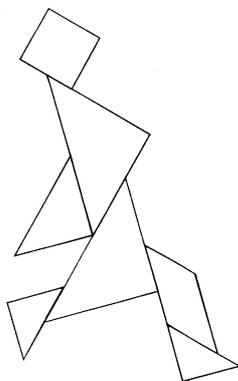


Fig. 6

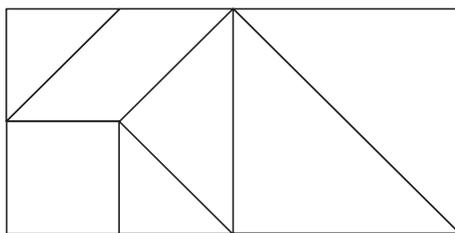


Fig. 7

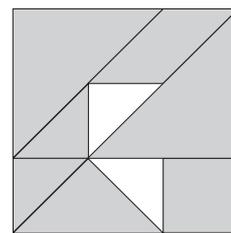


Fig. 8

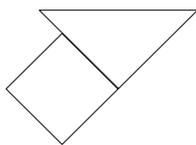


Fig. 9

Ils ont repéré chaque pièce au tableau et ont placé la leur sur le bureau dans une position similaire. Ce faisant, ils ont transposé l'orientation du tableau à la surface de leur bureau, ils ont pris comme repères le haut, le bas, la gauche et la droite.

Des confusions sont parfois apparues entre les petits, les moyens et les grands triangles. Par exemple, un enfant a comparé deux pièces voisines : le côté du triangle choisi était plus grand que celui du carré auquel il se juxtaposait (figure 9) tandis qu'au tableau les deux côtés s'ajustaient parfaitement (figure 10). Un autre élève a réalisé tout l'assemblage, puis en comparant sa production à celle du tableau, il a remarqué que la forme globale qu'il avait obtenue était différente.

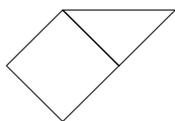


Fig. 10

Un autre problème fréquent et déjà rencontré dans les manipulations libres a concerné l'orientation du parallélogramme (voir la section 1 à la page 28). Un élève a observé que sur l'assemblage du tableau (figure 11) le parallélogramme « penchait » vers la gauche et l'a disposé sur son bureau pour qu'il « penche » également vers la gauche, mais sans tenir compte des positions des grands et des petits côtés, ce qui a donné le résultat de la figure 12.

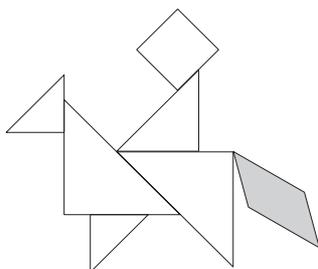


Fig. 11

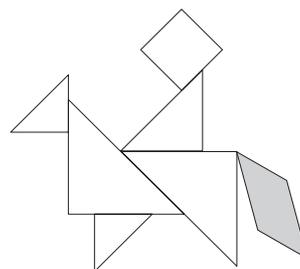


Fig. 12

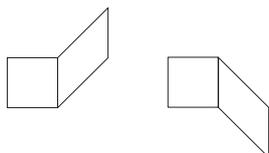


Fig. 13

Cette situation a posé problème à beaucoup d'enfants qui, même s'ils voyaient une différence avec le modèle, ne parvenaient pas à la corriger immédiatement. Ils ont fait pivoter le parallélogramme sur le bureau et ont cherché la bonne orientation sans penser tout de suite à le retourner. Par ailleurs, s'ils étaient attentifs à la longueur des côtés, par exemple en juxtaposant le carré au parallélogramme, ils en oubliaient l'orientation du parallélogramme (figure 13).

Remarquons que le matériel magnétique n'adhère au tableau que d'un seul côté⁶. Ce fait a mis le problème en lumière, car lorsque l'élève retournait la pièce, elle n'adhérait plus au tableau. Il fallait donc deux pièces magnétiques pour présenter le parallélogramme sur ses deux faces (figure 14). La présence de ces deux pièces distinctes a permis d'illustrer dans plusieurs activités les deux orientations possibles du parallélogramme : lors des reproductions de modèles au tableau, il a fallu choisir la pièce illustrant l'orientation voulue. Néanmoins, le problème s'est présenté différemment pour les élèves travaillant sur leur bureau : les deux faces de leur parallélogramme n'avaient aucun signe distinctif. La référence aux deux pièces magnétiques a levé les hésitations à certains moments.

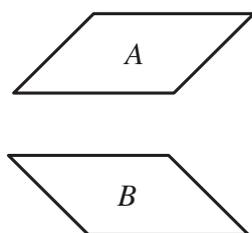


Fig. 14

Enfin, les jeunes élèves se sont montrés vite satisfaits d'une reproduction qui respectait globalement le modèle. Les détails de positions relatives des pièces n'ont pas toujours attiré leur attention. C'est en faisant le rapprochement avec le « jeu des sept erreurs » qu'ils ont observé plus minutieusement la configuration. Il n'a pas été facile d'expliquer les différences entre le modèle et la reproduction. Les élèves ont volontiers utilisé des termes imagés ainsi qu'un vocabulaire spatial et géométrique minimal. Pour des échos relatifs au vocabulaire, voir la section suivante.

3.2 Description orale

De quoi s'agit-il ?

Expliquer oralement la disposition des pièces pour reproduire un modèle.

Enjeux

Utiliser un vocabulaire géométrique et spatial approprié à l'expression des similitudes. Voir chapitre 16, section 3.3.

⁶ La situation est la même si l'on utilise des pièces de Tangram coloriées différemment sur chaque face. Selon la face choisie, le parallélogramme a ou non la même couleur que les autres pièces.

Comprendre et interpréter des instructions pour effectuer une construction précise.

Compétences. – *Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations. Comprendre et utiliser, dans leur contexte les termes usuels propres à la géométrie.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Un grand Tangram pour le tableau.

Des modèles dessinés sur fiches (voir en annexe les fiches 5 à 7 aux pages 79 à 81).

Comment s'y prendre ?

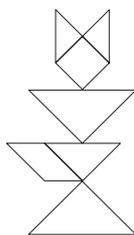


Fig. 15

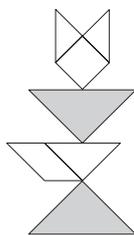


Fig. 16

Dans un premier temps, on travaille collectivement. L'enseignant choisit un modèle où les pièces du Tangram se succèdent dans un ordre simple à décrire (par exemple la figure 15). Il fait venir un enfant devant la classe pour décrire ce modèle aux autres élèves, qui doivent le composer sur leur bureau sans le voir. En première et deuxième années, pour ne pas imposer une description trop longue à un seul élève, l'enseignant demande à plusieurs d'entre eux de venir tour à tour décrire une seule pièce du Tangram (dans l'ordre de la construction, par exemple de haut en bas) et sa position par rapport aux autres. L'enseignant met en évidence, éventuellement en les écrivant au tableau, les types d'informations qu'il faut donner pour pouvoir construire l'assemblage, à savoir le nom de la forme à prendre, sa taille s'il s'agit d'un triangle, son orientation dans le plan et enfin sa position par rapport aux autres pièces.

Ensuite, en guise de synthèse, un enfant vient répéter la description complète pendant qu'un autre construit l'assemblage au tableau. Ceci permet à l'enfant qui décrit d'avoir un retour direct de ce qu'il dit. S'il n'est pas assez clair ou précis dans ses explications, la réalisation au tableau ne correspond pas à son modèle et il peut rectifier ses propos. Les autres élèves interviennent également. Mieux encore, si deux enfants construisent chacun au tableau un assemblage conforme à la description, alors des différences d'interprétation apparaissent au vu des constructions. Par exemple, en disant de mettre le grand côté du triangle à l'horizontale, on peut obtenir les deux positions de la figure 16.

Dans un deuxième temps, les enfants travaillent par deux en plaçant un écran entre eux. L'un invente avec ses pièces un modèle sur le bureau et explique la disposition des pièces à l'autre, qui doit à son tour le reproduire. Pour vérifier, ils enlèvent l'écran. Puis ils échangent les rôles.

Échos des classes

Lors de la description collective, la richesse du vocabulaire varie en fonction de l'âge et du niveau des enfants. Néanmoins, on a constaté que tant que les enfants se comprennent avec un vocabulaire sommaire et non spécifiquement géométrique, ils continuent à l'employer. De plus, ils font beaucoup de gestes qui éclairent souvent leurs paroles. Pourtant, l'introduction de mots précis par l'enseignant a permis à certains moments d'améliorer la

compréhension, car un mot pouvait alors remplacer une phrase entière et la description était plus aisée. Les enfants ne se sont pas toujours souvenus de la signification de mots employés par certains ; il y a eu des confusions. Cette activité a été l'occasion de rappeler ou clarifier certaines notions et surtout de composer une liste de mots communs à la classe. Les élèves n'ont pas intégré tout de suite des mots parfois nouveaux pour eux, mais ils les ont compris dans certains contextes et à force de les utiliser dans les diverses activités proposées plus loin, ils se les sont appropriés peu à peu. Par ailleurs, pour faciliter l'explication du dessin à la classe, l'enseignant a noté au tableau un schéma à suivre pour la description :

1. NOM de la forme,
2. TAILLE (pour les triangles seulement),
3. SENS⁷ de la forme,
4. POSITION de la forme dans le dessin.

Si l'on regarde en détail le vocabulaire utilisé, on peut faire quelques constatations. Tout d'abord, le nom des formes était familier à part celui du parallélogramme, qui était inconnu des plus jeunes – ils l'ont appelé « la forme longue » – et souvent oublié par les plus âgés. Le mot exact a été vite adopté. La taille des pièces n'a pas posé de problèmes : petit, moyen et grand font partie du vocabulaire courant.

Ensuite, l'orientation d'une forme a été choisie en fonction de ses caractéristiques morphologiques. Pour le carré, les enfants ont parlé de « droit » et « penché », « pointe vers le haut/le bas », « mettre le carré comme un losange », « mettre le bord du dessus horizontal ». Pour le triangle, outre la grandeur de la forme, ils ont souvent évoqué le grand côté en disant « le grand bord couché/debout/penché », « le grand bord droit », « le grand côté vers le haut/le bas », « le grand côté horizontal/vertical/oblique » ; ils ont aussi parlé de « la grande pointe en haut/en bas/à gauche/à droite », « l'angle droit au-dessus/en dessous/à gauche/à droite ». Pour le parallélogramme, ils distinguaient « les grands et les petits bords/côtés », « les grands côtés horizontalement/verticalement », et, pour distinguer ses deux orientations, ils ont ajouté à ces termes « le parallélogramme penche vers la gauche/la droite ».

Enfin, la position d'une pièce par rapport aux autres a fait appel soit au sens figuratif du dessin, par exemple « le carré pour faire la tête et le triangle pour le ventre », soit aux notions spatiales s'appliquant au plan : « à gauche/droite de », « au-dessus/en dessous », « en haut/en bas », « au milieu de », « entre », « à côté de », « contre », etc.

Un enfant de deuxième primaire, après plusieurs essais, a fait la description suivante (en se référant à la figure 17) :

« On prend le grand triangle, on met son grand côté horizontalement vers le bas et on le met en bas du bureau. On prend le triangle moyen, on le met comme l'autre et on le place au-dessus du grand triangle au milieu. On prend le petit triangle avec son grand côté horizontalement vers le haut,

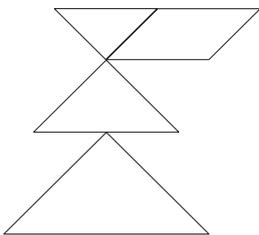


Fig. 17

⁷ Terme plus simple à comprendre à cet égard que *orientation*.

on le met au-dessus du moyen triangle, pointe contre pointe. On prend le parallélogramme (intervention de l'enseignant), on le met penché à droite avec son grand côté horizontal, à droite du petit triangle, avec son bord tout contre, ça fait une grande ligne horizontale toute droite en haut. »

4 Mémorisation d'une configuration

La difficulté supplémentaire dans les deux activités qui suivent est que les enfants n'ont plus le modèle sous les yeux. D'abord, ils doivent faire appel uniquement à leur mémoire. Ensuite, ils doivent expliquer oralement la configuration soit avec l'aide d'un schéma, soit avec leur mémoire pour seul support.

4.1 Recomposer un dessin caché (de 6 à 9 ans)

De quoi s'agit-il ?

Observer, pendant un temps limité, une configuration puis un dessin du Tangram afin de mémoriser l'emplacement des pièces. Reconstruire l'assemblage sans avoir le modèle sous les yeux.

Enjeux

Exercer le sens de l'observation (deux objets identiques).

Mémoriser une configuration complexe en se donnant des repères. Voir chapitre 16, section 3.3.

Reconstituer un modèle en faisant appel à sa mémoire.

Compétences. – *Reconnaître, comparer des figures, les différencier, les classer. Construire des figures avec du matériel varié. Dans un contexte de [...] reproduction de dessins, relever la présence de régularités.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Des modèles dessinés chacun sur une fiche séparée (voir en annexe les fiches 5 et 6, aux pages 79 et 80).

