

Troisième partie

Un aspect de la linéarité
de 15 à 18 ans

Remerciements

Nous remercions les professeurs qui nous ont accueillis dans leurs classes ou qui ont accepté de tester quelques activités :

Frédéric Falisse nous a invités à exposer les méthodes de fausses positions aux élèves de quatrième du collège Saint Augustin à Gerpinnes. Il en a assuré le suivi et nous lui devons les échos des classes du chapitre 7.

Pascale Guissard, professeur de mathématique à l'Institut Saint Julien Parnasse à Auderghem a testé la plupart des activités présentées au chapitre 8 dans sa classe de quatrième année (enseignement général).

Jean-Pierre Cazzaro, professeur de mathématique à l'A. R. de Jette, a expérimenté une grande partie des activités proposées au chapitre 10 dans sa classe de sixième année (enseignement général).

Par ailleurs, les chapitres 7 à 10 ont été présentés aux professeurs qui ont suivi les formations de l'a.s.b.l. « Formations en cours de carrière ».

Nous remercions tous ceux et celles qui nous ont communiqué leurs remarques et nous ont rendu compte des expérimentations qu'ils ont réalisées dans leurs classes.

Certains chapitres ont également fait l'objet d'une formation lors de journées pédagogiques à l'ensemble des professeurs de mathématique du district de Neufchâteau et à l'A.R. de Visé.

Les observations et les suggestions de tous ont contribué à la mise au point des activités de cette brochure.

Le chapitre 13 a fait l'objet de formations ICAFOC/math et physique, réalisées en collaboration avec Édith Baeten, Yvonne Verbist-Scieur et Juan Opsomer.

Nous remercions aussi très cordialement Guy Noël pour ses suggestions à propos du chapitre 11.

LA LINÉARITÉ À TRAVERS QUELQUES SIÈCLES

Avant-propos

Dans toutes les branches des mathématiques et de diverses autres sciences, le problème qui se pose le plus souvent et le plus concrètement est de trouver des solutions d'équations. C'est l'algèbre qui permet de réaliser cela et, à ce titre, c'est une discipline fort ancienne. On trouve en effet des résolutions d'équations dans des tablettes mésopotamiennes et des papyrus égyptiens datant de plus de deux mille ans avant notre ère.

Dans les *Éléments* d'EUCLIDE, qui datent du troisième siècle avant Jésus-Christ, il y a également une forme d'algèbre en ce sens qu'on y trouve des méthodes générales de résolution d'équations, par des procédés géométriques. Chez DIOPHANTE D'ALEXANDRIE, que les historiens situent entre 250 et 350 de notre ère, on trouve également de l'algèbre ; mais, tout comme les tablettes babyloniennes et les papyrus égyptiens, le texte de DIOPHANTE consiste en un recueil de problèmes particuliers avec solutions et ne peut donc être considéré comme un traité théorique qui aurait pour souci de donner une méthode générale de résolution.

Quant aux méthodes dites « de fausse position » (simple ou double), qui ont été utilisées pendant des siècles, elles fournissent des méthodes générales de résolution des problèmes du premier degré, mais par des procédés purement arithmétiques.

Il est admis par les spécialistes d'histoire des mathématiques que l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline avec un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application, a été la publication d'un petit ouvrage intitulé *Muḥtaṣar fī ḥisāb al-jabr¹ wa l-muqābala* (*Abrégé de calcul par le jabr et la muqābala*). Ce texte est l'œuvre du savant d'origine persane MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-ḤŪWARIZMĪ² (vers 780 - vers 850) qui travaillait à Baghdād, dans la Maison de la Sagesse, fondée par le calife abbasside al-Ma'mūn. La dédicace au calife, qui régna jusqu'en 833, permet de situer l'œuvre dans le temps.

¹ *Al-jabr* (qui a donné naissance au mot *algèbre*) et *al-muqābala* sont les deux principales opérations qui permettent de réduire les équations algébriques à une des formes canoniques dont la solution est donnée dans le traité.

² Comme son nom l'indique, il est originaire du Ḥūwarizm, région au sud de la mer d'Aral.

1 La fausse position simple chez les Égyptiens

De quoi s'agit-il ?

Montrer comment les Égyptiens résolvait des équations du premier degré il y a quatre mille ans.

Analyser la méthode de fausse position simple et établir le lien avec les tableaux de proportionnalité.

Enjeux

Donner du sens au concept de linéarité en situant son émergence dans un contexte historique et culturel.

Montrer par contraste la commodité de la méthode algébrique d'aujourd'hui. Cette méthode nécessitait une longue élaboration, comme en témoigne le chapitre 16.

De quoi a-t-on besoin ?

Le problème 24 du *Papyrus mathématique Rhind* repris ci-après et proposé en annexe à la page 469 sous une forme photocopiable pour les élèves. Les quelques hiéroglyphes qu'il faut pouvoir décrypter pour comprendre le problème sont donnés dans un petit lexique à la page 206 et en annexe à la page 470.

Prérequis. – La résolution des équations du premier degré.

1.1 Introduction

L'une des méthodes utilisées depuis la plus haute Antiquité est ce qu'on appelle la méthode de fausse position (simple). Elle consiste à donner une valeur à l'inconnue, à opérer les calculs décrits dans l'énoncé puis, en fonction de l'erreur qui apparaît, à ajuster la valeur donnée *a priori* à l'inconnue.

Nous nous proposons ici d'analyser cette méthode à partir du problème 24 du *Papyrus mathématique Rhind* conservé au *British Museum* (où il est catalogué sous les numéros BM 10057 et BM 10058). Ce papyrus est l'une des principales sources d'information sur les connaissances mathématiques égyptiennes. Outre des tables de multiplication, on y trouve quelque quatre-vingt sept problèmes d'arithmétique et de géométrie, avec les solutions.

1.2 Quelques caractéristiques des mathématiques égyptiennes

Le système numérique utilisé par les Égyptiens de l'Antiquité est purement décimal mais non positionnel.

Qu'il s'agisse de n'importe quelle opération, tout est ramené à des additions. Les mathématiques égyptiennes ont ainsi un caractère nettement additif et linéaire.

Les Égyptiens emploient presque exclusivement les fractions de numérateur 1 (fractions unitaires). La technique qu'ils utilisent pour opérer les divisions

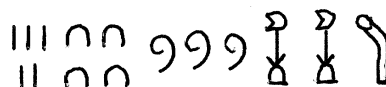
favorise l'apparition de ce type de fractions. Il y a cependant une exception pour la fraction $\frac{2}{3}$ et le scribe semble avoir une certaine facilité à trouver les deux tiers de n'importe quel nombre. En fait, les tables de multiplication qui se trouvent au début du document sont des tables de multiplication par deux des fractions unitaires à dénominateurs impairs (de 3 à 101). Comme nous le verrons ci-dessous, la technique utilisée par le scribe lors des multiplications est la « duplication ». Pour dupliquer la fraction $\frac{1}{5}$, par exemple, le scribe ne peut se satisfaire d'une réponse du type $\frac{2}{5}$. Il utilise alors les tables qui lui donnent le résultat de l'opération exprimé en termes de fractions unitaires : $2 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

1.3 Quelques hiéroglyphes

En ce qui concerne l'écriture des nombres, il existe un symbole pour toute puissance de 10, symbole qui se répète autant de fois qu'il est nécessaire lors de l'écriture du nombre.

	1		10		100		1 000		10 000		100 000		1 000 000
---	---	---	----	---	-----	---	-------	---	--------	---	---------	---	-----------

Ainsi, par exemple, 12 345 s'écrit de droite à gauche



Pour désigner une fraction (unitaire, rappelons-le), on utilise le symbole  qui se prononce *rè* et signifie bouche, ouverture.

$\frac{1}{3}$ s'écrit :  et $\frac{1}{123}$: .

Il existe cependant deux exceptions, l'une pour $\frac{1}{2}$:  et l'autre, pour la fameuse fraction $\frac{2}{3}$: .

Voici encore quelques hiéroglyphes utiles :

 , adjectif possessif	   'h' quantité, inconnue	 'k' ajouter
  d,t le reste	 dmd somme, total	 f elle
  hpr ou devenir	 hr donc, alors	 hr sur
  ín donc, ainsi	 ír faire, prendre	 ir-t calculer
 m considéré comme	  m y selon que, ce que	 n de
 pn ceci	  pr-t ou pr soustraire	  w d il reste

1.4 Opérations

Le scribe égyptien décrit en détail la technique qu'il utilise pour opérer les multiplications et les divisions. Nous en verrons un exemple ci-après. Par contre, il est totalement muet en ce qui concerne les additions et soustractions. Le peu d'erreurs commises dans ces dernières opérations laisse supposer qu'il disposait de tables, mais aucune n'est arrivée jusqu'à nous et ce n'est donc là qu'une hypothèse. Peut-être apprenait-il des tables d'addition par cœur dès son plus jeune âge ?

La multiplication s'effectue par duplications successives. Par exemple, pour effectuer 37×47 , le scribe procède ainsi :

\	1	47
	2	94
\	4	188
	8	376
	16	752
\	32	1 504
Total	37	1 739

Le scribe coche les termes qui interviennent effectivement dans le calcul. Remarquons que ce tableau est un tableau de proportionnalité dans lequel les lignes sont obtenues, soit en multipliant la ligne précédente par deux, soit en additionnant des lignes sélectionnées en vue d'obtenir un résultat bien déterminé (37 dans cet exemple).

La division est traitée comme opération inverse de la multiplication. Ainsi, pour diviser 133 par $9\frac{1}{2}$, le scribe se demande par quoi il faut multiplier $9\frac{1}{2}$ pour obtenir 133.

	1	$9\frac{1}{2}$
\	2	19
\	4	38
\	8	76
Total	14	133

1.5 Problème 24

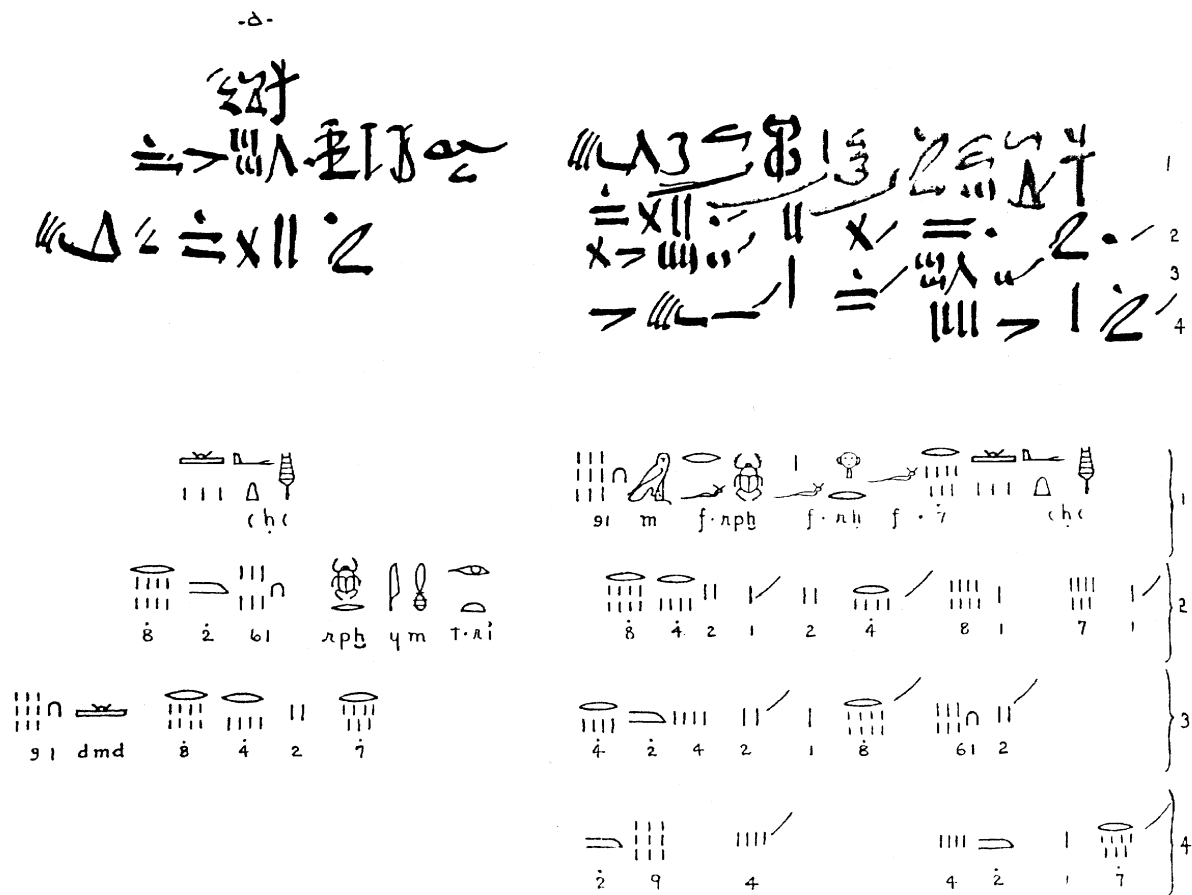


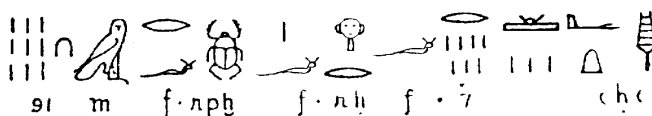
Fig. 1 : Problème 24 du papyrus Rhind

Seule la partie supérieure de la figure 1 se trouve sur le papyrus. Il s'agit d'un texte en écriture hiératique qui est l'écriture cursive du scribe. Les égyptologues qui ont étudié le manuscrit l'ont transcrit en hiéroglyphes, plus faciles à décrypter. Cette transcription apparaît dans la partie inférieure de la figure. Notons que le texte du papyrus Rhind est écrit de droite à gauche.

L'énoncé du problème apparaît à la première ligne à droite. Le voici en écriture hiératique :



et en hiéroglyphes :



Une traduction littérale en est :

Une quantité, un septième d'elle sur elle devenir elle en tant que 19,
ce que nous écririons aujourd'hui

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

\	1	7
\	$\frac{1}{7}$	1
Total	$1\frac{1}{7}$	8

Le scribe suppose au départ que la quantité cherchée vaut 7. Il utilise la méthode de fausse position simple. Il choisit un nombre qui permet d'éviter l'apparition trop rapide de fractions. Il calcule alors la quantité et son septième : $7 + 1 = 8$ (voir lignes 2 et 4 à l'extrême droite de la figure 1).

	1	8
\	2	16
	$\frac{1}{2}$	4
\	$\frac{1}{4}$	2
\	$\frac{1}{8}$	1
Total	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$	19

Ce résultat est faux puisqu'il aurait dû trouver 19. Le raisonnement qu'il tient alors est le suivant : la proportion de 19 à 8 est la même que celle de la quantité cherchée à 7, nombre qu'il avait choisi au départ pour des raisons de facilité. Il est ainsi amené à diviser 19 par 8 selon la méthode que nous avons exposée ci-dessus, c'est-à-dire qu'il recherche par combien il faut multiplier 8 pour obtenir 19. Nous lisons cela à la colonne 2 (à partir de la droite), lignes 2, 3 et 4 et à la colonne 3, lignes 2 et 3.

\	1	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
\	2	$4\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
\	4	$9\frac{1}{2}$
Total	7	$16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$

Il obtient $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$, rapport de la proportion qu'il doit maintenant multiplier par 7 (quatrième colonne, lignes 2, 3 et 4). Notons que le scribe multiplie $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ par 7 et non 7 par $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. Or, dans l'esprit de la méthode de fausse position, lorsqu'on a trouvé le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de 8 à 19 (dans le second membre), il serait logique de multiplier ensuite 7 (la fausse position) par ce même coefficient. Cette inversion de l'ordre des facteurs, qui simplifie le calcul, semble indiquer que les Égyptiens avaient une connaissance intuitive de la commutativité de la multiplication.

\	1	$16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$	Dans la partie gauche du fragment, nous trouvons à la ligne 1 le hiéroglyphe signifiant « la quantité », à la ligne 2, sa valeur, à savoir $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$. À la ligne 3, le scribe ajoute son septième et vérifie que cela fait bien un total de 19.
\	$\frac{1}{7}$	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$	
Total	$7\frac{1}{7}$	19	

Le raisonnement qui sous-tend cette méthode de résolution peut être condensé dans le tableau de proportionnalité suivant

x	$x + \frac{x}{7}$
$\times 2\frac{1}{4}\frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} 7 \\ 16\frac{1}{2}\frac{1}{8} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} 8 \\ 19 \end{array} \right\} \times 2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$

où on passe de la deuxième à la troisième ligne en multipliant par le facteur $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. Le principe de la méthode se base sur la proportionnalité de x et $x + \frac{x}{7}$.

La fausse position simple a été utilisée très longtemps. On la retrouve notamment dans les textes arabes, dans le *Liber abaci* de Leonardo FIBONACCI (XIII^e siècle) et dans *La summa* de Luca PACIOLI (XV^e siècle). Notons que l'inconnue peut être calculée à partir d'un rapport interne du tableau, comme c'est le cas ici, mais également à partir du rapport externe, comme nous le verrons à la page 213.

Échos des classes

Les élèves ont été stupéfaits d'apprendre que les méthodes de résolution anciennes n'étaient pas « exactes ». Le fait qu'il fallait supposer une valeur (qui avait toutes les chances d'être fausse) pour la réponse afin de la corriger ensuite leur paraît une démarche beaucoup plus lourde que l'algèbre d'aujourd'hui.

Ils sont étonnés d'apprendre que les méthodes de résolution des équations sont le fruit d'une évolution, qu'on n'a pas toujours procédé comme actuellement.

Ils estiment qu'il faudrait plus souvent introduire les chapitres du cours de mathématique par un peu d'histoire, pour mieux en percevoir la portée.

Prolongements possibles

Nous proposons en annexe à la page 471 les problèmes 25 et 27 du papyrus Rhind, qui peuvent être traités de la même manière.

2 La double fausse position chez les Arabes

De quoi s'agit-il ?

Comprendre la méthode de double fausse position à partir d'un exemple extrait d'un texte attribué au juif espagnol ABRAHAM IBN EZRA (Tolède, vers 1089 – Rome, vers 1167).

Justifier la méthode en interprétant les différents éléments qui interviennent dans la formule sur le graphique de la fonction linéaire liée au problème.

Enjeux

Voir les enjeux de la section 1 à la page 204. Cette activité illustre en outre le pouvoir éclairant des graphiques linéaires (voir la section 5.3 à la page 581).

De quoi a-t-on besoin ?

Le texte attribué à ABRAHAM IBN EZRA proposé ci-après et repris en annexe à la page 473.

Prérequis. – La résolution des équations du premier degré et la représentation graphique des fonctions linéaires.

2.1 Introduction

Ying buzu (excédent et déficit), *al-ḥaṭa'ayn* (l'erreur), *regula duarum falsarum positionum*, *regola delle doi false positioni*, *règle des plateaux de la balance*. Ce sont là quelques appellations qui toutes, désignent un même procédé permettant de résoudre des problèmes exprimables par des équations linéaires à une inconnue ou par des systèmes linéaires à deux inconnues.

Cette fameuse règle des deux fausses positions était sans doute connue à Baghdād à l'époque de l'algébriste AL-ḤUWARIZMĪ dans la première moitié du neuvième siècle. Nous l'illustrerons par un extrait d'un manuscrit traduit de l'arabe en latin, intitulé *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit*, c'est-à-dire le *Livre sur l'agrandissement et la diminution* nommé le *calcul de la conjecture d'après ce que les sages de l'Inde ont établi et qu'Abraham a rassemblé et composé selon le livre appelé indien*.

L'auteur arabe de cet ouvrage est inconnu ; certains historiens pensent ou ont pensé qu'il pourrait s'agir d'ABŪ KĀMIL ŠUGA IBN ASLAM IBN MUḤAMMAD AL-ḤĀSIB AL-MISRĪ, qui florissait vers les années 900. D'autres attribuent le texte, ou du moins sa traduction en latin, au juif espagnol ABRAHAM IBN EZRA. Le titre pourrait laisser croire que la paternité de la règle revient aux savants indiens. Cependant la ressemblance de la terminologie avec les expressions chinoises *ying* (excédent) et *buzu* (déficit) donne à penser que cette règle, connue bien avant en Chine – voir à ce sujet le chapitre sept du *Jiuzhang Suanshu*, titre généralement traduit par les *Neuf Chapitres sur l'Art du Calcul*, qu'on peut dater d'un peu avant le début de notre ère –, ait pénétré dans la littérature arabe par un chemin qui est passé par l'Inde ou par la « route de la soie ». Il faut en effet constater que, dans les ouvrages mathématiques indiens connus à ce jour, qui sont antérieurs au douzième siècle, on ne trouve pas trace de cette règle.

Ce procédé de résolution d'équations linéaires se perpétue chez de nombreux auteurs arabes comme AL-KARĀĠĪ (mort vers 1025) et en Europe, chez Leonardo Pisano FIBONACCI au treizième siècle et chez Luca PACIOLI au quinzième.

Le principe en est le suivant. On donne à l'inconnue deux valeurs « quelconques³ » qui se révèlent le plus souvent être de fausses valeurs et, à partir de là, il est possible de calculer la solution vraie. Trois cas évidemment se présentent :

- Les deux fausses valeurs sont plus petites que l'inconnue.
- Les deux fausses valeurs sont plus grandes que l'inconnue.
- L'inconnue se situe entre les deux fausses valeurs.

Le texte qui suit illustre la résolution d'un problème par la méthode de double fausse position dans le cas où l'inconnue se situe entre les deux fausses valeurs.

2.2 Un problème linéaire

Voici une traduction d'un extrait de l'ouvrage attribué à ABRAHAM IBN EZRA. Le texte original en latin est disponible en annexe à la page 472.

Après la louange à Dieu, voici ce qu'il est dit. J'ai écrit ce livre selon ce que les sages de l'Inde ont découvert à propos du calcul de la conjecture, en examinant attentivement et en étudiant ce qui est utile en soi, en persévérant dans cette direction et en en saisissant l'application pratique. De cela donc, voici ce qu'il vient : soit un census⁴ duquel on ôte un tiers et un quart et il reste huit. Que vaut le census ? Pour aborder son calcul, suppose un plateau de balance de douze dont on considère un tiers et un quart ; tu ôtes ce tiers et ce quart qui font sept, il restera cinq. Compare alors à huit, à savoir le reste du census et il t'apparaîtra clairement que tu as fait une erreur de trois en déficit : mets cela de côté et suppose ensuite que tu places sur le plateau de la balance une seconde quantité, qui est divisée par la première, que ce soit vingt-quatre, et ôte le tiers et le quart qui font quatorze, il restera dix. Compare alors cela à huit, à savoir le reste du census. Et c'est ainsi qu'il t'apparaîtra clairement que tu as commis une erreur de deux en plus. Multiplie donc l'erreur du dernier plateau de la balance qui vaut deux par le premier plateau qui vaut douze et il viendra 24. Et multiplie l'erreur du premier plateau, erreur qui vaut trois, par le dernier plateau, qui vaut 24, et on obtiendra 72. Additionne donc 24 et 72, et cela car l'une des erreurs est par défaut et l'autre par excès. Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande. Donc après avoir ajouté vingt-quatre et septante-deux, le résultat sera nonante-six ; ensuite ajoute les deux erreurs qui valent trois et deux, il viendra cinq ; ensuite donc nonante-six par cinq qui est ce à quoi on est arrivé, il te viendra dix-neuf drachmes et un cinquième de drachme.

Par cette règle, il s'ensuit que tu poses douze pour la chose inconnue et tu ôtes son tiers et son quart et il restera cinq ; comment récupérer douze ? La chose effectivement inconnue. Il faut en fait deux et deux cinquièmes : multiplie donc deux et deux cinquièmes par huit et il viendra dix-neuf et un cinquième.

Remarquons tout d'abord que, même s'il est question de *census*, ce problème est en fait un problème du premier degré. L'auteur nous explique la règle des plateaux de la balance (figure 2).

³ En fait, elles sont généralement « bien choisies » pour simplifier les calculs.

⁴ Terme désignant le carré de l'inconnue recherchée.

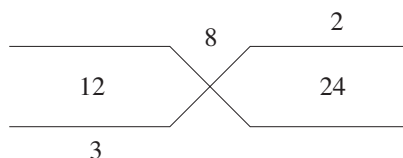


Fig. 2

La première fausse position qu'il choisit est 12. C'est une valeur dont il est facile de soustraire le tiers et le quart. On trouve 5, c'est-à-dire qu'il y a un déficit de 3 par rapport à la valeur 8 qu'il faudrait obtenir. On place ce 3 en-dessous du plateau de la balance qui contient la valeur 12, comme le montre la figure 2. On recommence l'opération pour la seconde fausse position, dont la valeur choisie est 24. Le résultat 10 présente un excès de 2 par rapport à la valeur attendue 8. Cette valeur 2 est placée au-dessus du deuxième plateau. Il faut ensuite effectuer l'opération suivante :

$$\frac{2 \times 12 + 3 \times 24}{2 + 3} = \frac{96}{5}.$$

La traduction moderne du problème nous donne l'équation

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 8 \quad \text{ou} \quad \frac{5x}{12} = 8 \quad (*) \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = \frac{96}{5}.$$

Nous constatons que la réponse obtenue par la méthode de fausse position est bien celle que nous trouvons en résolvant l'équation (*). Comment pouvons-nous expliquer cela ?

Représentons graphiquement la fonction linéaire $y = \frac{5x}{12}$ qui correspond au premier membre de l'équation (*). La valeur de cette fonction est

$$\begin{aligned} 5 & \text{ pour } x = 12, \\ 10 & \text{ pour } x = 24, \end{aligned}$$

comme le montre la figure 3.

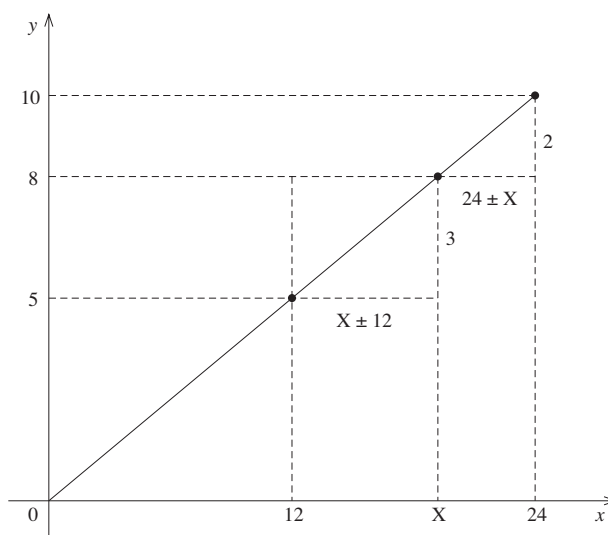


Fig. 3

La valeur cherchée est celle, notée X , pour laquelle la fonction prend la valeur 8. La figure montre deux triangles rectangles semblables, dont les bases sont respectivement $X - 12$ et $24 - X$, et dont les hauteurs sont 3 et 2. Les relations de proportionnalité entre les mesures des côtés de deux figures semblables nous permettent d'écrire

$$\frac{X - 12}{24 - X} = \frac{3}{2}.$$

Réolvons cette équation sans effectuer les multiplications,

$$2 \cdot (X - 12) = 3 \cdot (24 - X),$$

$$2X - 2 \times 12 = 3 \times 24 - 3X,$$

$$2X + 3X = 2 \times 12 + 3 \times 24 \quad (3 + 2)X = 2 \times 12 + 3 \times 24,$$

et finalement

$$X = \frac{2 \times 12 + 3 \times 24}{2 + 3}.$$

Nous retrouvons ainsi la formule de la double fausse position.

L'auteur tente de convaincre le lecteur de la généralité de sa méthode en multipliant les exemples. Il justifie à chaque fois le résultat obtenu en traitant le problème d'une autre manière. Ainsi, dans le dernier paragraphe, il termine son exposé en résolvant l'équation par la méthode de fausse position simple.

La fausse position choisie est 12, ce qui donne 5 pour la valeur de $x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4}$. Il se demande alors par combien il faut multiplier 5 pour retrouver 12; il cherche donc le facteur qui permet de passer de la deuxième colonne du tableau ci-dessous à la première. Il trouve $2\frac{2}{5}$, qu'il multiplie par 8 pour trouver la solution $19\frac{1}{5}$. Remarquons que comme dans le problème 24 du papyrus Rhind, l'ordre des facteurs est inversé.

x	$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4}$
12	5
$19\frac{1}{5}$	8

$\times 2\frac{2}{5}$
 $\longleftarrow$

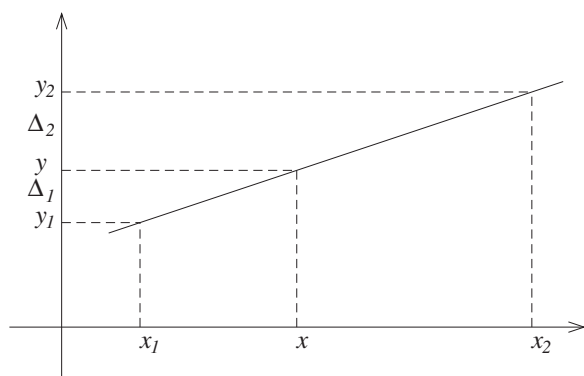
Voici donc un exemple de fausse position simple où l'inconnue est calculée à partir du rapport externe du tableau de proportionnalité.

Prolongement possible

La règle peut être appliquée aux problèmes généraux du premier degré. Soit l'équation

$$ax + b = y.$$

Considérons les deux fausses positions x_1 et x_2 qui produisent les deux valeurs y_1 et y_2 .



$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ \Delta_1 &= |y_1 - y| \\ \Delta_2 &= |y_2 - y| \end{aligned}$$

Fig. 4

Dans la figure ci-dessus, qui illustre le cas où la valeur cherchée est située entre les deux fausses positions, nous avons

$$\Delta_1 = |y_1 - y| = y - y_1 = a(x - x_1),$$

$$\Delta_2 = |y_2 - y| = y_2 - y = a(x_2 - x).$$

De l'expression de la proportion $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$, on peut tirer la valeur de x qui vaut

$$x = \frac{x_2 \Delta_1 + x_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}.$$

Ceci montre que la valeur de x obtenue par la règle de la balance peut encore être interprétée comme le barycentre des deux fausses positions x_1 et x_2 , munies des poids Δ_2 et Δ_1 .

Un raisonnement similaire permet d'établir la formule dans les cas où les deux fausses positions sont, soit plus petites, soit plus grandes que l'inconnue. Nous obtenons

$$x = \frac{x_2 \Delta_1 - x_1 \Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{x_1 \Delta_2 - x_2 \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1},$$

en tenant compte du fait que toutes les quantités qui interviennent dans le calcul sont nécessairement positives (« Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande... », nous indique ABRAHAM IBN EZRA).

Échos des classes

Les élèves ont été surpris de voir que les problèmes de mathématique pouvaient être résolus en langage courant, par un texte dépourvu de formules, mais que c'était « encore plus compliqué qu'avec des maths ». Après avoir constaté les difficultés et la lourdeur de ce mode d'expression, ils acceptent mieux le formalisme actuel dont l'utilité leur paraît plus évidente, et surtout perçoivent que « ce n'est qu'une question de convention ».

3 Les combinaisons linéaires chez Léonard de Pise

De quoi s'agit-il ?

Montrer comment Léonard de Pise, dit FIBONACCI résout un système linéaire indéterminé.

Enjeux

Introduire et travailler la notion de *combinaison linéaire*. Celle-ci est une généralisation du rapport interne (voir la section 7.3 à la page 589).

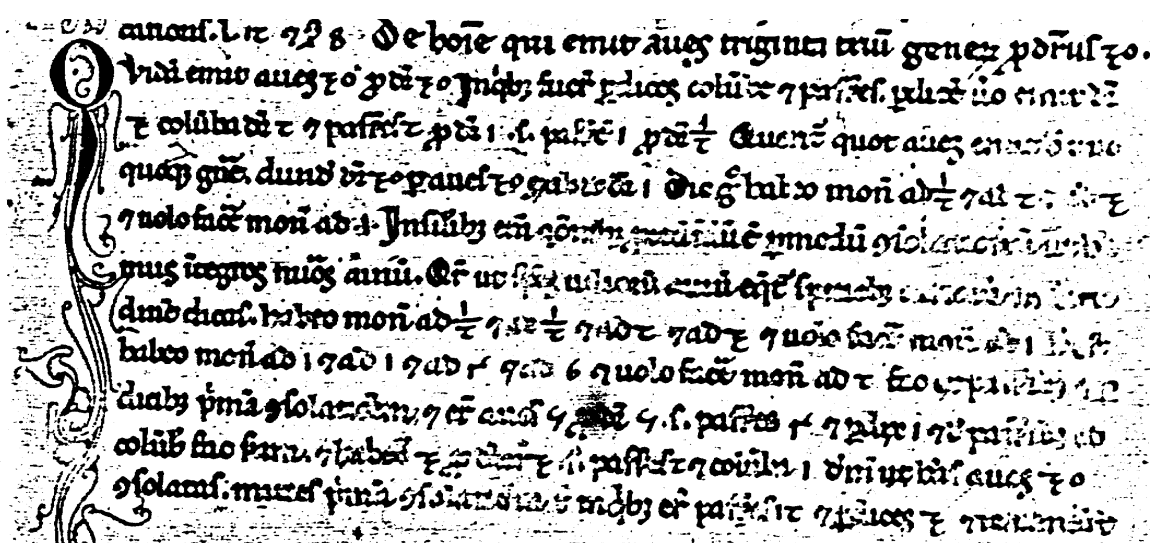
De quoi a-t-on besoin ?

Le texte du problème des oiseaux ci-dessous, repris en annexe à la page 475.

3.1 Introduction

On possède peu de renseignements sur Léonard de Pise, autres que ceux qu'il nous livre dans le prologue du *Liber abaci* : son père était *publicus scriba*, scribe pour les commerçants de Pise, à la douane de Bougie, en Algérie. Il fit venir auprès de lui le jeune Léonard afin de lui faire apprendre au contact des Arabes, les méthodes de calcul au moyen de figures indiennes (ce que nous appelons « chiffres arabes »). Plus tard, FIBONACCI parcourra tout le bassin méditerranéen (Égypte, Syrie, Grèce, Sicile, Provence) pour étancher sa soif de savoir. Il a contribué à répandre en Occident l'arithmétique basée sur la numération de position (chiffres indo-arabes).

Dans le chapitre onze du *Liber abaci*, FIBONACCI introduit la notion de « compensation » des monnaies ; ce sont des problèmes de proportionnalité qui montrent comment calculer le nombre de livres-monnaie qu'on peut battre à partir d'un certain nombre de livres-poids d'argent, lorsqu'on se fixe un taux d'argent dans l'alliage de la livre-monnaie. La technique de résolution qu'il expose à cette occasion lui permet, plus loin dans le chapitre, de résoudre des équations diophantiennes (dans l'ensemble des fractions positives) indéterminées. Voici le texte d'un de ces problèmes où l'auteur utilise des combinaisons linéaires pour rechercher des solutions.



3.2 Le problème des oiseaux

De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30

Le texte original en latin est disponible en annexe à la page 474. En voici la traduction.

De l'homme qui a acheté trente oiseaux de trois espèces pour 30 deniers

Quelqu'un a acheté 30 oiseaux pour 30 deniers, parmi lesquels il y a des perdrix, des colombes et des moineaux. En fait, il a acheté les perdrix pour 3 deniers, les colombes pour 2 et 2 moineaux pour 1 denier, à savoir 1 moineau pour $\frac{1}{2}$ denier. On demande combien d'oiseaux de chaque espèce il a achetés. Divise 30 deniers par 30 oiseaux, il viendra 1 denier. Je dis donc que j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3; et je veux faire de l'argent-monnaie à 1. En effet, dans de semblables questions, nous devons procéder par la méthode des compensations, puisque nous avons un nombre entier d'oiseaux. C'est pourquoi, pour que l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères, tu dois dire : j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3 et je veux faire de l'argent-monnaie à 1, c'est-à-dire j'ai de l'argent-monnaie à 1 et à 4 et à 6 et je veux faire de l'argent-monnaie à 2. Fais des moineaux et perdrix une première compensation et il y aura 5 oiseaux pour 5 deniers, à savoir 4 moineaux et 1 perdrix; et, des moineaux avec les colombes, fais-en une seconde; et tu auras 3 oiseaux pour 3 deniers, à savoir 2 moineaux et 1 colombe. Ensuite, pour avoir 30 oiseaux compensés, tu prendras trois fois la première compensation dans laquelle il y aura 12 moineaux et 3 perdrix. Et il restera 15 oiseaux compensés, pour lesquels tu prendras cinq fois la seconde compensation et tu auras 10 moineaux et 5 colombes. Et ainsi, en ce qui concerne les 30 oiseaux dont il a été question auparavant, il y aura 22 moineaux et 5 colombes et 3 perdrix, comme il est montré en marge. Et tu dois savoir que, de ce qui est suscrit, tu peux avoir autant d'oiseaux qu'on voudra pour la même quantité de deniers au-delà de 15, mais en deçà, ce n'est pas possible, si ce n'est pour 13 et 11 et 8. En vérité, dans le cas des 13 oiseaux, la première compensation apparaîtra deux fois et la seconde, une fois. Et pour 11 oiseaux, la seconde compensation apparaîtra deux fois et la première, une fois. Et pour 8 oiseaux, chacune des compensations apparaîtra une fois.

Le système linéaire qui traduit ce problème est

$$\begin{cases} 3x + 2y + \frac{z}{2} = 30, \\ x + y + z = 30. \end{cases}$$

FIBONACCI observe tout d'abord que, pour acheter 30 oiseaux pour 30 deniers, il faut constituer des ensembles de n oiseaux pour n deniers de manière que *l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères*. Réaliser une telle égalité avec trois espèces d'oiseaux semble difficile; une manière de simplifier le problème consiste à rechercher des combinaisons de deux espèces d'oiseaux dans la même proportion.

FIBONACCI observe que

$$1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5,$$

ce qui lui fournit un ensemble de *cinq* oiseaux (une perdrix et quatre moineaux) pour *cinq* deniers (ensemble E_1 du tableau ci-dessous).

Il observe encore que

$$1 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3,$$

ce qui lui donne cette fois un ensemble de *trois* oiseaux (une colombe et deux moineaux) pour *trois* deniers (ensemble E_2 du tableau ci-dessous).

En considérant une combinaison linéaire convenable des deux relations qui précèdent, il obtiendra alors *trente* oiseaux pour *trente* deniers. Cette combinaison linéaire consiste à prendre trois fois le premier ensemble de volatiles et cinq fois le second ($E = 3E_1 + 5E_2$).

	perdrix à 3 deniers	colombes à 2 deniers	moineaux à 1/2 denier	nombre d'oiseaux	coût
E_1	1		4	$1+4=5$	$1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5$
E_2		1	2	$1+2=3$	$1 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3$
E	3	5	$3 \times 4 + 5 \times 2 = 22$	$3+5+22=30$	$3 \times 3 + 5 \times 2 + 22 \times \frac{1}{2} = 30$

L'ensemble $E = 3E_1 + 5E_2$ fournit bien une solution du problème, puisqu'il s'agit d'un ensemble de 30 oiseaux, de trois espèces différentes pour une somme de 30 deniers.

L'auteur termine en nous signalant qu'il est possible de trouver des combinaisons linéaires qui réalisent des ensembles de n'importe quel nombre n d'oiseaux pour n deniers, si n est supérieur à 15. Mais pour n inférieur à 15, il affirme que le problème n'est possible que pour 8, 11 et 13 oiseaux, et il décrit la combinaison qui fournit la solution dans chacun des cas.

Montrer qu'il y a une solution pour toute valeur de n supérieure à 15. FIBONACCI n'a-t-il pas oublié une possibilité pour n inférieur à 15 ?

On peut obtenir

16 oiseaux pour 16 deniers par la combinaison $2E_1 + 2E_2$,

17 oiseaux pour 17 deniers par la combinaison $1E_1 + 4E_2$,

18 oiseaux pour 18 deniers par la combinaison $3E_1 + 1E_2$,

et à partir de là, on obtient 19, 20 et 21 oiseaux en ajoutant $1E_2$ à chacune des combinaisons précédentes, et ainsi de suite.

On peut aussi obtenir 14 oiseaux pour 14 deniers par la combinaison $1E_1 + 3E_2$.

INTRODUCTION AU CALCUL VECTORIEL

Avant-propos

Au fil de leur parcours scolaire, les élèves ont calculé, d'abord avec des nombres, ensuite avec des lettres qui représentent des nombres. Afin de les motiver, on leur annonce qu'on va leur faire découvrir quelque chose de nouveau sur le plan du calcul. Ce nouveau mode de calcul permettra de traduire des problèmes géométriques sous forme algébrique. En troisième année, les élèves ont déjà vu qu'ils peuvent associer une équation à toute droite du plan. Ils ont vu l'intérêt de cette association et peuvent comprendre qu'un outil algébrique performant peut être utile pour faire de la géométrie plus évoluée.

L'introduction au calcul vectoriel est conçue de manière très intuitive à la section 1. Cependant, après ce démarrage en douceur, les problèmes résolus à la section 2 exploitent de manière très profonde le concept de combinaison linéaire.

Le lecteur intéressé par l'émergence du concept de vecteur et les débuts du calcul vectoriel trouvera au chapitre 14 une brève anthologie de sources historiques commentées.

1 Vers un nouveau mode de calcul

De quoi s'agit-il ?

Montrer des objets mathématiques sur lesquels agissent l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire : les vecteurs déplacements dans le plan et dans l'espace, les polynômes et les suites arithmétiques.

Enjeux

Faire apparaître une structure commune et dégager la notion d'espace vectoriel. On trouvera, à la section 7 du chapitre 16, des commentaires qui permettent de situer les vecteurs et les combinaisons linéaires dans le développement global de l'idée de linéarité de la maternelle jusqu'à dix-huit ans. Sur l'usage essentiel fait ci-dessous du plan quadrillé, voir au même chapitre la section 7.6.

Matières couvertes

Vecteurs : composantes, somme, produit par un nombre, relation de Chasles, propriétés du calcul vectoriel, combinaisons linéaires.

Compétences

Décomposer un vecteur suivant deux directions et lui associer un couple de nombres.

Construire la somme de vecteurs et lui associer un couple de nombres.

Utiliser le théorème de Thalès pour construire le produit d'un vecteur par un nombre et lui associer un couple de nombres.

De quoi a-t-on besoin ?

Un plan de Manhattan, ou de l'Ensanche à Barcelone, ou de tout autre quartier dont les rues forment un quadrillage régulier.

Des feuilles A4 recouvertes d'un quadrillage de 1 cm de côté, d'autres recouvertes d'un réseau de parallélogrammes, d'autres encore d'un réseau de triangles. D'autres feuilles encore, où certains points sont marqués sur le quadrillage. Ce matériel peut être obtenu par photocopie des documents fournis en annexe aux pages 477 à 485 et reproduits en petit dans les figures 1 à 14.