Comment s'y prendre ?

Tout d'abord, chaque enfant fait une composition avec ses pièces sur son bureau. Il doit la regarder attentivement en vue de la mémoriser puis, au signal de l'enseignant, il mélange les pièces et essaie de reconstituer sa configuration initiale. Après quelques tentatives, on s'aperçoit qu'il est difficile d'être sûr que l'on a bien refait un assemblage identique. C'est pour cette raison que l'on va proposer des modèles sur fiches, afin de garder une trace de ce que l'on compose et pouvoir vérifier.

Ensuite, les élèves sont par deux (chacun a son Tangram) et l'enseignant place entre eux une fiche face cachée et donne la consigne suivante : « Au signal, vous retournerez le modèle, vous le regarderez attentivement pour retenir l'emplacement de chaque pièce et après pouvoir refaire l'assemblage avec vos pièces. Attention, il est interdit de toucher aux pièces du Tangram pendant que vous regardez le modèle. Lorsque je vous dirai de

cachez le modèle, vous devrez le reconstituer sur le bureau. Vous aurez droit à plusieurs essais si nécessaire. »

L'enseignant donne alors le signal de regarder le modèle et veille à ce que les enfants ne commencent pas l'assemblage à ce moment. Après une dizaine de secondes, il demande de cacher le modèle et de reproduire le dessin avec les pièces. Si les élèves ne parviennent pas à faire l'assemblage au premier coup, ils doivent au moins placer l'une ou l'autre pièce. Ensuite, l'enseignant donne un nouveau signal : retour à l'observation sans toucher aux pièces, et ainsi de suite autant de fois que nécessaire.

L'enseignant souligne l'importance de se donner des repères lors de l'observation du modèle. Afin de mieux mémoriser celui-ci, chacun choisit une technique qui l'aide à retenir l'emplacement des pièces les unes par rapport aux autres, à repérer dans le modèle les pièces qu'il a déjà bien placées et ce qui manque encore ou ce qui n'est pas correct. L'enseignant estime le nombre d'essais nécessaires pour que la majorité des enfants aient terminé leur reconstitution. Il explique éventuellement aux plus rapides qu'ils pourraient tout de même s'être trompés, ceci afin qu'ils prêtent attention au modèle lorsque celui-ci est visible. Finalement, il autorise à retourner définitivement le modèle pour corriger.

Échos des classes

Lorsque les enfants ont créé leur propre composition puis mélangé leurs pièces, ils l'ont recomposée assez facilement. Leurs assemblages possédaient très souvent une structure presque symétrique. Grâce à cela, les enfants les mémorisaient plus facilement, que ce soit visuellement ou par les gestes qui ont permis de le composer.

Par ailleurs, lorsque le modèle leur était étranger, ils ont eu l'impression, une fois la fiche retournée, de ne se souvenir de rien. Dès la deuxième observation, ils ont appliqué une technique de mémorisation. Certains ont utilisé leur mémoire visuelle et ont dit : « C'est comme si on dessinait les formes dans notre tête. » D'autres ont utilisé un moyen verbal : ils ont récité l'emplacement des pièces dans un ordre donné. Par exemple, en haut le petit triangle, puis le carré et à droite le moyen triangle. Chez certains, cette technique s'est accompagnée de gestes dans l'espace déterminant l'emplacement des pièces de haut en bas ou de gauche à droite. Ce moyen verbal a demandé plusieurs retours au modèle, alors qu'un enfant ayant vraiment une image mentale de celui-ci pouvait le reproduire en deux fois, voire, plus rarement, en une. Les techniques étaient variées et difficiles à analyser par l'enseignant.

Les élèves qui ont dû, en cours de route, corriger des erreurs ont affronté une situation beaucoup plus complexe que les autres. Leur esprit était sans doute encombré d'informations trop nombreuses.

4.2 Expliquer une configuration cachée (de 9 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Reproduire un modèle placé dans la classe, hors de la vue.

Enjeux

Mémoriser une configuration.

En dessiner un schéma.

Expliquer oralement une configuration à reproduire. Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences. – Voir compétences à la page 36. En outre : *Tracer des figures simples. Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram pour deux enfants.

Quatre Tangram à placer chacun dans une boîte.

Des feuilles et des crayons.

Comment s'y prendre ?

La première étape est de passer par l'intermédiaire d'un dessin pour reconstituer le modèle caché.

L'enseignant dispose les boîtes aux quatre coins de la classe avec un assemblage des pièces du Tangram au fond de chaque boîte. La présence des pièces est importante et ne peut être remplacée par un dessin, car l'activité consiste en partie à dessiner l'assemblage.

Les enfants sont par équipes de deux. Le premier muni d'un papier et d'un crayon se rend en silence vers une des boîtes et fait un schéma du modèle. Il rejoint son coéquipier et lui explique oralement l'emplacement de chaque pièce, en s'appuyant sur son schéma, mais sans le lui montrer. Le coéquipier recompose l'assemblage sur son bureau. Ceci fait, il va voir l'assemblage dans la boîte et revient corriger éventuellement son travail. Ensuite, les enfants échangent leurs rôles et choisissent une autre boîte.

La seconde étape consiste à mémoriser le modèle et à l'expliquer à l'autre, sans le soutien d'un schéma. Le défi est alors de faire le moins de trajets possibles entre la boîte et le bureau. Une étape intermédiaire peut être, pour l'enfant qui va voir le modèle, de le refaire lui-même sur le bureau hors de la vue de son coéquipier, puis de lui expliquer la configuration. Mais le but est bien de faire le trajet, de mémoriser le modèle placé dans la boîte et de l'expliquer à l'autre enfant pour qu'il puisse le recomposer le plus vite possible. Après quoi, on échange les rôles.

Échos des classes

Les schémas des enfants ont été faits rapidement, à main levée. Ils rendaient assez bien le modèle. Certains ont écrit les noms des pièces et ont donné une indication à propos de leur grandeur, parfois en abrégé. Ceci a permis d'éviter les confusions lorsque le dessin n'était pas précis ou lorsque les différences de grandeur des pièces n'étaient pas assez contrastées. Les élèves ont eu l'attention attirée par la disposition des pièces dans le plan : le haut, le bas, la gauche et la droite, les alignements des côtés des pièces adjacentes. Les figures 18 à 20 montrent les dessins que des élèves ont faits d'un même modèle non figuratif. Les figures 21 à 23 présentent les schémas d'un modèle figuratif.

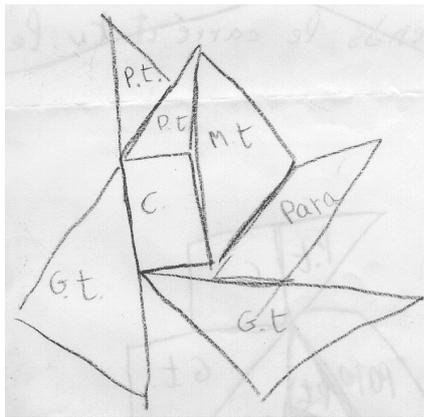


Fig. 18

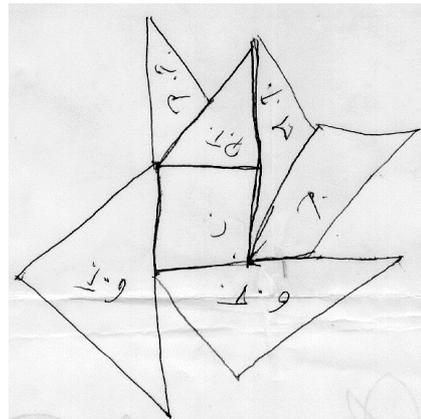


Fig. 19

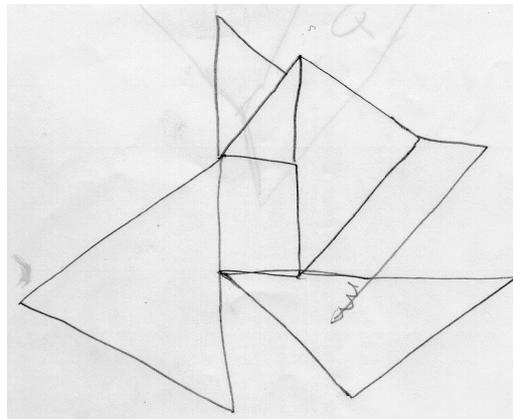


Fig. 20

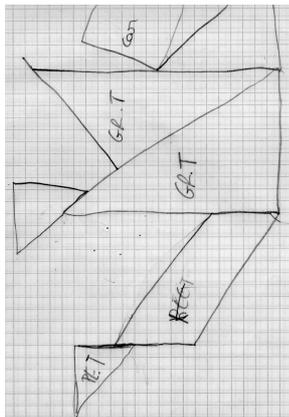


Fig. 21

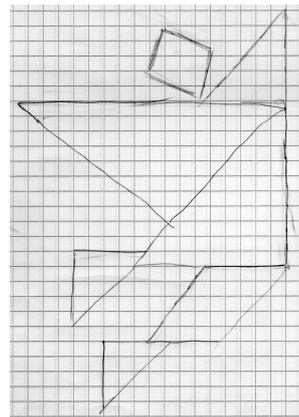


Fig. 22

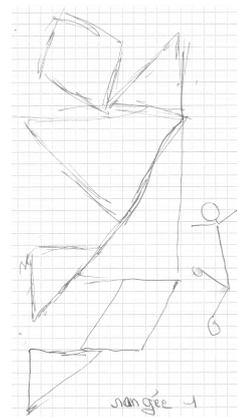


Fig. 23

Pour certains, le dessin n'a pas forcément facilité les explications. Les remarques à faire ici sur le vocabulaire employé par les élèves rejoignent celles de la section 3.2 à la page 34. Le nombre moyen de trajets a été de trois, jamais plus de cinq et souvent même un seul après un peu d'entraînement.

5 Silhouettes de Tangram

À présent, nous proposons des assemblages présentés seulement par leur contour et donc sans dessin des pièces individuelles. Nous les appelons des *silhouettes*.

5.1 Modèles superposables (de 6 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Avec les sept pièces du Tangram, recouvrir parfaitement une surface donnée par son contour.

Enjeux

Égalité d'aires et de longueurs. Voir chapitre 16, sections 3.1 et 3.3.

Notion de frontière.

Observer pour anticiper : émettre des hypothèses quant au choix des pièces à placer à certains endroits.

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Des fiches avec, sur chacune, une silhouette de Tangram (voir en annexe les fiches 8 à 10, aux pages 82 à 84, à agrandir à la taille des Tangram de la classe).

Comment s'y prendre ?

Chaque enfant reçoit une fiche sur laquelle figure une silhouette qu'il doit recouvrir avec toutes ses pièces sans lacune ni chevauchement. Les fiches sont de difficulté croissante. Lorsque des pièces se détachent nettement du contour, le modèle est plus facile à reproduire (figure 24). Lorsque le modèle est plus compact, il est par contre plus difficile car il ne permet pas de deviner au préalable l'emplacement des pièces (figure 25). La consigne est de procéder comme avec un puzzle en superposant ses pièces au modèle pour trouver la façon dont le dessin est construit. Dès que deux élèves ont terminé, l'enseignant contrôle et échange les modèles.

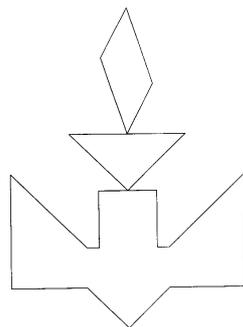


Fig. 24

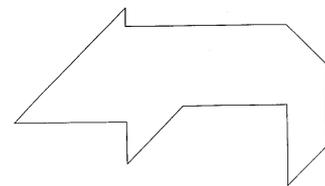


Fig. 25

Lorsque les élèves ont travaillé sur plusieurs modèles, on propose à la classe de composer un carré avec les sept pièces. Aux plus jeunes, il est nécessaire de donner un dessin de carré comme base pour disposer leurs pièces.

L'enseignant laisse les enfants chercher la solution aussi longtemps que nécessaire. Après un certain temps, il peut les encourager en désignant à chacun les pièces qui sont correctement placées et celles qui ne le sont pas.

Échos des classes

À tout âge, cette activité a suscité beaucoup d'intérêt. Les élèves ont été fiers de pouvoir résoudre le problème, surtout après beaucoup d'essais et parfois un peu de découragement. En comparant leurs solutions pour un même dessin, ils ont constaté avec étonnement qu'une silhouette n'accepte souvent qu'une seule solution. Ils ont d'abord pensé pouvoir disposer les pièces au hasard et parvenir à recouvrir la silhouette. Bien souvent, ils ont cru être proches de la solution, mais un petit espace restait libre qui ne correspondait à aucune pièce du Tangram. Il fallait alors enlever presque toutes les pièces pour recommencer autrement. Les jeunes enfants n'ont pas accepté facilement de retirer ce qu'ils avaient déjà placé.