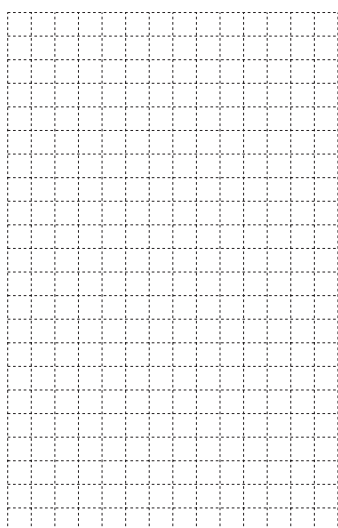


Fig. 1 : quadrillage

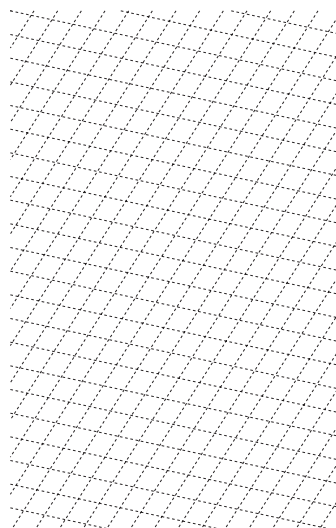


Fig. 2 : réseau de parallélogrammes

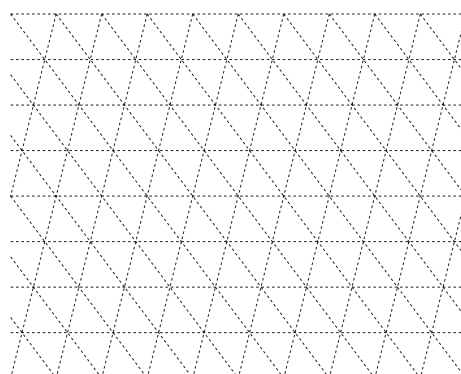


Fig. 3 : réseau de triangles

1.1 Opérations sur les nombres réels

Comment s'y prendre ?

Avant d'introduire ce nouveau mode de calcul portant sur des éléments géométriques, le professeur peut commencer par faire un état des lieux des connaissances des élèves concernant les règles du calcul sur les nombres. Les élèves connaissent les règles de calcul et les propriétés de l'addition et de la soustraction, de la multiplication et de la division des nombres réels, mais ne sont pas forcément capables de leur donner un nom. Ils connaissent le rôle du « zéro » pour l'addition et du « un » pour la multiplication, mais n'ont peut-être pas la notion de « neutre ». Il peut être intéressant de commencer l'activité par une mise en ordre des propriétés de l'addition et de la multiplication des réels ; la synthèse qui interviendra à la fin de l'activité prendra plus de sens et plus de force si elle s'appuie sur une comparaison avec les propriétés du calcul sur les nombres.

Le relevé de ces propriétés prend la forme d'une première étape de formalisation et d'une mise en place du vocabulaire adéquat.

Les propriétés de l'addition des nombres réels

1. La somme de deux nombres réels existe toujours et est un nombre réel.
2. La somme des réels est associative, cela signifie que, si on souhaite additionner trois réels, on peut les associer de manières différentes sans changer le résultat

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3. Le nombre 0 est neutre pour l'addition, cela signifie que si on l'ajoute à n'importe quel nombre réel (ou si on lui ajoute n'importe quel nombre), le résultat de la somme est ce nombre lui-même

$$a + 0 = a = 0 + a.$$

4. Chaque réel a possède un opposé noté $-a$, c'est le nombre qu'il faut lui ajouter pour obtenir le neutre 0

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$$

5. La somme des réels est commutative, ce qui signifie que dans une somme, on peut changer l'ordre des termes

$$a + b = b + a.$$

Ces cinq propriétés peuvent être résumées en disant que l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est un *groupe commutatif* pour l'addition.

Parmi les propriétés évoquées ci-dessus, quelles sont celles que possède la soustraction des nombres réels ?

La soustraction n'est ni associative ni commutative. L'existence d'un neutre soulève un problème plus subtil. Les élèves observent que

$$a - 0 = a \text{ mais que } 0 - a \neq a.$$

Le nombre 0 est donc neutre pour la soustraction lorsqu'il est placé à droite de a , mais pas lorsqu'il est placé à gauche. Ceci ne peut se produire que pour une opération non commutative, ce qui est le cas de la soustraction. Tandis que dans l'addition (ou toute autre opération commutative), le neutre à droite est forcément aussi neutre à gauche.

Tout ceci montre bien que l'addition fonctionne, en un certain sens, mieux que la soustraction et c'est pourquoi la soustraction d'un nombre peut être redéfinie comme l'addition de son opposé

$$a - b = a + (-b).$$

Les propriétés de la multiplication

1. Le produit de deux nombres réels existe toujours et est un nombre réel¹.
2. Le produit des réels est associatif, cela signifie que, si on souhaite multiplier trois réels, on peut les associer de manières différentes sans changer le résultat

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

3. Le nombre 1 est neutre pour la multiplication, cela signifie que si on multiplie n'importe quel nombre réel par 1 (ou si on multiplie 1 par ce nombre), le résultat du produit est ce nombre lui-même

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a.$$

4. Chaque réel $a \neq 0$ possède un inverse noté $\frac{1}{a}$, c'est le nombre par lequel il faut le multiplier pour obtenir le neutre 1

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a.$$

5. Le produit des réels est commutatif, ce qui signifie que dans un produit, on peut changer l'ordre des facteurs

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Ces cinq propriétés peuvent être résumées en disant que l'ensemble des nombres réels non nuls, noté $\mathbb{R}_0$, est un *groupe commutatif* pour la multiplication.

Parmi les propriétés évoquées ci-dessus, quelles sont celles que possède la division des nombres réels ?

Tout comme la soustraction des nombres réels, la division n'est ni associative, ni commutative. Le neutre 1 est neutre à droite mais pas à gauche.

¹ Le quotient de deux nombres réels n'est pas toujours un réel. Il faut enlever 0 pour que la division soit une opération interne. Les propriétés de la multiplication décrites ici restent vraies dans l'ensemble des réels non nuls, y compris la première, puisque le produit de deux réels ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul.

Comme pour la soustraction, on peut remplacer la division par un nombre par la multiplication par son inverse

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Le professeur qui le souhaite peut formaliser davantage l'énoncé de ces propriétés en introduisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, qui peuvent être perçus dans ce contexte comme des abréviations utiles. Il faudra cependant éviter de rebuter les élèves par une formalisation exagérée, tout dépend de la classe que l'on a devant soi. Il convient de garder à l'esprit que le but premier de cette activité n'est pas d'arriver à une définition axiomatique d'un espace vectoriel, mais bien d'en donner une approche intuitive et de dégager les propriétés du calcul vectoriel pour les mettre en œuvre par la suite.

Échos des classes

Cette mise au point concernant les opérations sur les nombres réels s'est imposée d'elle-même dès qu'on a voulu comparer les propriétés du calcul sur les déplacements (ou sur les couples de composantes) aux propriétés du calcul dans $\mathbb{R}$.

1.2 Déplacements dans un plan

Comment s'y prendre ?

Ces mises au point étant faites, plus ou moins rapidement suivant les connaissances de la classe, le professeur annonce clairement la mise en place d'un nouveau mode de calcul, sur des objets géométriques, avec des opérations d'addition et de multiplication qu'il faudra comparer, du point de vue de leurs propriétés, avec les opérations bien connues sur les nombres.

Le début de cette activité reprend des idées assez simples, qui sont sans doute familières aux élèves depuis le premier degré. Une approche similaire leur a probablement été proposée lors de l'introduction des repères et des coordonnées. Même si la description du début de cette activité semble longue, le travail initial sur le quadrillage ne devrait donc pas prendre beaucoup de temps ; il est néanmoins nécessaire pour préparer la suite.

On montre aux élèves un plan de Manhattan (ou de Barcelone) et on leur pose les questions suivantes.

Comment indiquer le chemin qui mène d'un point quelconque de cette ville à un autre ?
 Ce chemin est-il unique ?
 Y a-t-il plusieurs chemins de même longueur ?
 Y a-t-il des chemins plus courts que les autres ?

Après une première discussion, on fournit à chaque élève une feuille munie d'un quadrillage sur lequel sont marqués quatre points A , B , C et D , les mêmes pour tous les élèves (figure 4).

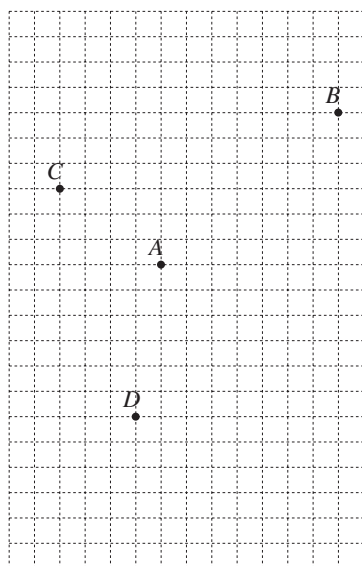


Fig. 4 : 4 points sur un quadrillage

On leur demande de dessiner différents chemins qui mènent de A à B sur le quadrillage, sans contrainte de longueur, et de trouver ensuite une manière de décrire ces chemins à leurs condisciples. Ils vont probablement imaginer un codage du type droite, gauche, haut, bas ou encore nord, sud, est, ouest.

La plupart d'entre eux décriront leur chemin de l'une de ces façons

- 7 à droite, 6 en haut,
- 2 à droite, 2 en haut, 3 à droite, 4 en haut, 2 à droite,
- 5 à droite, 2 en haut, 2 à droite, 4 en haut,

que nous noterons

- $7d, 6h$,
- $2d, 2h, 3d, 4h, 2d$,
- $5d, 2h, 2d, 4h$.

Tous ces chemins sont de même longueur, mais il apparaît bien vite que les messages longs et compliqués sont susceptibles d'être mal compris et entraînent des erreurs.

La contrainte supplémentaire de simplifier les indications au maximum s'impose alors d'elle-même. Ainsi, en regroupant les déplacements² vers la droite et vers le haut, on obtient pour tous ces chemins : $7d, 6h$ ou $6h, 7d$. Dans ce codage, l'ordre dans lequel on note les déplacements horizontaux et verticaux n'a pas d'importance.

Certains élèves auront dessiné un chemin plus long, comme par exemple $1h, 1g, 2h, 6d, 1h, 2d, 2h$, ce qui donne après regroupement des déplacements dans le même sens $8d, 1g, 6h$.

Le message peut encore être réduit en observant que le déplacement de 1 vers la droite est compensé par le déplacement de 1 vers la gauche, ainsi on obtient également $7d, 6h$.

Tous les chemins de A à B peuvent donc s'écrire $7d, 6h$ après regroupement des déplacements dans une même direction et en soustrayant ceux qui vont en sens contraires. Notons AB le déplacement de A à B obtenu après cette réduction. De la même manière, le déplacement AC pourra s'écrire $4g, 3h$ et AD , $1g, 6b$. D'autres déplacements comme BC ou CD peuvent être examinés si nécessaire. Inversement, les élèves constateront qu'il leur est toujours possible de placer sans ambiguïté le point P tel que AP s'écrit $2d, 8b$.

Une activité similaire est alors proposée sur une feuille munie d'un réseau de parallélogrammes (figure 5).

² Dans ce contexte, le mot déplacement utilisé tout d'abord dans un sens naïf, sera précisé peu à peu au cours de l'activité.

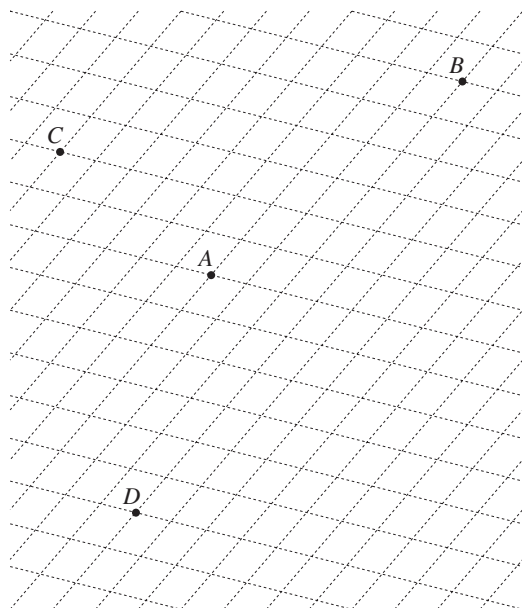


Fig. 5 : 4 points sur un réseau de parallélogrammes

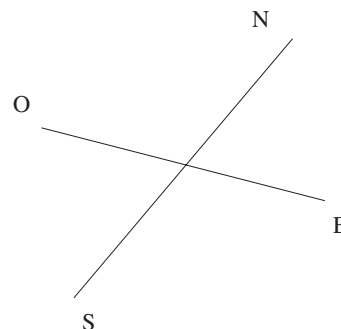


Fig. 6 : codage

Les symboles de codage d , g , h , b ne conviendront sans doute plus pour décrire les chemins sur cette figure. Les élèves ne manqueront pas de suggérer un codage adéquat. Pour la suite de cette discussion, nous adopterons le codage illustré par la figure 6, par analogie avec les plans des villes.

Les déplacements AB , AC et AD s'écrivent alors

- AB : 2E, 6N,
- AC : 6W, 2N,
- AD : 3E, 6S;

et le point E tel que BE s'écrit 5W, 4S peut être placé sans ambiguïté.

On peut alors s'interroger sur la nécessité de disposer de quatre symboles de codage puisqu'il n'y a en fait que deux directions, et sur chacune d'entre elles deux sens. Les élèves, qui ont déjà manipulé des repères auparavant, proposeront par exemple de garder d et h pour le quadrillage (E et N pour le réseau de parallélogrammes) et de compter négativement les déplacements vers la gauche et vers le bas (vers l'ouest et le sud). Ceci revient à orienter chacune des deux directions privilégiées sur ces grilles. Dans cette nouvelle optique, on écrira $-3d, 5h$ au lieu de $3g, 5h$ et $-5d, -8h$ au lieu de $5g, 8b$. C'est donc bien l'introduction des nombres négatifs qui nous permet de réduire à deux le nombre des symboles de codage. Ainsi, tout déplacement sur une de ces grilles pourra être représenté par une expression du type $\alpha d, \beta h$ ou $\beta h, \alpha d$, où α et β sont des nombres entiers, positifs ou négatifs.

Est-il possible de simplifier encore le codage pour ne garder que les deux nombres ?

Le professeur amènera les élèves à la conclusion qu'il faut convenir d'un

ordre pour énoncer ces nombres. Par exemple, si le premier nombre représente le déplacement sur la direction gauche-droite, et le deuxième, le déplacement sur la direction bas-haut, il n'y aura plus d'ambiguïté.

Ainsi, sur le quadrillage,

- $7d, 4h$ est noté $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$;
- $3g, 5h$ est noté $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$;
- $5g, 8b$ est noté $\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Il convient d'insister sur l'importance de la convention à propos de la disposition des nombres. En effet, s'il est indifférent d'écrire $7d, 4h$ ou $4h, 7d$ pour désigner univoquement le déplacement AB , le couple $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ représente le déplacement $7d, 4h$, c'est-à-dire AB , tandis que le couple $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ représente le déplacement $4d, 7h$, différent de AB .

Nous avons choisi de disposer les couples sous forme de colonnes pour préparer le vecteur colonne du calcul matriciel et pour éviter la confusion avec les couples de coordonnées (le lien sera explicité plus tard). De plus, les différentes opérations sur les couples, qui se font terme à terme, se voient mieux dans cette disposition où les termes correspondants sont sur une même ligne.

Dans les deux cas qui viennent d'être examinés, il apparaît que deux directions suffisent pour décrire un déplacement quelconque sur le réseau. Les élèves reçoivent alors une feuille munie d'un réseau triangulaire et on leur demande de décrire les déplacements de A à B et de A à C (figure 7).

Peut-on encore décrire ces déplacements au moyen de deux symboles ?

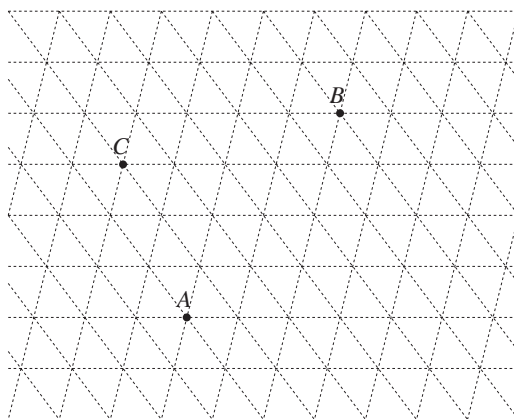


Fig. 7 : 3 points sur un réseau triangulaire

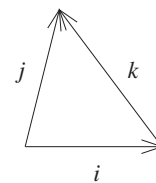


Fig. 8 : orientation des 3 directions

Trois directions privilégiées, que nous noterons i, j, k , se dégagent sur le réseau de triangles. Munissons chacune d'une orientation : de gauche à

droite pour la direction i , de bas en haut pour les directions j et k , comme le montre la figure 8. Pour décrire le déplacement AB , les élèves proposeront spontanément $2i, 4j$ qui semble le plus naturel, tandis que pour AC , ils pourraient proposer $1i, 3k$, ou $1j, 2k$, ou encore $-2i, 3j$, ou même $-1i, 2j, 1k$. Il apparaît néanmoins que deux symboles suffisent encore pour décrire les déplacements sur le réseau triangulaire ; une façon de s'en convaincre est de remarquer que, si on supprime une des trois directions, on ne modifie pas les nœuds du réseau. Cependant, il n'y a plus unicité de l'écriture puisque les élèves proposent différentes solutions, suivant les deux directions qu'ils ont choisies parmi les trois directions du réseau. Il est cependant possible de passer d'une écriture à une autre si on remarque que

- $1i, 1k$ peut remplacer $1j$;
- $1j, -1k$ peut remplacer $1i$;
- $-1i, 1j$ peut remplacer $1k$.

On demande aux élèves de le vérifier sur les différentes formes proposées pour AC .

Peut-on écrire AB en utilisant seulement i, k ou j, k ?

AB peut s'écrire $6i, 4k$ ou $6j, -2k$. Les déplacements sur le réseau triangulaire peuvent donc également s'exprimer au moyen de deux directions, mais il faudra faire un choix parmi i, j, k . Ils pourront donc être représentés par des couples de différentes manières.

- Pour le choix des directions i, j , dans cet ordre,
 - AB sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;
 - AC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
 - BC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Pour le choix des directions i, k , dans cet ordre,
 - AB sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$;
 - AC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;
 - BC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Pour le choix des directions j, k , dans cet ordre,
 - AB sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$;
 - AC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
 - BC sera représenté par le couple $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On peut à nouveau conclure que deux directions suffisent pour décrire tous les déplacements, mais que les couples associés à chaque déplacement dépendent du choix des deux directions. Cependant, dès que deux directions orientées ont été choisies dans un ordre déterminé, le couple associé à chaque déplacement est unique.

Échos des classes

Le travail sur le quadrillage et le réseau de parallélogrammes se fait rapidement. Les élèves sont plongés dans le contexte familier du repérage dans le plan. Ils conçoivent facilement que deux nombres suffisent pour décrire un déplacement et qu'il est nécessaire d'adopter une convention pour l'ordre de ces deux nombres.

Le travail sur le réseau triangulaire prend plus de temps (une période de cours) mais permet de faire progresser considérablement toute une série d'intuitions concernant l'expression des vecteurs dans une base.

Même si on ne prononce pas des expressions comme *dépendance linéaire*, *indépendance linéaire*, *famille libre*, *famille génératrice*, les élèves perçoivent intuitivement que, dès qu'on se donne deux déplacements de directions différentes, ils engendrent tous les déplacements du plan. De plus, l'activité montre clairement que les deux déplacements « de base » déterminent univoquement les *composantes* des déplacements, mais que ces composantes sont différentes chaque fois que l'on change de base. Les élèves comprennent aussi qu'il est possible de calculer les composantes des déplacements dans une nouvelle base dès qu'on connaît les composantes des déplacements dans l'ancienne et les composantes des déplacements de l'ancienne base dans la nouvelle (c'est ce que l'on fait quand on remarque que $1i, 1k$ peut remplacer $1j$, par exemple).

1.3 Opérations sur les déplacements

Comment s'y prendre ?

Pour définir les opérations sur les déplacements, revenons dans le plan muni d'un quadrillage et de quatre points comme dans la figure 9.

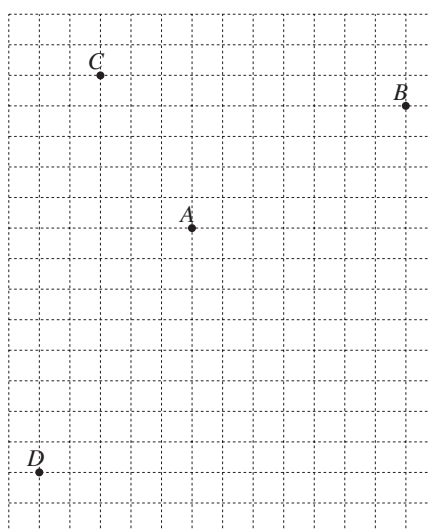


Fig. 9 : Addition de déplacements.

Addition de déplacements

Premier cas : l'origine du second déplacement coïncide avec l'extrémité du premier.

Si après le déplacement AB noté $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, on effectue le déplacement BC noté $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$, on s'est déplacé de A en C . On demande aux élèves de décrire le déplacement AC . Deux modes de pensée peuvent guider leur réflexion.

Certains d'entre eux penseront à regarder AC sur le dessin et diront que AC se note $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. On leur pose alors la question suivante.

Une relation existe-t-elle entre les trois couples de nombres, et si oui, laquelle ?

Les élèves constatent facilement que

$$-3 = 7 + (-10) \quad \text{et} \quad 5 = 4 + 1.$$

Cette observation nous incite à parler d'addition de déplacements. Cette opération sera notée

$$AB + BC = AC$$

et pour les couples correspondants

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

D'autres penseront à réinterpréter les couples en termes de déplacements horizontaux et verticaux. En effectuant BC après AB , le déplacement obtenu est 7 à droite suivi de 10 à gauche, et 4 vers le haut suivi de 1 vers le haut. Ils concluront que le résultat est donc 3 à gauche et 5 en haut, ce qui correspond au couple $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. L'opération qu'ils font spontanément est l'addition terme à terme des couples $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il est donc naturel d'interpréter cette opération comme une somme et on écrira

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Après avoir vérifié sur le dessin que $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est bien le couple qui représente AC on écrit aussi

$$AB + BC = AC.$$

Cette relation est connue sous le nom de « relation de Chasles ».

Si après AB , on effectue le déplacement en sens contraire BA , on constate que

$$AB + BA = AA.$$

Le dessin montre que le couple associé à BA est $\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$, l'écriture en termes de couples de la relation précédente est alors

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On définit ainsi le *déplacement nul*, qui consiste à rester sur place, et BA comme le *déplacement opposé* de AB , ce qui permet d'écrire

$$BA = -AB \text{ et } \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ceci nous permet d'établir le lien entre l'addition et la soustraction des déplacements.

On exploite ces résultats pour répondre à la question ci-dessous.

Connaissant CD noté $\begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}$ et CA noté $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, quel est le déplacement AD tel que $CA + AD = CD$?

Des élèves cherchent le couple qui, additionné à $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, donne $\begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}$, et trouvent $\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$ pour AD . Ils écriront

$$CA + AD = CD \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

D'autres penseront à utiliser la relation de Chasles et écriront

$$AD = AC + CD \text{ ou } AD = -CA + CD,$$

et pour les couples correspondants

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Deuxième cas : l'origine du second déplacement ne coïncide pas avec l'extrémité du premier.

Dans un premier temps, on demande aux élèves de dessiner un déplacement quelconque, par exemple le déplacement $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, sur un quadrillage vierge. Ils le placeront évidemment en des endroits différents de la feuille. Ce déplacement, noté AB , peut être visualisé en traçant le segment qui joint son origine A à son extrémité B . Le couple $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ détermine la *direction* du déplacement, son *sens* et sa *longueur*, mais ne donne aucune indication sur l'endroit où il faut le dessiner sur la feuille.

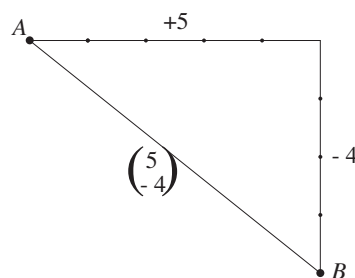


Fig. 10

Une discussion au sein de la classe amène à la conclusion que tous les dessins sont corrects, qu'ils représentent tous le même déplacement, ou des *déplacements égaux*. Il apparaît donc qu'un même déplacement peut être dessiné en une infinité d'endroits dans le plan et qu'on pourra choisir parmi toutes ces possibilités celle qui convient le mieux à chaque situation. Les élèves évoqueront peut-être l'analogie avec les translations.

Ceci va permettre de définir l'addition de déplacements même si l'origine du second déplacement ne coïncide pas avec l'extrémité du premier sur le dessin. Il suffira de dessiner une autre représentation du deuxième déplacement. Ainsi pour définir $AB + CD$, on effectue le déplacement AB , puis le déplacement égal à CD , dont l'origine est en B et l'extrémité en E . On peut encore dire que BE est la représentation du déplacement CD , dont l'origine coïncide avec l'extrémité de AB . Les élèves sont invités à placer le point E sur le quadrillage (voir figure 12 à la page 232). On écrira

$$AB + CD = AB + BE = AE.$$

On constate que AE s'écrit $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ et que

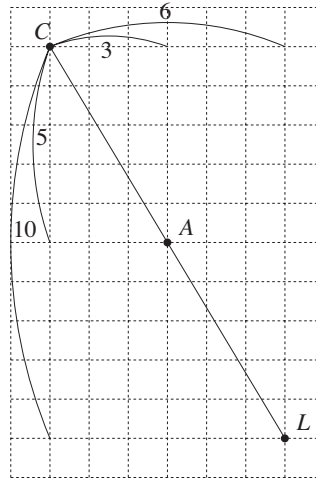
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

On pourrait aussi dessiner une autre représentation de AB , dont l'extrémité coïncide avec C , mais, dans ce cas, le dessin sort du cadre de la feuille. On peut encore imaginer de remplacer AB et CD par des déplacements $A'B'$ et $B'E'$, tels que $A'B' = AB$ et $B'E' = CD$. Les déplacements $A'B'$ et $B'E'$ sont ainsi placés dans les conditions d'application de la relation de Chasles et leur somme est le déplacement $A'E'$. On invite les élèves à réaliser cette construction en choisissant pour B' un nœud du quadrillage tel que le dessin soit entièrement contenu dans le cadre. La comparaison du déplacement AE et des différentes représentations de $A'E'$ montre bien que les sommes obtenues sont égales; le couple de nombres est toujours $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ pour tous les déplacements $A'E'$.

Multiplication de déplacements par un nombre

Quel est le déplacement CL qui, en partant de C , mène deux fois plus loin que CA dans la même direction et le même sens³ ?

³ Pour multiplier un vecteur par deux, différents modes de pensée coexistent dans les

Fig. 11 : Construction de CL

Après avoir placé L et observé la configuration de Thalès de la figure 11, on constate que CL correspond à $\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$. Il est donc naturel d'adopter la convention d'écriture

$$CL = 2CA \text{ et } \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} ;$$

ainsi que

$$CL = -2AC \text{ et } \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} ;$$

ou encore

$$CA = \frac{1}{2}CL \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} ;$$

$$AC = \frac{-1}{2}CL \text{ et } \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} .$$

Ces nombres, par lesquels on multiplie les déplacements (et les couples) sont appelés *scalaires*⁴ pour les distinguer des nombres qui composent les couples représentant les déplacements.

On peut se demander où se trouve le point N tel que

$$CN = \frac{1}{2}CA \text{ correspondant au couple } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

Le point N n'est plus un nœud du quadrillage. De par leur définition, les déplacements CN et CL , multiples de CA , ont la même direction que CA ,

esprits : ajouter le vecteur à lui-même, aller deux fois plus loin dans la même direction et le même sens ou doubler chaque composante.

⁴ C'est à W. R. HAMILTON que nous devons l'introduction des vocables *vecteurs* et *scalaires*, dans ses *Elements of Quaternions* [1866]. Les *scalaires* sont des nombres qui permettent la comparaison de *vecteurs* qui sont sur un même axe, axe qu'HAMILTON appelait *échelle* (en anglais *scale*).

ce qui implique l'alignement des points A , C , N et L . Par contre, le point E , qui, dans un premier temps, semblait aligné avec A et C ne peut l'être car AE n'est pas un multiple de CA . En effet, il n'existe aucune valeur de λ telle que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ces observations sont illustrées par la figure 12.

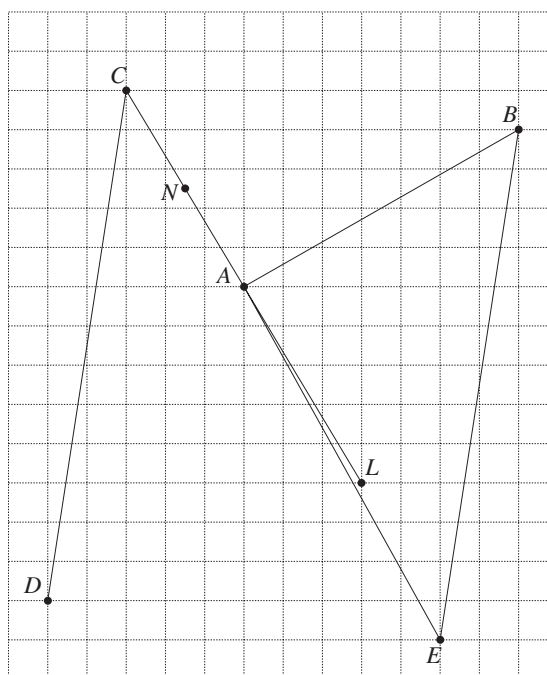


Fig. 12 : Opérations sur les déplacements

La multiplication du déplacement CA par le scalaire $\frac{1}{2}$ nous a permis d'atteindre le point N qui n'est plus un nœud du quadrillage.

Comment, à partir d'un nœud du quadrillage, atteindre d'autres points qui ne sont pas des nœuds ?

Les élèves associeront sans doute la multiplication par un scalaire non entier au fait d'atteindre, à partir d'un nœud du quadrillage, un point qui ne l'est pas.

Les deux opérations de somme et de multiplication par un scalaire peuvent être combinées pour produire une somme de multiples de deux ou plusieurs déplacements. Par exemple, on peut définir le déplacement AX de la manière suivante : $AX = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AC$. Les élèves sont invités à le construire. On dit que le déplacement AX est une *combinaison linéaire* des déplacements AB et AC , les scalaires $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont les *coefficients* de cette combinaison linéaire.

La multiplication par un scalaire nous a amenés à considérer des déplacements dont le point d'arrivée est un point quelconque du plan. Il faut

donc étendre les opérations à des déplacements dont les extrémités ne sont plus des nœuds du réseau. On perçoit clairement que le point de départ et le point d'arrivée suffisent pour déterminer un déplacement. Dorénavant, nous représenterons toujours celui-ci par un segment de droite joignant le point de départ au point d'arrivée (comme dans les figures 10 à 12). Ce segment est orienté du point de départ vers le point d'arrivée, orientation qui transparaît d'ailleurs dans l'écriture du déplacement, AB étant le déplacement qui va de A vers B et BA son opposé de B vers A . Nous pouvons étendre de manière naturelle les opérations définies sur les déplacements liés au quadrillage à tous les déplacements du plan.

Cependant, pour exprimer chacun des déplacements au moyen d'un couple de nombres comme nous avons pu le faire jusqu'à présent, il faudra choisir deux directions, munies chacune d'un sens et d'une unité. Notons i et j les déplacements unitaires, dans le sens positif, dans chacune de ces deux directions. Si nous pouvons exprimer tout déplacement du plan comme combinaison linéaire de ces deux déplacements « de base », alors, dans l'expression $AB = \lambda i + \mu j$, les coefficients λ et μ déterminent le couple $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ associé à ce déplacement. En effet, les couples associés aux déplacements élémentaires i et j sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et l'écriture sous forme de couples de la combinaison linéaire $\lambda i + \mu j$ est $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$. Les élèves sont invités à montrer que cette décomposition est toujours possible dans un cas général.

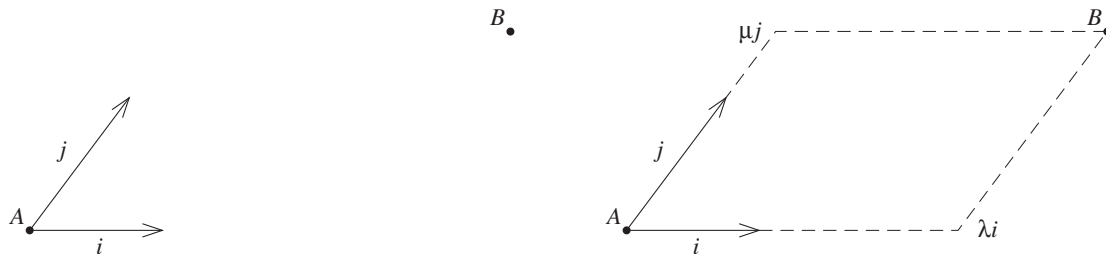


Fig. 13 : Cas général

Remarquons que le choix de deux déplacements « de base » induit dans le plan un réseau de parallélogrammes, déterminé par les directions et les longueurs de i et j . Le choix très naturel et le plus souvent utilisé est celui de deux directions perpendiculaires, l'une horizontale, orientée de gauche à droite, l'autre verticale, orientée de bas en haut, et sur chacune d'elles, la même unité de longueur. Le réseau sous-jacent est alors un quadrillage, mais il est bien entendu que les déplacements ne sont plus liés aux nœuds du réseau. Cependant, comme le quadrillage permet une visualisation plus claire des problèmes, nous continuerons à le faire apparaître dans la plupart des dessins.

Propriétés des opérations

Les exercices suivants et d'autres analogues sont proposés aux élèves. Leur intérêt est non seulement de faire manipuler les opérations qui viennent d'être définies, mais surtout de dégager petit à petit les propriétés du calcul vectoriel.

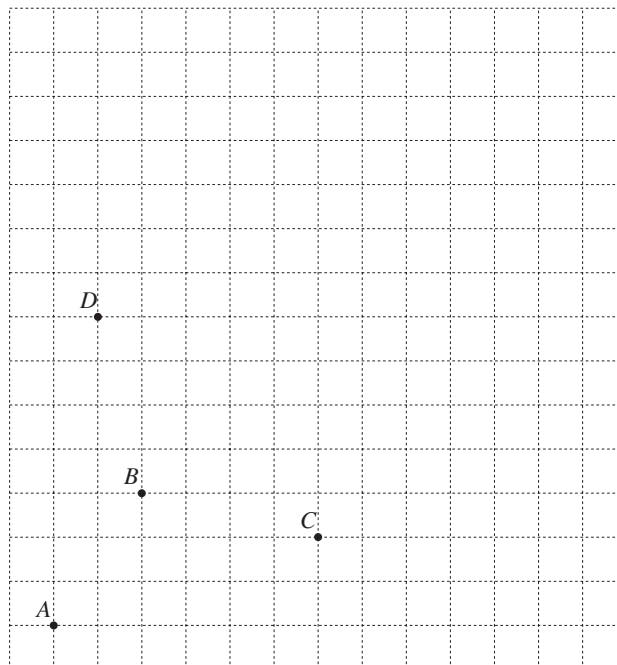


Fig. 14 : Propriétés des opérations

1. Représenter et calculer les couples correspondant à
 - $(AB + BC) + CD$ et $AB + (BC + CD)$;
 - $AB + BC$ et $BC + AB$;
 - $2(AB + BC)$ et $2AB + 2BC$;
 - $2AB + 3AB$ et $(2 + 3)AB = 5AB$;
 - $5(\frac{2}{3}AB)$ et $(5 \cdot \frac{2}{3})AB = \frac{10}{3}AB$.
2. Imaginer une construction géométrique, à partir du quadrillage, pour déterminer
 - le point E tel que $AE = \frac{8}{5}AB$;
 - le point F tel que $CF = \frac{-3}{4}CB$;
 - le point R tel que $AR = \sqrt{2}AD$.

Indication : pour chacun des cas, choisir sur le quadrillage une unité adaptée à la construction, suffisamment grande pour éviter les imprécisions.

Les propriétés qui sont dégagées des exercices proposés et reprises en synthèse n'ont pas été démontrées. C'est un choix volontaire afin de ne pas allonger ce travail. Il n'est pas malsain de ne pas tout prouver d'emblée, surtout quand ce qu'on a à prouver paraît si naturel.

Synthèse

Addition de déplacements

- La somme de deux déplacements tels que l'origine du second coïncide avec l'extrémité du premier est définie par la relation de Chasles $AB + BC = AC$. En particulier : $AB + BA = AA$.
 BA est le déplacement opposé de AB .
 AA est le déplacement nul.

- Si les couples associés à AB et à BC sont respectivement $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, AC est représenté par le couple $\begin{pmatrix} \alpha + \lambda \\ \beta + \mu \end{pmatrix}$, BA par le couple $\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$, le déplacement nul par le couple $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Des déplacements égaux sont représentés par le même couple.

- La somme de deux déplacements tels que l'origine du second ne coïncide pas avec l'extrémité du premier est définie par

$$AB + CD = AB + BE = AE$$

où BE est le déplacement égal à CD , d'origine B .

- Propriétés :

$$\begin{aligned}(AB + BC) + CD &= AB + (BC + CD), \\ AB + BC &= BC + AB.\end{aligned}$$

Multiplication par un scalaire

- kAB est le déplacement qui va k fois plus loin que B dans la direction de AB , à partir de A . Si k est positif, le sens est celui de AB , sinon, celui de BA .
- kAB est représenté par le couple $\begin{pmatrix} k\alpha \\ k\beta \end{pmatrix}$.
- Propriétés :

$$\begin{aligned}k(AB + BC) &= kAB + kBC, \\ kAB + \ell AB &= (k + \ell)AB, \\ k(\ell AB) &= (k\ell)AB.\end{aligned}$$

Échos des classes

Le fait de travailler simultanément sur les déplacements du plan et sur les couples de nombres qui y sont associés permet de confronter à chaque étape différents modes de raisonnement. Pour certains élèves, c'est l'aspect graphique qui est prépondérant, tandis que d'autres raisonnent d'emblée sur les composantes. Le va-et-vient permanent entre le dessin et l'écriture des relations, soit en termes de déplacements, soit en termes de couples, permet de faire progresser les différents aspects en même temps et de lever quelques difficultés. Ainsi, lorsque les élèves ont proposé un peu rapidement

le couple $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ pour le déplacement opposé à $AB = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, le retour au dessin leur a permis de corriger rapidement l'erreur.

Tout au long de ce travail d'élaboration des définitions des opérations sur les déplacements, les différents raisonnements qui guident les élèves éclairent ces opérations sous divers aspects, ce qui contribue à donner du sens aux définitions.

Lors des exercices de construction de multiples de déplacements, les élèves ont imaginé des stratégies très variées pour utiliser le quadrillage de la manière la plus efficace. Par contre, lorsque le professeur a proposé des exercices de construction (additions et multiplications par un scalaire) sur des feuilles dépourvues de quadrillage, les élèves ont été très perturbés. Une discussion a été nécessaire pour convaincre chacun que, si la présence du quadrillage sur la feuille permet d'effectuer rapidement ces opérations, elle n'est nullement indispensable. La somme de deux déplacements par la relation de Chasles, la construction d'un déplacement égal à un autre, ou d'un multiple d'un déplacement par une configuration de Thalès ne dépendent pas de la présence d'un quelconque réseau. Même convaincus, certains élèves étaient cependant si déstabilisés qu'ils ont essayé de « tricher » en glissant subrepticement une feuille quadrillée sous la feuille blanche pour tenter d'apercevoir le quadrillage par transparence.

Quelques exercices formels de fixation des propriétés ont fait apparaître des erreurs comme

$$2BM + MC = 3BC \quad \text{ou} \quad AM - MB = -AB,$$

le recours au dessin a permis de les corriger.

Le foisonnement des idées a été si grand tout au long de cette phase de l'activité que le besoin de faire le point et de rassembler les résultats obtenus de manière claire s'est fait sentir impérieusement. C'est pourquoi la synthèse concernant les opérations sur les déplacements, qui n'avait pas été prévue au départ, s'est avérée indispensable.

1.4 Langage PostScript

Comment s'y prendre ?

Toutes ces manipulations un peu fastidieuses peuvent être remplacées par une activité utilisant le langage PostScript (langage de commande d'imprimante). Les professeurs intéressés pourront se procurer sur internet à l'adresse URL

<http://www.profor.be/crem/index.htm>

le document CalculVectoriel.eps qui contient déjà certaines instructions PostScript. Celles-ci dessinent le quadrillage et positionnent le point A . Il est conseillé de faire une copie de ce document avant d'y faire travailler les élèves. Toutes les opérations effectuées sur le quadrillage peuvent être illustrées au moyen de ce langage. Pour visualiser les effets des commandes PostScript, il faut télécharger un interpréteur :

– sur Macintosh : MacGS que l'on trouve sur le site internet

<http://www.cs.wisc.edu/~ghost/macros/index.htm>
 – pour windows : GSView que l'on trouve sur le site internet
<http://www.cs.wisc.edu/~ghost/gsview/index.html>

Voici comment se présente ce document :

```

%!PS-Adobe-2.0 EPSF-1.2
%%BoundingBox: 110 139 513 769

...

%*****
% Commandes introduites par l'utilisateur *
%*****

allerenA
7 4 rlineto
(B) point
-10 1 rlineto
(C) point
allerenA
-3 5 rlineto

%*****

stroke
grestore
% Dessin du quadrillage
[1 s div 1 s div] 0 setdash vert
[1 s div 1 s div] 0 setdash hor

```

showpage

Ce fichier peut être ouvert avec n'importe quel éditeur de texte, de préférence le plus simple possible comme, par exemple, le Bloc-notes de Windows, ou Alpha pour Macintosh. Si on utilise Word, ou tout autre traitement de texte, il faut veiller à sauver le document en mode texte et non en mode Word (ou autre).

Les élèves inséreront leurs commandes dans un espace réservé qui se situe en dessous du commentaire « commandes de l'utilisateur » et au-dessus d'une ligne d'astérisques. Le déplacement $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ est obtenu au moyen de la commande

```
7 4 rmoveto
```

À cet endroit on positionne un point (B par exemple) au moyen de la commande point ; on le nomme B par la commande

(B) point

Si on souhaite visualiser le déplacement en ligne droite, on remplace la commande

```
rmoveto
```

par la commande

```
rlineto.
```

La commande

```
allerenA
```

permet de retourner au point A . Pour faire disparaître le quadrillage, on place le caractère

```
%
```

devant chacune des deux lignes qui suivent

```
% dessin du quadrillage
```

Pour illustrer une addition, par exemple,

$$AB + BC = AC \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

les commandes seront

```
7 4 rlineto
```

```
(B) point
```

```
-10 1 rlineto
```

```
(C) point
```

Après avoir visualisé le résultat, on ajoute les commandes

```
allerenA
```

```
-3 5 rlineto
```

Ces deux dernières commandes ont pour effet de tracer le déplacement somme AC .