Certains ont trouvé préférable de placer d'abord les grandes pièces et le parallélogramme. D'autres ont raisonné sur les équivalences entre figures. Par exemple, il leur restait à placer un grand triangle et sur la silhouette se présentaient deux espaces valant chacun un petit triangle. « Il faudrait couper ce grand triangle en deux », a dit un enfant, mais ce n'était pas possible, alors il a remplacé sa grande pièce par deux plus petites et a pu terminer son puzzle.

Les interactions entre élèves ont été nombreuses. Après être passée entre les mains de plusieurs élèves, une silhouette avait la réputation d'être facile ou difficile. Si un enfant ne parvenait pas à la solution, ceux qui avaient réussi la fiche ont essayé de lui donner des conseils : ils avaient l'intention de montrer la solution, mais ils ne s'en souvenaient plus. Une silhouette pouvait passer plusieurs fois entre les mains d'un même élève qui la reconnaissait, mais ne se rappelait pas la façon de la recouvrir. Pourtant, à force de résoudre ces puzzles, la plupart des élèves sont devenus plus efficaces, ils ont anticipé la place de certaines pièces et ont vu clairement quand ils étaient engagés dans une mauvaise solution.

Il en est de même pour la composition du carré avec les sept pièces. Cette activité, proposée à plusieurs reprises, a demandé chaque fois un temps de réflexion. Tous les élèves sont arrivés à la solution après cinq à vingt minutes. La figure 26 montre les deux solutions possibles en fonction de l'orientation du parallélogramme.

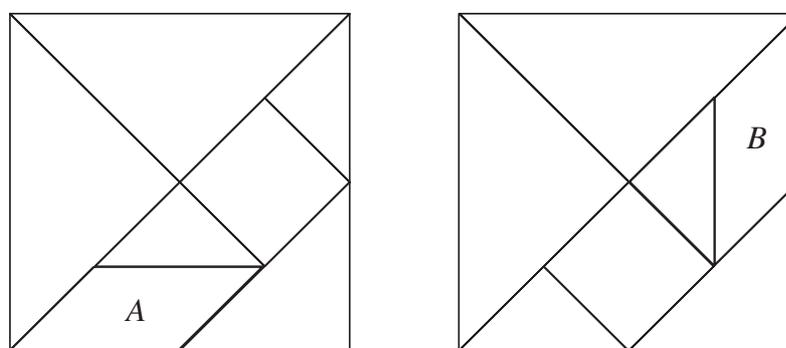


Fig. 26

5.2 Modèles à l'échelle (de 8 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Assembler les sept pièces pour former une configuration semblable à une silhouette plus grande ou plus petite qui sert de modèle.

Enjeux

Affiner la perception des polygones semblables.

Notion de rapport interne⁸. Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences. – Voir compétences à la page 36. En outre : *Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Un grand Tangram pour le tableau.

Des fiches avec, sur chacune, une petite silhouette de Tangram (voir en annexe les fiches 8 à 10, aux pages 82 à 84).

Comment s'y prendre ?

Au préalable, l'enseignant compose un assemblage au tableau avec les grandes pièces, il en trace le contour puis retire les formes. Il présente cette silhouette aux enfants en leur demandant de retrouver l'emplacement des pièces. Ceux-ci cherchent la solution avec leurs petites pièces. Puis le résultat des recherches est présenté au tableau.

Ensuite, chacun reçoit une fiche avec de petites silhouettes qu'il faut reconstituer avec les pièces. L'enseignant organise une manière de corriger collectivement ou avec des fiches d'auto-correction.

Échos des classes

L'exercice est surprenant, car on peut arriver à composer un dessin dont l'allure générale ressemble au modèle, mais dont le contour est pourtant différent. Cela a été le cas lorsqu'un bateau a été proposé comme modèle au tableau (figure 27). Les élèves ont fait des essais qui représentaient bien des bateaux, mais avec des proportions différentes (figures 28 et 29).

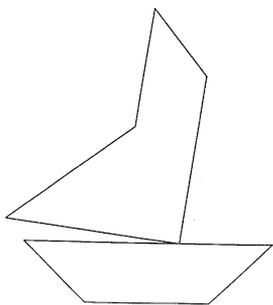


Fig. 27

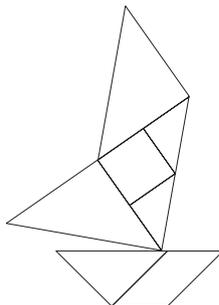


Fig. 28

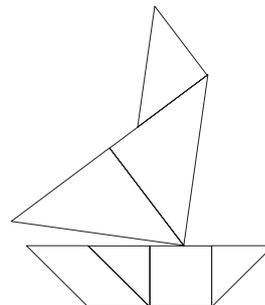


Fig. 29

Ils parvenaient à composer la voile du bateau et les dimensions semblaient

⁸ Un rapport entre deux longueurs est appelé ici *rapport interne* si les deux longueurs sont observées dans le même dessin.

être à l'échelle du modèle, mais avec les pièces restantes ils n'ont pu faire qu'une petite coque qui ne correspondait pas au reste. Les élèves plus âgés ont reporté les distances d'un côté du dessin sur l'autre. Par exemple, la « hauteur » de la coque allant à vue deux fois dans la longueur à la base, ils ont essayé une composition qui respectait cette observation.

6 Dessin à l'échelle d'un modèle simple

6.1 Dessin sur quadrillage d'un carré formé des sept pièces (de 6 à 8 ans)

De quoi s'agit-il ?

Dessiner sur quadrillage un carré formé des sept pièces du Tangram.

Enjeux

Établir des rapports de longueurs ($\times 2$ et $\times 1/2$) dans une configuration (rapports internes) et les transposer sur un modèle à l'échelle. Voir chapitre 16, section 3.3.

Se repérer sur un quadrillage.

Utiliser les instruments de dessin : règle et crayon.

Compétences. – *Tracer des figures simples. Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Des feuilles quadrillées.

Des règles et des crayons de couleurs.

Comment s'y prendre ?

Chaque enfant compose le carré avec ses pièces et reçoit une feuille quadrillée pour le dessiner. La consigne est de dessiner le contour du carré le plus grand possible (insister), puis de dessiner les différentes pièces. Il est interdit de contourner les pièces. L'enseignant laisse les élèves faire un premier essai seuls, puis reprend collectivement les suggestions de chacun pour faire le dessin définitif sur une autre feuille. Il procède par étapes en demandant à la classe ce qu'il faut faire et en réalisant le dessin en grand au tableau. Selon son choix, il reproduit ou non le quadrillage au tableau. Pour de jeunes enfants, cette reproduction du quadrillage est indispensable pour se repérer, mais il est souhaitable de s'en passer dès que possible. L'idée n'est pas que chaque enfant ait le même dessin, mais, pour des raisons de clarté, on peut décider de fixer les dimensions du contour, par exemple autant de centimètres de côté, ou autant de carrés du quadrillage en fonction de la taille du papier.

Le tracé fait appel aux propriétés de la figure (voir la section 1 à la page 28), l'enseignant les explique selon les nécessités. Il s'exprime dans un langage spécifiquement géométrique et, avec de jeunes enfants, utilise des couleurs pour clarifier le tracé.

Lorsque le dessin est terminé, les élèves colorient les polygones qui composent le carré avec des couleurs différentes, pour les faire ressortir et atténuer les traits apparaissant par erreur.

Échos des classes

Nous avons réalisé cette activité en deux étapes d'environ quarante minutes chacune.

En première année, les enfants sont arrivés à dessiner sommairement l'emplacement de chaque pièce dans le carré sans tenir compte des dimensions. Parfois, le contour était rectangulaire au lieu d'être carré. Lors de la mise en commun, le dessin s'est fait pas à pas au tableau et simultanément sur les feuilles. Les enfants ont exprimé ce qu'ils voulaient dessiner, l'ont montré au tableau sur un grand quadrillage et l'enseignant a dessiné en expliquant comment il procédait.

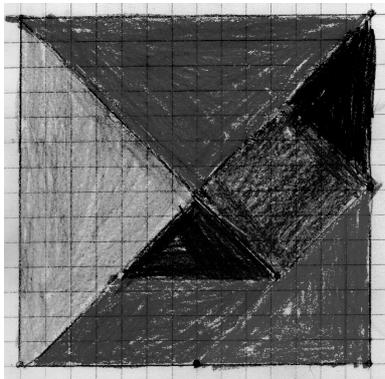


Fig. 30

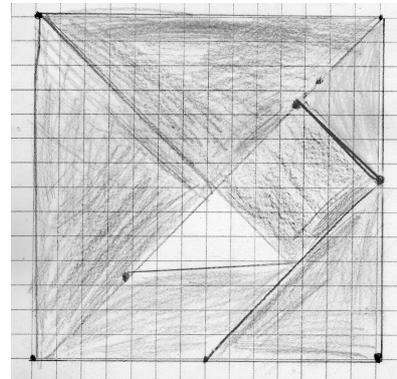


Fig. 31

L'utilisation de couleurs a permis de simplifier les consignes du tracé et le quadrillage a beaucoup servi pour fixer les longueurs. Au passage, les élèves ont appris à mieux manier la règle pour tracer des lignes droites. L'enseignant a vérifié chaque dessin au fur et à mesure. Si une imprécision passait inaperçue, après quelques tracés, le dessin se déformait et ne correspondait plus à la description faite au tableau. Alors, certains enfants trouvaient à leur dessin une allure bizarre : « Mon dessin ne ressemble pas à mes pièces. » Les figures 30 et 31 présentent deux réalisations d'enfants de première primaire.

En deuxième primaire, les élèves ont utilisé la règle comme instrument de mesure⁹. Certains ont choisi la dimension du premier côté et l'ont reportée pour tracer le carré. Ils n'avaient pas retenu la consigne de faire le carré le plus grand possible. Comme l'enseignant le faisait remarquer, un enfant a allongé ses traits sur toute la hauteur de la feuille : le carré était devenu rectangle. Ce fut un véritable défi de ne pas travailler avec des dimensions fixées à l'avance, mais de chercher comment tracer un côté le plus long possible qui puisse être reporté des quatre côtés sans sortir de la page. Un enfant a fait remarquer qu'on ne pouvait pas aller contre le bord de la feuille, car les carrés du quadrillage à cet endroit n'apparaissent pas en

⁹ Les mesures ont parfois entraîné des erreurs de calcul.

entier. Un autre a ajouté que c'était plus facile de suivre les lignes du quadrillage, ce que tous n'avaient pas fait. Une fois le contour du carré tracé, l'enseignant a procédé au tableau comme en première année, sauf qu'il n'a pas reproduit le quadrillage. Il a travaillé sans ce support et les élèves divisaient les distances mentalement après les avoir mesurées. Comme ils arrondissaient au centimètre près, des erreurs sont apparues lors de la division en deux des diagonales. Ils se sont alors servis du quadrillage. Les figures 32 et 33 montrent deux réalisations d'enfants de deuxième primaire.

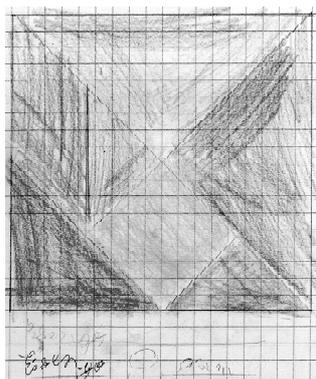


Fig. 32

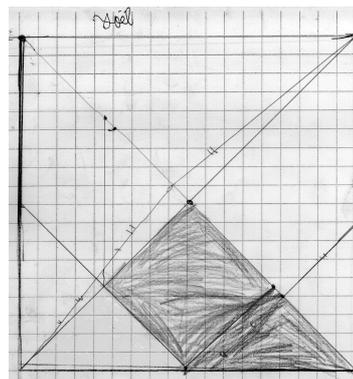


Fig. 33

Prolongements possibles

Découper le Tangram fait par les élèves pour s'en servir. Les élèves sont groupés par deux, l'un avec des petites pièces de Tangram et l'autre avec les grandes pièces qu'il a dessinées. L'un réalise une configuration sur le bureau, l'autre le reproduit avec ses grandes pièces et inversement. L'objectif est de travailler avec un modèle qui n'est pas superposable à l'original et de faire se correspondre, d'un Tangram à l'autre, les petits triangles, le moyen et les grands.

6.2 Dessin sur grande feuille d'un carré formé des sept pièces (de 8 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Dessiner sur une grande feuille le carré formé des sept pièces du Tangram.

Enjeux

Établir des rapports de longueurs ($\times 2$ et $\times 1/2$) dans une configuration (rapports internes) et les transposer sur un modèle à l'échelle. Voir chapitre 16, section 3.3.

Utiliser les instruments de dessin : règle et équerre.

Calculer mentalement avec des nombres décimaux. Voir section 4.5.

Compétences. – Voir compétences à la page 43. En outre : *Effectuer le mesurage en utilisant des étalons conventionnels et en exprimer le résultat. Mesurer des angles. Déterminer le rapport entre deux grandeurs. Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées. Connaître et*

énoncer des propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles.

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.
 Une grande feuille vierge (format A1) pour quatre enfants.
 Une feuille A4 par enfant.
 Des règles, des équerres, des crayons et des gommes.

Comment s'y prendre ?

Au départ, chaque enfant compose un carré avec ses pièces. Ensuite, chaque équipe de quatre reçoit une feuille sur laquelle elle doit reproduire le modèle du carré le plus grand possible. Il s'agit donc bien d'un carré qui a pour côté la largeur de la feuille (laisser les élèves le découvrir). Ils se mettent d'accord sur la manière de procéder et chacun fait une part du travail en coordination avec les autres. Certaines lignes sont très longues et comme aucune règle n'est adéquate, il faut se mettre à plusieurs pour y arriver. Les feuilles font rarement apparaître des nombres entiers dans les mesures des côtés. Les enfants sont donc amenés à faire usage de nombres décimaux, tout d'abord pour mesurer des longueurs, ensuite pour les partager en deux, enfin pour les additionner en vue de vérifier leur dessin.

Dans un deuxième temps, les enfants font individuellement, sur une feuille A4, le dessin le plus grand possible.

Échos des classes

Certains élèves ont éprouvé des difficultés à choisir comme mesure la plus grande possible, la largeur totale de la grande feuille. Ils n'ont pas accepté facilement de prendre le bord de la feuille comme côté du carré et, par conséquent, de ne pas le tracer. D'autres, par contre, y ont pensé tout de suite. Beaucoup d'enfants n'ont pas bien utilisé leur règle, ils ont été imprécis. Ils ont travaillé en marquant les points de division sur les côtés des polygones déjà faits. Après avoir exécuté les tracés, ils ont vérifié les angles droits avec leur équerre (souvent à la demande de l'enseignant). Ils ont rapidement constaté qu'un écart de quelques millimètres au départ pouvait engendrer de grandes déformations comme, par exemple, une figure qui aurait dû être carrée et qui n'avait qu'un angle droit.

Les calculs avec des nombres décimaux ont posé des problèmes à certains, bien qu'en équipe les ressources soient plus nombreuses. La collaboration a été nécessaire pour tracer de grandes droites : les enfants ont aligné leurs règles l'une derrière l'autre et l'un d'entre eux a été chargé de tracer. Beaucoup ont pensé à utiliser la règle d'un mètre du tableau, mais elle était trop imprécise pour faire des mesures. Les enfants ont mesuré alors des segments inférieurs à la longueur de leur règle et les ont additionnés.

Le travail individuel a permis à chacun de refaire l'ensemble de la démarche, ce qui était bien nécessaire dans certains groupes où un seul enfant avait pris la tête des opérations.

Les figures 34 et 35 montrent les grandes feuilles de quatre groupes d'élèves de troisième et quatrième primaires.

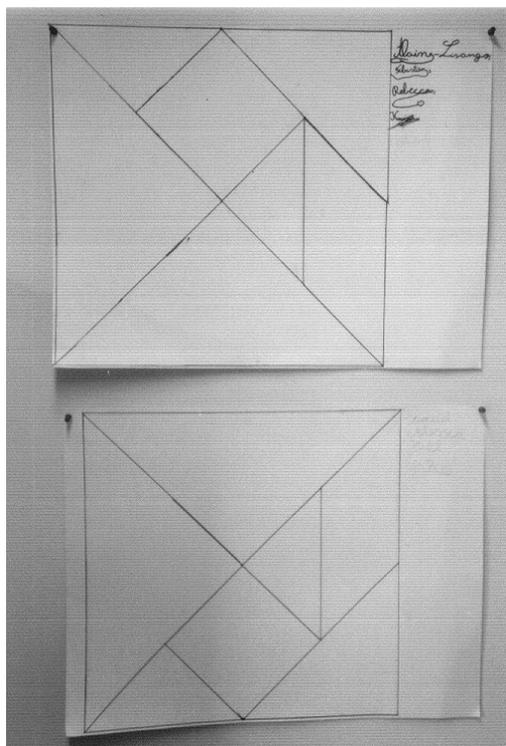


Fig. 34

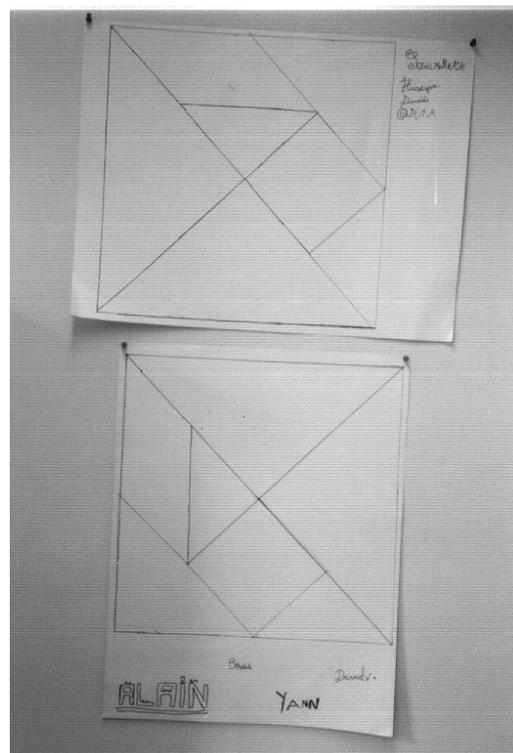


Fig. 35

Prolongements possibles

Parvenir au partage du carré en sept pièces uniquement par pliage de la feuille pour faire apparaître les traits de séparation¹⁰.

7 Dessin à l'échelle de modèles plus compliqués

7.1 Agrandissement d'une figure (de 8 à 10 ans)

De quoi s'agit-il ?

Créer un dessin avec les pièces du Tangram et le reproduire quatre fois plus grand.

Enjeux

Reproduire un dessin à une échelle plus grande.

Notion de rapport externe¹¹. Voir chapitre 16, section 3.3.

Compétences. – Tracer des figures simples. Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe. Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures. Déterminer le rapport entre deux grandeurs.

¹⁰ Cette activité est décrite dans ERMEL [1982].

¹¹ Un rapport de deux longueurs est appelé ici *rapport externe* si les deux longueurs sont observées sur deux figures semblables (à l'échelle).

*De quoi a-t-on
besoin ?*

Un Tangram par enfant.

Une grande feuille vierge pour quatre enfants.

Des crayons ordinaires.

*Comment s'y
prendre ?*

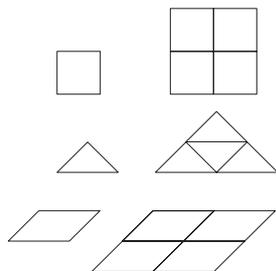


Fig. 36

Les enfants sont par équipes de quatre. Ils mettent leurs pièces en commun et doivent recréer les pièces d'un Tangram quatre fois plus grand en assemblant chaque fois quatre pièces identiques. Ainsi avec les quatre carrés, ils forment un carré quatre fois plus grand. Ils procèdent de la même manière pour le parallélogramme en assemblant les quatre parallélogrammes de l'équipe. Et ainsi de suite pour le moyen triangle, les deux petits et les deux grands triangles (figures 36).

Ensuite, les quatre enfants de chaque groupe redistribuent les pièces et chacun imagine un assemblage. Ils en choisissent un parmi les quatre. Dans un coin de la feuille, ils disposent cet assemblage et contournent chaque pièce pour former un dessin. Ils doivent alors composer le même dessin quatre fois plus grand en assemblant, comme au début, les pièces identiques pour obtenir une pièce quatre fois plus grande. Lorsque les pièces sont posées correctement sur la feuille, ils contournent les « grandes » pièces, c'est-à-dire celles formées des quatre petites pièces.

Échos des classes

Voici, aux figures 37 et 38, la réalisation d'un groupe d'élèves.

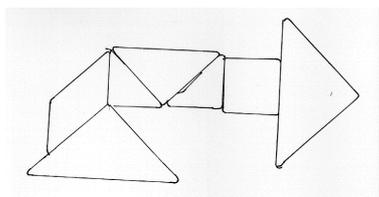


Fig. 37

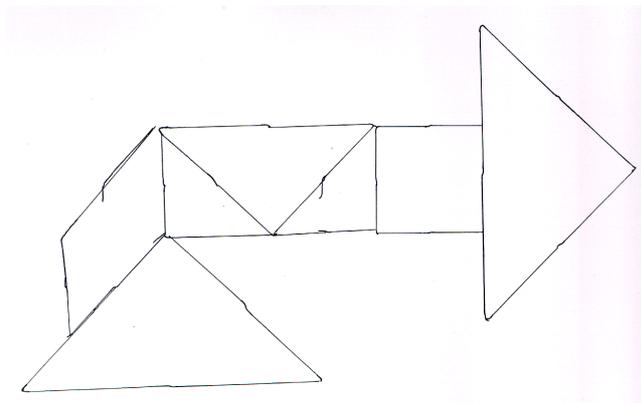


Fig. 38

Pour les enfants, le plus difficile a été de composer un grand triangle avec quatre petits.

Lors du dessin, certains ont contourné toutes les pièces du grand modèle comme le montre les figures 39 et 40, au lieu de faire apparaître juste le contour des pièces quatre fois plus grandes.

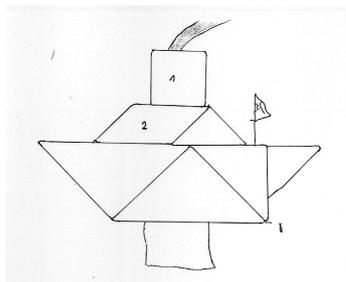


Fig. 39

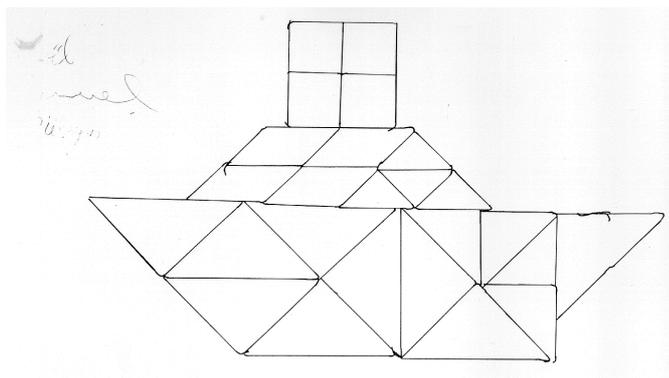


Fig. 40

7.2 Réduction et agrandissement de figures (de 10 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Dessiner, d'après un modèle, un assemblage à une échelle plus petite. Exprimer l'échelle d'une silhouette par rapport à un modèle. À partir d'un dessin à l'échelle $1/2$ ou $1/4$, dessiner l'original.

Enjeux

Pratiquer les rapports internes et le rapport externe. Voir chapitre 16, section 3.3.

Relever des dimensions et les exprimer à l'échelle voulue. Voir section 4.

Exprimer une échelle par une fraction. Voir section 4.4.

Dessiner avec une règle, une équerre et un rapporteur.

Calculer mentalement, par écrit ou à la calculatrice.

Compétences. – Tracer des figures simples. Mesurer des angles. Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles. Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Un grand Tangram pour le tableau.

Des feuilles A4 vierges.

Des règles, équerres, rapporteurs, crayons et gommes.

La fiche 11 (voir en annexe à la page 85).

Comment s'y prendre ?

La première étape consiste à réaliser un assemblage au tableau avec les grandes pièces du Tangram, dans le but de le dessiner sur une feuille A4. Les dimensions du dessin sont au choix, du moment que le dessin apparaisse entièrement sur la feuille. Avant de commencer, l'enseignant interroge les élèves sur la façon de procéder. Il faut connaître les dimensions des pièces

du tableau pour les réduire à l'échelle de la feuille. Mais faut-il mesurer tous les côtés de toutes les pièces ? Si on connaît la mesure du côté du carré, par exemple 25 cm, quelles mesures peut-on en déduire pour les autres pièces ? Les élèves doivent imaginer ce cas avec leur Tangram et noter au brouillon les dimensions des autres pièces en les comparant les unes aux autres. En superposant les figures, on trouve deux sortes de côtés : ceux qui valent le côté du carré ou le double, soit les longueurs notées a et $2a$ sur la figure 41, et ceux qui valent b et $2b$ dont on ne connaît pas la mesure. Les élèves s'expriment en termes de longueurs, soit $a = 25$ centimètres et $b = 35,3$ centimètres (mesures prises, dans ce cas-ci, sur la figure au tableau¹²).

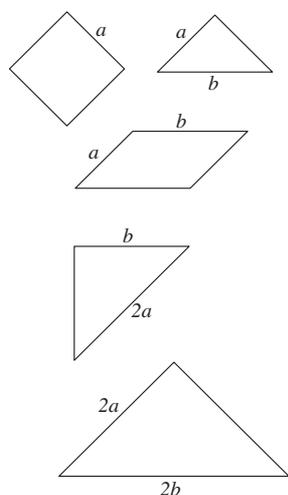


Fig. 41

À la suite de ce raisonnement, l'enseignant indique les mesures sur le dessin du tableau. Les élèves doivent reproduire le dessin à l'échelle sur leur feuille A4. Chacun choisit comme il l'entend le nombre par lequel il va diviser les mesures relevées au tableau, pourvu que son dessin soit entièrement sur sa feuille. Vient alors la phase de dessin : il faut utiliser les instruments pour tracer les figures, les parallèles, les angles droits, le plus soigneusement possible. Les enfants remarqueront en dessinant que, lors de la mise à l'échelle des figures, les côtés changent de mesure mais les angles restent identiques. Ils devront peut-être relever au tableau des angles entre des côtés de pièces non jointives ou estimer à vue l'amplitude de ces angles, marqués en gris sur la figure 42.