Pour illustrer une multiplication par un scalaire, par exemple, $AM = 2AC$, les commandes seront

```
allerenA
```

```
-3 5 2 rlinetomul
```

```
(M) point
```

Si on souhaite effectuer une opération à partir d'un point du quadrillage autre que A , par exemple C , on pourra atteindre celui-ci à partir de A de la manière suivante

```
allerenA
```

```
-3 5 rmoveto
```

Ceci permettra ensuite d'effectuer le déplacement $CL = 2CA$

```
3 -5 2 rlinetomul
```

```
(L) point
```

On obtiendra $CN = \frac{1}{2}CA$ comme suit⁵ :

```
allerenA
-3 5 rmoveto
3 -5 1 2 div rmovetomul
(N) point
```

On peut encore placer $AQ = \frac{-1}{3}AB$:

```
allerenA
7 4 1 3 div neg rlinetomul
et AR =  $\sqrt{2}AL$ 
```

```
allerenA
3 -5 2 sqrt rlinetomul
(R) point
```

Les élèves vérifieront que les points obtenus par constructions géométriques coïncident avec ceux placés par le logiciel. La commande

```
a b k rlinetomul
est, en fait, équivalente à
k a mul k b mul rlineto
ce qui traduit la propriété
```

$$k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}.$$

1.5 Déplacements dans l'espace

Comment s'y prendre ?

Une démarche analogue à celle décrite aux sections 1.2 et 1.3 pour introduire les déplacements dans le plan et les opérations sur ceux-ci permet d'aborder les déplacements dans l'espace.

Décrire le déplacement qui mène du point A au point B (figure 15).

Les élèves imagineront probablement un codage du type droite-gauche (d-g), avant-arrière (av-ar), haut-bas (h-b). Le déplacement AB sera alors décrit comme 4 en avant, 1 à gauche et 2 vers le bas, que nous noterons, de manière plus condensée,

4av, 1g, 2b ou encore 1g, 4av, 2b.

Les élèves prennent conscience qu'il faut trois directions pour décrire les déplacements de l'espace, et que, sur chacune d'elles, il y a deux sens. Cette observation permet de réduire le nombre des symboles de codage à trois au lieu de six. On conviendra de garder les symboles av, d, et h, de compter positivement les déplacements vers l'avant, vers la droite et vers le haut et négativement les déplacements vers l'arrière, vers la gauche et vers le bas.

⁵ PostScript utilise la notation polonaise inverse ; ainsi 1 2 div effectue la division de 1 par 2.

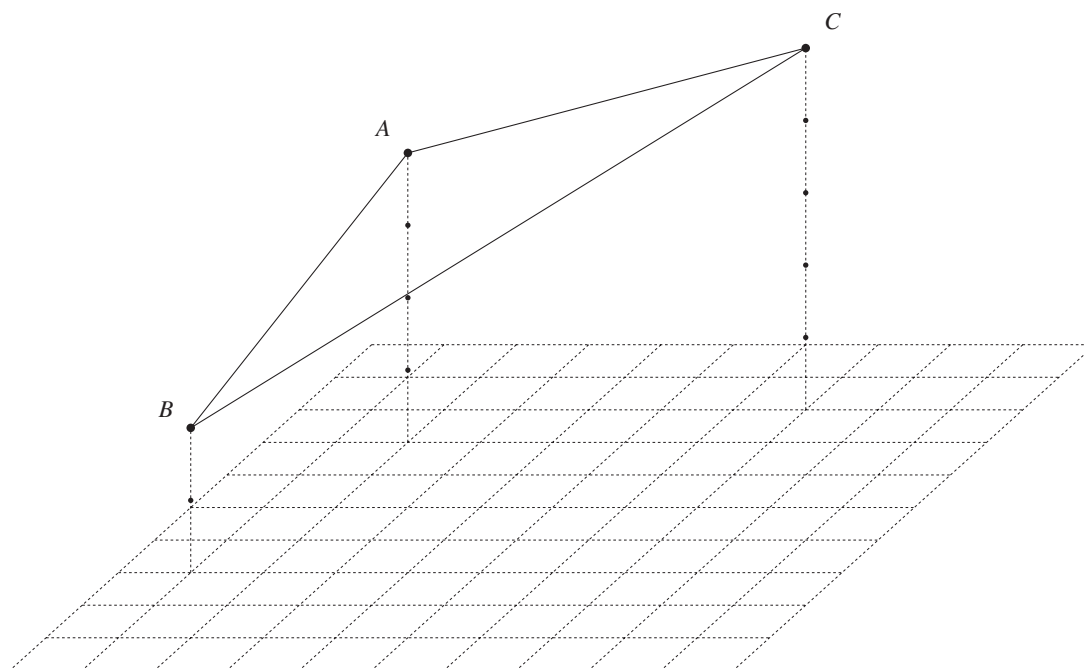


Fig. 15 : Déplacements et addition de déplacements dans l'espace

Le déplacement AB sera alors noté : $4a_v, -1d, -2h$.

Si on veut encore simplifier le codage pour ne garder que les nombres, il faut convenir en plus d'un ordre pour les énoncer. Par exemple, si le premier nombre représente le déplacement sur la direction arrière-avant, le deuxième le déplacement sur la direction gauche-droite, et le troisième le déplacement sur la direction bas-haut, il n'y aura pas d'ambiguïté. Le

déplacement AB sera noté $AB = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

De la même manière, on a

$$BC = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } AC = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Addition de déplacements

Comme dans le plan, on a la relation de Chasles

$$AB + BC = AC,$$

et, pour les triples correspondants, l'addition s'écrit

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'origine du second déplacement ne coïncide pas avec l'extrémité du premier, on remplace l'un des déplacements par un déplacement équivalent

de manière à retrouver une situation où la relation de Chasles est d'application.

L'opposé du déplacement AB est le déplacement $BA = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a $AB + BA = AA$ (déplacement nul) et, pour les triples correspondants,

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les propriétés de l'addition des déplacements dans l'espace sont les mêmes que dans le plan.

Multiplication de déplacements par un scalaire

On définit kAB comme le déplacement qui va k fois plus loin que B dans la direction de AB , à partir de A . Si k est positif, le sens est celui de AB , sinon, celui de BA . La figure 16 illustre deux exemples de multiplication scalaire.

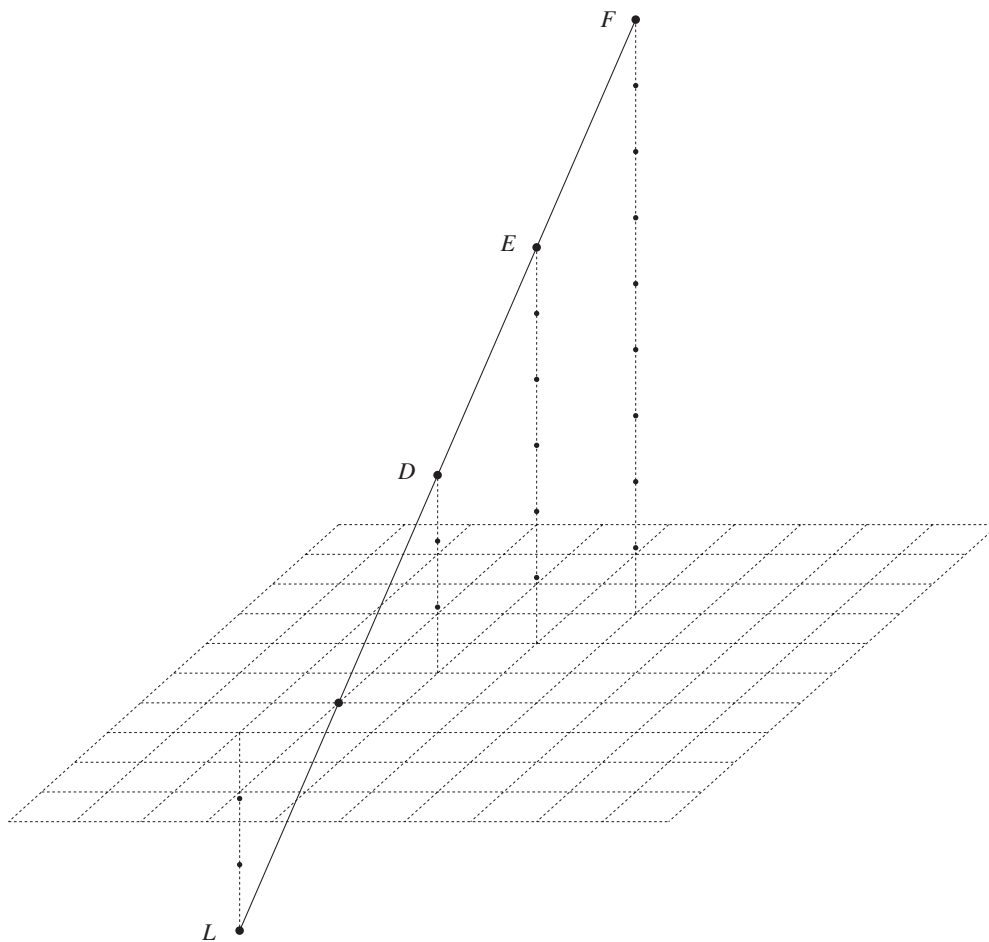


Fig. 16 : Multiplication scalaire dans l'espace

On a

$$DF = 2DE \text{ et, pour les triples correspondants } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$DL = -2DE \text{ et, pour les triples correspondants } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Les propriétés de la multiplication scalaire des déplacements dans l'espace sont les mêmes que dans le plan.

1.6 Polynômes

Comment s'y prendre ?

Après une première approche des espaces vectoriels par des gestes très quotidiens, proches du bon sens, comme se déplacer dans un plan de ville, le but de cette activité est de montrer que la structure ainsi dégagée peut se retrouver dans un contexte très différent. Il s'agit donc d'une démarche purement intellectuelle, qui peut intéresser certains élèves, mais qu'il ne conviendra sans doute pas d'aborder dans toutes les classes.

Dès la troisième, les élèves connaissent l'addition des polynômes et leur multiplication par un scalaire. Nous allons éclairer ces opérations sous un jour nouveau en les replaçant dans un contexte semblable à celui dans lequel nous venons de travailler.

Considérons tout d'abord l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, dont la forme générale, ordonnée par puissances croissantes de x , est $a + bx + cx^2$.

Chaque polynôme peut être considéré comme une combinaison linéaire de trois polynômes « de base » 1, x et x^2 , avec les coefficients a , b , c . Ainsi,

$$a + bx + cx^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2.$$

Ceci permet d'associer à chaque polynôme un triple de nombres $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Les élèves sont invités à écrire les triples de nombres correspondant aux polynômes « de base » 1, x et x^2 et à retrouver le triple $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme

combinaison linéaire des trois triples « de base ». Ils pourront comparer cette décomposition avec celle effectuée sur les couples de nombres associés aux déplacements du plan.

On demande aux élèves de calculer

1. $P(x) + Q(x)$
2. $-2P(x) + 3Q(x)$
3. $Q(x) - R(x)$

où $P(x) = 3 - 2x + 5x^2$, $Q(x) = -2 + 7x + x^2$ et $R(x) = x^2 + 1$ et de transcrire ces différentes opérations en termes de triples associés.

La comparaison avec les opérations sur les couples associés aux déplacements du plan s'impose d'elle-même.

Retrouve-t-on pour les opérations sur les polynômes des propriétés semblables à celles dégagées pour les déplacements dans un plan à la page 234 ?

Les élèves vérifient sur les exemples proposés que

$$\begin{aligned}(P(x) + Q(x)) + R(x) &= P(x) + (Q(x) + R(x)), \\ P(x) + Q(x) &= Q(x) + P(x), \\ k(P(x) + Q(x)) &= kP(x) + kQ(x), \\ kP(x) + \ell P(x) &= (k + \ell)P(x), \\ k(\ell P(x)) &= (k\ell)P(x),\end{aligned}$$

où k et ℓ sont des scalaires quelconques. La connaissance que les élèves ont des opérations sur les polynômes leur permettra sans doute de dire que ces propriétés restent vraies pour n'importe quel polynôme. Si nécessaire, on peut proposer d'autres exemples pour les polynômes $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$.

Prolongement possible

Est-il possible de procéder de la même manière pour

- les polynômes de degré inférieur ou égal à 3,
- les polynômes de degré inférieur ou égal à 4,
- tous les polynômes ?

Combien de polynômes « de base » faudrait-il pour exprimer tout polynôme comme combinaison linéaire de ceux-ci ?

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, à 4, ... à n s'exprimeront comme combinaisons linéaires de 4, 5, ... $(n+1)$ « polynômes de base » et seront représentés par des quadruples, quintuples, ... $(n+1)$ -uplets. Il faudrait une infinité de « polynômes de base » pour exprimer tout polynôme comme combinaison linéaire de ceux-ci.

1.7 Suites arithmétiques

Comment s'y prendre ?

On montre aux élèves quelques débuts de listes de nombres qu'on leur demande de prolonger. Le professeur signalera aux élèves qu'en prolongeant indéfiniment ces listes de nombres, on obtient ce que les mathématiciens nomment *suites de nombres*. Chacun des nombres est appelé *terme* de la suite.

$S1$	0	1	2	3	4	5	...
$S2$	0	1	4	9	16	25	...
$S3$	1	3	5	7	9	11	...
$S4$	1	11	111	1 111	11 111	111 111	...
$S5$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
$S6$	2	5	8	11	14	17	...
$S7$	1	1	2	3	5	8	...
$S8$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	...
$S9$	1	-3	-7	-11	-15	-19	...
$S10$	3	$\frac{17}{4}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{27}{4}$	8	$\frac{37}{4}$	...

Parmi ces dix suites de nombres, y en a-t-il qui ont un mode de construction semblable ? Si oui, lesquelles ?

Dans les suites $S1$, $S3$, $S6$, $S9$ et $S10$, la valeur de chaque terme à partir du deuxième est obtenue en ajoutant une quantité constante à la valeur du terme qui précède. Ce type de suite est appelé *suite arithmétique* et la quantité constante ajoutée est la *raison* de la suite.

Les suites qui précèdent ont été « définies » par leurs six premiers termes.

Si on sait qu'il s'agit de suites arithmétiques, faut-il fournir autant de termes ? Quel nombre minimum d'informations faut-il donner pour qu'une telle suite soit entièrement connue ?

Des réponses variées que proposeront les élèves, nous retiendrons que la donnée des deux premiers termes t_1, t_2 ou celle du premier terme t_1 et de la raison r suffisent pour que la suite soit déterminée.

Y a-t-il une manière naturelle d'additionner deux suites, de les multiplier par un scalaire ?

Les élèves proposeront sans doute de faire ces opérations terme à terme. On leur demande alors de calculer, par exemple $S3 + S6$, $2S6$ et $2S10$.

$S3$	1	$\underbrace{2}$	3	5	7	9	11	...
$S6$	2	$\underbrace{3}$	5	8	11	14	17	...
$S3 + S6$	3	$\underbrace{5}$	8	13	18	23	28	...
$S6$	2	$\underbrace{3}$	5	8	11	14	17	...
$2S6$	4	$\underbrace{6}$	10	16	22	28	34	...
$S10$	3	$\underbrace{\frac{5}{4}}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{27}{4}$	8	$\frac{37}{4}$	...
$2S10$	6	$\underbrace{\frac{5}{2}}$	$\frac{17}{2}$	11	$\frac{27}{2}$	16	$\frac{37}{2}$	...

On observe sur ces exemples que la somme de deux suites arithmétiques est une suite arithmétique, ainsi que la multiplication d'une suite arithmétique par un scalaire.

Ces propriétés sont-elles vraies en toute généralité ?

Au cours de ces opérations, comment trouve-t-on les premiers termes et les raisons des suites obtenues ?

Les élèves sont invités à écrire les opérations sous une forme générale, par exemple,

$S1$	a	$a + r$	$a + 2r$	$\dots$
$S2$	b	$b + r'$	$b + 2r'$	$\dots$
$S1 + S2$	$a + b$	$a + b + (r + r')$	$a + b + 2(r + r')$	$\dots$
$kS1$	ka	$ka + kr$	$ka + 2kr$	$\dots$

La suite $S1$ est déterminée par les nombres a et r , nous l'écrivons sous forme de couple $\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix}$ par analogie avec les déplacements et les polynômes. De même, la suite $S2$ correspond au couple $\begin{pmatrix} b \\ r' \end{pmatrix}$. La suite

$$S1 + S2 \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} a + b \\ r + r' \end{pmatrix},$$

puisque son premier terme est $a + b$ et sa raison $r + r'$. De même, la suite

$$kS1 \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} ka \\ kr \end{pmatrix},$$

puisque son premier terme est ka et sa raison kr . Les opérations sur les suites se traduisent par les opérations correspondantes sur les couples :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ r' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + b \\ r + r' \end{pmatrix}, \\ k \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ka \\ kr \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve à nouveau des propriétés de la somme et de la multiplication par un scalaire, semblables à celles observées pour les déplacements dans un plan à la page 234 et pour les polynômes à la page 243. Elles peuvent être vérifiées dans le cas général, puisque les opérations sur les suites viennent d'être dégagées en termes de couples sous forme littérale. Les élèves vérifient que

$$\begin{aligned} (S1 + S2) + S3 &= S1 + (S2 + S3), \\ S1 + S2 &= S2 + S1, \\ k(S1 + S2) &= kS1 + kS2, \\ kS1 + \ell S1 &= (k + \ell)S1, \\ k(\ell S1) &= (k\ell)S1. \end{aligned}$$

Remarquons au passage l'évolution du niveau d'abstraction dans l'énoncé et la vérification des propriétés : pour les déplacements du plan, elles ont été mises en évidence sur des exemples ; pour les polynômes, elles ont été énoncées sous forme générale mais vérifiées sur des polynômes particuliers ; tandis que pour les suites, elles sont démontrées en toute généralité.

Prolongement possible

Cela signifie-il que toute suite arithmétique peut s'écrire sous forme de combinaison linéaire de deux suites arithmétiques « de base » ?

Si $\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, quelles sont les suites arithmétiques qui correspondent aux couples $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

On demande aux élèves d'écrire les suites S_3 , S_6 et S_{10} comme combinaisons linéaires des deux suites « de base »

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \dots \text{ et } 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \dots$$

Les élèves seront peut-être étonnés de constater que les suites arithmétiques, qui comportent une infinité de termes, peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires de deux suites arithmétiques « de base », tandis qu'une infinité de polynômes « de base » sont nécessaires pour exprimer tous les polynômes, alors que chacun d'eux ne comporte qu'un nombre fini de termes.

1.8 Synthèse : vers la structure d'espace vectoriel

Comment s'y prendre ?

Les élèves viennent de rencontrer quelques ensembles dont les éléments sont de natures très différentes. Néanmoins, les opérations effectuées sur ces objets, ainsi que les propriétés de ces opérations, présentent des ressemblances frappantes. Une discussion au sein de la classe, conduite par le professeur, devrait permettre de dresser la liste de ces points communs. La réflexion peut être suscitée par quelques questions.

Quelles sont les opérations qui ont été effectuées sur les éléments de ces différents ensembles ?

Quelles sont les propriétés de ces opérations qu'on retrouve dans les différents exemples ?

Retrouve-t-on les propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels ?

Expliquer comment, dans ces exemples, les éléments ont pu être associés à des n -uples et comment les opérations de somme et de multiplication par un scalaire se transposent en termes d'opérations sur les n -uples.

Que ce soient les déplacements (dans le plan ou l'espace), les polynômes ou les suites arithmétiques, nous avons pu

- les additionner,
- les multiplier par un scalaire,
- en faire des combinaisons linéaires,
- les exprimer comme combinaisons linéaires d'un certain nombre d'éléments « de base ».

Examinons tout d'abord les propriétés de l'addition en les comparant à celles de l'addition des nombres réels. Dans chacun des cas, on retrouve

l'associativité et la commutativité de l'addition. On s'interroge alors sur l'existence d'un élément neutre et d'un opposé pour chaque élément.

Dans l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux,
 – quel est l'élément nul ?
 – quel est le polynôme opposé à $P(x) = 3 - 2x + 5x^2$?

Dans l'ensemble des suites arithmétiques,
 – quel est l'élément nul ?
 – quelle est la suite opposée à la suite 1 4 7 10 ...

Dans chaque ensemble, il y a donc un élément nul qui correspond au couple $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (au n -uple dont tous les coefficients sont nuls). Cet élément est neutre pour l'addition, ce qui signifie que si on l'additionne à un élément quelconque, la somme obtenue est cet élément lui-même.

Chaque élément a un opposé, qui correspond au couple (au n -uple) dont les termes ont le signe contraire de ceux du couple (n -uple) représentant l'élément de départ. Quand on additionne un élément et son opposé, on trouve l'élément nul. Cette dernière propriété est l'outil qui permet de résoudre des équations.

La multiplication par un scalaire ne ressemble pas à la multiplication des nombres réels, déjà théorisée à la page 221. Les propriétés qui ont été dégagées dans les différents exemples montrent qu'elle s'apparente plutôt à une « multiplication naturelle », dans laquelle les deux éléments du produit sont de natures différentes, et qu'on utilise implicitement quand on dit

- 3 fois (1 pomme + 1 poire) = 3 pommes + 3 poires,
- 2 pommes + 3 pommes = 5 pommes,
- 2 fois 3 pommes = 6 pommes.

Même s'ils ne peuvent pas désigner par leur nom les propriétés de la multiplication par un scalaire, les élèves pourront sans doute associer celles qui ont le même statut dans les listes reprises dans les exemples.

Les ensembles dont les éléments peuvent être additionnés et multipliés par un scalaire, avec les propriétés que nous avons rencontrées et qui sont reprises ci-dessous, sont appelés *espaces vectoriels*. Leurs éléments sont appelés *vecteurs* et sont généralement représentés par une minuscule surmontée d'une flèche : $\vec{u}$.

Voici les propriétés qui caractérisent un espace vectoriel $\mathcal{V}$.

Les propriétés de la somme

Dans un *espace vectoriel* $\mathcal{V}$,

1. la somme de deux vecteurs existe toujours et est un vecteur. En effet,

$$\vec{u} + \vec{v} \text{ appartient à } \mathcal{V}.$$

2. La somme des vecteurs est associative, ce qui permet d'écrire la somme de trois vecteurs sans parenthèses. Ainsi,

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.$$

3. Il y a un vecteur nul noté $\vec{0}$ tel que

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}.$$

4. Chaque vecteur $\vec{u}$ a un opposé noté $-\vec{u}$ tel que

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}.$$

5. La somme des vecteurs est commutative, ce qui signifie que dans une somme, on peut changer l'ordre des vecteurs. On a

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Ces cinq propriétés peuvent être résumées en disant que $\mathcal{V}$ est un *groupe commutatif* pour l'addition des vecteurs.

Les propriétés de la multiplication par un scalaire

Dans ce qui suit, k et ℓ représentent des scalaires.

1. Un vecteur peut toujours être multiplié par un scalaire et le résultat est un vecteur,

$$k \vec{u} \text{ appartient à } \mathcal{V};$$

- 2.

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k \vec{u} + k \vec{v};$$

- 3.

$$(k + \ell) \vec{u} = k \vec{u} + \ell \vec{u};$$

- 4.

$$k(\ell \vec{u}) = (k\ell) \vec{u}.$$

La propriété 2 établit un lien entre la multiplication par un scalaire et l'addition des vecteurs; les deux suivantes établissent le lien avec les opérations sur les scalaires, l'addition (propriété 3) et la multiplication (propriété 4). Les propriétés 2 et 3 sont des propriétés de distributivité, la propriété 4 est une propriété d'associativité. On l'appelle « associativité mixte » car elle lie deux opérations de multiplication : la multiplication des scalaires et la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Existe-t-il un neutre pour la multiplication par un scalaire ?

La question de l'existence d'un neutre pour la multiplication par un scalaire met en évidence une situation qu'on ne rencontre pas dans les opérations qui lient deux éléments de même nature. Les élèves exhiberont sans doute le scalaire neutre 1

$$1 \vec{v} = \vec{v},$$

mais il est impossible de trouver un vecteur neutre $\overrightarrow{n}$ tel que

$$k \overrightarrow{n} = k,$$

puisque $k \overrightarrow{n}$ est un vecteur et ne peut donc valoir k . La propriété $1 \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ exprime que le neutre de la multiplication des réels est aussi neutre pour la multiplication par un scalaire. Nous ajoutons cette propriété afin d'être complet, même si notre but n'est pas de donner une définition axiomatique rigoureuse.

Dimension⁶ et opérations sur les n -uples

Si les éléments « de base » sont au nombre de deux (déplacements dans le plan, polynômes de degré inférieur ou égal à un, suites arithmétiques), chaque élément peut être exprimé comme combinaison linéaire des deux éléments « de base ». Les coefficients de cette combinaison linéaire forment un couple qui représente cet élément. Les couples associés aux éléments « de base » sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si les éléments « de base » sont au nombre de trois (déplacements dans l'espace, polynômes de degré inférieur ou égal à deux), chaque élément peut être exprimé comme combinaison linéaire des trois éléments « de base ». Les coefficients de cette combinaison linéaire forment un triple qui représente cet élément. Les triples associés aux éléments « de base » sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si les éléments « de base » sont au nombre de n (polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$), chaque élément peut être exprimé comme combinaison linéaire des n éléments « de base ». Les coefficients de cette combinaison linéaire forment un n -uple qui représente cet élément. Les n -uples associés aux éléments « de base » sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce nombre n , qui représente le nombre d'éléments « de base » nécessaires pour exprimer tout élément de l'ensemble comme combinaison linéaire de ceux-ci, et qui correspond également au nombre de termes dans le n -uple associé à chaque élément, est appelé la *dimension* de l'espace vectoriel.

⁶ Nous n'avons pas défini la notion de famille libre. Cependant le travail effectué dans cette activité donne une première approche des notions de « famille génératrice » et de « base », qui permet de parler de dimension de manière intuitive.

Dans un espace vectoriel de dimension 2, les opérations de somme et de multiplication par un scalaire se transposent aux couples qui les représentent de la manière suivante,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix},$$

$$k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{pmatrix}.$$

Ces opérations s'étendent de manière naturelle à un espace vectoriel de dimension n ,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix},$$

$$k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{pmatrix}.$$

Ces opérations jouissent des propriétés caractéristiques des espaces vectoriels, et c'est pourquoi on peut dire que l'ensemble des n -uplets de réels forme aussi un espace vectoriel.

Échos des classes

Le niveau de la classe n'a pas permis d'aborder d'autres types de vecteurs que les déplacements du plan. La synthèse finale a néanmoins été réalisée par les élèves eux-mêmes, sur base des synthèses antérieures. L'écriture condensée des vecteurs représentés par une seule lettre surmontée d'une flèche (pour les distinguer des scalaires) leur a paru très naturelle, puisqu'ils avaient déjà rencontré des vecteurs dans d'autres contextes. Seul le neutre de la multiplication scalaire a posé problème : la valeur 0 a été proposée en premier.

2 Géométrie analytique et calcul vectoriel

De quoi s'agit-il ?

Résoudre des problèmes de géométrie analytique du plan et de l'espace en utilisant le calcul vectoriel.

Enjeux

Développer les compétences liées au calcul vectoriel en analysant diverses situations-problèmes. Sur les liens entre vecteurs et géométrie analytique, voir aussi la section 8.1 du chapitre 16. Sur les centres de gravité, voir aussi le chapitre 12.

Compétences

Le calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace, faisant intervenir les composantes des vecteurs.

Les formes synthétique et analytique des notions, des relations et équations de base de la géométrie : incidence, alignement, concourance, parallélisme, milieu d'un segment, centre de gravité, ...

Les formes synthétique et analytique des translations, symétries centrales et homothéties du plan et de l'espace.

De quoi a-t-on besoin ?

Des feuilles A4 recouvertes d'un quadrillage de 1 cm de côté ou d'un réseau de parallélogrammes, certaines munies d'une origine O , d'autres encore où sont marqués une origine O et quelques autres points. Ce matériel peut être obtenu par photocopie des documents fournis en annexe aux pages 486 à 488.

2.1 Lien entre les composantes d'un vecteur et les coordonnées de ses extrémités

Comment s'y prendre ?

Le problème de situer un point sur un quadrillage est latent depuis le moment où, dans l'activité précédente, on a demandé aux élèves de dessiner un déplacement donné par ses composantes. Les élèves ont bien pris conscience qu'ils peuvent représenter un déplacement donné, mais ils ne savent que faire pour décrire un représentant de ce déplacement en un endroit précisément choisi. Le travail suivant a pour but de lever cette difficulté.

On distribue à tous les élèves une feuille A4 recouverte d'un quadrillage et on demande à l'un d'entre eux de placer un point A sur un nœud de ce quadrillage. Sans montrer sa feuille, il doit alors communiquer des renseignements à ses condisciples pour que chacun puisse dessiner le point A exactement au même endroit. Il est probable que l'élève qui a choisi la position du point A situe celui-ci comme l'extrémité d'un déplacement dont l'origine serait le coin inférieur gauche du quadrillage (ou un autre coin). Les élèves se rendent compte que, pour traiter ce problème, une origine doit être choisie en un point qu'on peut décrire sans ambiguïté, par exemple en un coin du quadrillage. Sinon il est tout aussi difficile d'expliquer où se trouve l'origine du déplacement que son extrémité. On recommence l'activité après avoir distribué une autre feuille quadrillée munie d'un point marqué O . On demande aux élèves de choisir ce point O comme origine pour marquer le point A comme extrémité d'un déplacement OA décrit en fonction du quadrillage. On montre alors aux élèves une feuille, sans quadrillage, où l'on a placé un point O et un point A , et on leur demande de reproduire le déplacement OA à partir d'un point O placé arbitrairement sur une feuille de leur cahier.

Cette courte activité préalable est destinée à faire prendre conscience aux élèves que pour déterminer la position d'un point, il faut

- soit une origine et deux directions privilégiées, orientées et munies d'une unité (par exemple induites par un quadrillage ou un réseau de parallélogrammes) ;
- soit une origine et deux vecteurs « de base ».

La donnée d'une origine, qui n'était pas nécessaire pour décrire des déplacements, devient indispensable dès qu'on veut préciser la position des points. On définit alors la « position du point A » comme le déplacement qui permet de passer de O à A . On peut donc lui associer un couple de nombres. On a

$$\text{position de } A = OA = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

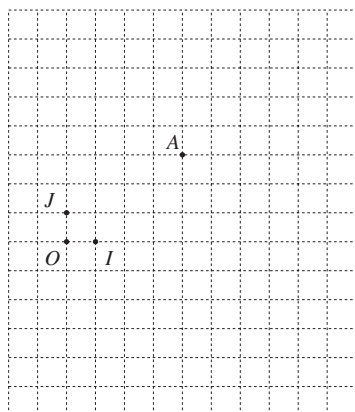


Fig. 17 : Quadrillage

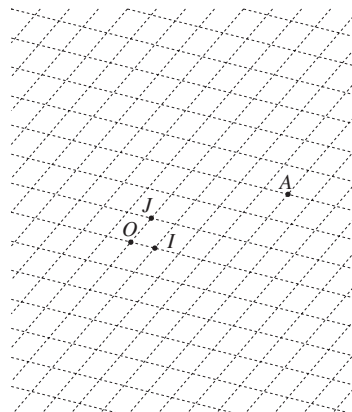


Fig. 18 : Réseau de parallélogrammes

Les élèves reconnaissent les coordonnées du point A dans le repère OIJ , où O est le point origine choisi, I et J étant les extrémités des vecteurs « de base » $\vec{i}$ et $\vec{j}$ placés avec leur origine en O . D'une manière générale, les coordonnées des points sont des couples de nombres réels ; elles ne sont entières que pour les nœuds du quadrillage associé au repère OIJ .

Les élèves ont l'habitude d'écrire ces coordonnées en ligne et non en colonne. On pourrait revenir à cette façon de faire pour les couples de coordonnées de points, mais aussi pour les couples de composantes de vecteurs, tout en signalant aux élèves que plus tard (en calcul matriciel), il faudra utiliser une notation de tous ces couples en colonnes. Dans ce document, nous avons choisi de continuer à écrire tous les n -uples en colonnes.

Pour établir le lien entre les composantes des vecteurs et les coordonnées des points, on distribue la feuille suivante, munie d'un quadrillage et des points O , A , B , C et D (figure 19).

Y a-t-il un lien entre les coordonnées des points A , B , C , D et les composantes des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ et $\vec{AD}$?

Dans un premier temps, les élèves notent les couples de coordonnées des points et les couples de composantes des vecteurs.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

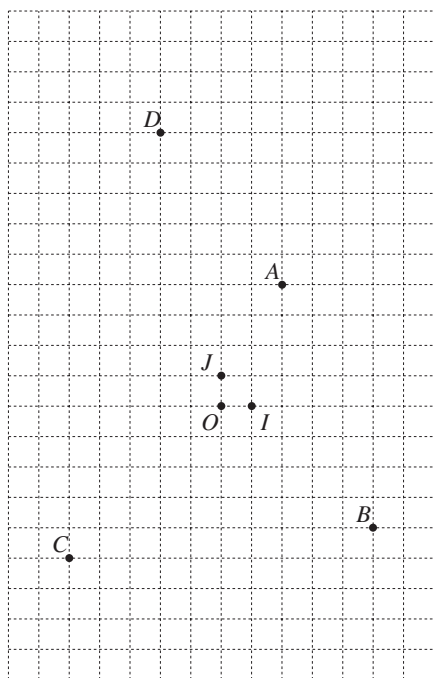


Fig. 19 : Coordonnées et composantes

En comparant les couples associés à A , B et $\overrightarrow{AB}$, certains élèves constateront que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et vérifieront ensuite si une relation similaire est encore vraie pour les autres vecteurs. D'autres penseront peut-être à la relation de Chasles et au fait qu'on peut aller de O à B en passant par A

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

ou qu'on peut aller de A à B en passant par O

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}.$$

Ils en déduiront que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (\text{position de } B) - (\text{position de } A). \end{aligned}$$

Cette constatation peut être étayée par un raisonnement intuitif en reprenant un cas très simple où les points A et B se trouvent à droite et plus haut que O , par exemple $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$. On voit bien alors que, pour aller de A en B , il faut avancer de 6 vers la droite, pour passer de l'abscisse 3 à l'abscisse 9, et de 3 vers le haut, pour passer de l'ordonnée 4 à l'ordonnée 7. Le dessin montre bien que, quelle que soit la position de O , la différence des abscisses et la différence des ordonnées déterminent les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Composantes d'un vecteur. – Les composantes d'un vecteur sont obtenues par la différence entre les coordonnées de son extrémité et celles de son origine.

Tout ceci se généralise aux vecteurs de l'espace.

À ce stade du travail, le professeur explique aux élèves que le fait de pouvoir situer des points dans le plan ou l'espace munis d'un repère, et d'avoir établi le lien entre les coordonnées des points et les composantes des vecteurs, va leur permettre d'aller plus loin. Dans les activités qui suivent, nous allons utiliser des équations vectorielles extrêmement simples pour résoudre toutes sortes de problèmes de géométrie, tant dans le plan que dans l'espace.

Échos des classes

La nécessité de marquer une origine pour situer des points dans le plan n'a posé aucune difficulté. Ici encore, les élèves ont fait appel à différents

modes de raisonnement pour établir le lien entre les composantes d'un vecteur et les coordonnées de ses extrémités. Le fait de définir la position du point A comme le déplacement OA situe d'emblée le problème dans le contexte des déplacements du plan et amène l'idée d'utiliser la relation de Chasles.

2.2 Problèmes d'alignement et de parallélisme

De quoi s'agit-il ?

Résoudre des problèmes d'alignement et de parallélisme dans le plan et dans l'espace à partir d'équations vectorielles.

Comment s'y prendre ?

À quelle condition des points du plan et de l'espace sont-ils alignés ?

Le problème est ainsi posé sous une forme très générale. Les élèves proposeront sans doute d'examiner d'abord la situation dans le plan. Ils arriveront peut-être à dégager une idée intuitive à partir d'un cas très simple qu'ils auront choisi eux-mêmes. L'exemple suivant leur est fourni, soit pour les inciter à formuler clairement leur raisonnement, soit pour guider leur réflexion.

1. Les points A , B et C du plan sont-ils alignés ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 100 \\ 69 \end{pmatrix}.$$

2. Les points P , Q et R de l'espace sont-ils alignés ?

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 302 \\ 300 \\ -690 \end{pmatrix}.$$

Confrontés à la première question, les élèves seront sans doute tentés de représenter les points dans un repère approprié. Les coordonnées du point C les obligent à choisir une unité très petite dans chacune des directions. Le manque de précision du dessin ne leur permettra pas de se convaincre avec certitude.

D'autres penseront peut-être à écrire l'équation de la droite AB et à observer que les coordonnées du point C vérifient cette équation. Aucune de ces deux stratégies ne leur permettra de répondre à la deuxième question. Par contre les élèves qui se souviennent que dans la section 1, l'alignement des points A , C , N , L a été mis en relation avec le fait que les vecteurs $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont multiples de $\overrightarrow{CA}$ (figure 12 à la page 232), auront à leur disposition l'outil qui leur permettra de répondre aux deux questions par le même raisonnement et de la manière la plus économique.

Les élèves constatent que $\overrightarrow{AC}$ est multiple de $\overrightarrow{AB}$ en observant leurs composantes

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 99 \\ 66 \end{pmatrix}.$$

Par contre,

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ -695 \end{pmatrix} \text{ n'est pas multiple de } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix},$$

ce qui indique que les points P , Q et R ne sont pas alignés.

Le fait que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est multiple du vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que ces deux vecteurs d'origine A ont la même direction. Cette remarque nous amène tout naturellement à poser la question du parallélisme.

À quelle condition des droites du plan ou de l'espace sont-elles parallèles ?

Après une première discussion dans la classe, nous proposons à nouveau un exemple pour soutenir la réflexion.

1. Dans le plan muni d'un repère, les droites AB et CD sont-elles parallèles ?

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

2. Dans l'espace muni d'un repère, les droites PQ et RS sont-elles parallèles ?

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Le dessin de la première situation ne permet pas de conclure avec certitude. Les droites AB et CD semblent plus ou moins parallèles. Cependant, le calcul des composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -8 \\ -19 \end{pmatrix}$ montre qu'un de ces deux vecteurs n'est pas multiple de l'autre et qu'ils n'ont donc pas la même direction. Par conséquent, les droites AB et CD ne sont pas parallèles. Dans l'espace, par contre,

$$\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{RS} \text{ puisque } \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on peut conclure que les droites PQ et RS sont parallèles.

Parallélisme et alignement. – Si $\overrightarrow{CD}$ est multiple de $\overrightarrow{AB}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction et les droites AB et CD sont parallèles⁷. Si de plus, les droites AB et CD ont un point commun, les quatre points A , B , C et D sont alignés. En particulier, si $\overrightarrow{AC}$ est multiple de $\overrightarrow{AB}$, les points A , B et C sont alignés.

⁷ On admet explicitement qu'une droite est parallèle à elle-même et que le parallélisme est une relation d'équivalence.

Tout ceci permet de résoudre des problèmes plus complexes, où interviennent à la fois des questions d'alignement et de parallélisme.

Dans le plan muni d'un repère OIJ , on donne les points

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Représenter graphiquement les points D , E , F et K et calculer leurs coordonnées, sachant que

1. D est le point de la droite BC , dont l'abscisse vaut 2 dans le repère OIJ ;
2. E est le point de la droite AC dont l'abscisse est le double de l'ordonnée dans le repère OIJ ;
3. F est le point de la parallèle à la droite AB passant par C , dont l'ordonnée vaut -2 dans le repère OIJ ;
4. K est le point de la parallèle à la droite AC passant par B , dont l'abscisse vaut 259 dans le repère OIJ .

Voici comment ces questions peuvent être traitées.

1. Recherche du point D : les données permettent de placer le point D sur le dessin.

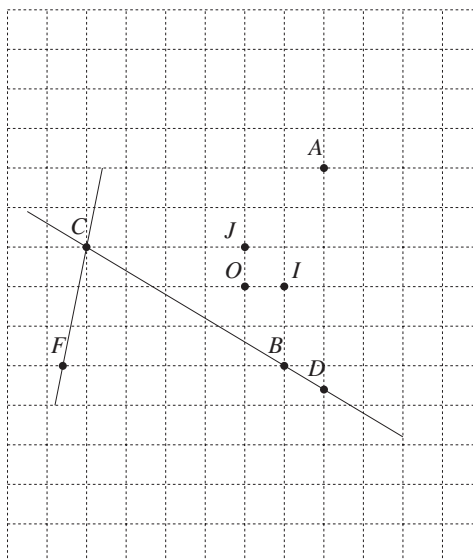


Fig. 20 : Alignement et parallélisme

Pour exprimer que le point D est aligné avec B et C , on écrit que $\overrightarrow{BD}$ est multiple de $\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire

$$\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{BC},$$

où λ est un scalaire. En remplaçant chaque vecteur par le couple de ses composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 2 \\ y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} 2 &= 1 - 5\lambda \\ y_D &= -2 + 3\lambda \end{cases}$$

permet de déterminer la valeur de λ qui correspond au point D : $\lambda = -\frac{1}{5}$, valeur qui peut être interprétée en observant le dessin. Celui-ci montre que $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, le point D étant situé du côté opposé à C par rapport à B et à une distance cinq fois plus petite de B que celle de B à C . Ces constatations permettent de comprendre clairement le rôle que joue le paramètre dans l'équation vectorielle de départ. En remplaçant la valeur de λ dans la deuxième équation, on trouve $y_D = -\frac{13}{5}$. Les coordonnées de D sont donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$.

2. Recherche du point E : il n'est plus possible de placer le point E avec précision sans faire le calcul préalable. Par un raisonnement similaire au précédent, on écrit l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{AE} = \mu\overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AC},$$

où μ est un scalaire. En remplaçant chaque vecteur par le couple de ses composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 2y_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} 2y_E &= 2 - 6\mu \\ y_E &= 3 - 2\mu \end{cases}$$

permet de déterminer la valeur de μ qui correspond au point E : $\mu = -2$ et les coordonnées du point $E = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$. Il est possible à présent de placer le point E sur le dessin et de vérifier qu'il répond bien à la question.

3. Recherche du point F : cette fois le point F peut être construit avec précision, la difficulté supplémentaire provient du fait qu'il ne s'agit plus d'un simple problème d'alignement. Il faudra peut-être renvoyer les élèves à la synthèse de la page 255 pour les amener à écrire une équation vectorielle de départ.

$$\overrightarrow{CF} = \nu\overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \nu\overrightarrow{AB},$$

où ν est un scalaire. En remplaçant chaque vecteur par le couple de ses composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_F \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} x_F &= -4 - \nu \\ -2 &= 1 - 5\nu \end{cases}$$

permet de déterminer la valeur de ν qui correspond au point F : $\nu = \frac{3}{5}$ et les coordonnées du point $F = \begin{pmatrix} -\frac{23}{5} \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. Recherche du point K : l'abscisse 259 du point K est trop grande pour qu'on puisse visualiser celui-ci, mais un calcul analogue aux précédents donne, à partir de l'équation vectorielle $\overrightarrow{BK} = \rho \overrightarrow{AC}$, la valeur de $\rho = -43$ et les coordonnées du point $K = \begin{pmatrix} 259 \\ 84 \end{pmatrix}$.

Il est possible de traiter des problèmes du même type dans l'espace. Nous en donnons un exemple.

Dans l'espace muni d'un repère $OIJK$, on donne les points A , B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les coordonnées des points D , E , F et K , sachant que

1. D est le point de la droite BC , d'abscisse -3 dans le repère $OIJK$;
2. E est le point de la droite AC , dont la somme des coordonnées vaut 5 dans le repère $OIJK$;
3. F est le point de la parallèle à la droite AB passant par C , de hauteur 11 dans le repère $OIJK$;
4. K est le point de la parallèle à la droite AB passant par C , d'abscisse 258 dans le repère $OIJK$.

Il n'est plus question ici de s'appuyer sur un dessin, mais le travail effectué dans le plan a préparé les élèves à écrire les équations vectorielles de départ sans avoir recours à un support visuel. Les résultats obtenus sont

$$D = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 4 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 258 \\ -1 \\ -644 \end{pmatrix}.$$

Ces différentes questions montrent bien que le calcul vectoriel permet de traiter certains problèmes d'alignement et de parallélisme tant dans le plan que dans l'espace.

Échos des classes

Seuls les problèmes dans le plan ont été traités dans une classe de quatrième. La difficulté majeure a été d'établir une équation vectorielle de départ. À partir de celle-ci, le passage aux couples de composantes s'effectue naturellement. Les élèves ont pris l'habitude de « lire » les composantes sur le quadrillage ; les fréquents retours au dessin qui en résultent ont permis de donner du sens aux étapes de calcul, et notamment d'interpréter la valeur du paramètre.

Pour chacune des questions, différentes équations vectorielles ont été proposées. Le fait que toutes ces équations conduisent, par des calculs différents, à la même réponse, a été une source d'étonnement pour certains.

2.3 Centres de gravité

De quoi s'agit-il ?

Déterminer les coordonnées du centre de gravité de 2, 3, 4, ... points, dans le plan et dans l'espace.

Comment s'y prendre ?

La première question concerne la recherche des coordonnées du milieu d'un segment, tant dans le plan que dans l'espace.

Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ où

1. $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans le plan muni d'un repère ;

2. $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans l'espace muni d'un repère.

En déduire l'expression générale des coordonnées du milieu d'un segment, dans le plan et dans l'espace.

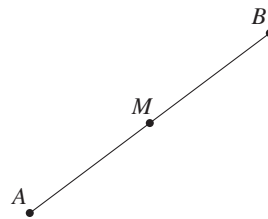


Fig. 21 : Milieu d'un segment

Le point M , milieu de $[AB]$, est évidemment un point de la droite AB . La recherche du milieu s'apparente donc à un problème d'alignement, où la position du point cherché par rapport aux points A et B est connue. À partir de l'une des équations vectorielles

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB},$$

on obtient, en remplaçant chacun des vecteurs par son expression en somme de vecteurs passant par l'origine,

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Cette dernière relation permet de calculer les coordonnées du milieu, aussi bien dans le plan que dans l'espace.

Pour le problème posé, on obtient donc $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans le plan et $M =$

$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ dans l'espace, mais le raisonnement effectué ci-dessus fournit une formule générale pour déterminer le milieu d'un segment.

De plus, on peut remarquer que, puisque tout point P du plan ou de l'espace peut jouer le rôle de l'origine, la relation $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ peut encore s'écrire

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$$

pour tout point P du plan ou de l'espace.

Milieu d'un segment. – Voici quatre égalités qui définissent le point M , milieu du segment $[AB]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{MB}, \\ \overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \\ \overrightarrow{PM} &= \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} \text{ pour tout point } P \text{ du plan ou de l'espace.}\end{aligned}$$

La relation $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ peut encore s'écrire $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$; cette dernière expression donnera lieu à une généralisation ultérieure.

Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$, où $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont

$$M = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}.$$

Dans l'espace muni d'un repère, les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$, où $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ sont

$$M = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \\ \frac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}.$$

Le point M milieu du segment $[AB]$ est le point qui vérifie la condition $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$. Par analogie, on peut poser la question suivante.

Existe-il, pour tout triangle ABC du plan ou de l'espace, un point G qui vérifie la condition $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$? Si ce point G existe, quelle est sa position par rapport aux sommets du triangle ABC ?

Cette question, très générale, peut être abordée par un problème particulier.

1. Dans le plan muni d'un repère, on donne les trois points A , B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

2. Dans l'espace muni d'un repère, on donne les trois points A , B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dans ces deux cas, on demande de vérifier l'existence d'un point G qui vérifie la condition $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, et, s'il existe, de déterminer ses coordonnées.

Démontrer ensuite que ce point G se trouve sur les médianes du triangle, aux deux tiers à partir du sommet.

On montre tout d'abord que la relation

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

est équivalente à

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Cette deuxième relation est obtenue facilement en remplaçant $\overrightarrow{GA}$ par $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}$, et en procédant de même pour $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$. Cette expression établit l'existence du point G en toute généralité, et cette forme est analogue à l'expression de M comme milieu du segment $[AB]$. Tout comme les coordonnées du point M sont les moyennes arithmétiques des coordonnées correspondantes des extrémités du segment $[AB]$, les coordonnées du point G sont les moyennes arithmétiques des coordonnées correspondantes des sommets du triangle ABC . On obtient alors $G = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ pour le

problème dans le plan et $G = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ celui dans l'espace.

Remarquons que la démonstration suggérée ci-dessus permet d'établir que la relation

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

est équivalente à

$$\overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$$

pour tout point P du plan ou de l'espace.

Les élèves peuvent vérifier, à titre d'exercice, que le point G trouvé, appelé *centre de gravité de ABC* , est bien situé sur chacune des médianes du triangle (et donc à leur intersection), aux deux tiers à partir du sommet.

La propriété peut être établie dans le cas général par un calcul vectoriel relativement simple. Notons A' , B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

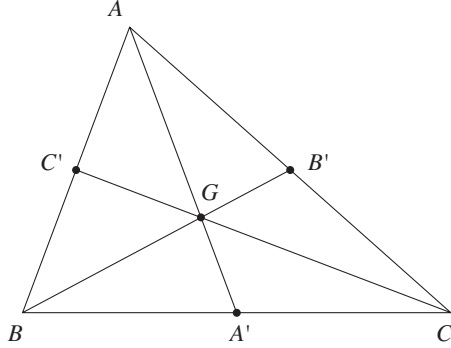


Fig. 22 : Centre de gravité d'un triangle

Les propositions A' est milieu de $[BC]$

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{PA'} = \frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{2},$$

G est centre de gravité de ABC

$$\text{si et seulement si } \overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$$

sont vraies quelle que soit la position du point P . Si on place celui-ci en A , on obtient

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

ce qui montre bien que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Centre de gravité d'un triangle⁸. – Le point G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Voici deux autres égalités qui définissent le point G .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ \overrightarrow{PG} &= \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \quad \text{pour tout point } P \text{ du plan ou de l'espace.} \end{aligned}$$

Le centre de gravité d'un triangle se trouve sur les médianes aux deux tiers à partir du sommet.

Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC , où $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ sont

$$G = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{pmatrix}.$$

Dans l'espace muni d'un repère, les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC , où $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix}$ sont

$$G = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{pmatrix}.$$

⁸ Chaque fois qu'il sera question du centre de gravité d'une figure, il s'agira du centre de gravité des sommets de cette figure (sous-entendu : affectés d'une même masse).

Prolongements
possibles

Centre de gravité d'un quadrilatère quelconque

Déterminer la position du centre de gravité d'un quadrilatère quelconque.

Le centre de gravité de quatre points A, B, C, D est le point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Ce point G est aussi défini par la relation équivalente

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4},$$

dans laquelle il semble naturel d'effectuer des groupements, par exemple

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}}{2}.$$

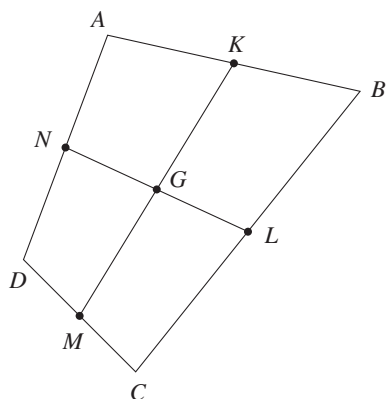


Fig. 23

Nous voyons ainsi apparaître de manière naturelle les milieux K et M des segments $[AB]$ et $[CD]$, définis par les relations

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}.$$

On obtient ainsi $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}}{2}$ qui situe le point G au milieu de la médiane $[KM]$. L'autre façon de grouper

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OL}}{2}$$

montre que le point G se trouve aussi au milieu de la médiane $[NL]$.

On a ainsi démontré que le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque est le point d'intersection des médianes, et que celles-ci se coupent en leur milieu.

REMARQUE. — On peut aussi voir que les médianes d'un quadrilatère $ABCD$ quelconque se coupent en leur milieu en prouvant au préalable que le quadrilatère $KLMN$ qui joint les milieux de ses côtés est un parallélogramme. Cette démonstration peut également se faire vectoriellement.

Centre de gravité d'un tétraèdre

Déterminer la position du centre de gravité d'un tétraèdre quelconque $ABCD$.

Il s'agit donc de situer le point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}, \text{ ou encore } \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}.$$

Au cours de la résolution du problème précédent, nous n'avons jamais utilisé le fait que les points A, B, C et D étaient coplanaires. Nous pouvons donc reprendre ces mêmes calculs pour établir que le point G se trouve au milieu des segments $[KM]$ et $[LN]$, où K, L, M et N sont les milieux des arêtes $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. Un troisième groupement des sommets deux par deux

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}}{2}$$

montre que le point G se trouve aussi au milieu du segment $[QR]$, où Q et R désignent les milieux des arêtes $[AC]$ et $[BD]$. Ceci démontre donc que, dans un tétraèdre quelconque, les segments joignant les milieux des paires d'arêtes gauches se coupent en leur milieu, et que ce point d'intersection est le centre de gravité du tétraèdre.

Dans un tétraèdre, il est tout aussi naturel de grouper trois sommets, de manière à faire apparaître les centres de gravité des faces triangulaires. On écrit, par exemple, que

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3\left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}\right) + \overrightarrow{OD}}{4} = \frac{3\overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OD}}{4}.$$

Cette relation fait intervenir D' , centre de gravité de la face ABC . Elle est encore vraie si on remplace le point O par n'importe quel point P du plan. En particulier, en plaçant O au point D , on obtient

$$\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DD'},$$

qui indique que le point G se trouve sur le segment $[DD']$, aux trois quarts à partir de D .

Une autre voie est de partir directement de l'expression

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

En y remplaçant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ par $3\overrightarrow{GD'}$, on obtient

$$3\overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{GD'}$$

qui exprime également que le point G se trouve sur le segment $[DD']$, aux trois quarts à partir de D .

Si on appelle *hypermédiane d'un tétraèdre* le segment qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée, on peut donc démontrer que le centre de gravité du tétraèdre est situé sur chacune des hypermédianes,

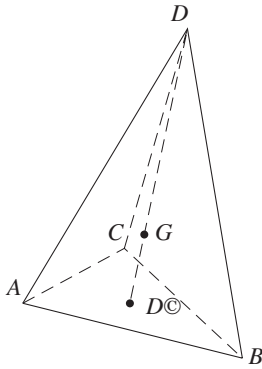


Fig. 24

aux trois quarts à partir du sommet. Les quatre hypermédianes sont donc concourantes en ce point.

Centre de gravité d'une pyramide

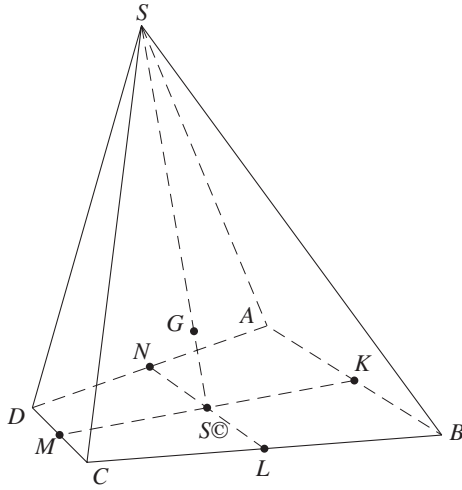


Fig. 25

On considère une pyramide $SABCD$ de sommet S et dont la base $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. Déterminer la position du centre de gravité de la pyramide $SABCD$.

La résolution des deux derniers problèmes devrait permettre aux élèves d'imaginer, puis de démontrer, que le centre de gravité G de cette pyramide se trouve sur le segment $[SS']$, où S' est le point d'intersection des médianes de la base $ABCD$ et qu'il se trouve, sur ce segment, aux quatre cinquièmes à partir du sommet S .

Centre de gravité d'un ensemble de points du plan ou de l'espace

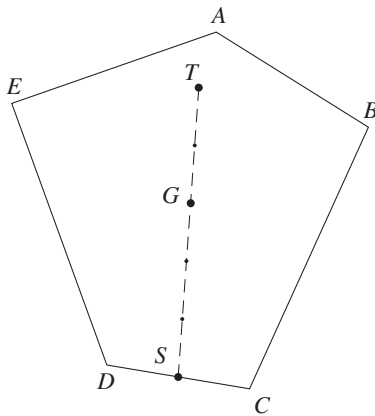


Fig. 26

Pour fixer les idées, considérons cinq points A, B, C, D et E dans l'espace. Le centre de gravité de ces cinq points est le point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}.$$

Ce point G existe et est déterminé par la relation

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}}{5}.$$

Soit T le centre de gravité du triangle ABE et S celui du segment $[CD]$. On a donc

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{GT} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GS}.$$

En remplaçant, dans la relation

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} &= \vec{0}, \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GE} &\text{ par } 3\overrightarrow{GT} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \text{ par } 2\overrightarrow{GS}, \end{aligned}$$

on obtient

$$3\overrightarrow{GT} + 2\overrightarrow{GS} = \vec{0} \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{SG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{ST},$$

qui exprime que le centre de gravité de l'ensemble des cinq points se trouve sur le segment qui joint les centres de gravité des groupements de trois et de deux points.

Dans l'expression $3\overrightarrow{GT} + 2\overrightarrow{GS} = \overrightarrow{0}$, les coefficients 2 et 3 représentent le nombre de points des groupements dont T et S sont les centres de gravité.

Généralisation

Considérons un ensemble de n points du plan ou de l'espace $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ et notons G le centre de gravité de ces n points. Répartissons ces n points en deux groupements de p et $n - p$ points ($p < n$), $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$, de centre de gravité G_1 , et $A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_n$ de centre de gravité G_2 .

Un raisonnement analogue à celui qui précède permet d'établir que

$$p\overrightarrow{GG_1} + (n - p)\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{0}.$$

On peut encore voir les choses de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}}{n} = \\ &= \frac{(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_p}) + (\overrightarrow{OA_{p+1}} + \overrightarrow{OA_{p+2}} + \dots + \overrightarrow{OA_n})}{n} = \\ &= \frac{p \frac{(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_p})}{p} + (n - p) \frac{(\overrightarrow{OA_{p+1}} + \overrightarrow{OA_{p+2}} + \dots + \overrightarrow{OA_n})}{n - p}}{n} = \\ &= \frac{p\overrightarrow{OG_1} + (n - p)\overrightarrow{OG_2}}{n}. \end{aligned}$$

C'est une autre façon de situer le point G sur le segment $[G_1G_2]$.

Échos des classes

Voir ceux de la section 2.2, à la page 258.

2.4 Problèmes d'incidence

De quoi s'agit-il ?

Quelques problèmes plus complexes faisant appel au même type de raisonnement qui a servi précédemment peuvent être soumis aux élèves, si le professeur souhaite approfondir cette matière. En voici un exemple relatif à l'intersection de deux droites du plan, traité en termes d'équations vectorielles et paramétriques.

Comment s'y prendre ?

Dans le plan muni d'un repère, on donne les points A, B, C, P et Q et leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite PQ avec les côtés du parallélogramme $ABCD$.

Précisons que les points demandés doivent appartenir aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ou $[DA]$ et non à leurs prolongements.

Le premier problème qui se pose aux élèves est de réaliser un dessin qui illustre la situation. Dans un repère orthonormé, l'abscisse 95 du point A impose une unité telle que le dessin est peu utile. Certains élèves penseront peut-être à prendre une unité plus petite sur l'axe des abscisses que sur l'axe des ordonnées. Ils obtiennent ainsi une figure qui, même si elle est imprécise, soutient le raisonnement.

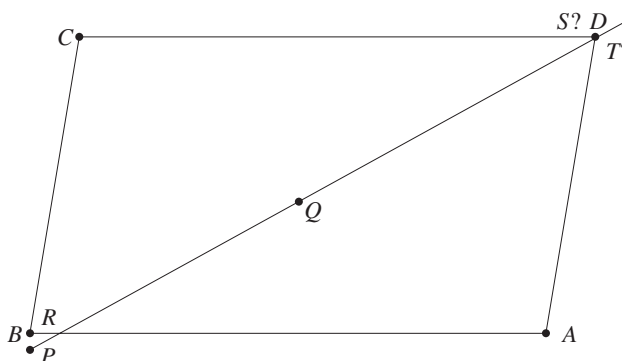


Fig. 27

Trouver les coordonnées du point D ne devrait pas leur poser de problème. Le plus simple est de partir de l'une des équations vectorielles $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. On trouve $D = \begin{pmatrix} 104 \\ 20 \end{pmatrix}$.

La figure montre que la droite PQ coupe certainement le côté $[BA]$ en un point que nous notons R . Il faut donc chercher les coordonnées du point d'ordonnée 2 sur la droite PQ . À partir de l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ},$$

et en remplaçant chaque vecteur par le couple de ses composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_R \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 49 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} x_R &= 1 + 49\lambda \\ 2 &= 1 + 9\lambda \end{cases}$$

permet de déterminer la valeur $\lambda = \frac{1}{9}$ qui correspond au point R et ensuite les coordonnées du point $R = \begin{pmatrix} \frac{58}{9} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par contre, l'imprécision du dessin ne permet pas de voir si la droite PQ passe par D , ou si elle coupe le côté $[CD]$ ou le côté $[AD]$. Le plus simple est de vérifier si la droite PQ passe par D . Ce n'est pas le cas car

$$\overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix} 103 \\ 19 \end{pmatrix} \quad \text{n'est pas multiple de} \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 49 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Calculons ensuite les coordonnées du point S d'intersection des droites PQ et CD . C'est le point d'ordonnée 20 sur la droite PQ . On trouve $\begin{pmatrix} 104,4 \\ 20 \end{pmatrix}$ pour le point S . Il faut alors remarquer que ce point est à droite de D et qu'il n'appartient donc pas au segment $[CD]$. On en déduit que la droite PQ coupe le côté $[AD]$ en un point que nous noterons T . La détermination de ce point T pose un problème nouveau. En effet, nous ne connaissons pour T ni l'abscisse, ni l'ordonnée, ni une relation entre les deux. Nous savons seulement que le point T est à la fois un point de la droite PQ et un point de la droite AD . Exprimons que T est sur la droite PQ par l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{PT} = \lambda \overrightarrow{PQ} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ}.$$

Le point T appartient aussi à la droite AD , ce qui s'exprime par

$$\overrightarrow{AT} = \mu \overrightarrow{AD} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{AD}.$$

L'erreur habituelle des élèves consiste à désigner par la même lettre les paramètres dans les deux expressions de $\overrightarrow{OT}$. Dans ce cas, ils obtiennent une équation vectorielle

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AD}$$

qui se révèle impossible dès qu'on remplace les vecteurs par les couples de composantes. Le retour au schéma permet de comprendre qu'il n'y a aucune raison pour que les vecteurs $\overrightarrow{PT}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient dans le même rapport que les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{AD}$. Il existe donc une valeur de λ et une valeur de μ , en général différentes, telles que

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{AD}.$$

En passant aux couples des composantes, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 49 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} 1 + 49\lambda &= 95 + 9\mu \\ 1 + 9\lambda &= 2 + 18\mu \end{cases}$$

permet de déterminer les valeurs de λ et μ qui correspondent au point T . Remarquons qu'il suffit de connaître l'une de ces deux valeurs pour déterminer les coordonnées du point T . Dans le système mis sous la forme

$$\begin{cases} 49\lambda - 9\mu &= 94 \\ 9\lambda - 18\mu &= 1, \end{cases}$$

il est facile d'éliminer μ en multipliant la première équation par 2. Nous obtenons ainsi $\lambda = \frac{187}{89}$ et les coordonnées du point T

$$T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{187 \times 49}{89} \\ 1 + \frac{187 \times 9}{89} \end{pmatrix}, \text{ dont les valeurs approchées sont } \begin{pmatrix} 103,95 \\ 19,91 \end{pmatrix}.$$

Ce point est bien sur la droite AD , entre les points A et D .

La résolution de ce problème a permis de montrer toute la puissance des équations vectorielles et paramétriques pour traiter des problèmes d'incidence. Les méthodes décrites ci-dessus peuvent s'appliquer telles quelles à des problèmes d'incidence dans l'espace. Nous en proposons à titre d'exemples. Voici tout d'abord un problème de section plane dans un cube⁹.

Construire la section du cube de la figure 28 (en annexe à la page 489) par le plan PQR , où P est situé sur l'arête $[AB]$ au tiers à partir de A , Q est situé au milieu de l'arête $[BC]$, et R est situé au milieu de l'arête $[CC']$. On demande ensuite de déterminer les coordonnées de tous les sommets de cette section, après avoir choisi un repère approprié.

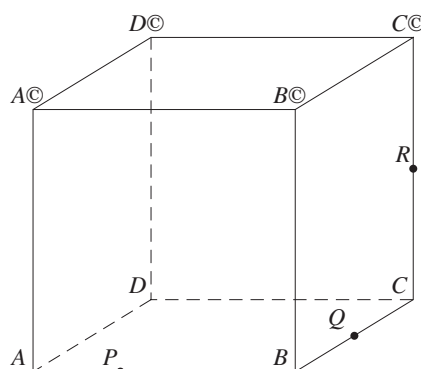


Fig. 28

Dans tous les exercices précédents, le repère était imposé par l'énoncé, puisque les points étaient donnés par des coordonnées. Par contre, pour traiter ce dernier problème, les élèves devront placer eux-mêmes un repère. Le plus facile est de placer l'origine sur un sommet du cube et les trois vecteurs « de base » sur des arêtes. Nous proposons, par exemple, de placer l'origine en A , et les vecteurs « de base » de telle sorte que $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AA'}$. Dans ce cas,

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve ensuite

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

L'un des points intermédiaires $V = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, intersection des droites PQ

et DC , ou $W = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, intersection des droites QR et $B'C'$, permet de

⁹ Des problèmes de ce type sont traités sous forme synthétique dans CREM [2001b].

calculer ensuite les points $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur l'arête $C'D'$, $T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ sur l'arête $A'D'$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ sur l'arête AA' .

Cette méthode de calcul reproduit les étapes de la construction de la section, mais le calcul vectoriel permet aussi de travailler d'emblée dans le plan de section PQR . En effet, les vecteurs $\overrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{QT}$ et $\overrightarrow{QU}$ peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{QR}$.

Pour la détermination du point S , par exemple, on a

$$\overrightarrow{QS} = \lambda \overrightarrow{QP} + \mu \overrightarrow{QR} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sachant que $y_S = 1$ et que $z_S = 1$, on détermine successivement $\mu = 2$ et $\lambda = 1$, puis $x_S = \frac{1}{3}$. Cette méthode peut sembler plus compliquée puisqu'elle met en jeu un système à deux paramètres, mais d'autre part le même système permet également de calculer les coordonnées des points T et U .

Les valeurs des coordonnées des sommets de la section permettent de situer avec précision ces points sur les arêtes. Par exemple S se trouve au tiers de $[D'C']$ à partir de D' . Si tous les élèves n'ont pas choisi le même repère, ce peut être l'occasion de leur faire remarquer que, même si les coordonnées des points de la section sont différentes, l'interprétation de leur position sur les arêtes du cube reste identique.

Passons maintenant à un autre type de questions. La mise en œuvre des équations vectorielles et paramétriques permet aussi de déterminer les positions relatives des droites de l'espace.

Dans l'espace muni d'un repère $OIJK$, on donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les positions relatives des droites CD , EF , EG et PQ par rapport à la droite AB ?

Rappelons que des droites de l'espace peuvent être parallèles, sécantes ou gauches. Les élèves doivent imaginer une méthode pour déterminer la

position de chacune des droites par rapport à AB . Le plus simple est de calculer les coordonnées d'un vecteur sur chacune des droites, car ce premier travail permet de voir facilement quelles sont les droites qui ont la même direction que AB . On obtient

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{CD} = -6\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB}$, on peut conclure que les droites AB , CD et EG ont la même direction. Il s'agit alors de préciser si elles sont parallèles disjointes ou confondues. Une stratégie consiste à vérifier si l'un des points C , D , E ou G est aligné avec A et B (voir la synthèse de

la page 255). Le calcul des composantes des vecteurs $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ montre que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, tandis que $\overrightarrow{AE}$ n'est pas multiple

de $\overrightarrow{AB}$. En conclusion, les points A , B , C et D sont alignés, alors que les droites AB et EG sont parallèles disjointes.

Plutôt que d'utiliser une condition d'alignement, les élèves auront peut-être l'idée de vérifier si les droites AB et CD , puis AB et EG , ont un point commun. Si T est un point commun aux droites AB et CD , il vérifie les équations vectorielles

$$\overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CT} = \mu \overrightarrow{CD} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC} + \mu \overrightarrow{CD}.$$

En égalant les expressions de $\overrightarrow{OT}$ et en remplaçant les vecteurs par leurs composantes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Le système qui en découle, à savoir

$$\begin{cases} \lambda + 6\mu = 3 \\ \lambda + 6\mu = 3 \\ -\lambda - 6\mu = -3 \end{cases}$$

est vérifié par une infinité de valeurs des paramètres λ et μ , du moment que $\lambda = -6\mu + 3$. Cela montre bien qu'il y a une infinité de points communs aux droites AB et CD et que les points A , B , C , D sont alignés. À chaque valeur de λ qui situe un point T par rapport à A et B correspond une seule valeur de μ qui situe ce même point T par rapport à C et D .

En recherchant de la même manière un point d'intersection S aux droites AB et EG , on obtient l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OE} + \mu \overrightarrow{EG},$$

et en termes de composantes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu = -4 \\ \lambda - 2\mu = 2 \\ -\lambda + 2\mu = 0 \end{cases}$$

est cette fois impossible, ce qui montre bien que les droites de même direction AB et EG sont parallèles disjointes.

Nous avons déjà vu que les droites EF et PQ n'ont pas la même direction que la droite AB . C'est donc l'existence d'un éventuel point d'intersection qui nous permettra de savoir si elles sont gauches ou sécantes avec AB .

S'il existe un point L commun aux droites AB et EF , il vérifie l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OE} + \mu \overrightarrow{EF},$$

et en termes de composantes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda - \mu = -4 \\ \lambda + \mu = 2 \\ -\lambda - 2\mu = 0 \end{cases}$$

qui en découle, on détermine les valeurs $\lambda = -1$ et $\mu = 3$ qui vérifient les deux premières équations. Ces valeurs devraient également vérifier la troisième équation pour être solutions du système, mais ce n'est pas le cas. On dit que le système est *incompatible*. Aucune valeur de λ et de μ ne convient, les droites AB et EF sont donc gauches.

On reprend le même raisonnement pour un éventuel point R commun aux droites AB et PQ . Il vérifie l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{PQ},$$

et en termes de composantes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dans le système qui s'ensuit,

$$\begin{cases} \lambda - \mu = -3 \\ \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda - 2\mu = -3, \end{cases}$$

les valeurs $\lambda = -1$ et $\mu = 2$ qui vérifient les deux premières équations du système vérifient également la troisième équation. Cette fois le système est *compatible*. Le point d'intersection R est obtenu en remplaçant, soit λ par -1 dans $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}$, soit μ par 2 dans $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{PQ}$. On obtient

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ce travail a permis de rencontrer de manière naturelle des systèmes de 3 équations à 2 inconnues, en donnant du sens aux différents cas qui peuvent se présenter, tout en évoquant l'aspect vectoriel des positions relatives des droites de l'espace.

Un autre type de problèmes d'incidence dans l'espace¹⁰ est celui de la recherche du point de percée d'une droite dans un plan. Nous proposons de l'aborder par un exercice comme celui-ci.

On considère le tétraèdre $ABCD$, R le point situé sur l'arête $[AD]$ au tiers à partir de D et E le point du plan ABC tel que $BACE$ forme un parallélogramme. On demande de déterminer le point de percée P de la droite RE dans la face BCD , de situer ce point avec précision sur la droite RE et dans la face BCD , en utilisant un repère approprié.

Le dessin de la figure 29 est reproduit en annexe à la page 490.

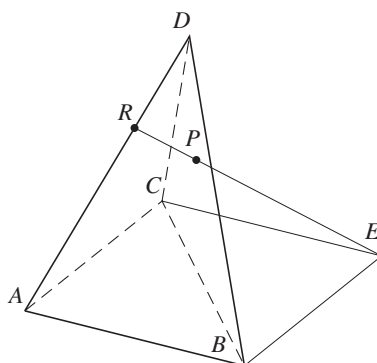


Fig. 29

La nature du problème nous conduit à renoncer à l'emploi d'un repère orthonormé. Il vaut mieux, si on veut éviter de trop longs calculs, se donner un repère dont l'origine est un sommet du tétraèdre et dont les vecteurs « de base » sont sur les arêtes de celui-ci. On peut, par exemple choisir

¹⁰ Des problèmes de ce type sont traités sous forme synthétique dans CREM [2001b].

de travailler dans le repère $ABCD$. Les vecteurs « de base » sont alors $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AD}$. Dans ce repère, les points A , B , C , D , E et R ont pour coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Comme le point P appartient à la droite RE , il vérifie l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{RP} = \lambda \overrightarrow{RE} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AR} + \lambda \overrightarrow{RE}.$$

De plus nous avons vu que tout vecteur d'un plan pouvait être exprimé comme combinaison linéaire de deux vecteurs « de base » de ce plan. Dans le plan BCD , on peut donc exprimer le vecteur $\overrightarrow{BP}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$. L'équation vectorielle

$$\overrightarrow{BP} = \mu \overrightarrow{BC} + \nu \overrightarrow{BD} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC} + \nu \overrightarrow{BD}$$

exprime donc bien que le point P appartient au plan BCD . On exprime que P appartient à la fois à la droite RE et au plan BCD en égalant les deux expressions de $\overrightarrow{AP}$, ce qui donne, en passant aux composantes des vecteurs,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système qui en découle,

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu &= 1 \\ \lambda - \mu &= 0 \\ -\frac{2}{3}\lambda - \nu &= -\frac{2}{3} \end{cases}$$

a pour solution $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{4}, \nu = \frac{1}{2}$. Les coordonnées du point P sont

$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans le repère choisi. Elles sont obtenues en remplaçant, par exemple, λ par $\frac{1}{4}$ dans l'expression de $\overrightarrow{AP}$. Les valeurs des paramètres peuvent cependant être interprétées indépendamment du repère. Le fait que

$$\overrightarrow{RP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{RE}$$

signifie que le point P se trouve sur le segment $[RE]$ au quart à partir de R . Dans la face BCD , on peut situer le point P à partir de la relation

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}.$$

2.5 Quelques transformations du plan et de l'espace

Comment s'y
prendre ?

Dans le plan muni d'un repère, on donne les points A , B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Représenter graphiquement les points suivants et calculer leurs coordonnées, sachant que

1. D est le point tel que $CABD$ forme un parallélogramme,
2. A' est l'image de A par la translation $\vec{t} = \overrightarrow{BC}$,
3. B' est le symétrique de B par rapport à A ,
4. C' est l'image de C par une homothétie de centre A et de rapport $-\frac{3}{4}$.

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points A , B et C par leurs coordonnées

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer les coordonnées des points D , A' , B' et C' définis de la même manière que dans le plan.

En déduire, après généralisation, l'expression analytique des translations, symétries centrales et homothéties dans le plan et dans l'espace.

Voici les résultats pour le plan.

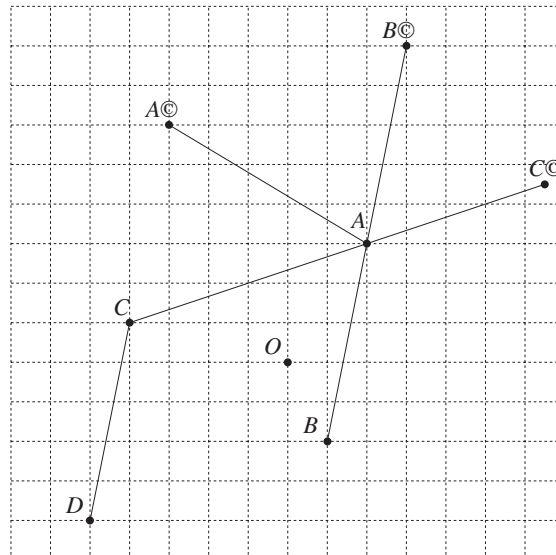


Fig. 30 : Transformations du plan

1. L'équation $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ nous donne $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point D .
2. L'équation $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$ nous donne $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point A' .
3. L'équation $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BA}$ nous donne $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point B' .
4. L'équation $\overrightarrow{AC'} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ nous donne $\begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point C' .

Voici les résultats pour l'espace.

1. L'équation $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ nous donne $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point D .
2. L'équation $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$ nous donne $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point A' .
3. L'équation $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BA}$ nous donne $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point B' .
4. L'équation $\overrightarrow{AC'} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ nous donne $\begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}$ pour les coordonnées du point C' .

Généralisation

Considérons les points P et P' de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. P' est l'image de P par la translation $\overrightarrow{t}$ de composantes $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$
 si et seulement si $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{t}$
 si et seulement si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$.
2. P' est l'image de P par la symétrie de centre C de coordonnées $\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$
 si et seulement si $\overrightarrow{CP'} = \overrightarrow{PC}$
 si et seulement si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

3. P' est l'image de P par l'homothétie de centre C de coordonnées $\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et de rapport k
- si et seulement si $\overrightarrow{CP'} = k\overrightarrow{CP}$
- si et seulement si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1 - k) \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$.

Les expressions correspondantes dans l'espace sont obtenues sans peine en ajoutant la troisième composante.

Ce dernier travail montre que le calcul vectoriel permet également d'exprimer de manière extrêmement concise des propriétés de translation, de symétrie centrale et d'homothétie. Il permet d'en dégager facilement les expressions analytiques, aussi bien dans l'espace que dans le plan. Nous proposons, pour terminer, deux applications qui mettent en œuvre ces transformations.

Dans un plan, on considère trois points non alignés A , B et M . Au point M , on associe le point R milieu de $[BM]$, le point S , symétrique de R par rapport à A , ainsi que le point P , point d'intersection des droites MS et AB . Qu'advient-il du point P lorsque le point M se déplace dans le plan ?

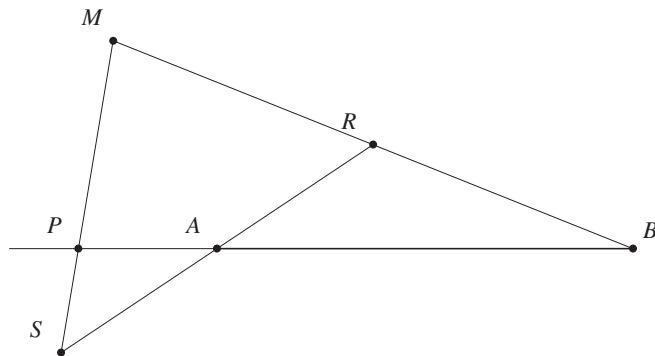


Fig. 31

Il semble naturel de travailler dans un repère dont l'origine est A et où $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$. Dans ce cas, les points A et B ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le point mobile M sera noté $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$. On obtient successivement

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+1}{2} \\ \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda+1}{2} \\ -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

En exprimant que le point P est aligné avec M et S , on obtient l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MS} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{MS},$$

ce qui donne pour les coordonnées du point P

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} + k \left[\begin{pmatrix} -\frac{\lambda+1}{2} \\ -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{k(3\lambda+1)}{2} \\ \frac{\mu(2-3k)}{2} \end{pmatrix}.$$

Comme le point P appartient à la droite AB , son ordonnée est nulle, ce qui permet de déterminer la valeur de k qui vaut $\frac{2}{3}$. En remplaçant k par $\frac{2}{3}$ dans les coordonnées de P , on trouve $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. Le point P est donc un point fixe, situé sur la droite AB , et tel que $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Dans un triangle ABC , on note H, J, K les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, G le centre de gravité. Le point M étant un point quelconque du plan, on note P, Q, R les symétriques de M par rapport à H, J, K . Montrer que

1. les segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ ont même milieu O ;
2. les trois points M, G, O sont alignés.

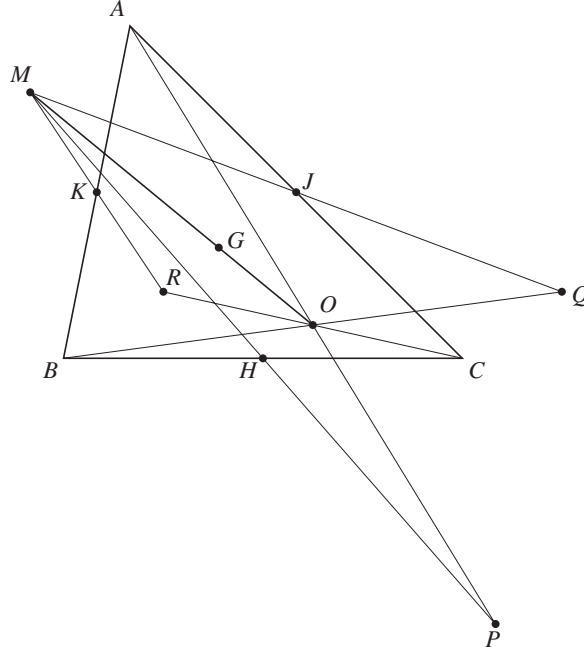


Fig. 32

Plaçons le repère en BHK , pour éviter d'introduire immédiatement des coordonnées fractionnaires. On a donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le point quelconque M est noté $M = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ -\mu \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 2-\mu \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2-\mu \end{pmatrix}.$$

En calculant les coordonnées des milieux de $[BQ]$, de $[AP]$ et de $[CR]$, on trouve chaque fois $\begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} \\ 1 - \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$, ces trois segments ont donc bien le même milieu $O = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} \\ 1 - \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$. Il reste à calculer

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{MG} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \lambda \\ \frac{2}{3} - \mu \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{GO} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{2} \\ \frac{1}{3} - \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{GO}$, on peut en déduire que les points M , G et O sont alignés, et que G se trouve sur $[MO]$, aux deux tiers à partir de M .

Ce dernier résultat, qui peut sembler inattendu quand on travaille vectoriellement, apparaît de manière naturelle au cours d'une démonstration synthétique des propriétés annoncées. Voici quelques indications qui permettent de rédiger une telle démonstration.

Dans le triangle ABC , le segment $[JH]$ est parallèle au segment $[AB]$ et $|JH| = \frac{|AB|}{2}$.

Dans le triangle MPQ , le segment $[JH]$ est parallèle au segment $[QP]$ et $|JH| = \frac{|QP|}{2}$.

On en déduit que les segments $[AB]$ et $[QP]$ sont parallèles et de même longueur. Le quadrilatère $ABPQ$ est donc un parallélogramme dont les diagonales $[AP]$ et $[BQ]$ se coupent en leur milieu.

On démontre de même que $BCQR$ est un parallélogramme dont les diagonales $[CR]$ et $[BQ]$ se coupent en leur milieu.

Par conséquent, les trois segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ ont même milieu O .

Le point G , centre de gravité du triangle ABC , se trouve sur la médiane $[BJ]$ aux deux tiers à partir de B . Comme $[BJ]$ est aussi médiane du triangle BMQ , G est aussi le centre de gravité de ce triangle et se trouve donc également sur la médiane $[MO]$, aux deux tiers à partir de M . Les trois points M , G , O sont donc alignés.

LE PRODUIT SCALAIRE

1 Des polygones réguliers au produit scalaire

De quoi s'agit-il ?

Faire apparaître des relations algébriques entre les coordonnées des sommets des polygones réguliers. Pour chaque paire de vecteurs, trouver une expression algébrique qui ne dépend que de leurs longueurs et de l'angle formé par leurs directions.

Enjeux

La somme des vecteurs et le produit d'un vecteur par un scalaire sont les deux opérations qui permettent de construire la géométrie affine par calcul. Le produit scalaire que nous introduisons ici permet de même d'établir par calcul les propriétés euclidiennes (voir à ce sujet le chapitre 15).

Nous cherchons ici à faire émerger les différentes formes du produit scalaire à partir de figures géométriques simples et à donner du sens à l'expression du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée.

Matières couvertes. – La règle des cosinus, encore appelée *théorème de Pythagore généralisé* et la formule du cosinus de la différence de deux angles.

Le produit scalaire de deux vecteurs dans le plan et dans l'espace, exprimé sous des formes faisant intervenir

- les composantes des vecteurs dans un repère orthonormé,
- la fonction cosinus,
- la projection d'un vecteur sur l'autre.

Les propriétés du produit scalaire et leur justification dans un contexte géométrique.

Compétences. – *Savoir, connaître, définir : le calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace faisant intervenir les composantes des vecteurs et le produit scalaire de deux vecteurs.*

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – Les coordonnées d'un point et les composantes d'un vecteur dans une base orthonormée.

La trigonométrie dans le triangle rectangle.

Les nombres trigonométriques d'un angle orienté rapporté au cercle trigonométrique et leurs valeurs remarquables.

Matériel. – Une calculatrice scientifique.

1.1 Émergence d'une formule

Comment s'y prendre ?

Tout au long de ce chapitre, nous travaillerons dans le plan métrique, c'est-à-dire dans le plan muni d'une unité de longueur.

Le début de cette activité peut sembler très directif. Il a pour but de confronter les élèves avec une série de figures géométriques simples : des polygones réguliers centrés à l'origine d'un repère orthonormé. La recherche des coordonnées des sommets de ces polygones fournit l'occasion d'utiliser les sinus et cosinus de quelques angles orientés rapportés au cercle trigonométrique dans un contexte de géométrie analytique. L'observation des figures et des tableaux de nombres obtenus à partir des coordonnées de leurs sommets devrait permettre de dégager une formulation du produit scalaire dans une base orthonormée, ainsi que son interprétation.

Représenter un carré $ABCD$ inscrit dans un cercle de rayon 1 centré à l'origine O d'un repère orthonormé. Indiquer les coordonnées des sommets du carré dans ce repère.

Certains élèves auront placé les sommets du carré sur les axes car, dans cette position, les coordonnées des sommets semblent évidentes. Ils obtiennent alors la figure 1.

D'autres auront eu l'idée de placer les médianes du carré sur les axes et obtiendront la figure 2.

Il est possible que d'autres positions du carré soient proposées spontanément. Sinon, le professeur demande de dessiner aussi le carré dont une diagonale forme un angle de 30° avec l'axe des x (figure 3).