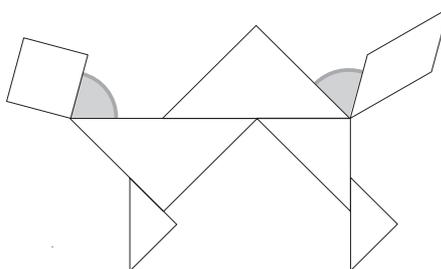


Fig. 42

Enfin, l'enseignant demande à chacun d'exprimer l'échelle de son dessin sous forme d'une fraction. Il fait allusion aux mesures : si un centimètre sur le dessin vaut cinq centimètres au tableau, on parle d'un dessin à l'échelle $1/5$.

On fait la synthèse suivante, illustrée par les cas rencontrés dans la classe. *On exprime l'échelle par un rapport qui nous parle de longueurs. Il s'agit des longueurs des côtés d'une figure comparées aux longueurs des côtés d'un modèle plus grand. Un centimètre sur un dessin à l'échelle correspond à x centimètres sur le modèle : on parle dans ce cas de l'échelle $1/x$.*

À l'étape suivante, l'enseignant donne à la moitié des élèves le premier dessin de la fiche 8 à la page 82 et aux autres le deuxième dessin de cette même fiche. Il leur est dit que le premier dessin est la reproduction d'un autre à

¹² On peut décider de travailler sans mesurer b , au quel cas on construit les figures en reportant au compas la mesure prise sur la diagonale du carré.

l'échelle 1/4 et que le deuxième est la reproduction du même modèle de départ à l'échelle 1/2. On demande alors à chacun des élèves de retrouver l'original. Ainsi, au bout du compte, tous devront arriver au même modèle de départ par des calculs différents, les uns multipliant les longueurs par 2 et les autres par 4. La phase de dessin demande l'utilisation des instruments.

Échos des classes

Lorsque l'enseignant a demandé quelles étaient les mesures nécessaires pour reproduire le dessin du tableau sur une feuille, les élèves ont rapidement répondu qu'il ne fallait pas mesurer tous les côtés, puisque plusieurs figures avaient des côtés de même longueur. Ils sont arrivés à cette conclusion suite aux nombreuses manipulations où ils avaient remplacé une pièce par une autre, expliqué la manière dont deux pièces se joignaient, dessiné un schéma, etc.

Les figures 43 à 46 présentent les dessins des élèves d'après un grand modèle au tableau : le premier était à l'échelle 1/5, les deux suivants à l'échelle 1/5 et le dernier à l'échelle 1/3.

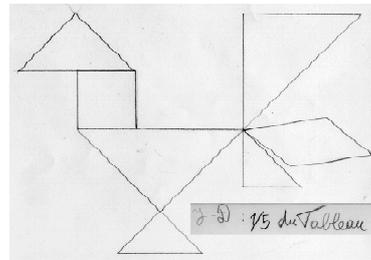


Fig. 43

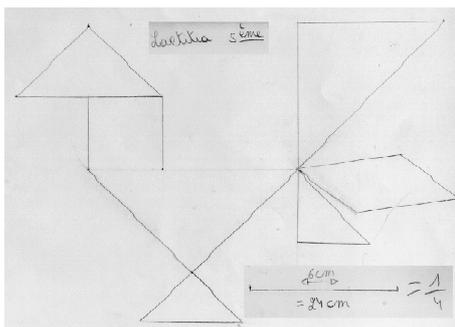


Fig. 44

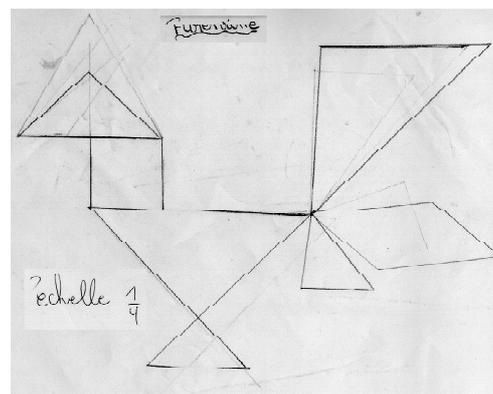


Fig. 45

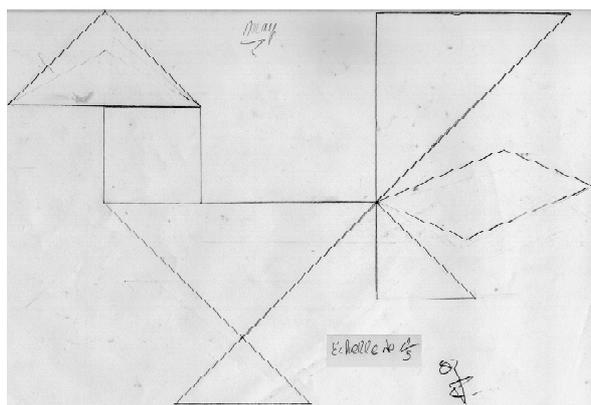


Fig. 46

Les élèves avaient déjà rencontré des échelles sur des cartes géographiques, mais certains ont fait la confusion avec le rapport des aires en disant qu'un dessin à l'échelle $1/2$ allait deux fois dans le modèle.

Le maniement des instruments, et particulièrement celui du rapporteur, a posé quelques problèmes. L'enseignant a beaucoup insisté sur la précision des mesures lors des relevés et du tracé. Certains n'étaient pas à l'aise avec les calculs de décimaux et ont été autorisés à utiliser leur calculatrice, ceci afin de ne pas alourdir l'activité.

Les figures 47 à 50 montrent les réalisations de quatre élèves. Chaque figure présente le petit modèle à l'échelle $1/2$ ou $1/4$ (donné par l'enseignant) sur lequel ils ont travaillé et l'agrandissement qu'ils ont eux-mêmes dessiné.

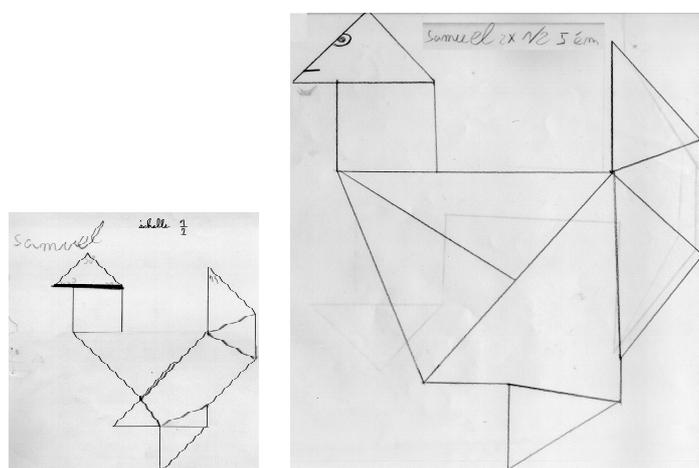


Fig. 47

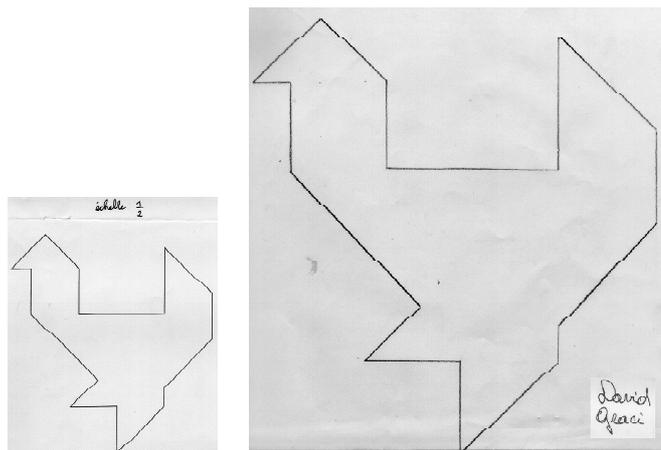


Fig. 48

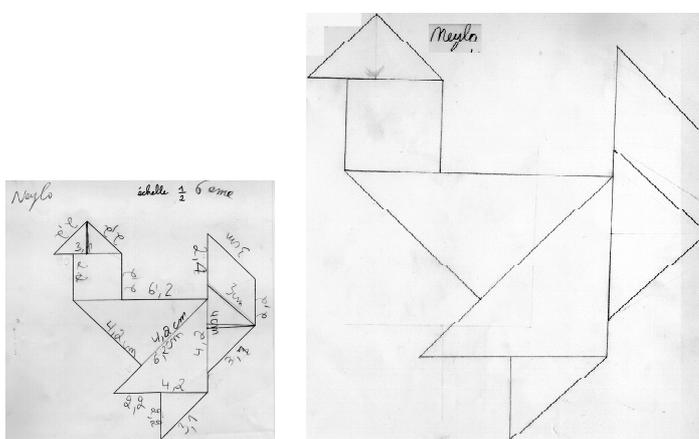


Fig. 49

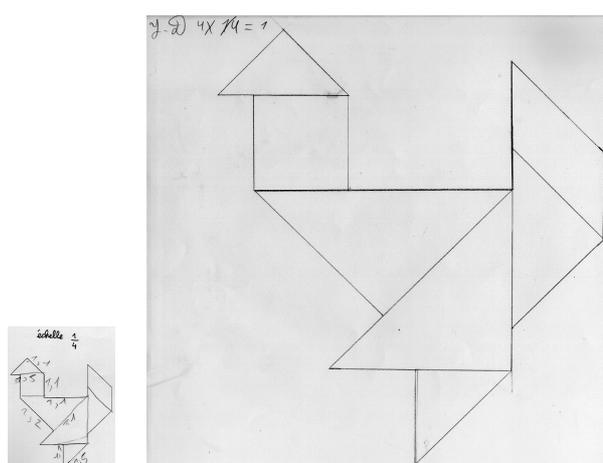


Fig. 50

8 Fractions et aires

8.1 Trouver des fractions (de 10 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Trouver la fraction que représente chaque pièce par rapport au Tangram complet.

Enjeux

Notions de fraction et d'équivalence par superposition de figures. Voir chapitre 16, section 4.4.

Compétences. – *Fractionner des objets en vue de les comparer.*

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.
Des feuilles et des crayons.

Comment s'y prendre ?

Chaque élève forme le carré avec les sept pièces du Tangram. Il le dessine sur un papier en contournant les pièces ou utilise le dessin réalisé à la section 6.2 à la page 45.

La consigne est : « Imaginons que le carré ainsi formé soit une tarte, quelle part de cette tarte représente chaque morceau ? Ecrivez la fraction qui correspond à chaque pièce du Tangram. » Si les élèves démarrent difficilement, on prend l'exemple du grand triangle : « Combien de parts comme celle-ci peut contenir la tarte carrée ? Le grand triangle va quatre fois dans la tarte, donc il vaut $1/4$ de la tarte carrée. » Les enfants essaient d'appliquer le même raisonnement aux autres pièces du Tangram pour obtenir la figure 51.

Seul le petit triangle va exactement seize fois dans la tarte carrée. Pour les autres pièces, il faut recourir au pavage complet du grand carré à l'aide du petit triangle (voir figure 52). Ils en arrivent à la conclusion que le carré, le parallélogramme et le triangle moyen contiennent chacun deux petits triangles, c'est-à-dire valent chacun $2/16$ de la tarte carrée. À ce stade, si les élèves ont déjà manipulé des fractions équivalentes, on peut remplacer $2/16$ par $1/8$. Sinon, pour y arriver, on pourra tenir un des deux raisonnements suivants.

Si le petit triangle va seize fois dans la tarte carrée, chacune des pièces qui comprend deux petits triangles (le parallélogramme, le triangle moyen et le carré) ira huit fois dans la tarte carrée.

Le découpage de la figure 53 montre que le carré va huit fois dans la tarte carrée. Il suffit, ensuite, de montrer l'équivalence des aires du carré, du parallélogramme et du triangle moyen en recourant au petit triangle comme pièce de référence.

Ces trois pièces valent donc $1/8$ de la tarte carrée.