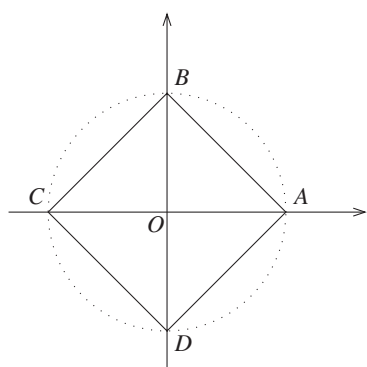


Fig. 1

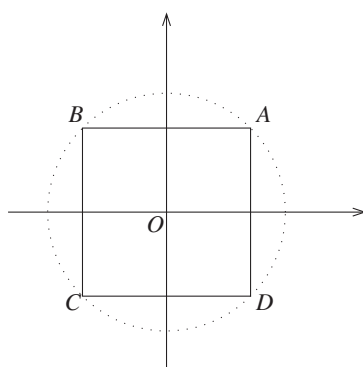


Fig. 2

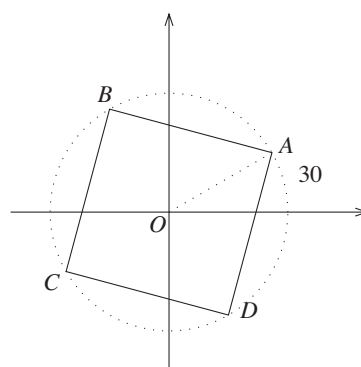


Fig. 3

Pour chacun des carrés obtenus, placer les coordonnées des sommets dans un tableau comme celui présenté ci-dessous pour le carré de la figure 1 et observer les régularités que présentent ces tableaux de nombres. Quelles sont les régularités qui persistent lorsque le carré est placé dans une position plus générale ?

	A	B	C	D
x	1	0	-1	0
y	0	1	0	-1

Les connaissances des élèves en trigonométrie devraient leur permettre de construire les tableaux suivants pour les carrés des figures 2 et 3.

	A	B	C	D
x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

	A	B	C	D
x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Les deux premiers tableaux présentent des régularités qui proviennent de la position particulière du carré par rapport aux axes. Dans le premier, les seules valeurs qui apparaissent sont 1, 0 et -1 ; dans le second, il n'y a que deux valeurs opposées. Le tableau de nombres associé à la figure 3, moins particulière que les deux précédentes, donne une meilleure idée des régularités qu'on pourrait observer dans le cas général. On n'y voit que deux valeurs différentes en valeur absolue : $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces deux nombres reviennent dans chaque colonne, en changeant de place à chaque passage d'une colonne à la suivante et avec les signes « moins » aux mêmes endroits que dans le tableau précédent. Pour aborder le cas général, on suggère aux élèves de dessiner un carré dont une diagonale forme un angle quelconque α avec l'axe des x . Ils obtiennent la figure 4 et le tableau qui s'y rapporte.

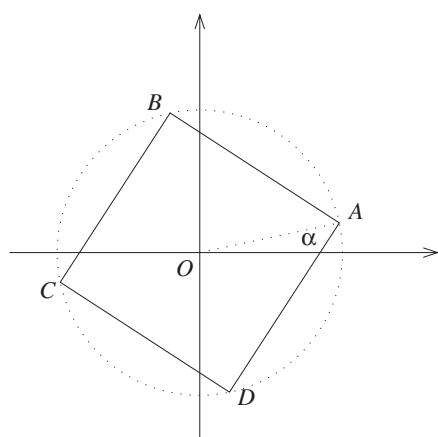


Fig. 4

	A	B	C	D
x	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$
y	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$

Il sera sans doute utile de faire observer aux élèves que les coordonnées de chacun des sommets du carré vérifient la relation $x^2 + y^2 = 1$, puisque $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, et que cette relation est liée au fait que le carré est inscrit dans un cercle de rayon 1.

Et si le cercle circonscrit au carré n'est plus de rayon 1 ?
 Dessiner un carré inscrit dans un cercle centré à l'origine et dont le sommet A dans le premier quadrant a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; compléter ensuite le tableau qui s'y rapporte.

Il faudra sans doute susciter une discussion dans la classe pour amener les élèves à observer que ce dernier carré fournit un cas plus général que les précédents, le rayon du cercle circonscrit au carré valant $\sqrt{a^2 + b^2}$, quantité qui n'est pas nécessairement égale à 1.

Les moyens qui sont à la disposition des élèves pour déterminer les coordonnées des sommets ne manquent pas. Ils peuvent, par exemple, considérer les triangles rectangles dont les hypoténuses sont les segments OA , OB , OC et OD , et dont les côtés sont parallèles aux axes. La rotation de 90° autour de O qui amène chacun de ces triangles sur le suivant permet de justifier l'égalité des longueurs des côtés de ces triangles. Il reste alors à déterminer les signes pour en déduire les coordonnées des sommets du carré. La figure 5 montre comment passer des coordonnées du point A à celles du point B .

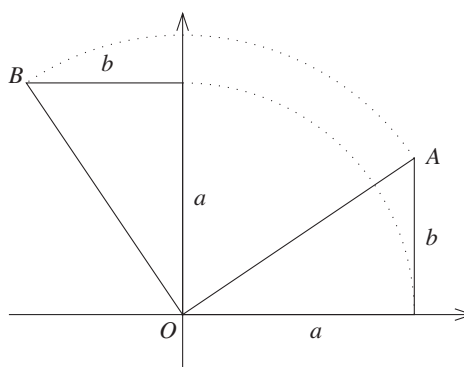


Fig. 5

Voici le tableau obtenu.

	A	B	C	D
x	a	$-b$	$-a$	b
y	b	a	$-b$	$-a$

Une phase de discussion sera sans doute encore nécessaire pour que toute la classe soit convaincue que ce tableau généralise tous les précédents.

On demande alors aux élèves d'analyser ce tableau, en particulier les sous-tableaux formés de deux colonnes consécutives. Leur faire expliquer comment on passe d'une colonne à la suivante éclaire assez bien la question.

Remarquons au passage que le tableau est cyclique et qu'on peut passer de la dernière colonne à la première par le même procédé. Le but est de trouver une relation toujours vérifiée par les coordonnées de deux sommets consécutifs du carré. Les élèves devraient finalement parvenir à la conclusion que le produit des abscisses est toujours égal à l'opposé du produit des ordonnées. Pour formuler mathématiquement cette observation sous la forme d'une relation liant x_1, y_1, x_2, y_2 , où $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets consécutifs du carré, on écrira d'abord

$$x_1x_2 = -y_1y_2 \quad \text{et ensuite} \quad x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

La même expression calculée sur les coordonnées de deux sommets diamétralement opposés donne

- 1 pour tous les carrés inscrits dans un cercle de rayon 1 ;
- $-(a^2 + b^2) = -r^2$ dans le cas général.

Que se passe-t-il si le nombre de côtés est plus grand que quatre ? Les tableaux de nombres obtenus à partir des coordonnées des sommets d'autres polygones réguliers présentent-ils de telles régularités ? Qu'advient-il de la relation $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$? Que vaut l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ lorsqu'on la calcule pour différentes paires de sommets ?

Examinons, par exemple, un hexagone inscrit dans un cercle de rayon 1 et centré en O . C'est un polygone dont la construction est bien connue des élèves. La figure 6 montre un hexagone dont un diamètre coïncide avec l'axe des x et la figure 7 montre un hexagone dont un diamètre forme un angle de 12° avec l'axe des x .

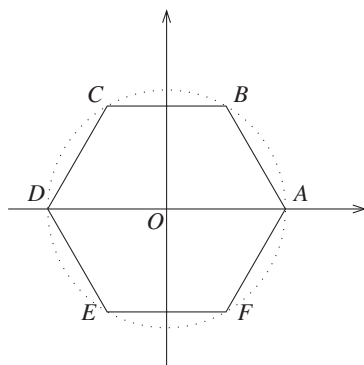


Fig. 6

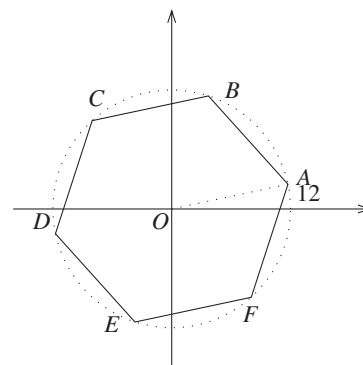


Fig. 7

Ce sont les valeurs particulières des sinus et cosinus des multiples de 60° qui fournissent les coordonnées des sommets de l'hexagone de la figure 6, et pour l'hexagone de la figure 7, les coordonnées des sommets sont exprimées sous la forme $(\cos 12^\circ, \sin 12^\circ)$, $(\cos 72^\circ, \sin 72^\circ)$, ...

On note les coordonnées des sommets dans un tableau de la forme

	A	B	C	D	E	F	A
x							
y							
$x_1x_2 + y_1y_2$							

où $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets consécutifs de l'hexagone.

Des régularités dans le tableau des coordonnées n'apparaissent plus de manière aussi évidente que pour le carré ; par contre, on voit que l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ calculée pour les coordonnées de deux sommets consécutifs d'un hexagone vaut toujours 0,5.

La même expression $x_1x_2 + y_1y_2$ est également calculée pour les coordonnées de différentes paires de sommets non consécutifs de l'hexagone.

Les résultats obtenus peuvent être regroupés de la manière suivante : l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ vaut

0,5 lorsque $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets consécutifs de l'hexagone ;

−0,5 lorsque $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets de l'hexagone situés à 120° l'un de l'autre ;

−1 lorsque $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de deux sommets diamétralement opposés de l'hexagone.

On commence alors à penser que l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ est liée à l'angle formé par les vecteurs d'origine O et dont les extrémités sont les sommets d'un polygone inscrit dans un cercle de rayon 1. Il serait intéressant de connaître la valeur de l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ si l'angle formé par les vecteurs considérés vaut 0° , c'est-à-dire lorsque $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. On obtient alors $x_1^2 + y_1^2 = 1$ dans tous les cas où le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ est à distance 1 de O . En tenant compte de cette dernière observation, on dresse le tableau suivant.

angle	$x_1x_2 + y_1y_2$
0°	1
90°	0
180°	−1
60°	0,5
120°	−0,5

Ce tableau devrait permettre de conjecturer que

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \cos \alpha,$$

où α est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$, P_1 et P_2 étant des points situés à distance 1 de l'origine et de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. On désignera par « longueur d'un vecteur » la longueur du segment qui joint son origine à son extrémité. Ceci nous permet d'énoncer la conjecture sous la forme suivante,

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \cos \alpha,$$

où α est l'angle formé par les vecteurs de longueur 1 et de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

L'exemple du carré inscrit dans un cercle de rayon différent de 1 montre bien que la longueur des vecteurs joue également un rôle dans la valeur de l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$.

Quelle signification peut-on donner à l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ lorsque les vecteurs sont de longueurs différentes (et différentes de 1) ?

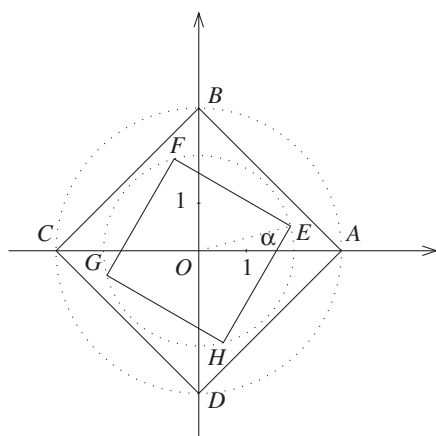


Fig. 8

Pour soutenir le réflexion des élèves, on leur présente la figure 8, qui montre deux carrés,

- l'un inscrit dans un cercle de rayon 3 et dont une diagonale coïncide avec l'axe des x ,
- l'autre inscrit dans un cercle de rayon 2 et dont une diagonale forme un angle α avec l'axe des x .

Les coordonnées des sommets des deux carrés sont rassemblées dans le tableau suivant.

	A	E	B	F	C	G	D	H
x	3	$2 \cos \alpha$	0	$-2 \sin \alpha$	-3	$-2 \cos \alpha$	0	$2 \sin \alpha$
y	0	$2 \sin \alpha$	3	$2 \cos \alpha$	0	$-2 \sin \alpha$	-3	$-2 \cos \alpha$
$x_1x_2 + y_1y_2$	$6 \cos \alpha$	$6 \sin \alpha$	$6 \cos \alpha$	$6 \sin \alpha$	$6 \cos \alpha$	$6 \sin \alpha$	$6 \cos \alpha$	

L'expression $x_1^2 + y_1^2$ qui valait 1 pour les vecteurs de longueur 1, vaut à présent 9 pour les sommets du carré $ABCD$ et 4 pour ceux du carré $EFGH$. D'une manière générale, le théorème de Pythagore nous indique que, pour un point P de coordonnées $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$, l'expression $x_P^2 + y_P^2$ est égale au carré de sa distance à l'origine $|OP|$, ou encore au carré de la longueur du vecteur $\overrightarrow{OP}$. La longueur d'un vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ vaut donc $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Le tableau permet également de vérifier que

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 3 \cdot 2 \cdot \cos \alpha$$

pour les paires de sommets A et E , B et F , C et G et enfin D et H ; et que

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 3 \cdot 2 \cdot \sin \alpha = 3 \cdot 2 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

pour les paires de sommets E et B , F et C , G et D et, pour terminer, H et A , où $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ est l'angle $\widehat{EOB}$.

Ceci devrait inciter les élèves à conjecturer que l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ vaut le produit des longueurs des vecteurs dont les composantes sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, multiplié par le cosinus de l'angle formé par les directions de ces deux vecteurs.

Cette expression $x_1x_2 + y_1y_2$ est appelée le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée et est notée¹ $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle$.

La conjecture peut donc s'écrire

$$\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos \theta$$

où $\|\vec{v}_1\|$ et $\|\vec{v}_2\|$ sont les longueurs des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ et θ l'angle formé par les directions de ces deux vecteurs. Nous avons montré que $\|\vec{v}_1\|$ et $\|\vec{v}_2\|$ valent respectivement $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ et $\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

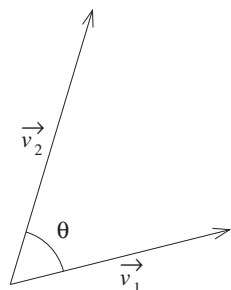


Fig. 9

1.2 Les trois formes du produit scalaire

Comment s'y prendre ?

Généralisons la situation observée pour les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OE}$ de la figure 8 dans le but d'obtenir une première forme du produit scalaire faisant intervenir les directions des vecteurs.

Considérons deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant avec l'axe des x des angles orientés α et β . Dessinons ces vecteurs de telle sorte que leur origine coïncide avec l'origine O du repère orthonormé : $\vec{a} = \vec{OA}$ et $\vec{b} = \vec{OB}$. Nous savons que dans ce cas, les composantes des vecteurs sont égales aux coordonnées de leurs extrémités A et B . Les relations trigonométriques dans les triangles rectangles OAA' et OBB' nous donnent les coordonnées des

¹ Le choix de la notation $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle$ pour le produit scalaire de deux vecteurs n'a rien d'impératif. Nous l'avons adoptée pour bien distinguer cette opération de la multiplication dans les réels et de la multiplication d'un vecteur par un scalaire. En effet, il s'agit d'une opération tout à fait nouvelle qui, à deux vecteurs, associe un nombre. Ce nombre dépend de la longueur des deux vecteurs et de l'angle formé par leurs directions. Ceci s'écarte notablement d'une multiplication au sens usuel. De plus, cette notation se rapproche de celles habituellement utilisées pour les formes bilinéaires dans les ouvrages d'algèbre linéaire.

points A et B , et donc les composantes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, qui sont respectivement

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \|\vec{a}\| \cos \alpha \\ \|\vec{a}\| \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \|\vec{b}\| \cos \beta \\ \|\vec{b}\| \sin \beta \end{pmatrix},$$

où $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$ sont les longueurs des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

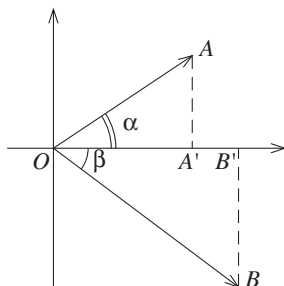


Fig. 10

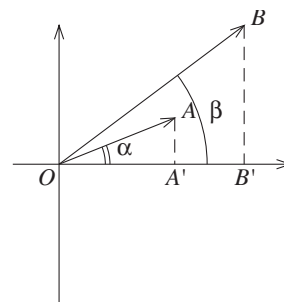


Fig. 11

Le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut donc

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta).$$

Or, nous avons conjecturé que

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

où θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, qui vaut $\alpha - \beta$ dans le cas de la figure 10 et $\beta - \alpha$ dans la figure 11. Remarquons que $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$. La conjecture est donc établie si les élèves connaissent la formule qui exprime $\cos(\alpha - \beta)$ en fonction des nombres trigonométriques de α et β . Si ce n'est pas le cas, nous proposons ci-dessous une démonstration de la conjecture à partir de la règle des cosinus, encore appelée *théorème de Pythagore généralisé*. Nous présentons dans la section 1.5 à la page 295 une démonstration de ce dernier théorème telle qu'elle apparaît dans *Les Éléments* d'EUCLIDE. Remarquons que la comparaison des deux expressions de $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$ ci-dessus nous permettra de déduire la formule du cosinus de la différence de deux angles, dès que la conjecture sera établie.

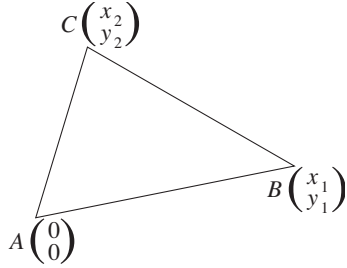
Démonstration de la conjecture

Nous proposons ici une façon d'établir le lien entre les deux premières formes du produit scalaire,

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad \text{et} \quad \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta.$$

Considérons un triangle quelconque ABC tel que les composantes des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Celles-ci sont indépendantes de la position de l'origine du repère. Nous pouvons donc placer l'origine du repère en A sans nuire à la généralité. Dans ce cas, les coordonnées des

points B et C sont également $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et les composantes de $\overrightarrow{BC}$ valent $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$. En calculant le carré de la longueur du côté BC , on trouve



$$\begin{aligned} |BC|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\ &= |AB|^2 + |AC|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2). \end{aligned}$$

Fig. 12

En comparant cette dernière égalité avec le calcul de $|BC|^2$ par la règle des cosinus,

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \hat{A},$$

on établit l'égalité

$$x_1x_2 + y_1y_2 = |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \hat{A}.$$

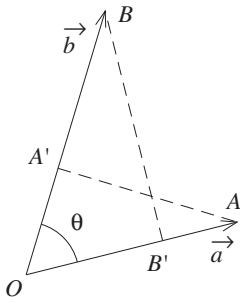


Fig. 13

Si on change de repère orthonormé, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ changent de valeurs, mais l'expression $x_1x_2 + y_1y_2$ reste *invariante* et vaut toujours $|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \hat{A}$.

Forme du produit scalaire faisant intervenir la projection orthogonale d'un vecteur sur l'autre

Il reste à faire le lien avec la forme du produit scalaire qui fait intervenir la projection d'un vecteur sur l'autre.

Les figures montrent que, dans l'expression

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta,$$

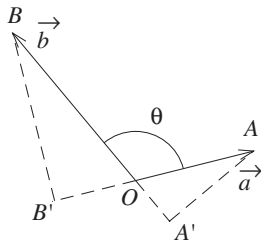


Fig. 14

$\|\vec{b}\| \cos \theta$ représente la longueur $|OB'|$ de la projection du vecteur $\vec{b}$ sur la direction du vecteur $\vec{a}$, munie du signe $+$ si l'angle θ est aigu et du signe $-$ si l'angle θ est obtus. On peut encore interpréter cela en disant que le signe est $+$ si le vecteur $\vec{a}$ et la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$ sont de même sens, et que le signe est $-$ s'ils sont de sens contraires. De la même manière, $\|\vec{a}\| \cos \theta$ représente la longueur $|OA'|$ de la projection du vecteur $\vec{a}$ sur la direction du vecteur $\vec{b}$, munie du signe adéquat (figures 13 et 14).

Synthèse

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs de composantes respectives $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en base ortho-normée, le produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle &= x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta \\ &= (\text{signe}) |OA| \cdot |OB'| = (\text{signe}) |OB| \cdot |OA'| \end{aligned}$$

Dans cette dernière forme, $|OA|$, $|OB|$, $|OA'|$ et $|OB'|$ représentent les longueurs des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et des projections orthogonales de chacun d'eux sur la direction de l'autre (voir figures 13 et 14). Le signe est

- + si l'angle θ est aigu, ou encore, si l'un des vecteurs et la projection de l'autre sur celui-ci sont de même sens,
- si l'angle θ est obtus, ou encore, si l'un des vecteurs et la projection de l'autre sur celui-ci sont de sens contraires.

Les valeurs $\|\vec{a}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ et $\|\vec{b}\| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ qui représentent les longueurs des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont encore appelées *norme* de $\vec{a}$ et *norme* de $\vec{b}$. D'autre part, si les composantes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont écrites sous la forme

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \|\vec{a}\| \cos \alpha \\ \|\vec{a}\| \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \|\vec{b}\| \cos \beta \\ \|\vec{b}\| \sin \beta \end{pmatrix},$$

α et β étant les angles orientés formés par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ avec l'axe des x (voir les figures 10 et 11), le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut alors

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta).$$

Comme θ est égal à $\alpha - \beta$ ou à $\beta - \alpha$, la comparaison de cette dernière égalité avec

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

permet d'établir la formule donnant le cosinus de la différence de deux angles, à savoir

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Extension du produit scalaire à l'espace

Deux vecteurs de l'espace, amenés dans une position où leurs origines coïncident en un point quelconque de l'espace, déterminent un plan. Dans ce plan, leur produit scalaire vaut donc

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta,$$

où θ désigne l'angle formé par leurs directions. Montrons que si les composantes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, leur produit scalaire peut s'écrire

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Il suffit pour cela d'adapter la démonstration de la conjecture dans le plan au cas où ABC est un triangle de l'espace.

Considérons un triangle ABC quelconque dans l'espace tel que les composantes des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Celles-ci sont indépendantes de la position de l'origine du repère, que nous pouvons donc placer en A . Dans ce cas, les coordonnées des points B et C sont égales aux composantes de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

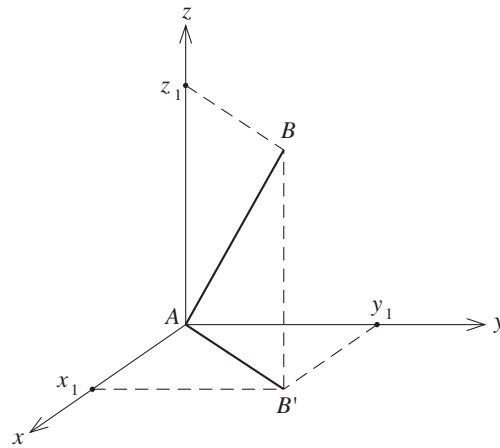


Fig. 15

La figure 15 montre bien que $|AB|^2 = |AB'|^2 + |B'B|^2$, le triangle $AB'B$ étant rectangle en B' . Comme $|AB'|^2 = x_1^2 + y_1^2$, on a

$$|AB|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

et de manière analogue

$$|AC|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Cette expression du carré d'une longueur comme somme de trois carrés peut être considérée comme une extension du théorème de Pythagore dans l'espace. D'une manière générale, la longueur d'un vecteur de l'espace (et du plan) est égale à la racine carrée de la somme des carrés de ses composantes.

En calculant le carré de la longueur du côté BC , égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{BC}$ de composantes $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$, on trouve

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + z_2^2 + z_1^2 - 2z_1z_2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \\ &= |AB|^2 + |AC|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \end{aligned}$$

En comparant cette dernière égalité avec l'expression de $|BC|^2$ calculée par la règle des cosinus, à savoir

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \hat{A},$$

on établit l'égalité

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \hat{A}.$$

1.3 Calculer des longueurs et des angles

Comment s'y prendre ?

Que peut-on calculer au moyen du produit scalaire ?

Toute l'activité qui précède visait à faire émerger l'idée que le produit scalaire de deux vecteurs est une expression qui dépend de la longueur de chacun des vecteurs et de l'amplitude de l'angle que forment leurs directions. On peut donc espérer qu'arrivés à ce stade, les élèves proposent spontanément d'utiliser le produit scalaire pour calculer des longueurs et des angles. Reste à établir les formules.

Pour arriver à une formule qui donne la longueur d'un vecteur, il faut encore observer que l'expression $x_1^2 + y_1^2 = \|\vec{a}\|^2$ dans le plan (qui devient $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \|\vec{a}\|^2$ dans l'espace) peut encore être vue comme le produit scalaire du vecteur $\vec{a}$ par lui-même (encore appelé *carré scalaire* du vecteur $\vec{a}$). En effet,

$$\langle \vec{a} | \vec{a} \rangle = x_1x_1 + y_1y_1 = x_1^2 + y_1^2 = \|\vec{a}\|^2.$$

Par conséquent, la longueur du vecteur $\vec{a}$ peut être calculée par la formule

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a} | \vec{a} \rangle},$$

ce qui peut s'énoncer

1. *La norme d'un vecteur est la racine carrée de son carré scalaire.*

La deuxième forme du produit scalaire

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

fournit la formule qui permet de calculer l'angle (non orienté) formé par les directions de deux vecteurs. On obtient

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}.$$

En particulier, on peut énoncer

2. Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

Ces deux formules peuvent être exploitées pour calculer la longueur d'un segment $[AB]$ et l'angle de deux droites AB et CD . On obtient

$$|AB| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\langle \vec{AB} | \vec{AB} \rangle} \quad \text{et} \quad \cos(AB, CD) = \frac{\langle \vec{AB} | \vec{CD} \rangle}{\|\vec{AB}\| \|\vec{CD}\|}.$$

Le chapitre suivant proposera quelques situations-problèmes où ces aspects du produit scalaire seront mis en œuvre.

1.4 Propriétés du produit scalaire

*Comment s'y
prendre ?*

À partir du moment où les élèves disposent des trois formes de l'expression du produit scalaire, les démonstrations de ses propriétés ne devraient pas poser de problèmes. Ils peuvent à tout moment se référer à la forme de leur choix pour donner une justification adéquate.

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle &= \langle \vec{b} | \vec{a} \rangle \\ \langle \vec{a} | \vec{b} + \vec{c} \rangle &= \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{a} | k \vec{b} \rangle &= k \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \end{aligned}$$

Il nous semble intéressant de montrer ces propriétés à partir de la première forme du produit scalaire dans le plan. Considérons des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ quelconques, k et ℓ des scalaires quelconques. Nous notons

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

les composantes de ces vecteurs. Ainsi, les composantes des vecteurs $\vec{b} + \vec{c}$ et $k \vec{b}$ sont

$$\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix}, \quad k \vec{b} = \begin{pmatrix} kx_2 \\ ky_2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle &= x_1x_2 + y_1y_2, \\ \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle &= x_1x_3 + y_1y_3, \\ \langle \vec{b} | \vec{a} \rangle &= x_2x_1 + y_2y_1 \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 \\ &= \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle, \\ \langle \vec{a} | \vec{b} + \vec{c} \rangle &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3 \\ &= \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle, \\ \langle \vec{a} | k \vec{b} \rangle &= x_1kx_2 + y_1ky_2 \\ &= k(x_1x_2 + y_1y_2) \\ &= k \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui établit les propriétés dans le plan. Celles-ci peuvent être démontrées dans l'espace de manière analogue.

Les deux dernières propriétés peuvent être condensées en une seule qui s'écrit

$$\langle \vec{a} | k \vec{b} + \ell \vec{c} \rangle = k \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle + \ell \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle ;$$

et en tenant compte de la commutativité, on a aussi

$$\langle k \vec{b} + \ell \vec{c} | \vec{a} \rangle = k \langle \vec{b} | \vec{a} \rangle + \ell \langle \vec{c} | \vec{a} \rangle .$$

Cet ensemble de propriétés exprime la *bilinéarité du produit scalaire*.

Application de la bilinéarité du produit scalaire

Adoptons, pour la perpendicularité des droites et des plans ces deux définitions, couramment admises.

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par son pied.

Un plan est perpendiculaire à une droite si et seulement si cette droite est perpendiculaire au plan.

La première définition est très exigeante : pour s'assurer de la perpendicularité d'une droite et d'un plan, il faudrait vérifier que la droite est perpendiculaire à une infinité de droites du plan. Une condition aussi forte est-elle vraiment nécessaire ?

À combien de droites d'un plan faut-il vérifier qu'une droite est perpendiculaire pour pouvoir conclure qu'elle est perpendiculaire au plan ?

La vue d'un livre ouvert posé debout sur une table nous donne l'intuition que si la droite est perpendiculaire à deux droites du plan passant par son pied, elle sera perpendiculaire à toutes les autres, et donc qu'elle sera perpendiculaire au plan. La linéarité du produit scalaire fournit la réponse à la question en même temps que sa justification.

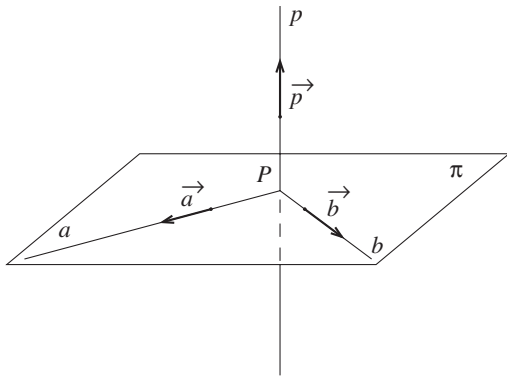


Fig. 16

En effet, considérons une droite p , P un point de cette droite, un plan π passant par P et contenant deux droites a et b sécantes en P et perpendiculaires à p . Montrons que la droite p est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par P . Pour cela, considérons un vecteur directeur sur chacune des droites : $\vec{p}$ sur p , $\vec{a}$ sur a , et $\vec{b}$ sur b . Si la droite p est perpendiculaire aux droites a et b , on a

$$\langle \vec{p} | \vec{a} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{p} | \vec{b} \rangle = 0.$$

Par conséquent,

$$\langle \vec{p} | k \vec{a} + \ell \vec{b} \rangle = k \langle \vec{p} | \vec{a} \rangle + \ell \langle \vec{p} | \vec{b} \rangle = 0.$$

Comme toutes les droites du plan π passant par P ont un vecteur directeur

de la forme $k\vec{a} + \ell\vec{b}$, la relation $\langle \vec{p} | k\vec{a} + \ell\vec{b} \rangle = 0$ montre que la droite p est perpendiculaire à toute droite du plan π passant par P .

Ceci nous permet d'énoncer une première forme de la condition suffisante de perpendicularité d'une droite et d'un plan.

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites du plan passant par son pied.

De plus, comme toutes les droites du plan π ont un vecteur directeur de la forme $k\vec{a} + \ell\vec{b}$, la relation $\langle \vec{p} | k\vec{a} + \ell\vec{b} \rangle = 0$ montre que la droite p est *orthogonale* à toute droite du plan π .

La linéarité du produit scalaire sous-tend donc également les démonstrations de propriétés de la perpendicularité d'une droite et d'un plan, comme par exemple

toute droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan,

et la deuxième forme de la condition suffisante de perpendicularité d'une droite et d'un plan

une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

1.5 La règle des cosinus

Cette activité complémentaire présente une démonstration de la règle des cosinus, encore appelée *théorème de Pythagore généralisé*. Nous en proposons ici une approche géométrique et directement appuyée sur les propositions 12 et 13 des *Éléments* d'EUCLIDE (en annexe aux pages 491 à 493).

Cette activité de démonstration peut prendre place à tout autre endroit du cours qui conviendra au professeur, mais nous l'évoquons ici puisque nous en utilisons les résultats pour établir l'équivalence des différentes formes du produit scalaire.

Euclide, Les Éléments, Livre II, proposition 12.

Les *Éléments* d'EUCLIDE représentent le premier ouvrage connu où les mathématiques sont présentées sous une forme déductive bien structurée, avec des démonstrations et un souci de rigueur. La plupart des élèves en ont entendu parler, mais il est probable qu'aucun d'entre eux n'a jamais eu l'occasion de consulter un texte mathématique ancien. Proposer aux élèves cette activité de lecture et d'interprétation nous a paru intéressant et de nature à susciter de l'intérêt pour l'histoire des mathématiques. La proposition 12 du livre II est un bon exemple d'un théorème dont la version originale peut être proposée aux élèves pour qu'ils la décortiquent et la traduisent dans un langage mathématique actuel. Voici la traduction en français de B. VITRAC².

² Dans cette section, nous adopterons la notation de VITRAC, plus légère et nous noterons AB indifféremment pour le segment $[AB]$ et pour sa longueur $|AB|$. Il n'en résulte aucune ambiguïté.

12

Dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus.

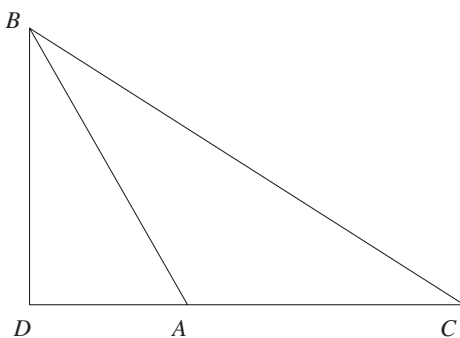


Fig. 17

Soit le triangle obtusangle ABC ayant l'angle sous BAC obtus, et, qu'à partir du point B soit menée BD , perpendiculaire sur CA , prolongée. Je dis que le carré sur BC est plus grand que les carrés sur BA , AC de deux fois le rectangle contenu par CA , AD .

En effet, puisque la droite CD a été coupée au hasard au point A , le carré sur DC est donc égal aux carrés sur CA , AD et deux fois le rectangle contenu par CA , AD (II. 4). Que celui sur DB soit ajouté de part et d'autre. Les carrés sur CD , DB sont donc égaux aux carrés sur CA , AD , DB , et à deux fois le rectangle contenu par CA , AD . Mais d'une part celui sur CB est égal à ceux sur CD , DB ; en effet l'angle en D est droit (I. 47). Et d'autre part celui sur AB est égal à ceux sur AD , DB . Donc le carré sur CB est égal aux carrés sur CA , AB et deux fois le rectangle contenu par CA , AD . De sorte que le carré sur CB est plus grand que les carrés sur CA , AB de deux fois le rectangle contenu par CA , AD .

Donc dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus. Ce qu'il fallait démontrer.

La traduction de la thèse en langage mathématique actuel serait

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2 \cdot CA \cdot AD,$$

où D est le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur AC .

EUCLIDE nous invite à écrire que

$$DC^2 = CA^2 + AD^2 + 2 \cdot CA \cdot AD,$$

où nous reconnaissons le développement de $DC^2 = (CA + AD)^2$ par le produit remarquable $(a + b)^2$. La proposition (II. 4) à laquelle il est fait

référence présente une démonstration de cette formule dans un contexte géométrique.

En ajoutant DB^2 aux deux membres, on obtient

$$DC^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2 \cdot CA \cdot AD.$$

D'autre part,

$$CB^2 = DC^2 + DB^2 \text{ et } AB^2 = AD^2 + DB^2,$$

car l'angle en D est droit. Les élèves devraient reconnaître dans la proposition (I. 47) évoquée ici le théorème que nous appelons communément « théorème de Pythagore ».

En remplaçant $DC^2 + DB^2$ et $AD^2 + DB^2$ dans l'équation précédente, on obtient finalement

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2 \cdot CA \cdot AD,$$

qui est bien la thèse annoncée.

Euclide - Les Éléments, Livre II, proposition 13.

On présente ensuite aux élèves l'énoncé de la proposition (II. 13). L'activité qui leur est proposée ici est de traduire la thèse en langage actuel et de démontrer la propriété à la manière d'EUCLIDE, c'est-à-dire en adaptant la démonstration de la propriété (II. 12) au cas du triangle acutangle.

13

Dans les triangles acutangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle aigu est plus petit que les carrés sur les côtés contenant l'angle aigu de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'intérieur par la perpendiculaire en-deçà de l'angle aigu.

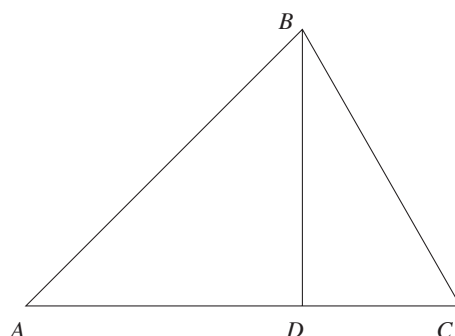


Fig. 18

La thèse est cette fois

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \cdot CA \cdot AD.$$

La règle des cosinus

Pour obtenir la forme actuelle de ce théorème, il faut remarquer que les relations trigonométriques dans le triangle ABD nous donnent

$AD = AB \cdot \cos \hat{A}$, dans la figure 18, où $\cos \hat{A}$ est positif,

$AD = -AB \cdot \cos \hat{A}$, dans la figure 17 à la page 296, où $\cos \hat{A}$ est négatif.

On obtient ainsi la règle des cosinus

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}.$$

On peut encore adopter une notation plus légère en posant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$; on écrit alors

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

et, comme le triangle est quelconque, les sommets A , B et C ont le même statut, ce qui permet d'écrire aussi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \quad \text{et} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}.$$

Commentaires

La méthode utilisée au début de ce chapitre (voir la section 1.1 à la page 281) pour faire émerger la forme $x_1x_2 + y_1y_2$ peut également faire apparaître la forme $x_1y_2 - x_2y_1$, cette dernière forme étant associée au produit vectoriel. Nous avons montré que le produit scalaire est une forme bilinéaire invariante pour les changements de repères orthonormés de même unité. Le produit vectoriel est une forme bilinéaire invariante pour les changements de repères orthonormés qui conservent l'unité et l'orientation.

2 Géométrie analytique et produit scalaire

De quoi s'agit-il ?

Résoudre, en utilisant le calcul vectoriel et le produit scalaire, des problèmes de représentation en vraie grandeur de figures planes de l'espace, ainsi que d'autres problèmes où interviennent des calculs d'angles et de longueurs. Ces problèmes sont abordés sous différents aspects, dans le but de réinvestir des propriétés de géométrie synthétique, des constructions de sections planes, des développements et d'autres types de représentations.

Enjeux

Développer les compétences liées au produit scalaire en analysant diverses situations-problèmes. Donner du sens aux calculs effectués au moyen du produit scalaire en les utilisant pour construire des figures.

Compétences. – À partir des notions introduites dans la section 1, déterminer une longueur, un angle, une relation entre points-droites-plans, une équation, une propriété de figure, par une méthode routinière.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – Le chapitre 8 à la page 218 et la section 1 de ce chapitre.

Les notions de droites orthogonales, de droite perpendiculaire à un plan, de plans perpendiculaires, et les propriétés de la perpendicularité.

Matériel. – Une calculatrice scientifique.

Du matériel pour dessiner et un rapporteur.

Les développements d'un cube et d'un tétraèdre régulier sur papier fort, qui peuvent être obtenus par photocopie des documents fournis en annexe aux pages 494 et 495.

2.1 Vraie grandeur d'une section dans un cube.

Comment s'y prendre ?

Reprenons le problème de section plane dans un cube traité dans la section 2 du chapitre 8. La figure 19 montre la section du cube par le plan PQR , où P est situé sur l'arête $[AB]$ au tiers à partir de A , Q est situé au milieu de l'arête $[BC]$, et R est situé au milieu de l'arête $[CC']$. Représenter cette section en vraie grandeur.

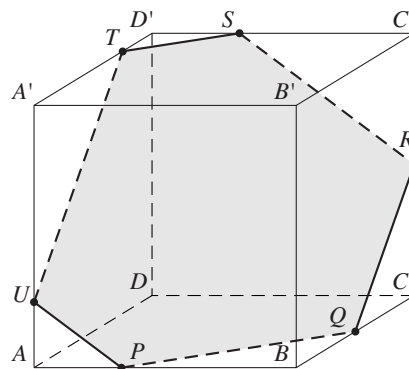


Fig. 19

Reprenons le repère que nous avons choisi pour la détermination des sommets de la section. Plaçons l'origine en A , et les vecteurs « de base » de telle sorte que $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AA'}$. Si nous prenons l'arête du cube comme unité de longueur, ce repère est bien un repère orthonormé. Dans ce cas,

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les sommets de la section ont pour coordonnées

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Chacun de ces sommets peut être situé avec précision sur les arêtes du cube :

S se trouve sur $[D'C']$ au tiers à partir de D' ,
 T se trouve sur $[A'D']$ aux trois quarts à partir de A' ,
 U se trouve sur $[AA']$ au quart à partir de A .

Certains élèves peuvent imaginer de tracer chacun des segments de la section dans un carré figurant une face du cube, en respectant les positions des points sur les arêtes. Le mieux est alors de le faire globalement sur un développement du cube en papier fort. On peut fournir celui-ci aux élèves de manière à limiter les imprécisions au départ. Ils pourront ainsi mesurer les longueurs des côtés de la section, avec une précision qui dépend évidemment du soin qu'ils auront apporté à leur dessin. Ce procédé peut néanmoins leur paraître fastidieux et peu précis, et les inciter à trouver une autre solution. Or précisément, la découverte du produit scalaire leur a donné un outil facile à manipuler pour calculer des longueurs. Ainsi, pour calculer la longueur du segment $[PQ]$, on commence par déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{PQ}$, obtenues en soustrayant les coordonnées de P de celles de Q ,

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et on calcule ensuite } \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}.$$

Ce résultat pourrait également être obtenu par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle PBQ . En effet, les côtés de l'angle droit mesurent $|PB| = \frac{2}{3}$ et $|BQ| = \frac{1}{2}$, ce qui permet de calculer la longueur de l'hypoténuse qui vaut $|PQ| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{5}{6}$. La comparaison des calculs montre bien que la formule $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ} | \overrightarrow{PQ} \rangle}$ n'est rien d'autre que l'application du théorème de Pythagore dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse coïncide avec le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes.

De la même manière, on obtient ensuite

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \text{et } \|\overrightarrow{QR}\| &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \overrightarrow{RS} &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \text{et } \|\overrightarrow{RS}\| &= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{5}{6}; \\ \overrightarrow{ST} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{et } \|\overrightarrow{ST}\| &= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \frac{5}{12}; \\ \overrightarrow{TU} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} & \text{et } \|\overrightarrow{TU}\| &= \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}; \\ \overrightarrow{UP} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} & \text{et } \|\overrightarrow{UP}\| &= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

N'oublions pas que ces valeurs représentent les mesures des côtés de la section lorsque l'unité de longueur est la longueur de l'arête du cube. Ces valeurs calculées peuvent éventuellement être comparées aux longueurs mesurées sur le développement du cube, pour corroborer ou infirmer les résultats des calculs.

Une fois en possession de ces différentes mesures, il n'est pas certain que les élèves réalisent immédiatement que ces données sont insuffisantes pour dessiner la vraie grandeur de la section. Quelques tâtonnements seront sans doute nécessaires pour qu'ils se persuadent qu'ils doivent aussi connaître les mesures des angles, ou bien les longueurs des diagonales. Dans le même ordre d'idées, de nombreux élèves ignorent en effet que, pour démontrer qu'une figure est un polygone régulier (le triangle faisant exception), il ne suffit pas de démontrer l'égalité des côtés, mais qu'il faut aussi établir celle des angles. On peut, par exemple, leur faire observer que, avec quatre segments de 5 cm, on peut bien sûr construire un carré, mais aussi toute une série de losanges qui diffèrent par leurs angles.