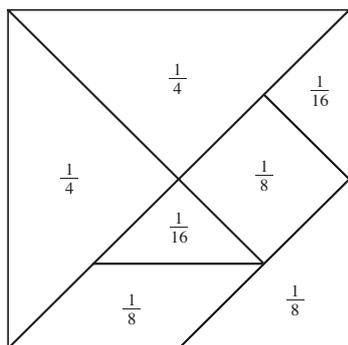


Fig. 51

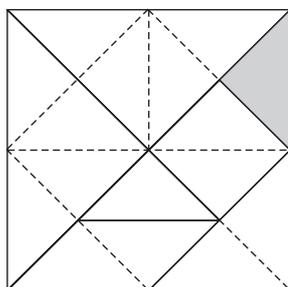


Fig. 52

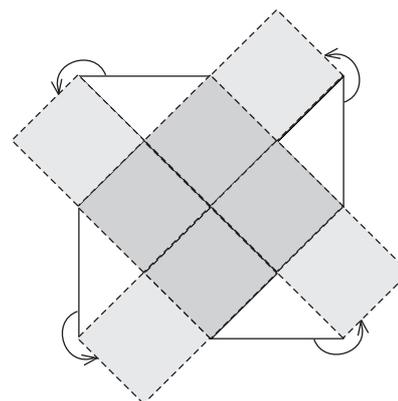


Fig. 53

Échos des classes

Pour trouver les différentes fractions, les élèves ont eu recours au pavage complet du grand carré. Pour cela, ils ont reporté une pièce sur le dessin et l'ont contournée pour faire apparaître le pavage. La figure 52 montre un exemple de pavage avec le petit triangle et la figure 53, le pavage avec le carré.

Certains enfants ont été surpris dans un premier temps par l'équivalence des aires du carré, du parallélogramme et du triangle moyen : le recours au petit triangle comme pièce de référence les a convaincus (figure 54).

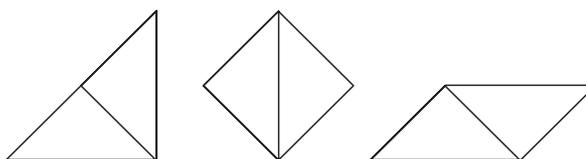


Fig. 54

8.2 Évaluer des aires (de 10 à 12 ans)

De quoi s'agit-il ?

Exprimer l'aire d'un dessin au moyen d'une unité non conventionnelle, puis en centimètres carrés.

Enjeux

Notions d'aire par pavage et recouvrement¹³. Voir chapitre 16, section 4 et en particulier 4.1 et 4.5.

Compétences. – *Construire et utiliser des démarches pour calculer des aires. Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat. Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.*

¹³ On peut trouver d'autres activités relatives au Tangram dans ERMEL [1982].

De quoi a-t-on besoin ?

Un Tangram par enfant.

Par enfant, une fiche avec une silhouette (voir en annexe les fiches 8 à 10, aux pages 82 à 84).

Des feuilles et des crayons.

Comment s'y prendre ?

Chaque enfant reçoit une silhouette et doit chercher son aire. Après un moment de réflexion individuelle, l'enseignant demande si une des pièces du Tangram ne pourrait pas servir d'unité de mesure. Le carré est commode car son aire est facile à trouver. Il rappelle la notion de centimètre carré, mais ne permet pas de paver les silhouettes reçues. Le choix du petit triangle est plus judicieux, puisqu'il permet de recouvrir entièrement chaque silhouette par pavage. On laisse alors de côté la notion de centimètre carré et on se donne comme unité le petit triangle. Chaque enfant doit exprimer l'aire de sa silhouette en « unité-triangle ». Il indique son résultat sur son dessin. La mise en commun révèle que toutes les silhouettes ont la même aire, quelle que soit leur forme, puisqu'elles se composent du même nombre d'unités.

On passe alors à l'unité conventionnelle du centimètre carré : comment transformer en centimètres carrés l'aire exprimée en « unité-triangle » ? Les élèves font une recherche individuelle, puis on partage les idées. La solution est de transformer les 16 « unités-triangle » en centimètres carrés en passant par l'aire d'un seul triangle. Plus facile encore : on évoque ce qui a été découvert à l'activité précédente, à savoir que la pièce carrée du Tangram vaut deux triangles. Ceci amène à dire que les 16 « unités-triangle » sont égales à 8 « unités-carré ». On calcule l'aire du petit carré, par exemple 4 centimètres carrés, et on multiplie le résultat par huit pour obtenir l'aire totale de la silhouette, 32 centimètres carrés dans ce cas-ci.

Enfin, les enfants recherchent l'aire de chaque pièce du Tangram en passant par les équivalences avec le petit triangle. Si par exemple le carré a une aire de 4 centimètres carrés, le parallélogramme et le triangle moyen aussi. Le grand triangle a une aire de 8 centimètres carrés et le petit triangle de 2 centimètres carrés.

Prolongements possibles

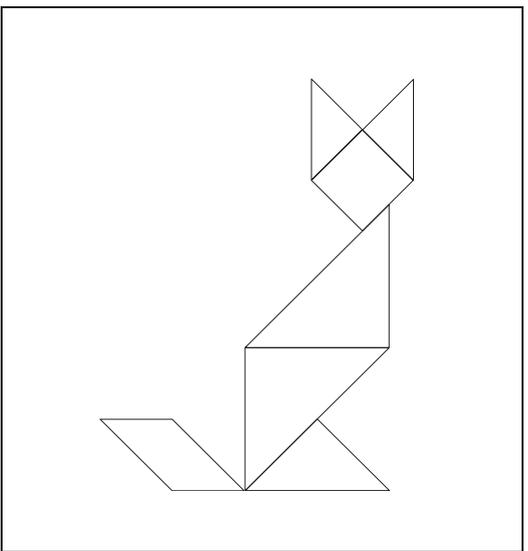
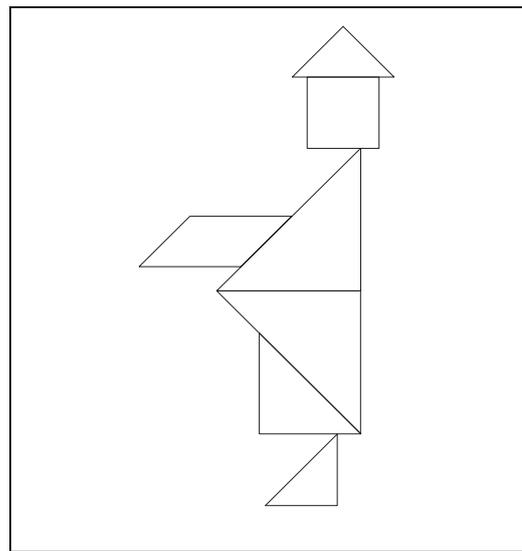
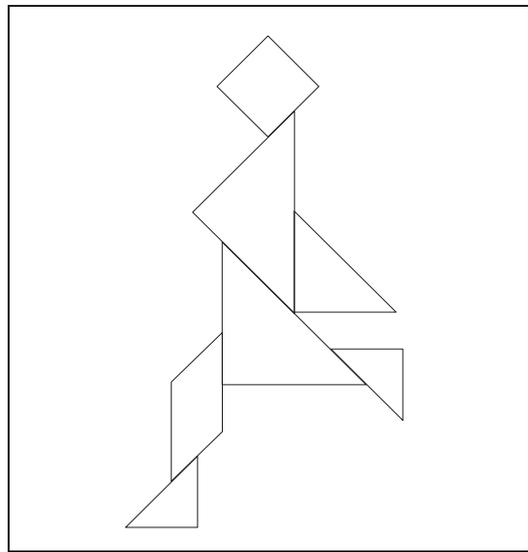
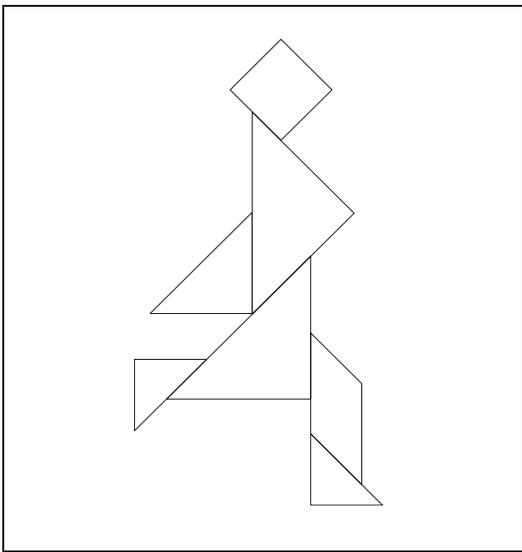
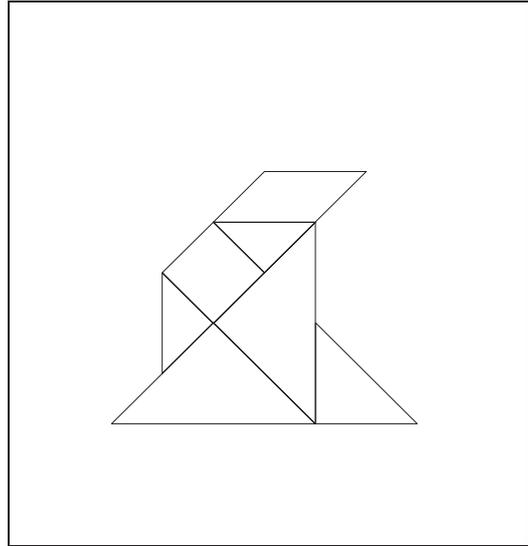
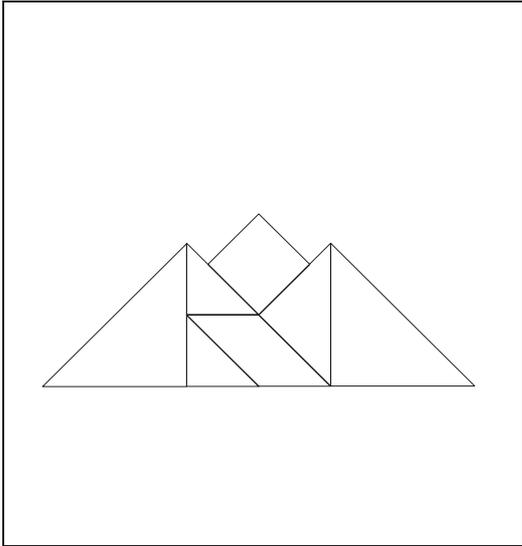
Trouver l'aire d'une autre surface que le Tangram en choisissant une pièce que nous appellerons « figure-unité » qui permet de la paver entièrement.

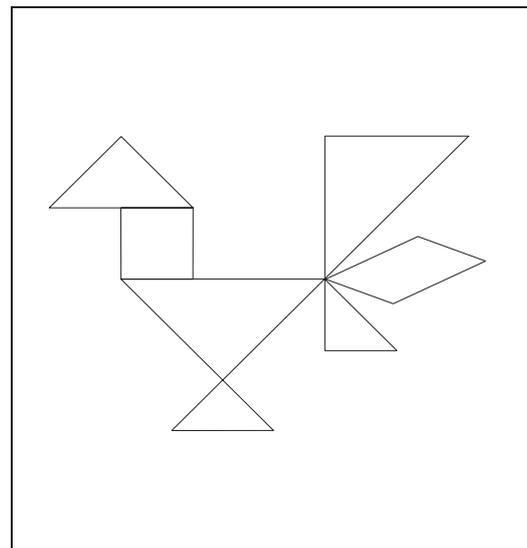
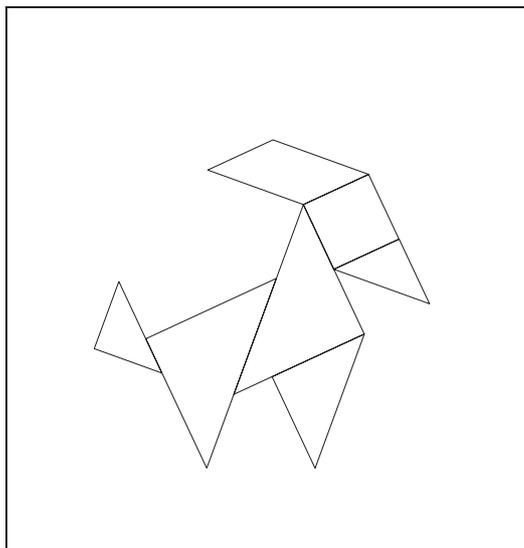
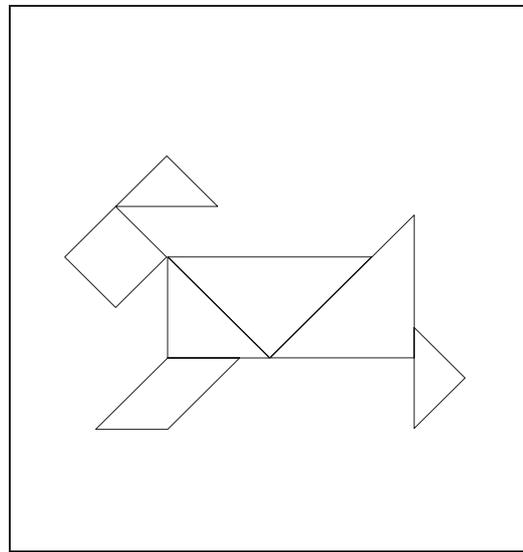
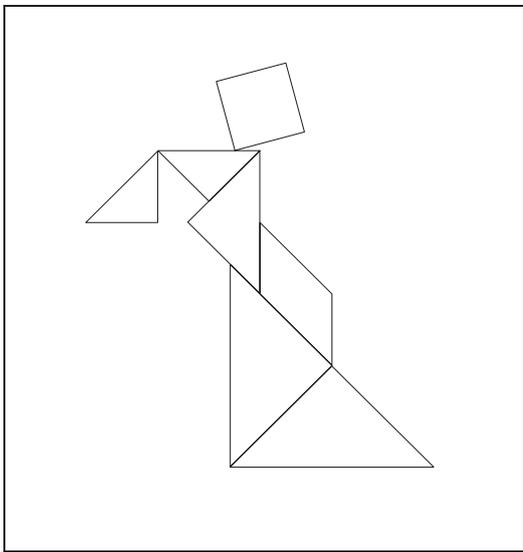
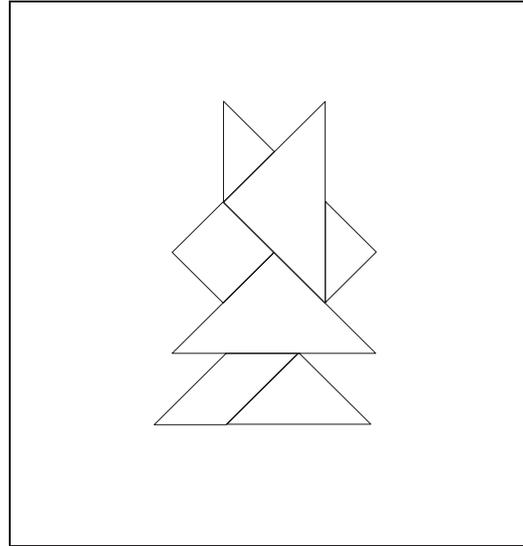
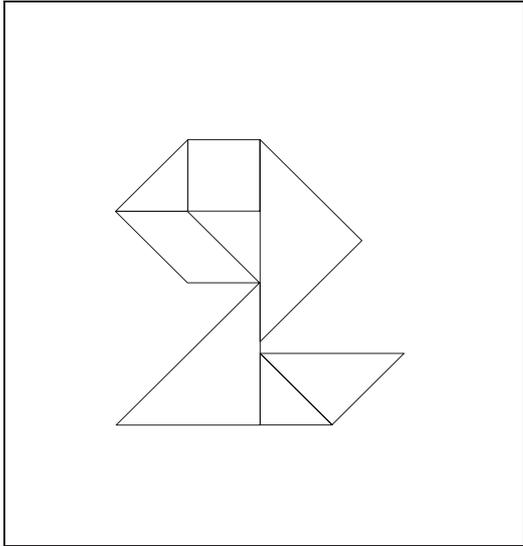
Échos des classes