Si les élèves proposent de calculer les longueurs des diagonales pour construire la vraie grandeur de la section par triangulation, le professeur les laisse poursuivre dans cette voie mais leur annonce clairement que la mesure précise des angles de la figure leur sera demandée. Ils disposeront alors d'un moyen de comparer les valeurs d'angles mesurées sur le dessin aux valeurs calculées. Si, par contre, les élèves proposent spontanément de calculer les mesures des angles pour représenter la section en grandeur réelle, le problème qui se pose est celui de la détermination de ces mesures. Ici encore, c'est le produit scalaire qui fournit un outil efficace. En effet, la formule

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

peut être exploitée pour calculer un angle compris entre deux vecteurs. Ainsi, par exemple, l'angle $\hat{Q}$ de l'hexagone de section est compris entre les vecteurs $\vec{QP}$ et $\vec{QR}$, dont le produit scalaire peut être calculé à partir de leurs composantes (celles de $\vec{QP}$ sont opposées à celles de $\vec{PQ}$). On a

$$\vec{QP} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{QR} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\langle \vec{QP} | \vec{QR} \rangle = -\frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

et, en remplaçant $\langle \vec{QP} | \vec{QR} \rangle$ par $-\frac{1}{4}$ dans

$$\langle \vec{QP} | \vec{QR} \rangle = \|\vec{QP}\| \|\vec{QR}\| \cos \hat{Q},$$

on obtient la valeur du cosinus de l'angle $\hat{Q}$

$$\cos \hat{Q} = \frac{\langle \vec{QP} | \vec{QR} \rangle}{\|\vec{QP}\| \|\vec{QR}\|} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{10}.$$

La mesure en degrés de l'amplitude de l'angle $\widehat{Q}$ est déterminée par la calculatrice, qui donne $\widehat{Q} = 115^\circ, 10409025$.

Si les élèves négligent d'utiliser les vecteurs orientés de telle sorte que leur origine coïncide avec le sommet de l'angle, ils obtiendront l'angle supplémentaire de celui qu'ils croient calculer. Ils devraient s'apercevoir de leur erreur en confrontant leurs résultats avec la vision approximative que leur fournit le dessin en perspective. Un angle aigu d'environ 65° semble peu réaliste dans la section hexagonale que nous étudions ici.

Arrivés à ce stade du travail, certains élèves auront peut-être remarqué que la symétrie de la figure peut leur éviter de calculer tous les angles. Le professeur leur demande alors de justifier les propriétés utilisées. Mais il est également possible que, rassurés par le caractère routinier de l'application de la formule, ils entreprennent de calculer tous les angles.

Ce travail est un peu fastidieux, mais néanmoins bien préparé, puisque nous disposons déjà des composantes de tous les vecteurs correspondants aux côtés de la section, ainsi que de leurs longueurs. Le professeur peut suggérer aux élèves une répartition des tâches, pour éviter que trop de temps ne soit consacré à des calculs répétitifs. Les résultats obtenus sont

$$\widehat{Q} = \widehat{R} = \widehat{T} = \widehat{U} = 115^\circ, 10409025 \quad \text{et} \quad \widehat{S} = \widehat{P} = 129^\circ, 7918195.$$

Le professeur pose la question de la vérification.

A-t-on, comme dans le triangle, une propriété qui donne la somme des angles d'un hexagone ?

Un découpage d'un hexagone quelconque en triangles permet de voir que la somme de ses angles vaut 720° , ce qui est bien le cas ici.

Les élèves qui ont effectué tous les calculs sans se poser trop de questions seront peut-être étonnés de constater qu'il n'y a que deux amplitudes d'angles différentes. Une intéressante discussion peut s'installer dans la classe pour expliquer cette propriété. Pouvait-on prévoir l'égalité de certains angles ? C'est l'occasion de se souvenir de cette propriété des plans parallèles :

Si un plan coupe deux plans parallèles, il les coupe suivant des droites parallèles.

Le plan de section coupe donc les faces parallèles suivant des segments parallèles. On a donc

PQ est parallèle à TS ,

QR est parallèle à TU ,

RS est parallèle à UP .

Par conséquent, $\widehat{P} = \widehat{S}$, $\widehat{Q} = \widehat{T}$, $\widehat{R} = \widehat{U}$, car ce sont des angles à côtés parallèles. Les positions particulières des points Q et R , au milieu des arêtes $[BC]$ et $[CC']$, et des points S et P au tiers des arêtes $[AB]$ et $[D'C']$ permettront de justifier l'égalité des angles $\widehat{Q}$ et $\widehat{R}$, et donc $\widehat{T}$ et $\widehat{U}$.

Les élèves constatent ainsi qu'une analyse préalable des propriétés géométriques de la figure permet d'éviter quelques calculs. Cependant, ils peuvent

– on l’a vu – arriver à la solution en utilisant le produit scalaire, qui fournit une méthode efficace de résolution de ce type de problème. Dans ce cas, les propriétés de symétrie que le calcul a mises en évidence peuvent être réexaminées dans un contexte de géométrie synthétique. Cette démarche permettra peut-être aux moins intuitifs d’améliorer leur vision dans l’espace.

Les élèves sont à présent en mesure de dessiner la section en vraie grandeur.

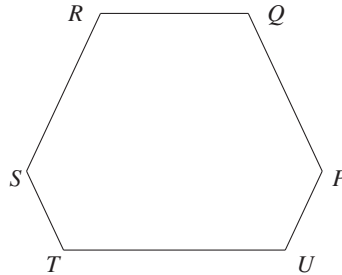


Fig. 20

Pour clôturer l’activité de manière très concrète, le professeur leur suggère de repérer les points de la section sur le développement de cube et d’assembler les cubes tronqués obtenus après découpage, de manière à faire apparaître la section. Celle-ci est alors comparée au dessin réalisé à partir des calculs, par application directe du modèle en carton sur la figure. Comme l’hexagone de section possède un axe de symétrie passant par les milieux des côtés $[RQ]$ et $[TU]$, le problème de l’orientation ne se pose pas ici. Quelle que soit la partie du cube qu’on dépose sur la figure, la section sera superposable au dessin de la vraie grandeur.

2.2 Distance d’un sommet du cube à une diagonale

Comment s’y prendre ?

Dans la représentation en perspective cavalière du cube de la figure 21, construire la perpendiculaire issue de D' à la diagonale $A'C$. Calculer la distance du sommet D' à la diagonale $A'C$.

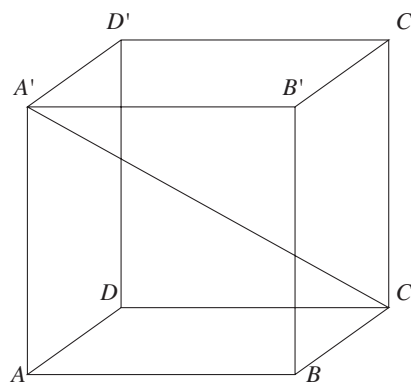


Fig. 21

Certains élèves seront peut-être tentés d'appliquer leur équerre sur la figure pour tracer directement la perpendiculaire demandée. Néanmoins, après un temps de réflexion et de discussion, ils devraient s'apercevoir que la plupart des angles droits n'apparaissent pas en vraie grandeur dans une représentation en perspective cavalière. C'est par exemple le cas des angles droits de la base. Seuls les angles des faces frontales $ABB'A'$ et $CC'D'D$ apparaissent comme des angles droits dans la figure 21. Le sommet D' et la diagonale $A'C$ appartiennent au plan non frontal $A'D'C$, et dans ce plan, la représentation du rectangle $A'D'CB$ est un parallélogramme. Il n'y a donc aucune raison d'espérer que la perpendiculaire issue de D' forme avec $A'C$ un angle droit dans la représentation.

Cette première analyse permet cependant de remarquer que la construction demandée est une droite du plan $A'D'C$ et que le problème pourrait donc être examiné dans ce plan.

Première approche : utilisation du produit scalaire

Il faut donc déterminer un point P de la diagonale $A'C$ tel que $D'P$ est perpendiculaire à $A'C$, et calculer ensuite la longueur de $[D'P]$. Comme il s'agit d'un problème d'angle et de longueur, les élèves penseront probablement à utiliser le produit scalaire. Plaçons le repère sur les arêtes du cube comme dans le problème précédent, ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le point P cherché appartient à la diagonale $A'C$, il vérifie donc la relation d'alignement $\overrightarrow{A'P} = k\overrightarrow{A'C}$, qui peut s'écrire

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + k\overrightarrow{A'C}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du point P sont donc de la forme

$$P = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 - k \end{pmatrix}.$$

Les composantes des vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{A'C}$ et $\overrightarrow{D'P}$ sont alors

$$\overrightarrow{A'C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{D'P} = \begin{pmatrix} k \\ k - 1 \\ -k \end{pmatrix}.$$

Exprimons, au moyen du produit scalaire, que ces vecteurs sont orthogonaux,

$$\langle \overrightarrow{A'C} | \overrightarrow{D'P} \rangle = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 \cdot k + 1 \cdot (k - 1) + (-1) \cdot (-k) = 0.$$

Cette dernière équation, équivalente à $3k - 1 = 0$, nous donne $k = \frac{1}{3}$, ce qui détermine les coordonnées du point cherché, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Le fait que $k = \frac{1}{3}$ nous indique que $\overrightarrow{A'P} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}$, c'est-à-dire que le point P se trouve sur la diagonale $[A'C]$ au tiers à partir de A' . Ceci permet de placer le point P sur le dessin, puisque la perspective cavalière respecte les rapports des longueurs des segments dans une direction donnée.

On peut encore trouver les composantes du vecteur $\overrightarrow{D'P}$ et calculer sa longueur. On obtient

$$\overrightarrow{D'P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{D'P}\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

qui est la distance du sommet D' à la diagonale $A'C$.

On peut aussi chercher le point de percée de la droite $D'P$ dans la face $ABB'A'$. Ce point, noté Q , est sur la droite $D'P$, ce qui se traduit par la relation d'alignement

$$\overrightarrow{D'Q} = \lambda \overrightarrow{D'P} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD'} + \lambda \overrightarrow{D'P}.$$

Nous obtenons ainsi, pour les coordonnées du point Q

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Comme ce point est dans la face $ABB'A'$, $y_Q = 1 - \frac{2}{3}\lambda = 0$, ce qui donne la valeur de $\lambda = \frac{3}{2}$ et ensuite les coordonnées du point de percée cherché,

$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ce dernier résultat indique que le point Q se trouve au

centre de la face $ABB'A'$, c'est-à-dire à l'intersection des diagonales $A'B$ et AB' , et permet de placer correctement le point P sur le dessin sans devoir partager le segment $[A'C]$ en trois.

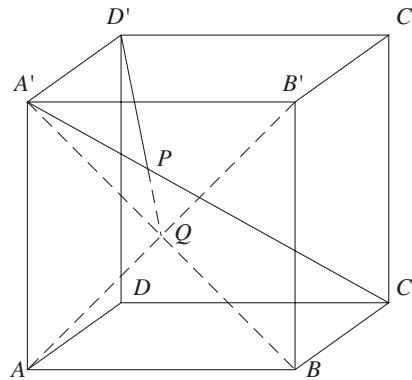


Fig. 22

La figure 22 montre la solution du problème.

Deuxième approche : résolution du problème dans le plan diagonal $A'D'CB$.

Nous avons déjà observé que le problème pouvait être examiné dans le plan diagonal $A'D'C$, déterminé par la diagonale $A'C$ et le point D' . En effet, la perpendiculaire issue de D' sur $A'C$ est évidemment une droite de ce plan. Si nous prenons l'arête du cube comme unité de longueur, la longueur de la diagonale $A'B$ peut être calculée par le théorème de Pythagore. Elle vaut $\sqrt{2}$ et le rectangle $A'BCD'$ est représenté à la figure 23. Une feuille de format A4, qui a les mêmes proportions que ce rectangle, permet de visualiser la situation.

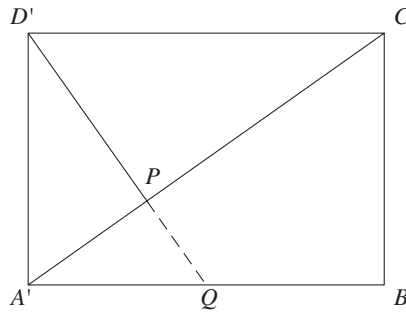


Fig. 23

On a $|A'D'| = 1$ et $|A'B| = \sqrt{2}$; le théorème de Pythagore appliqué au triangle $A'BC$, rectangle en B , nous donne alors la longueur de la diagonale $|A'C| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.

Ne perdons pas de vue que le problème de la représentation de la perpendiculaire issue de D' sur $A'C$ sera résolu si nous pouvons déterminer la position de son pied P sur la diagonale $A'C$. Nous voyons apparaître dans cette figure deux autres triangles rectangles en P : les triangles $A'PD'$ et CPD' . En appliquant le théorème de Pythagore dans ces deux triangles, nous allons calculer les longueurs de leurs côtés et déterminer ainsi $|A'P|$. Ainsi,

dans le triangle $A'PD'$, on a $|A'P|^2 + |D'P|^2 = 1$ et donc $|D'P|^2 = 1 - |A'P|^2$,

dans le triangle CPD' , on a $|CP|^2 + |D'P|^2 = 2$.

En remplaçant $|D'P|^2$ par $1 - |A'P|^2$, et $|CP|$ par $|A'C| - |A'P| = \sqrt{3} - |A'P|$ dans cette dernière égalité, on obtient

$$1 - |A'P|^2 + (\sqrt{3} - |A'P|)^2 = 2.$$

Cette équation dont l'inconnue est $|A'P|$ se réduit au premier degré et nous donne $|A'P| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ce qui nous indique que le point P se trouve au tiers de la diagonale $[A'C]$ à partir de A' , et nous permet dès lors de le représenter. La distance $|D'P|$ est calculée également. On a

$$|D'P|^2 = 1 - |A'P|^2 = 1 - \frac{1}{3} \quad \text{et donc} \quad |D'P| = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Pour établir complètement le lien avec la solution précédente, il reste à situer le point Q d'intersection de la droite $D'P$ avec $A'B$. Comme $|A'P| = \frac{1}{3}|A'C|$, on a aussi $|PC| = \frac{2}{3}|A'C|$ et $|A'P| = \frac{1}{2}|PC|$. Les triangles semblables $D'PC$ et QPA' nous permettent alors de conclure que $|A'Q| = \frac{1}{2}|D'C| = \frac{1}{2}|A'B|$. Le point Q se trouve donc au milieu de la diagonale de face $[A'B]$.

Remarques

1. Il est également loisible d'utiliser le produit scalaire dans la figure plane $A'BCD'$.
2. Une troisième approche du même problème sera évoquée dans la section 2.3.

2.3 Sections du cube par des plans perpendiculaires à une diagonale

Comment s'y prendre ?

Étudier les sections d'un cube par l'ensemble des plans perpendiculaires à une diagonale (AC' dans les figures ci-dessous).
 Quelles sont les propriétés géométriques des polygones obtenus ?
 Que peut-on dire de leurs côtés, de leurs angles ?
 Pour quelles positions du plan de section sont-ils réguliers ?
 Où se situent leurs centres de gravité³ ?

Une analyse succincte du problème montre qu'il y aura au moins deux types de sections. Un plan passant par un point de la diagonale proche d'un des sommets A ou C' ne coupe que les trois arêtes issues de ce sommet et la section est alors un triangle. Mais si le plan de section coupe la diagonale en un point proche de son milieu, la section semble être un hexagone. Il est très possible que les élèves ne perçoivent pas d'emblée qu'il y a des sections hexagonales. Nous montrerons plus loin comment les leur faire découvrir.

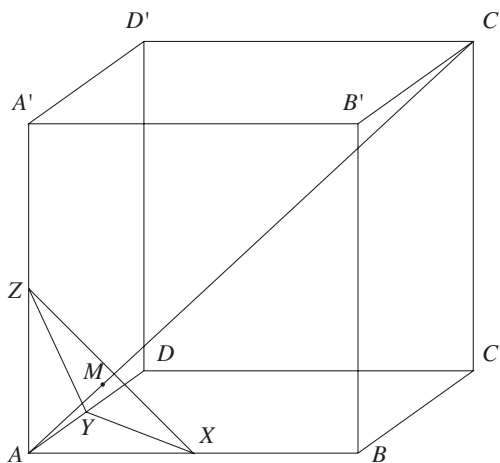


Fig. 24

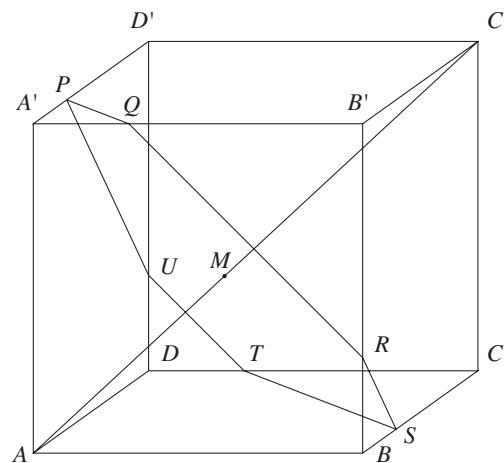


Fig. 25

³ Il s'agit du centre de gravité des sommets du polygone, au sens où il a été défini dans le chapitre 8.

Plaçons le repère sur les arêtes du cube comme précédemment, ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le plan de section est entièrement déterminé par la position du point M de la diagonale AC' par lequel il passe. Puisque M appartient à AC' , la relation d'alignement $\overrightarrow{AM} = m \cdot \overrightarrow{AC'}$ nous donne les coordonnées de ce point. On a

$$\overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad M = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}.$$

Si $m = 0$, le point M coïncide avec le point A et la section est réduite à ce point ; une situation similaire se produit pour $m = 1$, valeur pour laquelle M coïncide avec C' . Les points de la diagonale AC' intérieurs au cube correspondent ainsi aux valeurs de m comprises entre 0 et 1.

Le plan π passant par M et perpendiculaire à la diagonale AC' est l'ensemble de tous les points N tels que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AC'}$, c'est-à-dire tels que $\langle \overrightarrow{AC'} | \overrightarrow{MN} \rangle = 0$.

Pour poursuivre notre étude, examinons plus précisément les questions suivantes.

Les sections triangulaires

À quelles valeurs de m correspondent les sections triangulaires ?
Déterminer les coordonnées de leurs sommets et de leurs centres de gravité, calculer les côtés et les angles.

La figure 24 montre que, lorsque le plan π coupe la diagonale AC' en un point proche de A ou de C' , c'est-à-dire pour des valeurs de m proches de 0 ou de 1, la section est un triangle.

À partir de A

LES SOMMETS. — Déterminons par exemple les coordonnées du point X , point de percée de la droite AB dans le plan π . Comme X est sur la droite AB ,

$$\overrightarrow{AX} = x \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{nous donne} \quad X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} x - m \\ -m \\ -m \end{pmatrix}.$$

Exprimons, au moyen du produit scalaire, que les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{MX}$ sont orthogonaux,

$$\langle \overrightarrow{AC'} | \overrightarrow{MX} \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad x - m - m - m = 0.$$

Cette dernière équation nous donne $x = 3m$, et les coordonnées du point X sont $\begin{pmatrix} 3m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour que ce point X soit un sommet de la section du

cube par le plan π , il doit être situé sur l'arête $[AB]$; ses coordonnées sont alors comprises entre 0 et 1 : on a par conséquent $0 < 3m < 1$. La valeur de m doit donc être comprise entre 0 et $\frac{1}{3}$.

De la même manière, nous déterminons ensuite $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3m \\ 0 \end{pmatrix}$, sur l'arête $[AD]$ et $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3m \end{pmatrix}$, sur l'arête $[AA']$.

LE CENTRE DE GRAVITÉ. — Les coordonnées du centre de gravité de chacun de ces triangles sont obtenues en effectuant la moyenne arithmétique des coordonnées de ses sommets (voir la section 2.3 du chapitre 8). On a

$$G = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 3m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3m \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix} = M.$$

Le centre de gravité de chacun de ces triangles est donc le point de percée de la diagonale AC' dans le plan π .

LES CÔTÉS ET LES ANGLES. — Pour calculer les longueurs des côtés de la section, déterminons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{YZ}$, et $\overrightarrow{ZX}$ et calculons leur norme. On obtient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XY} &= \begin{pmatrix} -3m \\ 3m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{2(3m)^2} = 3m\sqrt{2}, \\ \overrightarrow{YZ} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3m \\ 3m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{YZ}\| = \sqrt{2(3m)^2} = 3m\sqrt{2}, \\ \overrightarrow{ZX} &= \begin{pmatrix} 3m \\ 0 \\ -3m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{ZX}\| = \sqrt{2(3m)^2} = 3m\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La section XYZ est un triangle équilatéral (les angles valent donc 60°) dont les côtés mesurent $3\sqrt{2}m$.

LES VALEURS LIMITES

pour $m = 0$, le triangle est réduit au point A ,

pour $m = \frac{1}{3}$, les points X, Y, Z coïncident avec les points B, D, A' (voir figure 26). La section est donc le triangle équilatéral $A'BD$,

dont le centre de gravité est bien le point $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

À partir de C'

Symétriquement, nous obtenons des sections triangulaires $X'Y'Z'$, où X' est sur l'arête $[D'C']$, Y' sur $[B'C']$ et Z' sur $[CC']$. Par la même méthode, nous

déterminons $X' = \begin{pmatrix} 3m-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3m-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Z' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3m-2 \end{pmatrix}$.

Ces triangles correspondent aux valeurs de m comprises entre $\frac{2}{3}$ et 1. La section $X'Y'Z'$ est un triangle équilatéral dont les côtés mesurent

$3\sqrt{2}(1-m)$, et dont le centre de gravité est le point $\begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}$.

Pour $m = 1$, le triangle est réduit au point C' ,

pour $m = \frac{2}{3}$, les points X' , Y' , Z' coïncident avec les points D' , B' , C (voir figure 27). La section est donc le triangle équilatéral $D'B'C$,

dont le centre de gravité est bien le point $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

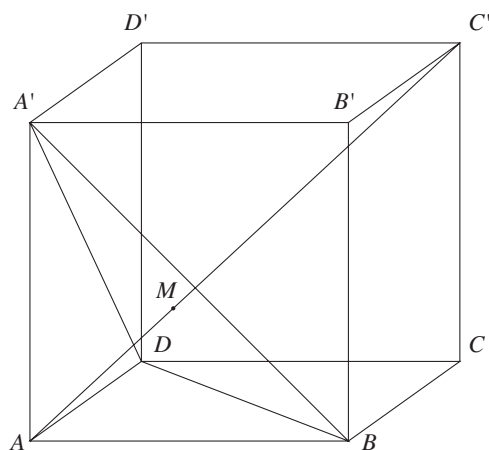


Fig. 26 : $m = \frac{1}{3}$

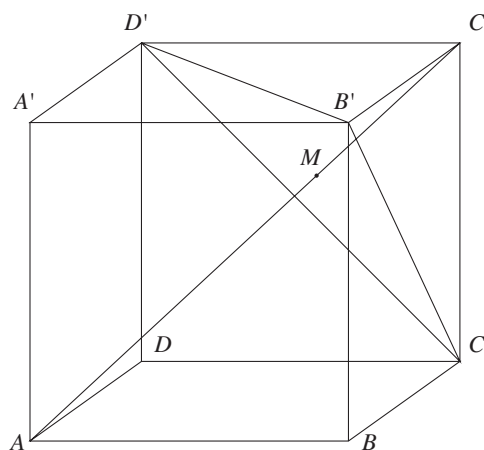


Fig. 27 : $m = \frac{2}{3}$

Les sections hexagonales

Envisageons maintenant les autres sections. Si les élèves n'ont pas remarqué qu'il y a des sections hexagonales parmi les sections étudiées, on peut les leur faire découvrir en repartant du triangle $A'BD$ correspondant à la valeur limite $m = \frac{1}{3}$. En prenant pour m une valeur légèrement supérieure,

on constate que le plan π coupe la droite AB en un point $X = \begin{pmatrix} 3m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

situé un peu à droite de B . De même, il coupe la droite AD en un point Y situé au-delà de D , et la droite AA' en un point Z situé au-dessus de A' . Dans ce cas, le triangle XYZ n'est plus la section du cube par le plan π , mais les droites XY , YZ et ZX restent les droites d'intersection du plan π avec les faces $ABCD$, $ADD'A'$ et $ABB'A'$. Les élèves disposent donc de tous les éléments nécessaires à la construction de la section. On leur demande de la dessiner en justifiant les étapes.

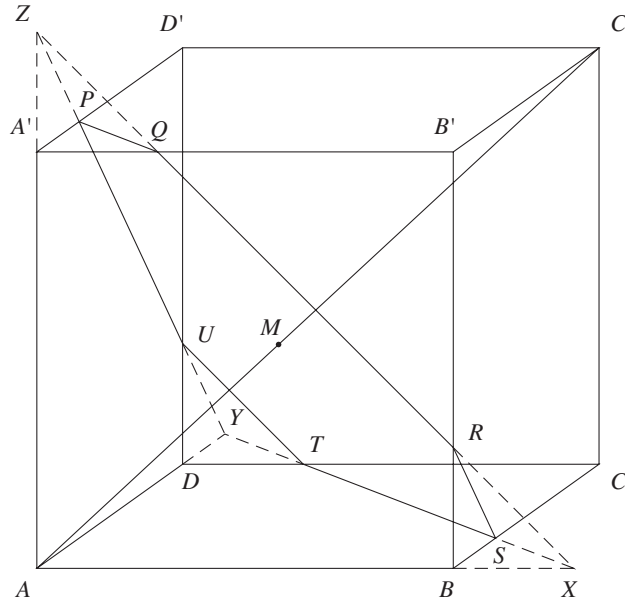


Fig. 28

Dans le plan $ABCD$, la droite XY coupe les arêtes $[BC]$ et $[CD]$ aux points S et T qui sont donc les extrémités du segment de la section dans la face inférieure du cube. De même, dans le plan $ADD'A'$, la droite YZ coupe les arêtes $[DD']$ et $[A'D']$ aux points U et P ; et dans plan $ABB'A'$, la droite ZX coupe les arêtes $[A'B']$ et $[BB']$ aux points Q et R . La section du cube par le plan π est donc l'hexagone $PQRSTU$.

À quelles valeurs de m correspondent les sections hexagonales ?
 Déterminer les coordonnées de leurs sommets et de leurs centres de gravité, calculer les côtés et les angles et énoncer quelques propriétés géométriques les concernant.
 Y a-t-il des hexagones réguliers ?
 Représenter la section en vraie grandeur pour une valeur de m choisie.

LES SOMMETS. — Déterminons par exemple les coordonnées du point de percée P de la droite $A'D'$ dans le plan π . Comme P est sur la droite $A'D'$,

$$\overrightarrow{A'P} = p \cdot \overrightarrow{A'D'} \quad \text{nous donne} \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -m \\ p - m \\ 1 - m \end{pmatrix}.$$

Exprimons, au moyen du produit scalaire, que les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux :

$$\langle \overrightarrow{AC'} | \overrightarrow{MP} \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad -m + p - m + 1 - m = 0.$$

Cette dernière équation nous donne $p = 3m - 1$, et les coordonnées du point P sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 3m - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour que ce point P soit un sommet de la section du cube par le plan π , il doit être situé sur l'arête $[A'D']$; sa deuxième coordonnée est alors comprise entre 0 et 1 : on a donc $0 < 3m - 1 < 1$. La valeur de m doit être comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Déterminons ensuite le point de percée Q de la droite $A'B'$ dans le plan π . Nous obtenons

$$\overrightarrow{A'Q} = q \cdot \overrightarrow{A'B'} \text{ et donc } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et enfin

$$Q = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} q - m \\ -m \\ 1 - m \end{pmatrix}.$$

En exprimant, au moyen du produit scalaire, que les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{MQ}$ sont orthogonaux, on a

$$\langle \overrightarrow{AC'} | \overrightarrow{MQ} \rangle = 0 \text{ ou } q - m - m + 1 - m = 0.$$

Cette dernière équation nous donne $q = 3m - 1$, et donc $Q = \begin{pmatrix} 3m - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ici encore, ce sont les valeurs de m comprises entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ qui correspondent aux positions de Q sur l'arête $[A'B']$.

En procédant de manière analogue, nous déterminons successivement

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3m - 1 \end{pmatrix} \text{ sur l'arête } [BB'],$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 3m - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur l'arête } [BC],$$

$$T = \begin{pmatrix} 3m - 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur l'arête } [DC],$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3m - 1 \end{pmatrix} \text{ sur l'arête } [DD'].$$

Nous déduisons de ceci que, pour les valeurs de m comprises entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, la section du cube par le plan π est l'hexagone $PQRSTU$.

LE CENTRE DE GRAVITÉ. — Il est possible de déterminer les coordonnées du centre de gravité de ces hexagones en effectuant la moyenne arithmétique des coordonnées de leurs sommets. On a

$$G = \frac{1}{6} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3m-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3m-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3m-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3m-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3m-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3m-1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix} = M.$$

Ainsi, toute section hexagonale a son centre de gravité au point de percée de la diagonale AC' dans le plan π .

LES CÔTÉS. — Pour calculer les longueurs des côtés de la section, déterminons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, ... et calculons leur norme. On obtient

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3m-1 \\ 1-3m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{2(3m-1)^2} = (3m-1)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2-3m \\ 0 \\ 3m-2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{2(2-3m)^2} = (2-3m)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3m-1 \\ 1-3m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{RS}\| = \sqrt{2(3m-1)^2} = (3m-1)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 3m-2 \\ 2-3m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{ST}\| = \sqrt{2(3m-2)^2} = (2-3m)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} 1-3m \\ 0 \\ 3m-1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{TU}\| = \sqrt{2(3m-1)^2} = (3m-1)\sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{UP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3m-2 \\ 2-3m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{UP}\| = \sqrt{2(3m-2)^2} = (2-3m)\sqrt{2}.$$

Ces calculs permettent de découvrir plusieurs propriétés géométriques de ces hexagones.

Nous voyons tout d'abord qu'ils ont deux fois trois côtés de même longueur.

Nous savons que les côtés d'une section hexagonale dans un cube sont parallèles deux à deux, puisque le plan de section coupe deux faces parallèles suivant des segments parallèles. Nous avons donc que

PQ est parallèle à ST ,

TU est parallèle à QR ,

RS est parallèle à UP .

Nous constatons que les côtés parallèles sont de longueurs différentes, toujours dans le rapport $\frac{2-3m}{3m-1}$.

Nous voyons aussi que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont des multiples de $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les côtés $[PQ]$ et $[ST]$ sont donc parallèles aux diagonales $[BD]$ et $[B'D']$

des faces du cube. De même, les côtés $[QR]$ et $[TU]$ sont parallèles aux diagonales $[BA']$ et $[CD']$ des faces du cube ; et les côtés $[RS]$ et $[UP]$ sont parallèles aux diagonales $[DA']$ et $[CB']$ des faces du cube.

LES ANGLES. — Lorsque la valeur de m varie entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, les côtés de l'hexagone restent toujours parallèles aux trois directions BD , BA' et DA' des faces du cube. Les amplitudes des angles devraient donc rester constantes. Nous pouvons nous en assurer en calculant par exemple l'angle $\widehat{QPU}$, au moyen du produit scalaire, ce qui donne

$$\cos \widehat{QPU} = \frac{\langle \overrightarrow{PQ} | \overrightarrow{PU} \rangle}{\|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{PU}\|} = \frac{(1-3m)(2-3m)}{(3m-1)\sqrt{2}(2-3m)\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$$

La valeur obtenue pour le cosinus de l'angle est bien indépendante de m et l'amplitude de cet angle est 120° . Un calcul analogue permet de constater que tous les angles de toutes les sections hexagonales mesurent 120° .

LA VRAIE GRANDEUR. — Nous sommes à présent en mesure de dessiner l'une de ces sections en vraie grandeur. La figure 29 représente la vraie grandeur de la section de la figure 25 à la page 307 pour la valeur $m = \frac{43}{100}$.

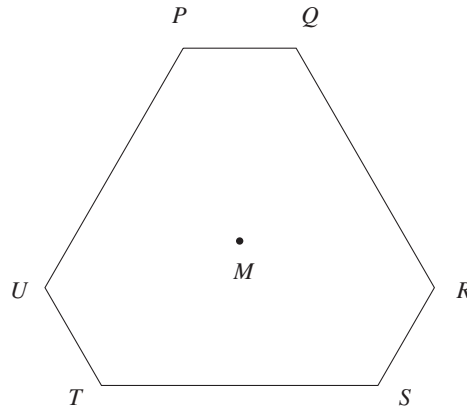


Fig. 29

L'HEXAGONE RÉGULIER. — Pour que tous les côtés de l'hexagone soient égaux, il faut que $2-3m = 3m-1$, ce qui correspond à la valeur $m = \frac{1}{2}$. Le

plan de section passe alors par le point $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, milieu de la diagonale

$[AC']$. De plus, comme $3m-1 = \frac{1}{2}$, chacun des sommets de l'hexagone est au milieu de l'arête à laquelle il appartient, et les côtés mesurent $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous avons déjà vérifié que tous les angles valaient 120° . Nous pouvons donc en conclure que la section du cube par le plan médiateur de la diagonale $[AC']$ est un hexagone régulier.

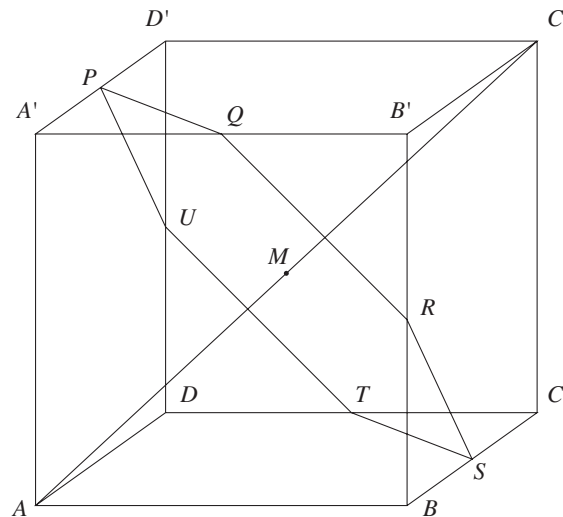


Fig. 30

Synthèse

C'est le moment de demander aux élèves de faire la synthèse des propriétés des sections d'un cube par un plan perpendiculaire à une diagonale. Certaines de ces propriétés peuvent être justifiées, ou même découvertes par des raisonnements de géométrie synthétique, mais l'utilisation systématique du produit scalaire comme outil d'investigation a sans nul doute aidé de nombreux élèves à faire le tour de la question. La synthèse pourrait ressembler à ceci :

Pour $0 < m \leq \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3} \leq m < 1$, la section est un triangle équilatéral.
 Pour $\frac{1}{3} < m < \frac{2}{3}$, la section est un hexagone dont les angles mesurent 120° , dont les côtés sont parallèles deux à deux (il s'agit des côtés situés dans des faces parallèles). De plus, il y a deux fois trois côtés égaux (voir figure 29).
 Pour $m = \frac{1}{2}$, l'hexagone est régulier.
 Dans tous les cas, le centre de gravité de la section est situé au point de percée de la diagonale AC' dans le plan π .

On peut terminer l'activité en montrant aux élèves que la diagonale du cube est un axe de rotation d'ordre 3. Cette découverte donne un nouvel éclairage à toutes ces propriétés qui se révèlent alors presque évidentes.

Remarque. – Ce travail permet d'aborder d'une troisième manière le problème de la section 2.2 à la page 303. En effet, le triangle $AD'B'$ est le triangle équilatéral obtenu comme section du cube par le plan perpendiculaire à la diagonale $A'C$ au point P situé au tiers de $A'C$. La perpendiculaire à la diagonale $A'C$ issue de D' est donc une droite du plan $AD'B'$, et son pied est le point de percée P de $A'C$ dans ce plan. Ce point P est aussi le centre de gravité du triangle $AD'B'$. Il se trouve donc sur la médiane $D'Q$ de ce triangle.

2.4 Vraie grandeur d'une section dans un tétraèdre régulier

Comment s'y prendre ?

Construire la section du tétraèdre régulier $ABCD$ par le plan PQR où

- P est le point situé au milieu de l'arête $[CD]$,
- Q est le point de l'arête $[BD]$, situé au tiers à partir de B ,
- R est le point de l'arête $[AB]$, situé au quart à partir de A .

Construire la vraie grandeur de cette section.

Pour traiter des problèmes de sections planes dans les tétraèdres, nous avons précédemment utilisé des repères dont l'origine et les points unités coïncidaient avec les sommets du tétraèdre. Ce choix ne semble pas approprié pour résoudre ce dernier problème, car un tel repère n'est pas orthonormé. Dès qu'il est question de calculer des distances et des angles, c'est-à-dire d'étudier les propriétés métriques d'une figure, l'utilisation du produit scalaire nécessite l'emploi d'un repère orthonormé.

Plaçons donc l'origine du repère orthonormé au point A , l'axe des x sur l'arête AB et le point unité sur cet axe en B . L'axe des y sera placé dans le plan ABC , et l'axe des z perpendiculairement à ce plan. Nous avons donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

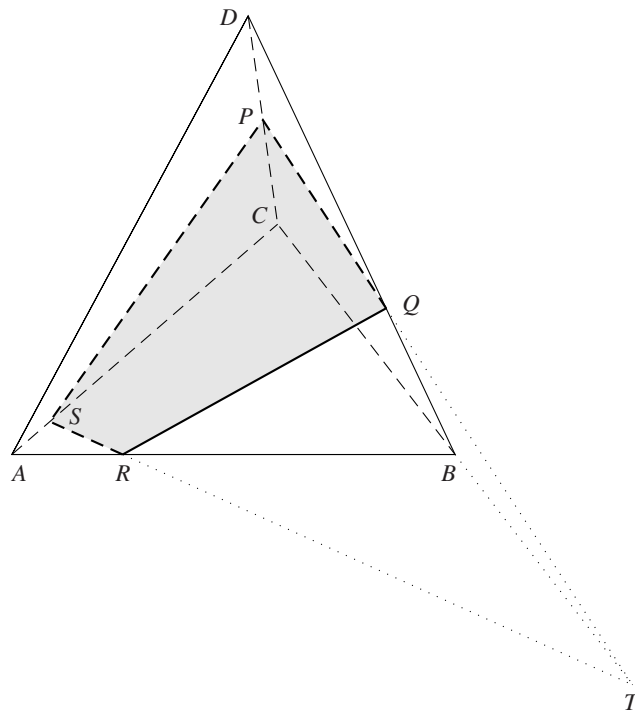


Fig. 31

Les coordonnées du point C , sommet du triangle équilatéral ABC , ne posent pas trop de problème. Elles peuvent être déterminées par la trigonométrie, ou par le calcul de la hauteur du triangle ; on trouve

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

si le point C est placé du même côté de AB que l'axe des y .

La détermination du sommet D du tétraèdre nécessite un raisonnement géométrique préalable. Le point D est équidistant des sommets A , B et C du triangle de la base. Il appartient donc aux plans médiateurs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. Ces trois plans perpendiculaires à la base ABC , contiennent la droite perpendiculaire au plan ABC et passant par le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC . Cette droite est à l'intersection des trois plans médiateurs et contient donc le sommet D . Comme le triangle ABC est équilatéral, le point d'intersection des médiatrices est aussi le centre de gravité du triangle, dont les coordonnées peuvent être calculées par moyenne arithmétique de celles des sommets du triangle (voir la section 2.3 du chapitre 8). On a

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du point D peuvent alors être déterminées en calculant la hauteur $|DG|$ du triangle ADG , sachant que son hypoténuse $[AD]$ mesure 1. Ou encore, ce qui revient au même, en exprimant que le point D , dont les coordonnées sont de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ k \end{pmatrix}$$

est à distance 1 de A . Nous obtenons ainsi

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

Passons à la détermination des sommets connus de la section :

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ nous donne immédiatement } R = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \text{ nous donne } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \text{ ou encore}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{18} \\ \frac{\sqrt{6}}{9} \end{pmatrix};$$

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ nous donne

$$P = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Le plan PQR coupe donc les faces BCD et ABD du tétraèdre suivant les segments $[PQ]$ et $[QR]$. Déterminons à présent la section dans la face ABC . Cherchons à cet effet le point de percée de la droite PQ dans le plan ABC . Nous connaissons ainsi un deuxième point du plan de section dans le plan de cette face. Ce point, noté T , vérifie la relation d'alignement $\overrightarrow{PT} = \lambda \overrightarrow{PQ}$. Nous avons par conséquent

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{18} \\ -\frac{\sqrt{6}}{18} \end{pmatrix}.$$

Ce point T , dont la troisième coordonnée vaut 0 puisqu'il est dans le plan ABC , correspond donc à la valeur $\lambda = 3$, ce qui donne

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons ensuite le point S , intersection de la droite TR et de l'arête AC . La relation d'alignement $\overrightarrow{TS} = \mu \overrightarrow{TR}$ ou $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OT} + \mu \overrightarrow{TR}$ nous indique que les coordonnées de S sont de la forme

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme S est aussi sur la droite AC , ses coordonnées sont également de la forme

$$S = \nu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui indique que sa deuxième coordonnée est égale à la première multipliée par $\sqrt{3}$. Cette constatation, appliquée à l'expression précédente de S , permet de déterminer la valeur de μ . On trouve $\mu = \frac{8}{7}$ et

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{\sqrt{3}}{14} \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui termine la construction de la section.

Comme dans l'exercice précédent, c'est au moyen du produit scalaire que nous calculons les longueurs de côtés et les amplitudes des angles. Voici les résultats :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{PQ}\| &= 0,600925212576, & \hat{P} &= 73^\circ,0091767079, \\
\|\overrightarrow{RQ}\| &= 0,650854139659, & \hat{S} &= 82^\circ,763077974, \\
\|\overrightarrow{RS}\| &= 0,217241518939, & \hat{R} &= 130^\circ,7321067, \\
\|\overrightarrow{SP}\| &= 0,745736179208, & \hat{Q} &= 73^\circ,4956386183.
\end{aligned}$$

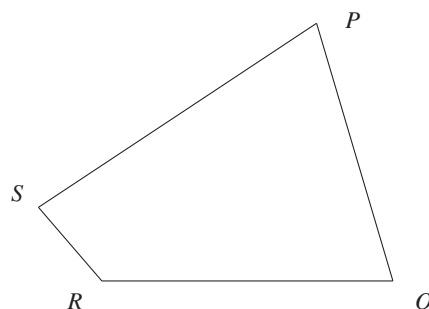


Fig. 32

Nous vérifions que la somme des angles du quadrilatère vaut bien 360° . Nous sommes à présent en mesure de dessiner la vraie grandeur de la section. Comme pour la section du cube de la page 299, nous demandons aux élèves de reporter les points de section sur le développement d'un tétraèdre régulier (fourni en annexe), puis de découper et d'assembler celui-ci pour faire apparaître la section, qui sera comparée à la figure construite à partir des mesures obtenues par calcul. Si les deux figures ne sont pas superposables mais semblent symétriques, les élèves sont invités à s'interroger sur la concordance entre l'orientation de la représentation en vraie grandeur et celle de la section construite à partir du développement.