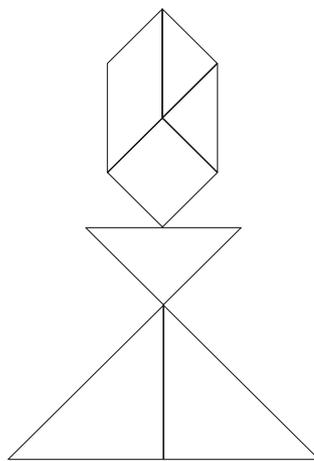
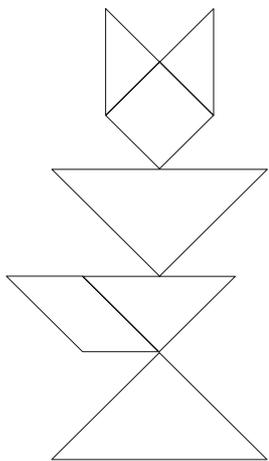
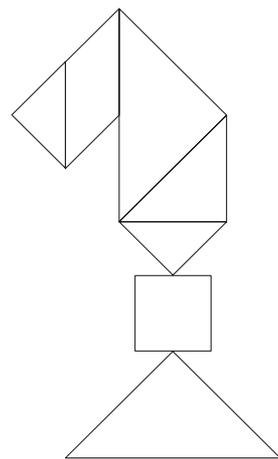
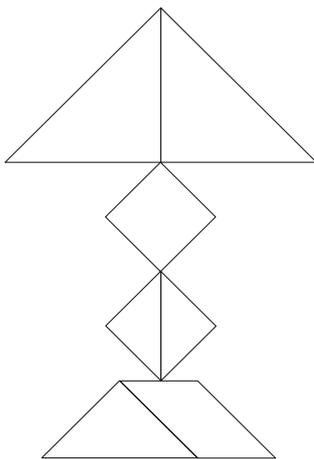
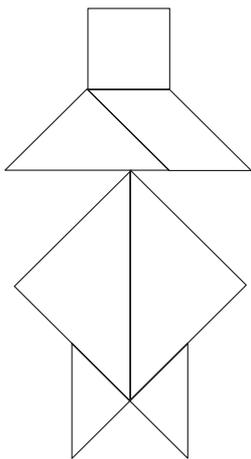
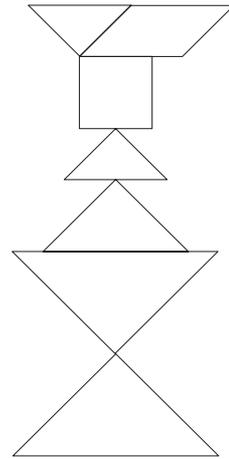
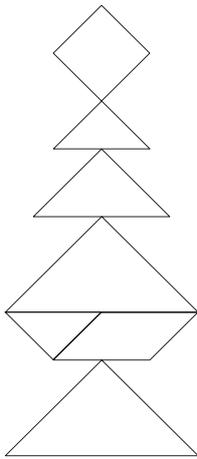
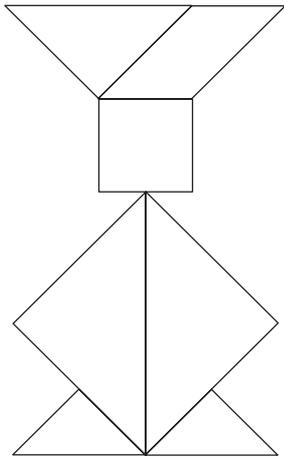
Les élèves ont vite fait le rapport entre cette activité et celle sur les fractions. Le pavage de la silhouette par le petit triangle a été assez naturel, ainsi que le rapport avec le carré. Ils ont trouvé l'aire de toutes les pièces, bien que, contrairement à notre exemple ci-dessus, les nombres qu'ils ont eu à utiliser comportaient une virgule (le carré avait 3,4 centimètres de côté).

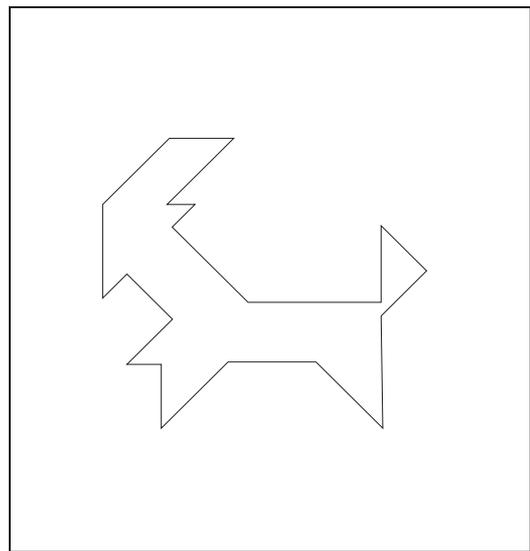
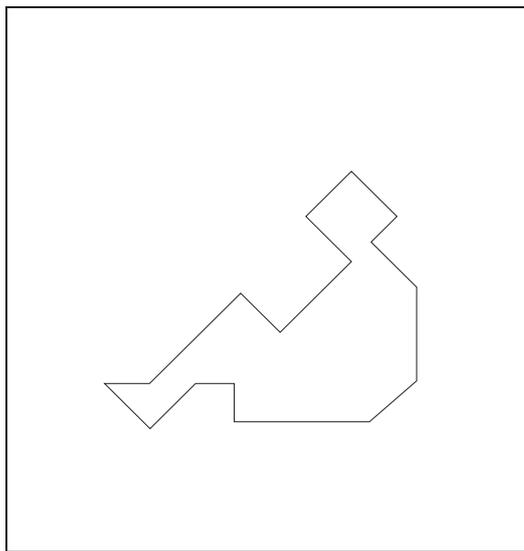
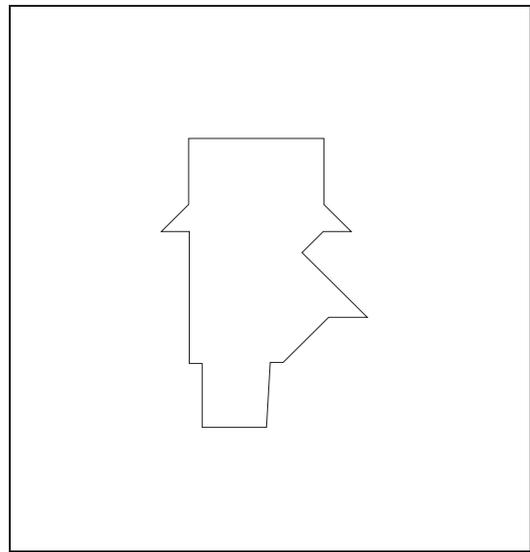
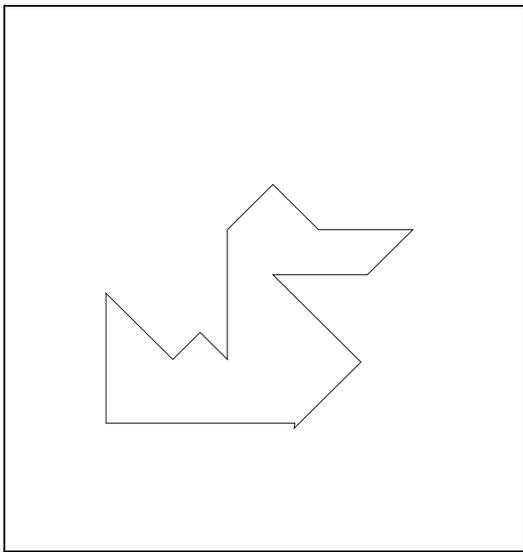
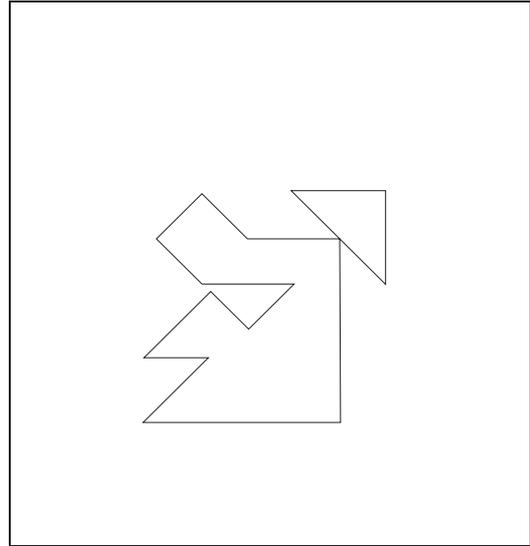
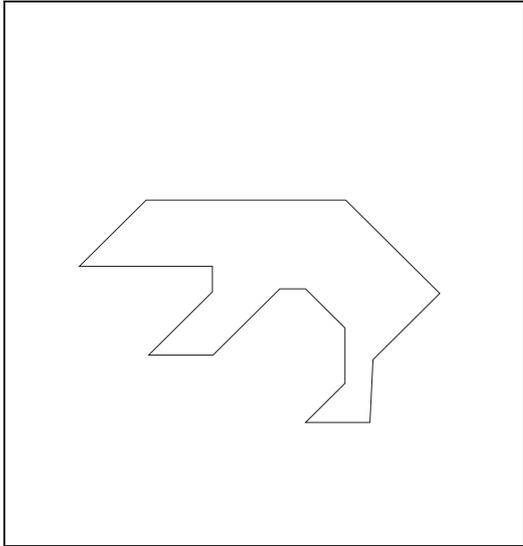
ANNEXE I

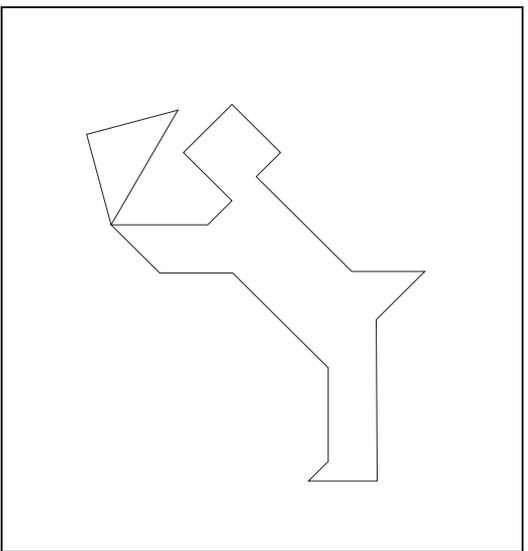
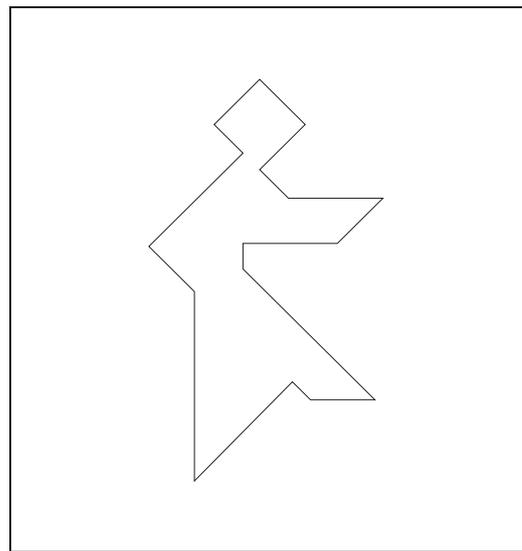
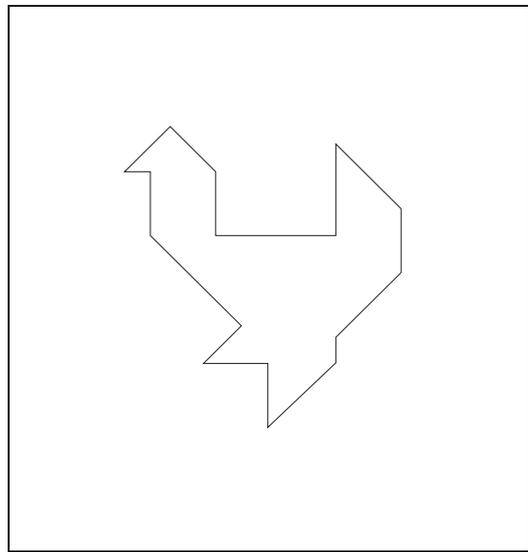
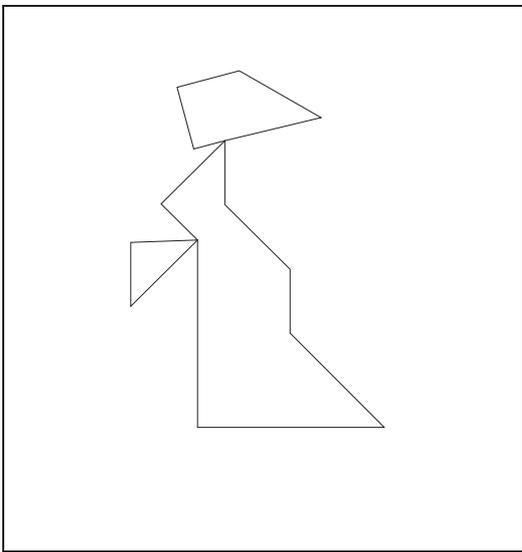
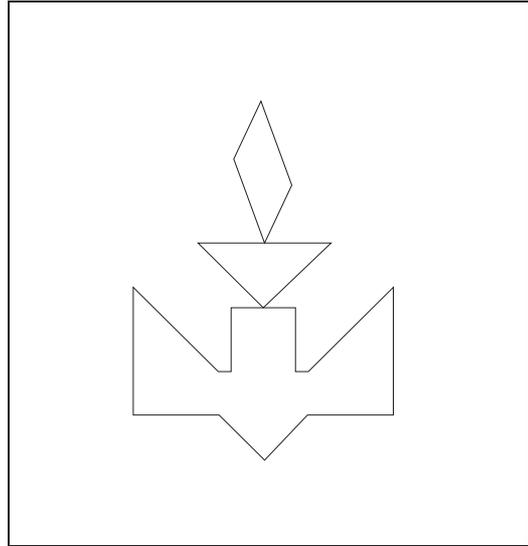
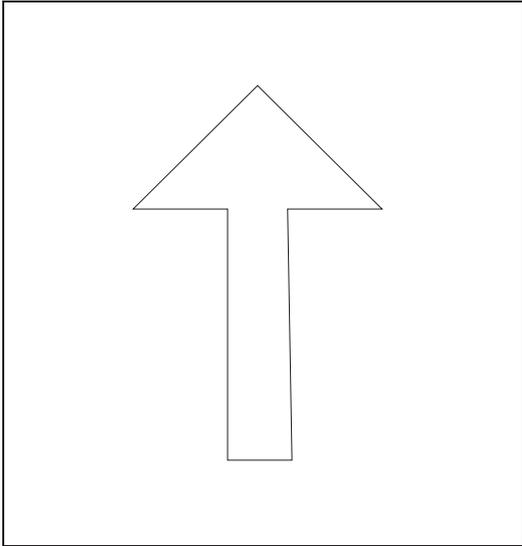
FICHES À PHOTOCOPIER

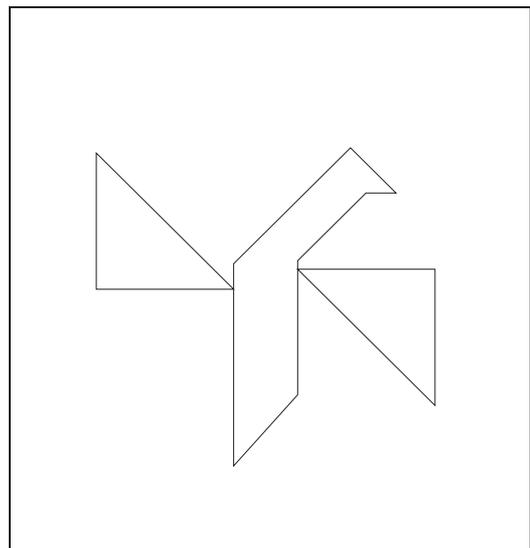
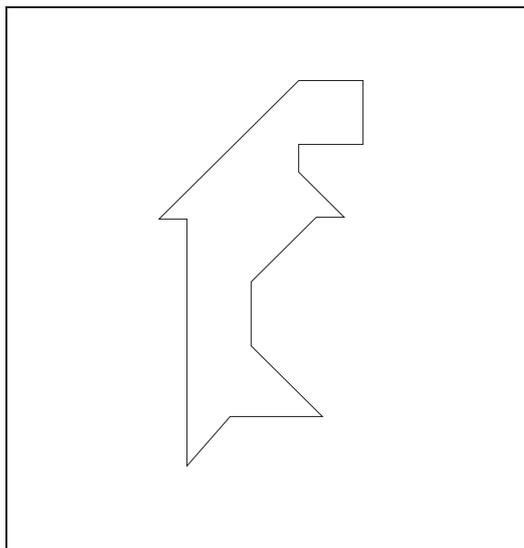
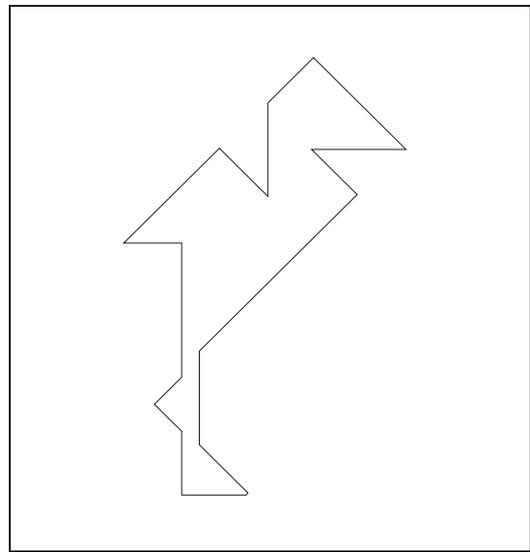
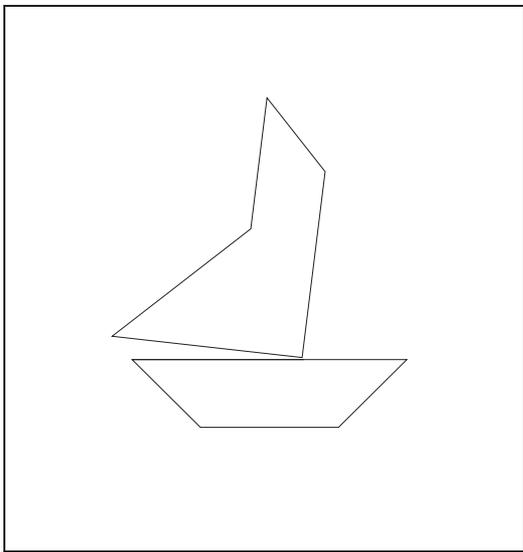
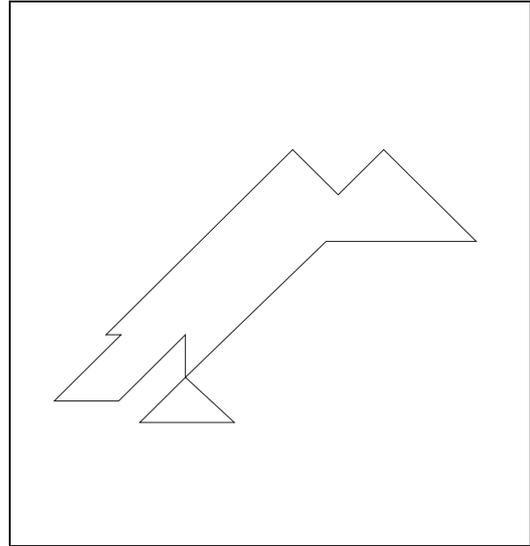
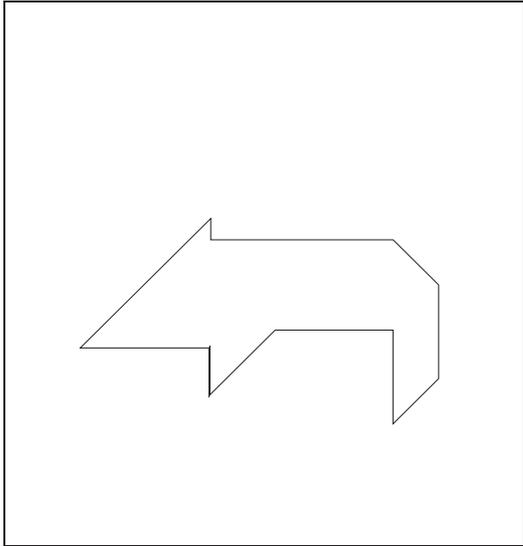


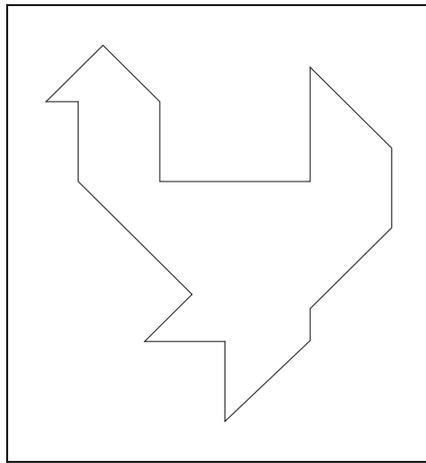




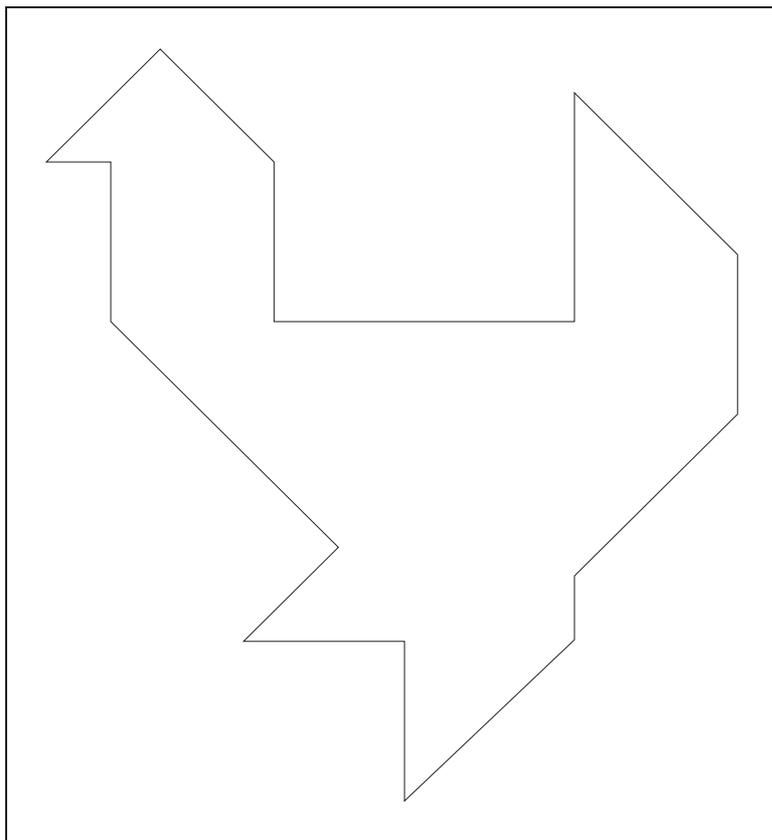








Échelle 1/4



Échelle 1/2