Commentaires

Nous l'avons vu dans les exercices de ce chapitre où plusieurs approches sont présentées : la plupart des problèmes que nous proposons aux élèves de l'enseignement secondaire pour utiliser le produit scalaire peuvent être traités par d'autres moyens. Le recours aux théorèmes de Thalès et de Pythagore, ou l'exploitation des propriétés géométriques des figures concernées, permettent souvent d'arriver à la solution. Comparé à ces méthodes dont la variété peut dérouter, le produit scalaire fournit à la fois une méthode de résolution routinière et l'outil qui leur permet de mener à bien les calculs. Une telle méthode, basée sur des calculs systématiques, peut paraître fastidieuse. Cependant, si elle permet à certains de découvrir *a posteriori* des propriétés géométriques intéressantes, elle atteint un but important : celui de faire progresser chacun dans sa perception de l'espace.

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

1 Introduction historique

De quoi s'agit-il ?

Cette activité, de nature très différente des précédentes, propose la lecture de deux textes qui replacent l'émergence des nombres complexes dans un cadre historique. Le premier, de J. WALLIS [1685], fait état des difficultés qu'il y avait à admettre, non seulement l'existence des *nombres imaginaires*, mais aussi celle des *nombres négatifs*. Le second, de LAISANT [1887] (à partir de l'article de BELLAVITIS [1854]), montre à quel point les premiers travaux sur ce que nous appelons le *calcul vectoriel* étaient liés à la représentation des nombres complexes.

Enjeux

L'objectif est de faire voir aux élèves comment la naissance d'un nouveau concept mathématique est liée aux préoccupations des scientifiques d'une époque. En l'occurrence, les nombres complexes représentés géométriquement apparaissent comme les éléments appropriés à la conception d'un calcul en géométrie euclidienne.

Compétences. – *Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste.*

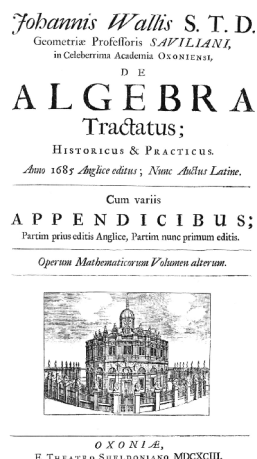
De quoi a-t-on besoin ?

Les deux textes proposés ci-dessous et repris en annexe aux pages 557, 558 et 562 sous une forme photocopiable pour les élèves.

Prérequis. – Si le premier texte peut servir d'introduction aux *nombres complexes*, le second ne prend tout son sens que lorsque les élèves ont connaissance des opérations sur les nombres complexes, y compris sous forme trigonométrique.

1.1 Sur les nombres imaginaires

Alors que les quantités irrationnelles étaient connues depuis l'antiquité, les nombres négatifs n'ont été acceptés que très tardivement. Lorsqu'une valeur négative apparaissait, elle était rejetée. Ainsi, Leonardo FIBONACCI (1170-1240 environ), dans son *Liber abaci* (1202, révision 1228), trouve une solution égale à -9 pour l'avoir de l'un des hommes dans le problème



intitulé « De quinque hominibus et una bursa¹ ». Il dit : « Ce problème n'a pas de solution, sauf si nous posons que cet homme a une dette de 9... », interprétation qui permet d'écarter le signe « - ». Il donne ensuite la solution complète du système dans cette hypothèse.

Quelques siècles plus tard, ARGAND, dans son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* [1806], appelle *quantités imaginaires* aussi bien les quantités négatives que celles dont le carré est négatif.

Le texte qui suit montre que la même démarche de pensée qui conduit à admettre l'existence des nombres négatifs peut également nous amener à concevoir celle des nombres que nous appelons *imaginaires*. Il s'agit d'une traduction libre de la version anglaise de l'*Algèbre* de J. WALLIS [1685], (in D. Smith [1959]). John WALLIS (1616-1703) était professeur savilien² de géométrie à Oxford (1649-1703). Contemporain de NEWTON, il fut le premier à apporter une contribution substantielle au traitement géométrique des quantités imaginaires. Pour favoriser la diffusion de ses idées en dehors de l'Angleterre, Il publia en 1693 une version latine de cette *Algèbre*. En voici un extrait (qu'on trouve au chapitre LXVI, Vol. II, p. 286 de la version latine). Le même texte – en vieil anglais – est fourni en annexe aux pages 555 et 556.

Ces quantités, dites *imaginaires*, provenant des racines supposées de carrés négatifs, sont censées impliquer que la situation est impossible. Et il en est effectivement ainsi si l'on s'en tient strictement à ce qui est communément admis. Car il est impossible qu'un nombre (négatif ou positif), multiplié par lui-même puisse produire (par exemple) -4 , en vertu de la règle des signes. Mais il est tout aussi impossible qu'une quantité quelconque, même non supposée carrée, puisse être négative. En effet, il n'est pas possible qu'une grandeur puisse être *moindre que rien*, ou qu'un nombre soit *plus petit que zéro*.

Mais cette supposition (de l'existence de quantités négatives) n'est ni inutile, ni absurde, lorsqu'elle est bien comprise. Et si, du point de vue de la notation algébrique pure, cela amène une quantité inférieure à zéro, lorsqu'on l'applique à la physique, elle représente une quantité tout aussi réelle que si le signe était $+$, mais il faut l'interpréter en sens contraire. Ainsi, par exemple : supposons qu'un homme ait avancé (de A vers B) de 5 yards, et qu'ensuite, il ait reculé (de B vers C) de 2 yards. Si on demande de combien il a avancé (quand il est en C), ou à combien de yards il est devant A , je trouve (en soustrayant 2 de 5) qu'il a avancé de 3 yards (parce que $5 - 2 = 3$).



Fig. 1

¹ Des cinq hommes et une bourse. FIBONACCI propose ce problème dans le chapitre 12 de son ouvrage, chapitre où l'on trouve de nombreuses récréations mathématiques et notamment le célèbre problème des lapins.

² L'un des événements marquants de l'histoire des mathématiques à l'Université d'Oxford fut la fondation en 1619 par Sir Henry SAVILE, de deux chaires (dites *savilliennes*) en géométrie et en astronomie. Les statuts imposés par SAVILE prévoyaient, notamment, d'enseigner ces deux matières par l'exégèse des grands textes du passé, principalement les *Éléments* d'EUCLIDE et l'*Almageste* de PTOLÉMÉE (in FAUVEL J. et al. [1999]).

Mais si, ayant avancé de 5 yards vers B , il recule ensuite de 8 yards vers D , et qu'on demande de combien il a avancé quand il est en D , ou combien plus en avant il est de A , je dis -3 yards (parce que $5 - 8 = -3$). C'est-à-dire qu'il a avancé de 3 yards de moins que rien.

Ce qui, du point de vue de la justesse de l'expression ne peut être, puisqu'il ne peut exister moins que rien. Ainsi, si on se limite à la ligne AB vers l'*avant*, la situation est impossible.

Mais si (contrairement à notre supposition) la ligne partant de A peut être prolongée vers l'arrière, nous trouverons D 3 yards derrière A (ce qui est supposé être avant lui).

Et donc, dire qu'il a *avancé* de -3 yards représente ce que nous exprimerions, en langage ordinaire, par : il a reculé de 3 yards, ou il manque 3 yards pour être aussi en avant qu'il l'était en A .

Ceci ne répond pas seulement par un nombre négatif à la question posée, car il n'a pas (comme on l'avait supposé) avancé du tout, mais au contraire, il est si loin d'avoir avancé, qu'il a reculé de 3 yards, et qu'il est en D , 3 yards plus en arrière que lorsqu'il était en A .

Et, par conséquent, -3 désigne le point D aussi réellement que $+3$ désigne le point C . Non pas en avant, comme on l'avait supposé, mais en arrière de A . Ainsi, $+3$ signifie 3 yards en avant et -3 , 3 yards en arrière, mais toujours sur la même ligne droite. Et chacun désigne (en tout cas sur la même ligne droite infinie) un et un seul point. Et il en va ainsi pour toute équation du premier degré qui n'admet qu'une seule racine.

Maintenant, ce qu'on admet sur les droites doit, pour la même raison, être admis dans les plans.

Et par exemple, supposons qu'en un endroit, nous gagnons 30 acres sur la mer, mais que nous en perdons 20 en un autre lieu, et qu'on demande combien d'acres nous avons gagné en tout ; la réponse est 10 acres ou $+10$ (parce que $30 - 20 = 10$). Ceci représente aussi 1600 perches carrées (car l'acre anglais est une surface rectangulaire de 40 perches de longueur sur 4 perches de largeur dont l'aire est 160 ; 10 acres valent donc 1600 perches carrées).

Si cette surface est un carré, son côté sera long de 40 perches ou (si on admet la racine négative) -40 . Mais si en un troisième endroit, on perd 20 acres de plus, et qu'on pose la même question : combien avons nous gagné en tout ? La réponse doit être -10 acres (car $30 - 20 - 20 = -10$) c'est-à-dire que le gain est de 10 acres moins que rien. Ce qui revient à dire qu'il y a une perte de 10 acres ou de 1600 perches carrées.

Et de là naît une nouvelle difficulté, qui n'est pas plus une impossibilité que celle que nous avons rencontrée précédemment (en supposant une quantité négative ou moindre que rien). Ne considérer que $\sqrt{1600}$ est ambigu, cela peut être 40 ou -40 . Et de cette ambiguïté, il ressort que les équations quadratiques ont deux racines.

Maintenant (en supposant que cette surface négative -1600 perches a la forme d'un carré), ne doit-on pas admettre que ce supposé carré possède un côté ? Et si oui, que sera ce côté ?

Nous ne pouvons pas dire qu'il vaut 40, ni -40 (parce que l'une ou l'autre de ces valeurs, multipliée par elle-même, donnera $+1600$, pas -1600). Mais plus vraisemblablement, sa valeur est $\sqrt{-1600}$ (la supposée racine d'un carré négatif) ou (ce qui est équivalent) $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$. Le symbole $\sqrt{\quad}$ suggère une moyenne proportionnelle³ entre une quantité positive et une quantité négative. Car, de la même manière que $\sqrt{bc}$ représente une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $+c$, ou entre $-b$ et $-c$ (dont le produit vaut bc dans les deux cas), $\sqrt{-bc}$ indique une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $-c$, ou entre $-b$ et $+c$ (dont le produit vaut $-bc$). Et ceci, sur le plan algébrique, fournit la véritable interprétation d'une telle racine imaginaire $\sqrt{-bc}$.

Dans les chapitres suivants, WALLIS illustre cette notion par de nombreux exemples géométriques.

³ La moyenne proportionnelle de a et b est la valeur x telle que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ et donc $x = \sqrt{ab}$; on l'appelle aussi moyenne géométrique de a et b .

1.2 Exposition de la méthode des équipollences

En 1867, TAIT publie un *Traité élémentaire des quaternions*, encouragé en cela par Sir William HAMILTON, inventeur des quaternions. Le premier chapitre de cet ouvrage s'intitule *Des vecteurs et de leur composition* et commence par expliquer comment la découverte de l'emploi de $\sqrt{-1}$ comme *réalité géométrique* a conduit HAMILTON à fonder son *Calcul des quaternions*. Ensuite TAIT expose le début de ce calcul qui n'est rien d'autre que ce que nous appelons le calcul vectoriel et que BELLAVITIS appelle *Méthode des équipollences*.

Le texte qui suit est le début du chapitre II de l'ouvrage *Théorie et applications des équipollences* de C. A. LAISANT [1887], largement inspiré de l'*Exposition de la méthode des équipollences* de G. BELLAVITIS [1854].

Après avoir défini les *quantités géométriques* qu'on soumet au calcul dans la *méthode des équipollences*, et qu'on appelle *droites (limitées)*⁴, l'auteur définit, dans le chapitre I, l'*équipollence* de deux droites, puis l'*addition* et la *soustraction* de droites. Nous reconnaissons dans ces définitions les notions de vecteur libre, d'égalité de deux vecteurs et les opérations d'addition et de soustraction de vecteurs qui nous sont familières. L'auteur entreprend ensuite de définir une opération de multiplication des *droites*.

CHAPITRE II

Multiplication et division des droites.

Produit de deux droites. – Produits de plusieurs droites.

28. Jusqu'à présent, dans les calculs que nous avons effectués sur les droites, nous n'avons fait intervenir que la multiplication *par un nombre réel*. Nous avons maintenant à considérer des produits de droites multipliées les unes par les autres, et pour cela, nous devons tout d'abord définir le produit de deux droites, que nous supposerons ramenées à la même origine O.

Le produit de deux droites OA, OB est une droite OC dont la LONGUEUR est égale au PRODUIT des longueurs de OA et OB, et dont l'INCLINAISON est égale à la SOMME des inclinaisons de OA et OB.

Il suit de là que l'équipollence⁵ $OA \cdot OB = OC$ entraîne les deux égalités⁶

$$\text{gr.}OA \times \text{gr.}OB = \text{gr.}OC \quad \text{et} \quad \text{inc.}OA + \text{inc.}OB = \text{inc.}OC.$$

Une première remarque, indispensable à faire, c'est que, tandis que la somme de deux droites était tout à fait indépendante de tout autre élément du plan, leur produit dépend au contraire de l'origine des inclinaisons que l'on a choisie.

Malgré la multiplicité des inclinaisons d'une droite donnée, il ne peut y avoir aucune indécision sur la direction du produit, puisque l'inclinaison de celui-ci ne peut jamais être altérée que d'un nombre entier de circonférences, ce qui ne change rien à sa direction.

⁴ BELLAVITIS appelle *droite* ce que nous appellerions *vecteur déplacement dans le plan*.

⁵ Il faut entendre l'égalité.

⁶ La notation $\text{gr.}AB$ désigne la longueur (grandeur) d'une droite AB, indépendam-

Sans contester ce qu'une définition comme celle que nous venons de donner peut en apparence présenter d'arbitraire *a priori*, il est bon de montrer cependant qu'elle se justifie assez naturellement, à la condition qu'on admette pour unité la droite OI de longueur égale à l'unité et dirigée suivant l'origine des inclinaisons.

D'après la définition de la multiplication admise en Arithmétique, on doit former le produit OC, au moyen du multiplicande OA, comme le multiplicateur OB est formé au moyen de l'unité OI. Or, quelles opérations a-t-on fait subir à OI pour l'amener en OB ? On a modifié la longueur dans le rapport $\frac{\text{gr.OB}}{\text{gr.OI}} = \text{gr.OB}$, puis on a fait tourner la droite ainsi obtenue, dans le sens convenable, de l'angle $\beta = \text{inc.OB}$. L'analogie nous conduit donc à dire, que pour avoir le produit OA.OB, nous devons modifier la longueur de OA dans le rapport gr.OB, ce qui donnera une droite de longueur $\text{gr.OA} \times \text{gr.OB}$ dirigée suivant OA, puis faire tourner cette droite de l'angle β . Or, elle avait pour inclinaison $\alpha = \text{inc.OA}$. Son inclinaison après la rotation sera donc $\alpha + \beta$; c'est-à-dire que nous retombons précisément sur la droite OC, telle que nous l'avons définie plus haut.

Le lecteur sera sans doute étonné de constater que cette *multiplication des droites* ne correspond ni au produit scalaire de deux vecteurs, ni à leur produit vectoriel. Par contre, l'analogie avec le produit de deux nombres complexes écrits sous leur forme trigonométrique est assez frappante. Il suffit d'identifier la longueur de la *droite* et le module du nombre complexe, l'inclinaison de la *droite* et l'argument du nombre complexe pour se rendre compte qu'il s'agit bien de la même opération.

Si BELLAVITIS définit ainsi le produit de deux *droites*, c'est dans le but d'utiliser cette opération pour faire de la géométrie : la multiplication par une *droite* est une opération qui permet d'effectuer une similitude directe.

2 Nombres complexes et transformations du plan

De quoi s'agit-il ?

À partir de l'interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes, écrire les principales transformations du plan sous forme de relations liant l'affixe d'un point quelconque du plan complexe et celle de son image par cette transformation.

Exprimer quelques situations géométriques sous forme de calcul avec des nombres complexes.

Enjeux

L'objectif est de mettre en place l'écriture en termes d'opérations sur les nombres complexes de quelques transformations du plan, de façon à les exploiter comme outils de démonstration pour établir des propriétés géométriques de figures planes (voir la section 3 à la page 333). Les transformations en question sont essentiellement les similitudes (et tous les cas particuliers de similitude), ce qui tient à la nature même des fonctions linéaires sur les complexes (voir la section 8.5 du chapitre 16).

ment de la direction de cette droite.

La notation inc.AB désigne l'inclinaison d'une droite AB. C'est l'angle formé par la droite OM ($\text{OM}=\text{AB}$) et une droite OX appelée *origine des inclinaisons*. L'inclinaison est *positive* si la rotation qui amène OX sur OM s'effectue dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, sinon elle est négative.

Compétences. – Construire une représentation géométrique des nombres complexes et interpréter géométriquement les opérations.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – Les opérations sur les nombres complexes, y compris sous leur forme trigonométrique.

2.1 Représentation géométrique des nombres complexes

Comment s'y prendre ?

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, prenons le sens trigonométrique pour sens positif de rotation. Considérons un nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels. Il est représenté par le point P de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le point P est le *point représentatif* ou l'*image* du nombre complexe z .

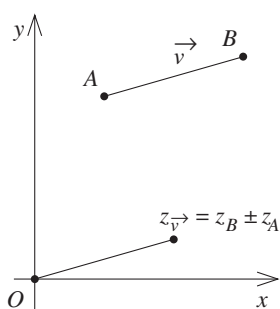


Fig. 2

Le nombre complexe z s'appelle l'*affixe* du point P , ce qu'on note parfois z_P . Par extension, on dit encore que z est l'affixe du vecteur $\vec{v}$ de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on le note $z_{\vec{v}}$. Le lien immédiat entre l'affixe et les composantes d'un vecteur nous indique que l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est égale à la différence entre l'affixe de son extrémité et celle de son origine (figure 2). On a

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A.$$

Propriétés

Les définitions précédentes permettent d'établir que l'affixe de la somme de deux vecteurs est la somme de leurs affixes,

$$z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}};$$

l'affixe de l'opposé d'un vecteur est l'opposé de son affixe,

$$z_{-\vec{v}} = -z_{\vec{v}};$$

l'affixe de la multiplication d'un vecteur par le scalaire k est égale à son affixe multipliée par k ,

$$z_k \vec{v} = k z_{\vec{v}}.$$

L'affixe du milieu d'un segment est la moyenne arithmétique des affixes de ses extrémités,

$$\text{si } M \text{ est le milieu de } [AB], \text{ alors } z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

L'affixe du centre de gravité d'un triangle est la moyenne arithmétique des affixes de ses sommets,

si G est le centre de gravité d'un triangle ABC ,

$$\text{alors } z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

2.2 Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes

Les quelques questions suivantes sont destinées à guider les élèves dans leur découverte de la signification géométrique des opérations sur les nombres complexes.

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x + yi$, quel est le point P' représentatif du nombre complexe

$$z' = z + a + bi ?$$

Quelques exemples devraient permettre aux élèves de constater que le point P' est l'image du point P par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $a + bi$.

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x + yi$, quel est le point P' représentatif de son *conjugué*

$$\bar{z} = x - yi ?$$

Des exemples montrent clairement que le point P' est l'image du point P par la symétrie orthogonale d'axe Ox .

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x + yi$, quel est le point P' représentatif du nombre complexe

$$z' = k \cdot z, \quad \text{où } k \text{ est un nombre réel non nul ?}$$

Ici encore, quelques exemples montrent clairement que le point P' , d'affixe $z' = kx + kyi$ est l'image de P par l'homothétie de centre O et de rapport k . Nous noterons $\mathcal{H}(O, k)$ cette homothétie.

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x + yi$, quel est le point P' représentatif du nombre complexe

$$z' = z \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) ?$$

L'interprétation de cette dernière opération nécessite d'écrire z sous forme trigonométrique. Notons σ son module et τ son argument, nous avons

$$z' = \sigma(\cos \tau + i \sin \tau)(\cos \theta + i \sin \theta) = \sigma(\cos(\theta + \tau) + i \sin(\theta + \tau)).$$

Le point P' est donc le point représentatif d'un nombre complexe de même module que z , mais dont l'argument a été augmenté de θ . Il s'agit donc de l'image de P par la rotation de centre O et d'angle θ . Nous noterons $\mathcal{R}(O, \theta)$ cette rotation.

Si P est un point quelconque du plan complexe, d'affixe $z = x + yi$, quel est le point P' représentatif du nombre complexe

$$z' = z \cdot \rho(\cos \theta + i \sin \theta) ?$$

En procédant comme pour la question précédente, nous écrirons

$$z' = \sigma(\cos \tau + i \sin \tau) \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \sigma \rho(\cos(\theta + \tau) + i \sin(\theta + \tau)).$$

Le point P' est donc le point représentatif d'un nombre complexe dont le module est le produit de celui de z par ρ , et dont l'argument est celui de z augmenté de θ . Il s'agit donc de l'image de P par la composée de l'homothétie $\mathcal{H}(O, \rho)$ et de la rotation $\mathcal{R}(O, \theta)$. Une telle composée est appelée *similitude directe*. Nous noterons $\mathcal{SD}(O, k, \theta)$ la similitude directe composée d'une homothétie de centre O et de rapport k et d'une rotation de même centre et d'angle θ .

2.3 Quelques transformations

Comment s'y prendre ?

Le travail précédent devrait permettre d'écrire les principales transformations du plan sous forme de calcul avec des nombres complexes.

Dans le plan des complexes, considérons des transformations qui à P d'affixe z associent P' d'affixe z' .

La translation de vecteur $\vec{v}$

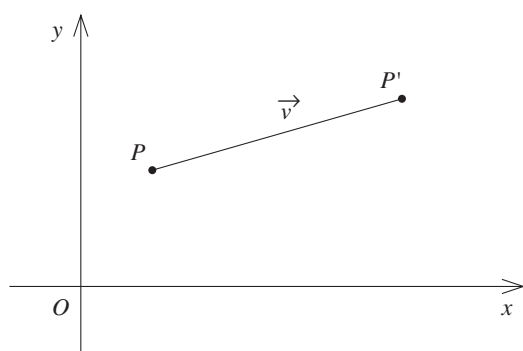


Fig. 3

La relation vectorielle

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{v},$$

se traduit, sur les affixes, par

$$z' = z + \alpha \quad \text{où } \alpha \text{ est l'affixe de } \vec{v}.$$

L'homothétie de centre Ω et de rapport k

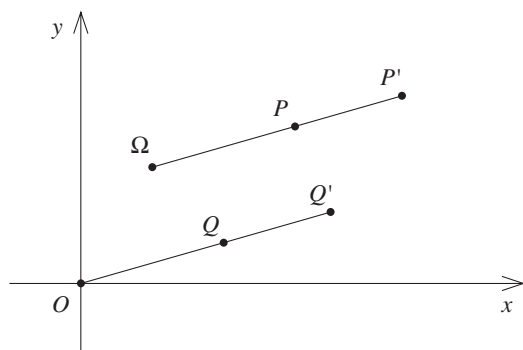


Fig. 4

La relation vectorielle

$$\overrightarrow{\Omega P'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega P} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OQ'} = k \cdot \overrightarrow{OQ},$$

où k un nombre réel non nul, se traduit, sur les affixes, par

$$z' - \omega = k(z - \omega) \quad \text{ou} \quad z' = \omega + k(z - \omega),$$

où ω est l'affixe de Ω .

La rotation de centre Ω et d'angle θ

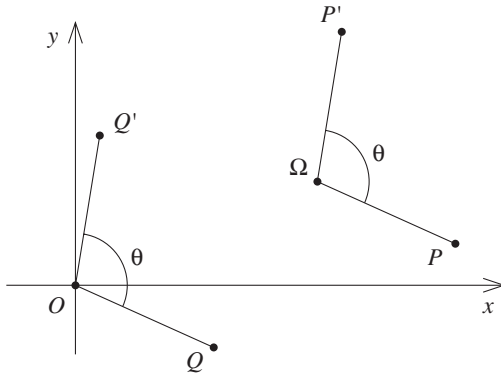


Fig. 5

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega P'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{\Omega P}$ par la rotation $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$ de centre Ω et d'angle θ (exprimé en radians)

ou

le vecteur $\overrightarrow{OQ'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ par la rotation $\mathcal{R}(O, \theta)$ de centre O et d'angle θ se traduit, sur les affixes, par la multiplication de l'affixe de $\overrightarrow{OQ}$, ou de $\overrightarrow{\Omega P}$, par $(\cos \theta + i \sin \theta)$.

On obtient $z_{\overrightarrow{\Omega P'}} = z_{\overrightarrow{\Omega P}} \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$,
 ou $z_{\overrightarrow{OQ'}} = z_{\overrightarrow{OQ}} \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$,
 c'est-à-dire $z' - \omega = (z - \omega)(\cos \theta + i \sin \theta)$,
 ou $z' = \omega + (z - \omega)(\cos \theta + i \sin \theta)$.

On peut encore décomposer la rotation $\mathcal{R}(\Omega, \theta)$ de la manière suivante,
 Q est l'image de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$, d'affixe $-\omega$,

$$z_1 = z - \omega;$$

Q' est l'image de Q par la rotation $\mathcal{R}(O, \theta)$,

$$z'_1 = (z - \omega)(\cos \theta + i \sin \theta);$$

P' est l'image de Q' par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$, d'affixe ω ,

$$z' = z'_1 + \omega = (z - \omega)(\cos \theta + i \sin \theta) + \omega.$$

La similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ

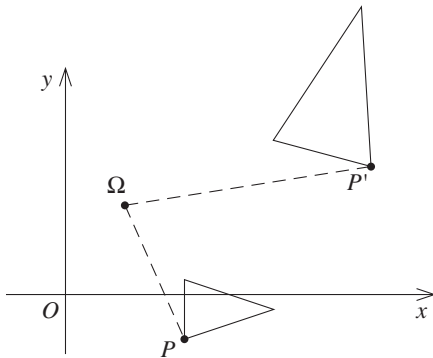


Fig. 6

En combinant les deux opérations précédentes, nous pouvons dire que

le vecteur $\overrightarrow{\Omega P'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{\Omega P}$ par la similitude $\mathcal{SD}(\Omega, k, \theta)$,

ou que

le vecteur $\overrightarrow{OQ'}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ par la similitude $\mathcal{SD}(O, k, \theta)$,

ce qui se traduit, sur les affixes, par la multiplication de l'affixe de $\overrightarrow{OQ}$, ou de $\overrightarrow{\Omega P}$, par $k(\cos \theta + i \sin \theta)$.

On obtient $\overrightarrow{\Omega P'} = \overrightarrow{\Omega P} \cdot k(\cos \theta + i \sin \theta),$
 ou $\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} \cdot k(\cos \theta + i \sin \theta),$
 c'est-à-dire $z' - \omega = (z - \omega) \cdot k(\cos \theta + i \sin \theta),$
 ou $z' = \omega + (z - \omega) \cdot k(\cos \theta + i \sin \theta).$

La figure 6 illustre l'image d'un triangle par la similitude $\mathcal{SD}(\Omega, 1.7, 75^\circ)$

*Prolongements
possibles*

La symétrie orthogonale d'axe AB

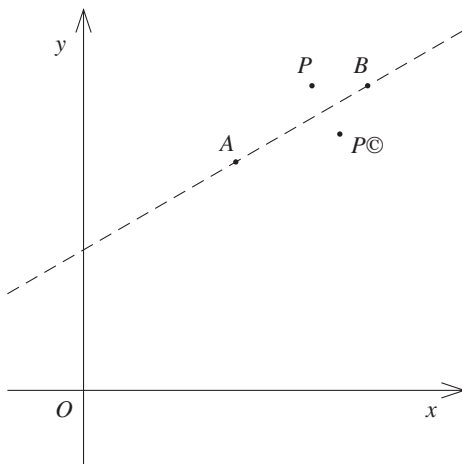


Fig. 7

Pour compléter cet exposé, nous montrons ici une méthode qui permet de découvrir la relation liant les affixes z et z' d'un point P quelconque du plan complexe et de son image P' par la symétrie orthogonale d'axe AB . Nous la donnons pour information, mais nous n'en ferons pas usage dans les exercices proposés à la section 3.

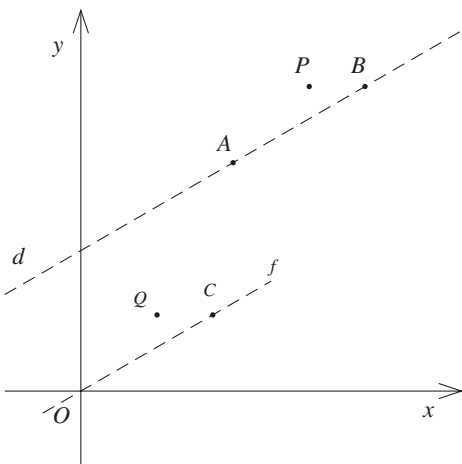


Fig. 8

Notons a et b les affixes respectives des points A et B .

Effectuons tout d'abord la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. Elle envoie A sur O , B sur C et P sur Q . On obtient

$$z_C = b - a \text{ et } z_Q = z - a.$$

Cette première opération amène l'axe de symétrie d sur la droite f passant par O .

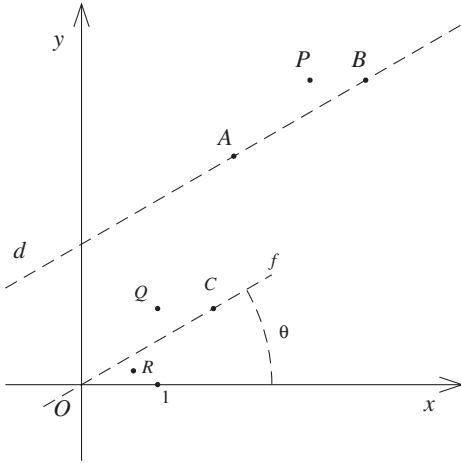


Fig. 9

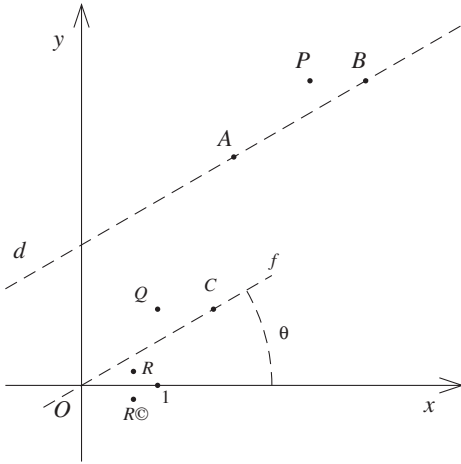


Fig. 10

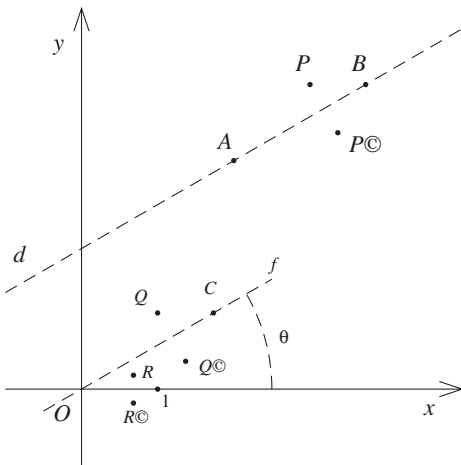


Fig. 11

Effectuons ensuite la similitude directe qui applique C sur le point d'affixe $1 + 0i$. Cette similitude, d'angle θ (sens horlogique sur la figure 9) et dont le rapport est égal à l'inverse du module de $(b - a)$, applique Q sur R . L'opération sur les affixes qui correspond à cette similitude est la division par $(b - a)$. On a

$$z_R = \frac{z_Q}{b - a}.$$

Notons que cette deuxième opération amène l'axe de symétrie sur l'axe Ox , axe par rapport auquel il est aisé de réaliser une symétrie orthogonale.

Nous sommes à présent en mesure d'écrire l'affixe de R' , symétrique de R par rapport à Ox ; l'affixe de R' est le conjugué de celui de R . On a

$$z_{R'} = \overline{\left(\frac{z_Q}{b - a} \right)} = \overline{\left(\frac{z - a}{b - a} \right)} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}},$$

où $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{z}$ sont les complexes conjugués de a , b et z .

La dernière étape consiste à effectuer la similitude qui applique le point d'affixe $1 + 0i$ sur C , puis la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. On obtient successivement

$$z_{Q'} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}(b - a),$$

puis

$$z_{P'} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}(b - a) + a.$$

Cette dernière relation peut encore s'écrire

$$\frac{z' - a}{b - a} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}.$$

2.4 Quelques situations géométriques

Comment s'y
prendre ?

Considérons les points $A, B, C, D, \dots$ deux à deux distincts dont les affixes respectives sont $a, b, c, d, \dots$ (éléments de $\mathbb{C}$).

Alignement. – Exprimer que les trois points A, B et C sont alignés.

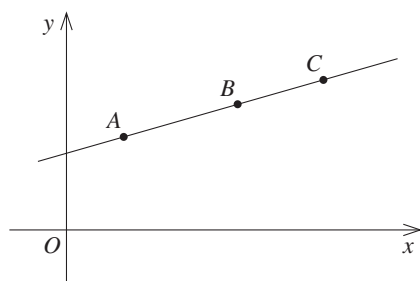


Fig. 12

La condition vectorielle d'alignement

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB},$$

se traduit, sur les affixes, par

$$c - a = k \cdot (b - a) \quad \text{avec } k \in \mathbb{R},$$

ou encore A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}.$$

Perpendicularité. – Exprimer que les deux droites AB et CD sont perpendiculaires.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$, d'affixe $(d - c)$, est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$, d'affixe $(b - a)$, par une rotation de 90° et une homothétie de rapport k .

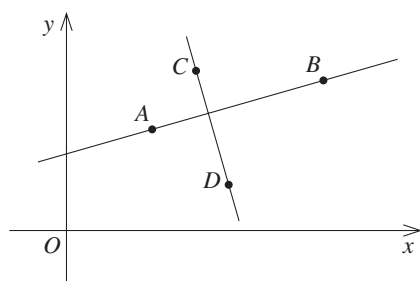


Fig. 13

Nous obtenons

$$d - c = (b - a) \cdot i \cdot k \quad \text{et donc} \quad \frac{d - c}{b - a} = k \cdot i.$$

Ainsi $AB \perp CD$ si et seulement si $\frac{d - c}{b - a}$ est un imaginaire pur.

La norme du rapport $\frac{d - c}{b - a}$ vaut le rapport des longueurs des segments $[CD]$ et $[AB]$.

Remarquons que si $(b - a) = r + is$, $(d - c) = (r + is) \cdot i \cdot k = k(-s + ri)$.

Triangle rectangle isocèle. – Exprimer que le triangle ABC est rectangle isocèle de sommet A .

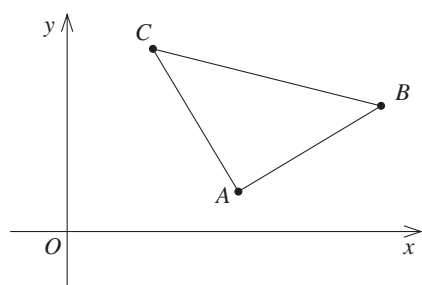


Fig. 14

Comme conséquence directe de la relation précédente, il vient : ABC est rectangle isocèle de sommet A si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} = i.$$

Carré. – Exprimer que la figure $ABCD$ est un carré.

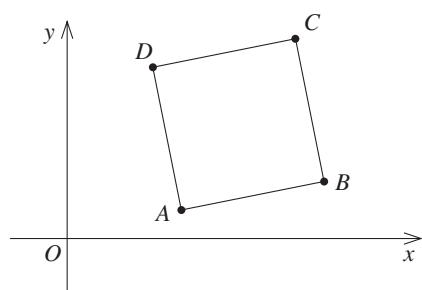


Fig. 15

Cela peut se faire en écrivant deux relations du type

$$\begin{cases} d-a = (b-a)i \\ a-b = (c-b)i. \end{cases}$$

Triangle équilatéral. – Exprimer que la figure ABC est un triangle équilatéral.

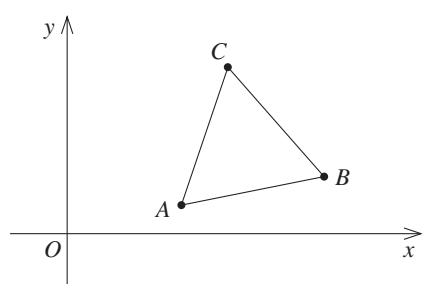


Fig. 16

On peut écrire une relation du type

$$c-a = (b-a)\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right).$$

REMARQUE. – Dans ce qui précède, lorsque l'on dit « triangle ABC », ou carré « $ABCD$ », cela signifie que l'on cite les sommets A, B, C, D dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Commentaires

Il est intéressant de noter que tout ce qui précède suffit à exposer la première démonstration que GAUSS donne du théorème fondamental de l'algèbre : *Toute équation algébrique de degré n dans les complexes admet n racines (certaines d'entre elles pouvant être confondues)*. À ce sujet, on peut consulter F. Enriques [1924–1927].

3 Faire de la géométrie avec les nombres complexes

De quoi s'agit-il ?

Résoudre quelques problèmes de géométrie plane au moyen des nombres complexes⁷. C'est dans des problèmes faisant intervenir des déplacements et similitudes du plan que les nombres complexes sont particulièrement utiles.

Traiter une même application avec différents outils : propriétés de figures, transformations, nombres complexes et comparer ces différentes approches. D'autres méthodes n'ont pas été développées ici : le calcul vectoriel (qui n'est évoqué qu'à titre indicatif) et la géométrie analytique.

Enjeux

L'objectif est d'utiliser l'aspect géométrique des opérations sur les nombres complexes pour établir des propriétés géométriques de figures planes. Bien que cette méthode de démonstration ne diffère guère de celle qui utilise le calcul vectoriel, il convient de mettre en évidence l'avantage que présente la multiplication par le nombre complexe adéquat pour effectuer une rotation d'un angle qui n'est pas un multiple de 90° .

Par ailleurs, cette activité propose des applications dont les démonstrations par la géométrie synthétique exploitent les propriétés des transformations du plan. Ceci donne du sens à cette matière, dont l'étude semble parfois stérile aux élèves et aux enseignants, de par son manque d'utilisation.

De manière plus générale, le but est aussi de rencontrer un nouvel outil de démonstration en géométrie, de diversifier les méthodes, de les comparer en évaluant les avantages de chacune d'elles.

Compétences. – *Traiter des applications à caractère géométrique au moyen des nombres complexes.*

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – La représentation géométrique des nombres complexes et les principales transformations du plan sous forme d'opérations sur les nombres complexes.

Fichiers Cabri. – Pour chacune des applications suivantes, un fichier Cabri commenté est disponible sur le site du CREM à l'adresse

<http://www.profor.be/crem/index.htm>

Remarque. – Chaque fois qu'on désigne une figure par ses sommets, ceux-ci sont donnés dans le sens trigonométrique.

⁷ Certains de ces exercices sont proposés dans A. Bajart [1998].

3.1 Un point fixe

Comment s'y prendre ?

Dans un plan, on considère trois points non alignés A , B et M . Au point M , on associe le point R milieu de $[BM]$, le point S , symétrique de R par rapport à A , ainsi que le point P , point d'intersection des droites MS et AB . Qu'advient-il du point P lorsque le point M se déplace dans le plan ?

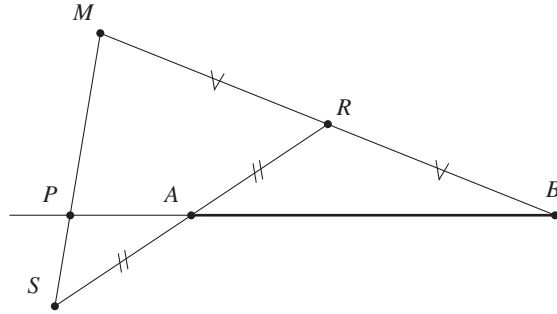


Fig. 17

Ce problème a déjà été traité par calcul vectoriel au chapitre 8. Nous en proposons ici deux autres solutions : l'une par les nombres complexes, l'autre par la géométrie synthétique.

Par les nombres complexes

Plaçons l'origine du repère en A et le point unité sur l'axe des réels en B . Les affixes des points A , B sont respectivement $a = 0 + 0i$ et $b = 1 + 0i$.

Notons $m = \lambda + \mu i$ l'affixe du point mobile M .

L'affixe de R , milieu de $[MB]$ est alors $r = \frac{\lambda+1}{2} + \frac{\mu}{2}i$ et celle de S symétrique de R par rapport à l'origine A est $s = -\frac{\lambda+1}{2} - \frac{\mu}{2}i$.

L'alignement de M , P et S , qui s'exprime vectoriellement par $\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{MS}$, nous donne la relation $p - m = k(s - m)$ pour les affixes.

L'affixe de P est donc

$$p = (\lambda + \mu i) + k\left(-\frac{\lambda+1}{2} - \frac{\mu}{2}i - \lambda - \mu i\right).$$

En regroupant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons

$$p = \lambda - k\frac{3\lambda+1}{2} + \mu\frac{2-3k}{2}i.$$

Comme P est un point de l'axe réel, la partie imaginaire de son affixe est nulle, ce qui donne $k = \frac{2}{3}$. En remplaçant k par cette valeur, on obtient finalement $p = -\frac{1}{3} + 0i$.

Ce résultat s'interprète comme ceci : P est un point fixe, situé sur la droite AB , à une distance $\frac{|AB|}{3}$ de A , du côté opposé à B .

Par la géométrie synthétique

Suivons les indications de l'énoncé pour découvrir les transformations du plan qui sont appliquées au point M , et voyons quelle est l'image du point P par cette composition de transformations.

Tout d'abord, une homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$, notée $\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$ applique M sur R ; ensuite R est lui-même envoyé sur S par la symétrie de centre A , notée $\mathcal{SC}_A$.

Si les élèves savent que la composée $\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$ est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$, ils peuvent en déduire que le point P est fixe. En effet, le centre de cette dernière homothétie est à la fois un point de la droite AB , qui est sa propre image par la composée $\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$, et un point de la droite MS . C'est donc le point P .

Comme de nombreux élèves ne sont plus familiarisés avec les propriétés de composition des transformations, il faudra peut-être procéder autrement.

Quelle est l'image du point P par la composée $\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$?

L'homothétie $\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$ applique P sur Q , milieu de $[PB]$, ensuite Q est envoyé sur Q' symétrique de Q par rapport à A . Montrons que Q' coïncide avec P .

$\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$	$\mathcal{SC}_A$	$\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$
$M \longrightarrow R$	$R \longrightarrow S$	$M \longrightarrow S$
$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow Q'$	$P \longrightarrow Q' (= P?)$

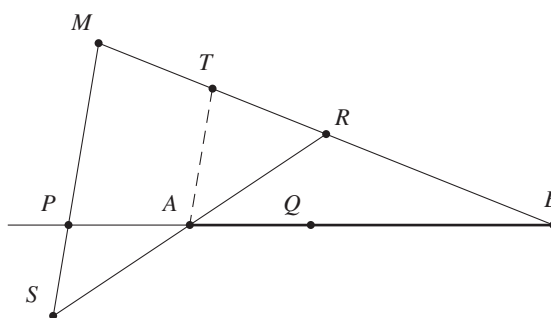


Fig. 18

Traçons la droite parallèle à SM passant par A et notons T le point d'intersection de cette droite avec MB (figure 18). La configuration de Thalès dans le triangle SRM nous indique que

puisque A est au milieu de $[SR]$,

T est au milieu de $[MR]$, et donc au quart de $[MB]$, à partir de M .

Une configuration similaire dans le triangle PBM nous permet de déduire que

puisque T est au quart de $[MB]$, à partir de M ,

A est au quart de $[PB]$, à partir de P , et donc au milieu de $[PQ]$.

Ainsi l'image de Q par la symétrie $\mathcal{SC}_A$ est P , qui est donc un point fixe de la similitude $\mathcal{SC}_A \circ \mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$. Ce point fixe P est le centre de cette similitude et toutes les droites joignant un point M quelconque à son image S par cette similitude passent par P . De plus, la position de P , sur la droite AB , à une distance $\frac{|AB|}{3}$ de A , du côté opposé à B est une conséquence du fait que A est au quart de $[PB]$, à partir de P .

REMARQUE. – Une autre façon de justifier que l'image de Q par la symétrie $\mathcal{SC}_A$ est P consiste à démontrer que les triangles SAP et RAQ sont isométriques, ce qui permet de déduire que $|AP| = |AQ|$.

3.2 Problème des deux triangles rectangles isocèles

Comment s'y
prendre ?

On donne deux triangles isocèles OAB et OCD rectangles en O . Montrer que la médiane issue du sommet O de l'un des deux triangles AOD ou COB est hauteur de l'autre. Envisager encore plusieurs types de démonstrations.

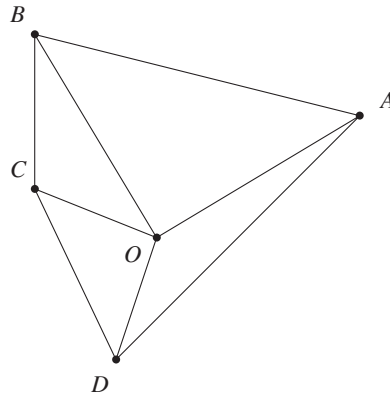


Fig. 19

Par les nombres complexes

Plaçons l'origine du plan en O , l'axe des réels sur OA et l'axe des imaginaires sur OB . Le repère OAB est orthonormé puisque le triangle OAB est rectangle et isocèle. Les affixes respectives de A et B sont alors $a = 1 + 0i$ et $b = 0 + 1i$.

Notons $c = r + si$ l'affixe du point C . Comme D est l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, notée $R(O, \frac{\pi}{2})$, son affixe d vaut ci et donc $d = (r + si)i = -s + ri$.

Plaçons M au milieu de $[CB]$ et montrons que OM , médiane du triangle OBC , est perpendiculaire à AD . Pour cela, calculons et comparons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AD}$. On a

$$z_{\overrightarrow{OM}} = \frac{r}{2} + \frac{s+1}{2}i \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{AD}} = -s - 1 + ri.$$

Il reste à vérifier que, si on multiplie par i l'affixe de $\overrightarrow{OM}$, on retrouve bien celle de $\overrightarrow{AD}$, à un facteur près. Et en effet,

$$z_{\overrightarrow{OM}} \cdot i = \left(\frac{r}{2} + \frac{s+1}{2}i\right)i = \frac{-s-1}{2} + \frac{r}{2}i = \frac{1}{2}(-s-1+ri) = \frac{1}{2}z_{\overrightarrow{AD}}.$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ nous indique de plus que $|OM| = \frac{1}{2}|AD|$.

Par le calcul vectoriel

La perpendicularité de OM et AD est établie en vérifiant que le produit scalaire $\langle \overrightarrow{OM} | \overrightarrow{AD} \rangle$ est nul ; le calcul des normes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AD}$ montre que $\|\overrightarrow{OM}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AD}\|$.

Par la géométrie synthétique

Recherchons une transformation du plan qui amène, par exemple, $[AD]$ sur $[OM]$. La présence d'angles droits et d'un milieu nous suggère de nous tourner vers les rotations d'un quart de tour ainsi que vers les homothéties de rapport $\frac{1}{2}$.

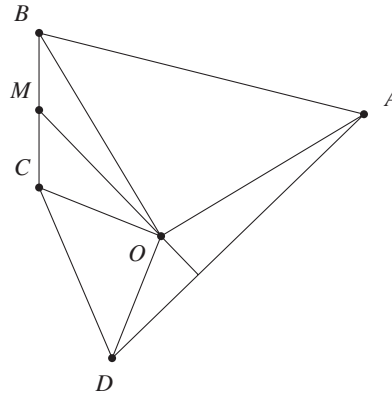


Fig. 20

Voici une des façons de s'y prendre.

Effectuons tout d'abord la rotation $\mathcal{R}(O, -\frac{\pi}{2})$. Elle applique D sur C et A sur Q , où Q est le symétrique de B par rapport à O .

Ensuite, l'homothétie $\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$ applique C sur M et Q sur O .

$\mathcal{R}(O, -\frac{\pi}{2})$	$\mathcal{H}(B, \frac{1}{2})$	$\mathcal{H}(B, \frac{1}{2}) \circ \mathcal{R}(O, -\frac{\pi}{2})$
$D \longrightarrow C$	$C \longrightarrow M$	$D \longrightarrow M$
$A \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow O$	$A \longrightarrow O$

Par conséquent, la composée $\mathcal{H}(B, \frac{1}{2}) \circ \mathcal{R}(O, -\frac{\pi}{2})$ applique le segment $[DA]$ sur le segment $[MO]$, et on peut en déduire que ces deux segments sont perpendiculaires, et que $|OM| = \frac{1}{2}|AD|$.

3.3 Problème des trois triangles équilatéraux

Comment s'y prendre ?

Le triangle ABC est équilatéral et G désigne son centre. Si D est un point de $[BC]$, on construit les triangles équilatéraux BED et DFC de centres respectifs H et J , comme sur la figure 21. Démontrer que le triangle GHJ est également équilatéral.

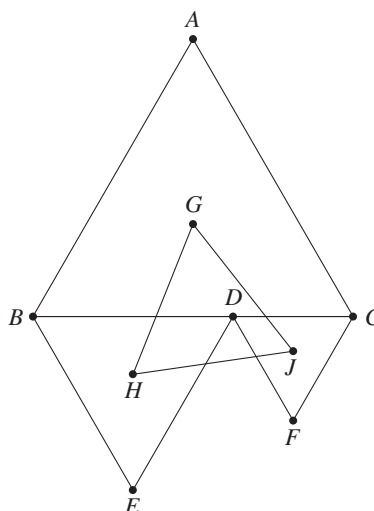


Fig. 21

Par les nombres complexes

Plaçons l'origine du plan en B , l'axe des réels sur BC , avec le point unité en C , et l'axe des imaginaires perpendiculaire à BC .

La recherche des affixes respectives des différents points de la figure 21 fournit l'occasion d'appliquer de manière systématique les propriétés et les expressions des transformations du plan complexe exposées aux pages 325 à 328. Voici les résultats.

$$B : b = 0 + 0i ;$$

$$C : c = 1 + 0i ;$$

$$A : a = c \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ car } A \text{ est l'image de } C \text{ par la rotation } \mathcal{R}(B, \frac{\pi}{3}) ;$$

$$G : g = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, \text{ car } G \text{ est le centre de gravité du triangle } ABC ;$$

$$D : d = k + 0i, \text{ car } D \text{ est un point quelconque du segment } [BC] ;$$

$$E : e = d \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{k}{2} - \frac{k\sqrt{3}}{2}i, \text{ car } E \text{ est l'image de } D \text{ par la rotation } \mathcal{R}(B, -\frac{\pi}{3}) ;$$

$$H : h = \frac{k}{2} - \frac{k\sqrt{3}}{6}i, \text{ car } H \text{ est le centre de gravité du triangle } BED ;$$

$$F : f = d + (c - d) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = k + (1 - k) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{k+1}{2} - \frac{(1-k)\sqrt{3}}{2}i, \\ \text{car } \overrightarrow{DF} \text{ est l'image de } \overrightarrow{DC} \text{ par la rotation } \mathcal{R}(D, -\frac{\pi}{3}) ;$$

$$J : j = \frac{k+1}{2} - \frac{(1-k)\sqrt{3}}{6}i, \text{ car } J \text{ est le centre de gravité du triangle } DFC.$$

Pour justifier que le triangle GHJ est équilatéral, il suffit de vérifier, par exemple, que le vecteur $\overrightarrow{GJ}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{GH}$ par la rotation $\mathcal{R}(G, \frac{\pi}{3})$. Ou encore que le vecteur $\overrightarrow{HG}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{HJ}$ par la rotation $\mathcal{R}(H, \frac{\pi}{3})$. D'autres possibilités de vérification peuvent être évoquées par les élèves ; rien ne s'oppose à ce que chacun poursuive les calculs en suivant sa propre idée.

Calculons, par exemple, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GJ}$.

$$z_{\overrightarrow{GH}} = h - g = \frac{k-1}{2} - \frac{(k+1)\sqrt{3}}{6}i \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{GJ}} = j - g = \frac{k}{2} + \frac{(k-2)\sqrt{3}}{6}i.$$

Il reste à vérifier que

$$z_{\overrightarrow{GH}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = z_{\overrightarrow{GJ}}$$

c'est-à-dire que

$$\left(\frac{k-1}{2} - \frac{(k+1)\sqrt{3}}{6}i \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{k}{2} + \frac{(k-2)\sqrt{3}}{6}i,$$

ce qui est bien le cas.

Cette application montre très clairement à quel point la méthode de démonstration par les nombres complexes est efficace, même et surtout si des rotations d'angles non multiples de $\frac{\pi}{2}$ interviennent dans le problème. En effet, un seul calcul suffit à établir que deux côtés sont de même longueur et qu'ils forment un angle de 60° .

Par le calcul vectoriel

On peut démontrer que le triangle GHJ est équilatéral en calculant par produit scalaire les longueurs des trois côtés, ou encore la mesure d'un angle et les longueurs des deux côtés qui le bordent, ...

Par la géométrie synthétique

Cette démonstration utilise des propriétés concernant la composition de deux rotations, et la décomposition d'une rotation en composée de deux symétries orthogonales.

Ces notions ne sont peut-être pas familières à tous les élèves, et le professeur jugera de l'opportunité d'effectuer cet exercice de démonstration en fonction des connaissances des élèves de sa classe. Nous proposons ci-dessous un schéma de réflexion qui permet de guider les élèves pour leur permettre de retrouver ces propriétés, et d'en déduire la démonstration de l'énoncé proposé.

Il faut tout d'abord s'assurer que les élèves se souviennent que les transformations du plan se répartissent en *déplacements* et *retournements*. Ensuite, on pose quelques questions destinées à rafraîchir leur mémoire.

La composée de deux symétries orthogonales est-elle un déplacement ou un retournement ?

Plus précisément, quelle est la transformation composée de deux symétries orthogonales

d'une part, d'axes parallèles, distants d'une longueur ℓ ?

d'autre part, d'axes sécants en O , formant un angle θ ?

Il s'agit bien entendu d'un déplacement. Dans le premier cas, il s'agit d'une translation dont le vecteur est perpendiculaire aux axes des symétries et de longueur 2ℓ ; dans le second cas, il s'agit d'une rotation de centre O et d'angle 2θ . L'ordre dans lequel on effectue la composée des deux symétries détermine le sens de la translation ou de la rotation, suivant le cas.

Peut-on décomposer toute rotation de centre O et d'angle α en une composée de deux symétries orthogonales ? De quelle manière ?

La figure 22 apporte des éléments de réponse à cette question.

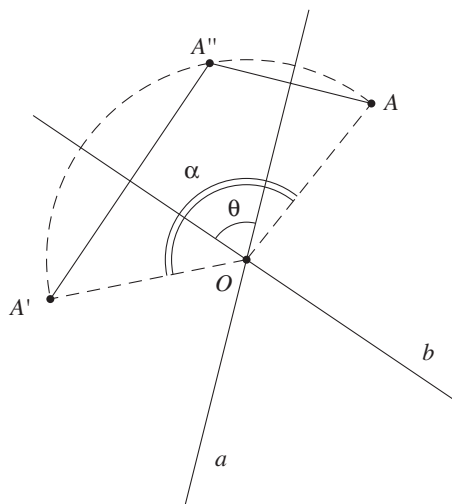


Fig. 22

La rotation de centre O et d'angle α est la composée de deux symétries orthogonales dont les axes a et b se coupent en O et forment un angle $\theta = \frac{\alpha}{2}$, θ étant l'angle allant de a vers b . Il convient d'être très attentif à l'ordre des symétries dans la décomposition, car il s'agit d'angles orientés. La figure montre que $\mathcal{R}(O, \alpha) = \mathcal{SO}_b \circ \mathcal{SO}_a$, tandis que la composée $\mathcal{SO}_a \circ \mathcal{SO}_b$ correspond à la rotation de même centre O et d'angle $(-\alpha)$.

Cette décomposition est-elle unique ?

Comme le montrent les figures 23 et 24, la position du point intermédiaire A'' (tel que $|OA''| = |OA|$) est arbitraire et chaque choix de A'' détermine une position des axes de symétrie. Ceux-ci se coupent toujours en O et forment un angle $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

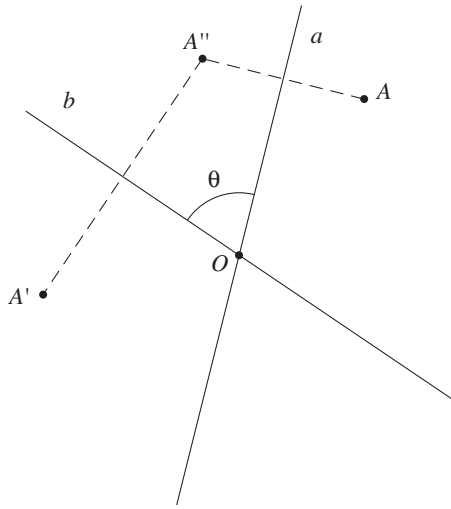


Fig. 23

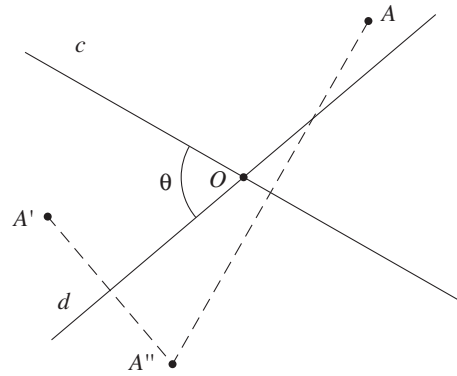


Fig. 24

La composée de deux rotations s'obtient donc par la composée de quatre symétries orthogonales. Nous allons voir qu'en vertu de ce qui précède, un choix judicieux des axes de symétries permet d'obtenir cette composée de deux rotations comme composée de deux symétries orthogonales.

Notons $\mathcal{SO}_a$ la symétrie orthogonale d'axe a , et décomposons, par exemple, la composée de deux rotations de 120° et de centres respectifs A et B en composée de quatre symétries. On a

$$\mathcal{R}(A, 120^\circ) = \mathcal{SO}_b \circ \mathcal{SO}_a \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(B, 120^\circ) = \mathcal{SO}_d \circ \mathcal{SO}_c$$

$$\mathcal{R}(B, 120^\circ) \circ \mathcal{R}(A, 120^\circ) = \mathcal{SO}_d \circ \mathcal{SO}_c \circ \mathcal{SO}_b \circ \mathcal{SO}_a.$$

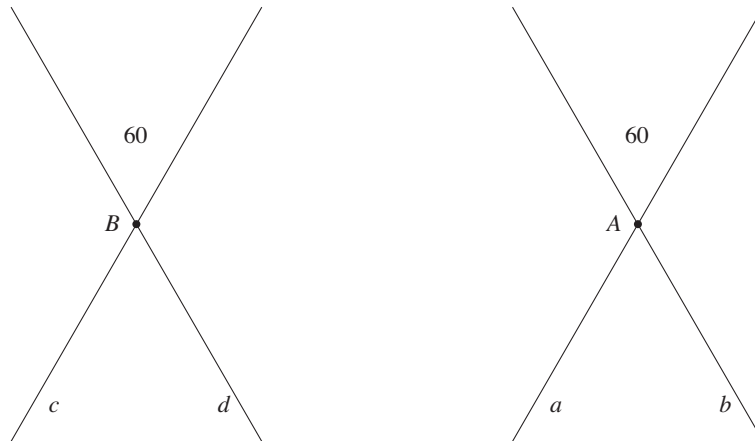


Fig. 25

La mesure de l'angle de la rotation qui amène a sur b (ou c sur d) est bien de 60° . En amenant les axes b et c dans la position de la droite des centres AB , comme le montre la figure 26, nous obtenons

$$\mathcal{R}(B, 120^\circ) \circ \mathcal{R}(A, 120^\circ) = \mathcal{SO}_{d'} \circ \mathcal{SO}_{c'} \circ \mathcal{SO}_{b'} \circ \mathcal{SO}_{a'} = \mathcal{SO}_{d'} \circ \mathcal{SO}_{a'}.$$

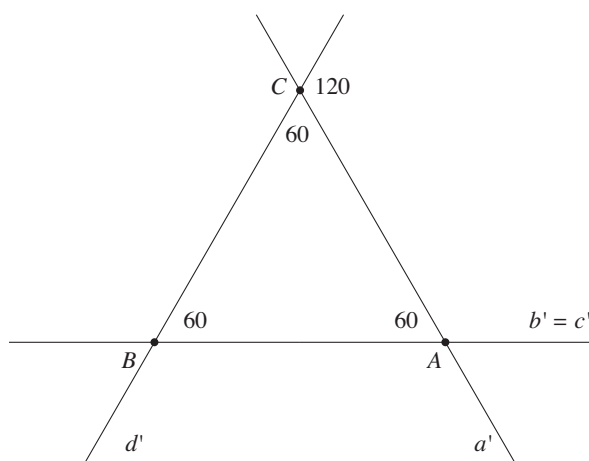


Fig. 26

L'angle de la rotation qui amène a' sur d' mesure (-60°) ou 120° . La composée $\mathcal{SO}_{d'} \circ \mathcal{SO}_{a'}$ est donc une rotation de centre C et d'angle (-120°) ou 240° , ce qui revient au même. On peut donc écrire

$$\mathcal{R}(B, 120^\circ) \circ \mathcal{R}(A, 120^\circ) = \mathcal{R}(C, 240^\circ).$$

De manière plus générale, déterminer sur un schéma le centre et l'angle de la composée de deux rotations de centres respectifs A et B et d'angles α et β .

Revenons au problème des trois triangles.

Nous observons que la rotation $\mathcal{R}(J, 120^\circ)$ applique C sur D , et que la rotation $\mathcal{R}(H, 120^\circ)$ applique D sur B . Leur composée peut être déterminée en vertu de ce qui précède (figure 26). Il s'agit de la rotation de 240° dont le centre forme un triangle équilatéral avec J et H .

Voit-on sur le dessin de la figure 21 une rotation de 240° qui amène C sur B ?

La rotation $\mathcal{R}(G, 240^\circ)$ répond à cette question. Il faudra encore expliquer pourquoi il y a unicité de la rotation d'un angle donné qui amène un point donné sur un autre, lorsqu'on connaît l'angle de la rotation. Nous pourrions alors conclure que GHJ forme un triangle équilatéral.

Prolongement possible

Que se passe-t-il si le point D n'est plus sur la droite BC ?

Le fichier Cabri montre que l'énoncé reste vrai. Il reste à voir que la démonstration synthétique inclut ce cas. Cette propriété, appelée par certains *théorème de Napoléon*, peut également être démontrée par les nombres complexes.

3.4 Problème des trois carrés

Comment s'y
prendre ?

On donne un segment $[OB]$ et un point A de ce segment. D'un même côté de OB , on construit les carrés de côtés $[OA]$ et $[AB]$, de l'autre côté, le carré de côté $[OB]$. Désignons par C , D et E les centres respectifs de ces trois carrés. Démontrer que BC est perpendiculaire à DE . Montrer en outre que $|BC| = |DE|$.

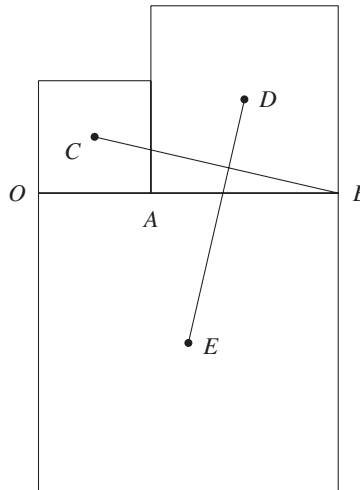


Fig. 27

REMARQUE. — On pourrait également démontrer que les segments $[OD]$ et $[CE]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

Par les nombres complexes

Pour établir la thèse, il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{BC}$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, ce qui peut se vérifier facilement au moyen des affixes de ces deux vecteurs.

Plaçons l'origine du plan en O , l'axe des réels sur OB , avec le point unité en B , et l'axe des imaginaires perpendiculaire à OB .

Déterminons tout d'abord les affixes des points de la figure 27 nécessaires au calcul des affixes des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$:

$$O : o = 0 + 0i ;$$

$$B : b = 1 + 0i ;$$

$$A : a = k + 0i ;$$

$$C : c = \frac{k}{2} + \frac{k}{2}i ;$$

$$D : d = \frac{k+1}{2} + \frac{1-k}{2}i ;$$

$$E : e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Calculons ensuite les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$. On obtient

$$z_{\overrightarrow{BC}} = c - b = \frac{k-2}{2} + \frac{k}{2}i \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{DE}} = e - d = -\frac{k}{2} + \frac{k-2}{2}i.$$

Il reste à vérifier que

$$z_{\overrightarrow{BC}} \cdot i = z_{\overrightarrow{DE}}$$

c'est-à-dire que

$$\left(\frac{k-2}{2} + \frac{k}{2}i\right) \cdot i = -\frac{k}{2} + \frac{k-2}{2}i,$$

ce qui est bien le cas.

Le fait qu'il n'est pas nécessaire de connaître le centre de la rotation pour effectuer cette vérification étonnera peut-être les élèves et suscitera quelques commentaires.

Par le calcul vectoriel

La perpendicularité des segments $[BC]$ et $[DE]$ est établie en vérifiant que le produit scalaire $\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{DE} \rangle$ est nul ; l'égalité de leurs longueurs est vérifiée en calculant les normes des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$.

Par la géométrie synthétique

Nous cherchons une rotation d'angle 90° qui applique $[BC]$ sur $[DE]$, ou ce qui revient au même, une rotation d'angle -90° qui applique $[DE]$ sur $[BC]$.

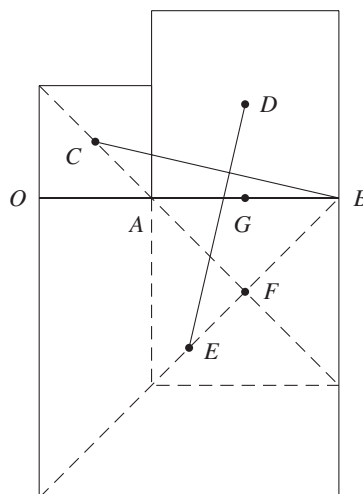


Fig. 28

La rotation de centre G et d'angle -90° envoie D sur B , elle applique aussi B sur F et BE sur FC (figure 28). En effet, $|BE|$ vaut la mesure de la demi-diagonale du carré construit sur $[OB]$, et $|FC| = |FA| + |AC|$, vaut la somme des mesures des demi-diagonales des carrés construits sur $[AB]$ et $[OA]$. Comme la mesure de la diagonale du carré construit sur $[OB]$ est égale à la somme des mesures des diagonales des carrés construits sur $[AB]$ et $[OA]$, on a bien $|BE| = |FC|$. Il en résulte que E est envoyé sur C , et donc DE sur BC .

$\mathcal{R}(G, -\frac{\pi}{2})$
$B \longrightarrow F$
$D \longrightarrow B$
$[BE] \longrightarrow [FC]$
$E \longrightarrow C$
$[DE] \longrightarrow [BC]$

On peut déduire de tout ceci que les segments $[DE]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

3.5 Problème des quatre carrés (et plus...)

Comment s'y prendre ?

On construit quatre carrés sur les côtés d'un parallélogramme extérieurement à celui-ci. Démontrer que les centres de ces carrés sont les sommets d'un carré.

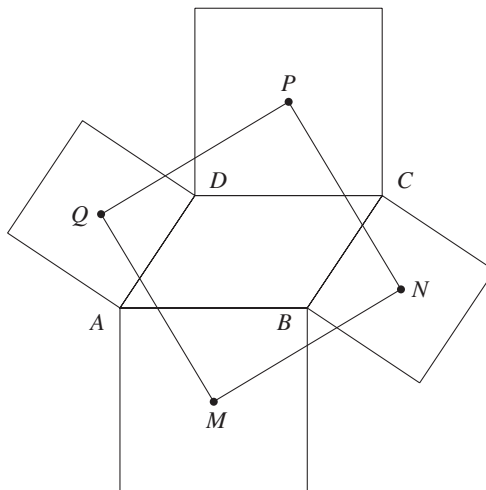


Fig. 29

Par les nombres complexes

Plaçons l'origine du plan en D , l'axe des réels sur DC , avec le point unité en C , et l'axe des imaginaires perpendiculaire à DC .

Déterminons tout d'abord les affixes des points de la figure 29.

$$D : d = 0 + 0i ;$$

$$C : c = 1 + 0i ;$$

$$A : a = k + li ;$$

$$B : b = k + 1 + li, \text{ car } B \text{ est l'image de } A \text{ par la translation de vecteur } \overrightarrow{DC}, \text{ d'afixe } 1 + 0i ;$$

$$P : p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i ;$$

$$M : m = (k + \frac{1}{2}) + (\ell - \frac{1}{2})i.$$

Q : Le point Q est l'image de A par une similitude directe de centre D , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, notée $\mathcal{SD}(D, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4})$. Nous obtenons donc q par la relation

$$q = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}) = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i),$$

et donc

$$q = (k + \ell i) (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{k + \ell}{2} + \frac{\ell - k}{2}i.$$

N : Le vecteur $\overrightarrow{CN}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{CB}$ par une similitude directe de centre C , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, notée $\mathcal{SD}(C, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$. Nous obtenons donc n par la relation

$$n - c = (b - c) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}),$$

$$n = c + (b - c) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i),$$

et donc

$$n = 1 + (k + \ell i) (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = 1 + \frac{k - \ell}{2} + \frac{k + \ell}{2}i.$$

Les affixes de ces deux derniers points Q et N peuvent être calculées par différents procédés comme l'indique la remarque ci-après.

Démontrons à présent que $MNPQ$ est un carré. Pour cela, calculons par exemple les affixes des vecteurs $\overrightarrow{QM}$ et $\overrightarrow{QP}$. Nous obtenons

$$z_{\overrightarrow{QM}} = m - q = \frac{1 + k - \ell}{2} + \frac{-1 + k + \ell}{2}i,$$

$$z_{\overrightarrow{QP}} = p - q = \frac{1 - k - \ell}{2} + \frac{1 + k - \ell}{2}i,$$

et nous vérifions que

$$(m - q)i = (p - q).$$

Ceci démontre que les segments $[QP]$ et $[QM]$ sont perpendiculaires et de même longueur, mais ne suffit pas à prouver que $MNPQ$ est un carré. Il faut encore calculer, par exemple,

$$z_{\overrightarrow{MN}} = n - m = \frac{1 - k - \ell}{2} + \frac{1 + k - \ell}{2}i,$$

et constater que

$$(n - m)i = (q - m),$$

ce qui termine la démonstration.

REMARQUE. — Une autre manière d'obtenir les affixes des points Q et N est de calculer les affixes d'un troisième sommet de chacun des carrés construits sur $[AD]$ et $[BC]$, et d'exprimer ensuite que Q et N sont les

milieux des diagonales de ces carrés. Par exemple, si on désigne par A' le sommet opposé à A dans le carré construit sur $[AD]$, son affixe a' vaut $a \cdot (-i)$, ce qui donne $a' = \ell - ki$ et pour Q , milieu de $[AA']$,

$$q = \frac{k + \ell}{2} + \frac{\ell - k}{2}i.$$

Il est fort possible que cette méthode de détermination des affixes de Q et N soit suggérée par les élèves. Elle ne doit pas être rejetée puisqu'elle est correcte, mais elle nécessite de calculer les affixes de points supplémentaires. Le professeur peut cependant faire observer que les affixes q et n peuvent être obtenues directement grâce aux similitudes. C'est une excellente occasion de voir fonctionner l'expression de la similitude et d'en montrer toute la puissance.

Par le calcul vectoriel

On peut vérifier, par exemple, que

- $\langle \overrightarrow{MN} | \overrightarrow{MQ} \rangle = 0$ et $\langle \overrightarrow{QM} | \overrightarrow{QP} \rangle = 0$, ce qui établit que la figure possède des angles droits en M et Q ,
- $\|\overrightarrow{NM}\| = \|\overrightarrow{MQ}\| = \|\overrightarrow{QP}\|$, ce qui établit l'égalité des longueurs de trois côtés.

Ceci suffit à établir que $MNPQ$ est un carré.

Par la géométrie synthétique

Nous donnons ci-dessous un schéma de démonstration. Les élèves sont invités à apporter des justifications aux étapes successives.

Il est possible de compléter la figure 29 pour obtenir un *pavage* du plan (figure 30). En effet, si on considère comme motif de base un polygone constitué de deux carrés et de deux parallélogrammes ayant un sommet en commun, on obtient, en reproduisant indéfiniment ce motif, un assemblage de polygones isométriques qui peut être étendu à tout le plan, et tel que ces polygones ne se recouvrent pas et ne laissent entre eux aucune lacune (c'est ce qu'on appelle un *pavage*).

Il faudra justifier qu'en chaque sommet du pavage la somme des angles vaut bien 360° .

Désignons par « petits carrés » les carrés identiques à celui construit sur $[AD]$ et par « grands carrés » les carrés identiques à celui construit sur $[DC]$ (dans l'hypothèse où, comme dans la figure 29, $|AD|$ est plus petit que $|DC|$, sinon il suffit d'invertir les mots « grand » et « petit »). La figure 31 montre que chaque centre d'un « petit carré » est le centre d'une rotation de 90° qui applique les uns sur les autres les « grands carrés » et donc leurs centres, ce qui signifie que les centres des quatre « grands carrés » situés autour d'un même « petit carré » forment aussi un carré.

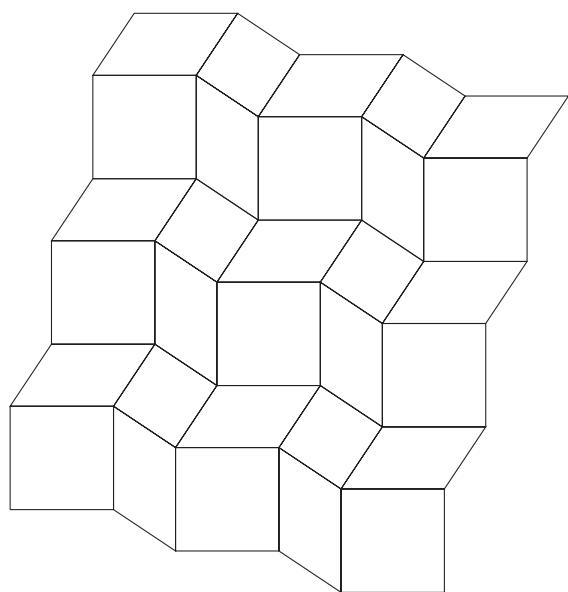


Fig. 30

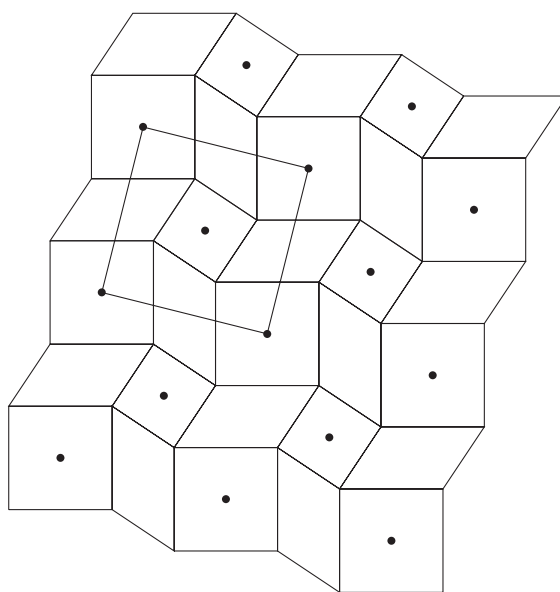


Fig. 31

Dessignons deux de ces carrés, comme le montre la figure 32 et traçons leurs diagonales (figure 33).

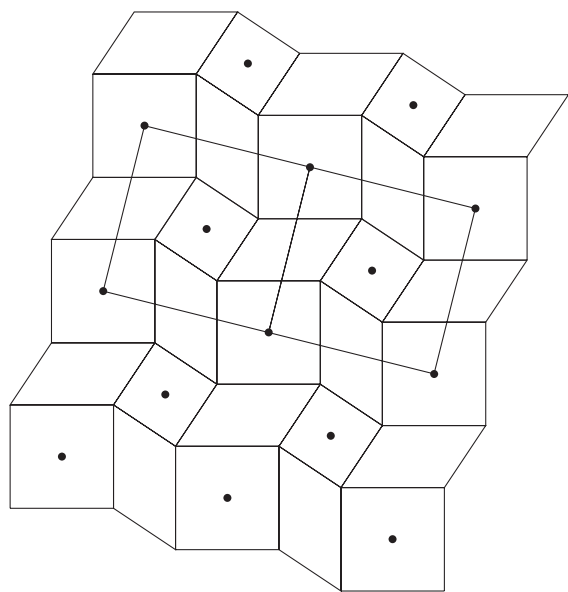


Fig. 32

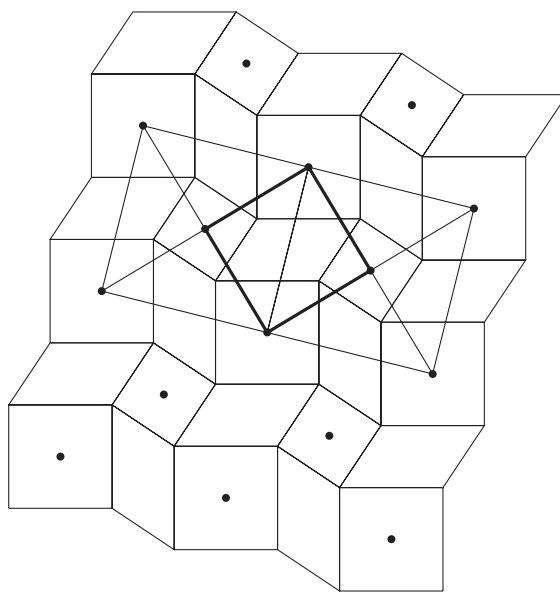


Fig. 33

Nous voyons apparaître un nouveau carré dont les côtés sont formés des demi-diagonales des précédents, ce qui achève la démonstration.

Échos des classes

L'expérience s'est déroulée dans une classe de 6^e année de l'enseignement général, option mathématique 6h. Elle s'est déroulée en approximativement 4h de cours. Les sections 2 et 3 de ce chapitre ont été abordées d'une manière plus ou moins semblable à celle décrite dans le texte. Il s'agissait en effet de raccrocher ces deux points à ce qui avait été vu auparavant, conformément au programme officiel (principales propriétés algébriques des nombres complexes, forme trigonométrique et plan de Gauss).

On a commencé par montrer le lien entre les nombres complexes et les principales transformations du plan ($z \rightarrow z + c$, $z \rightarrow -z$, $z \rightarrow \bar{z}$, $z \rightarrow -\bar{z}$, $z \rightarrow z \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ et $z \rightarrow r \cdot z$ ($r \in \mathbb{R}$)). Cette approche des transformations a tout de suite plu aux élèves, qui voyaient là une application concrète des nombres complexes et une façon tout à fait nouvelle pour eux d'aborder les transformations du plan, d'une manière analytique rassurante.

On est ensuite passé aux propriétés des affixes décrites au paragraphe 2.1. Là aussi, les élèves ont rapidement accroché et ont découvert par eux-mêmes plusieurs de ces propriétés.

Les *Quelques situations géométriques* du 2.4 ont été proposées en guise d'exercices avec le même succès. En particulier, la traduction en termes de nombres complexes d'une rotation non centrée à l'origine est apparue comme tout à fait naturelle.

Dans la section 3, les problèmes 3.2, 3.3 et 3.4 ont été résolus en classe mais uniquement par les nombres complexes. Des élèves plus curieux ont cependant demandé s'il était possible d'aborder les choses par des méthodes plus « classiques » de géométrie synthétique ou autre, et nous nous sommes attardés à résoudre ainsi certains passages des problèmes proposés, ce qui a été l'occasion de revoir des propriétés des transformations du plan étudiées durant les premières années du secondaire.

Par exemple, dans le problème 3.4, certains élèves ont été très étonnés de constater que prouver l'existence d'une rotation appliquant un segment sur un autre ne nécessitait nullement que l'on détermine son centre. La résolution de ce problème par la géométrie synthétique leur a prouvé la puissance de l'outil « nombres complexes ».

L'application 3.5 a, quant à elle, été proposée en interrogation. Les résultats furent assez médiocres et décevants car les élèves, quelque peu dépassés par le problème, ne savaient pas toujours par où l'entreprendre, et se focalisaient davantage sur les calculs en oubliant l'aspect géométrique de la question. Certains, par exemple, ont confondu carré et losange, ou carré et rectangle. À ce stade, poser cette question sous cette forme lors d'un contrôle fut une erreur, les difficultés calculatoires étant encore trop présentes.

Après une correction approfondie faite en classe, un exercice similaire a été proposé en contrôle. Les résultats furent nettement meilleurs et certains élèves, généralement faibles, sont presque arrivés au bout de la démonstration.

Commentaires

Certains calculs liés à la résolution de ces exercices peuvent paraître longs et fastidieux, mais le contenu géométrique des problèmes leur donne une signification. Il nous paraît de loin préférable d'exercer les élèves au calcul avec les nombres complexes dans un tel contexte, plutôt que de leur soumettre des listes d'exercices vides de sens.

Par ailleurs, ces différentes applications montrent bien la puissance du calcul avec les nombres complexes comme outil de démonstration. À partir des expressions des similitudes du plan en termes d'affixes, on dispose d'une méthode générale et systématique pour démontrer toute une classe de propriétés de figures.

ANNEXE III

DOCUMENTS À PHOTOCOPIER

-Δ-

$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{6}$
 $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{6}$

Handwritten musical notation on a five-line staff, featuring various rhythmic values (e.g., minims, crotchets) and bar lines. The notation is written in a cursive, historical style.









8 2 61 rph ym T·ai









9 1 4 4 8 4 2 7
















91 m f. nph f. nh f. 7 (h)











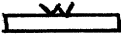









I 1	∩ 10	9 100	 1 000	 10 000	 100 000	 1 000 000
-----	------	-------	---	--	---	---

 ; adjectif possessif	   'h' quantité, inconnue	 'k' ajouter
  d̲t̲ le reste	 dmd somme, total	 f elle
 ou  hpr devenir	 hr donc, alors	 hr sur
  ín donc, ainsi	 ír faire, prendre	 ir·t calculer
 m considéré comme	  m y selon que, ce que	 n de
 pn ceci	 ou   pr·t ou pr soustraire	  w d̲ il reste

Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.

Hic post laudem Dei inquit. Compilavi hunc librum secundum quod sapientes Indorum adinverunt de numeratione divinationis, utilem in ipso consideranti et studenti, et perseveranti in eo, et intelligenti ejus intensionem. Ex eo igitur est : est census de quo ejus tertia dempta, et quarta, fuit octo quod remansit. Quantus est census ? Capitulum numerationis ejus est ut ex duodecim assumas lancem ; et tertia et quarta ex eo consurgunt, et demas ejus tertia et quarta, que sunt septem, et remanebit quinque. Per ipsum igitur oppone octo, residuum scilicet census et apparebit te jam errasse per tria diminuta : serva ea, deinde assume lancem secundam a prima divisam, que sit ex viginti quattuor, et deme ejus tertiam et quartam que sunt quattuordecim, et remanebit decem. Oppone ergo per eum octo residuum scilicet census. Apparet itaque te jam errasse per duo addita. Multiplica igitur errorem lancis postreme qui est duo in lancem primam, que est duodecim, et perveniet 24. Et multiplica errorem lancis prime, qui est tria, in lancem postremam, que est 24, et erit 72. Aggrega ergo 24 et 72, eo quod unus error est diminutus et alter additus. Si enim utrique essent diminuti aut additi demeres minus ex majore. Postquam ergo aggregasti viginti quattuor et septuaginta duo, fuerit quod aggregatum est nonaginta sex, deinde aggrega duos errores qui sunt tria et duo, et perveniet quinque ; deinde igitur nonaginta sex per quinque qui est ille ex quo pervenit, et perveniet tibi decem et novem dragme et quinta dragme.

Hec propterea regula est ut ponas duodecim rem ignotam et demas ejus tertiam et quartam, et remanebit quinque donec redeat duodecim ? Ipse enim est res ignota. Illud autem est duo et due quinte : multiplica igitur duo et duas quintas in octo et erit decem et novem et quinta.

Livre sur l'agrandissement et la diminution nommé le calcul de la conjecture d'après ce que les sages de l'Inde ont établi et qu'Abraham a rassemblé et composé selon le livre appelé indien.

Après la louange à Dieu, voici ce qu'il est dit. J'ai écrit ce livre selon ce que les sages de l'Inde ont découvert à propos du calcul de la conjecture, en examinant attentivement et en étudiant ce qui est utile en soi, en persévérant dans cette direction et en en saisissant l'application pratique. De cela donc, voici ce qu'il vient : soit un census³¹ duquel on ôte un tiers et un quart et il reste huit. Que vaut le census ? Pour aborder son calcul, suppose un plateau de balance de douze dont on considère un tiers et un quart ; tu ôtes ce tiers et ce quart qui font sept, il restera cinq. Compare alors à huit, à savoir le reste du census et il t'apparaîtra clairement que tu as fait une erreur de trois en déficit : mets cela de côté et suppose ensuite que tu places sur le plateau de la balance une seconde quantité, qui est divisée parremière, que ce soit vingt-quatre, et ôte le tiers et le quart qui font quatorze, il restera dix. Compare alors cela à huit, à savoir le reste du census. Et c'est ainsi qu'il t'apparaîtra clairement que tu as commis une erreur de deux en plus. Multiplie donc l'erreur du dernier plateau de la balance qui vaut deux par le premier plateau qui vaut douze et il viendra 24. Et multiplie l'erreur du premier plateau, erreur qui vaut trois, par le dernier plateau, qui vaut 24, et on obtiendra 72. Additionne donc 24 et 72, et cela car l'une des erreurs est par défaut et l'autre par excès. Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande. Donc après avoir ajouté vingt-quatre et septante-deux, le résultat sera nonante-six ; ensuite ajoute les deux erreurs qui valent trois et deux, il viendra cinq ; ensuite donc nonante-six par cinq qui est ce à quoi on est arrivé, il te viendra dix-neuf drachmes et un cinquième de drachme.

Par cette règle, il s'ensuit que tu poses douze pour la chose inconnue et tu ôtes son tiers et son quart et il restera cinq ; comment récupérer douze ? La chose effectivement inconnue. Il faut en fait deux et deux cinquièmes : multiplie donc deux et deux cinquièmes par huit et il viendra dix-neuf et un cinquième.

³¹ Terme désignant le carré de l'inconnue recherchée.

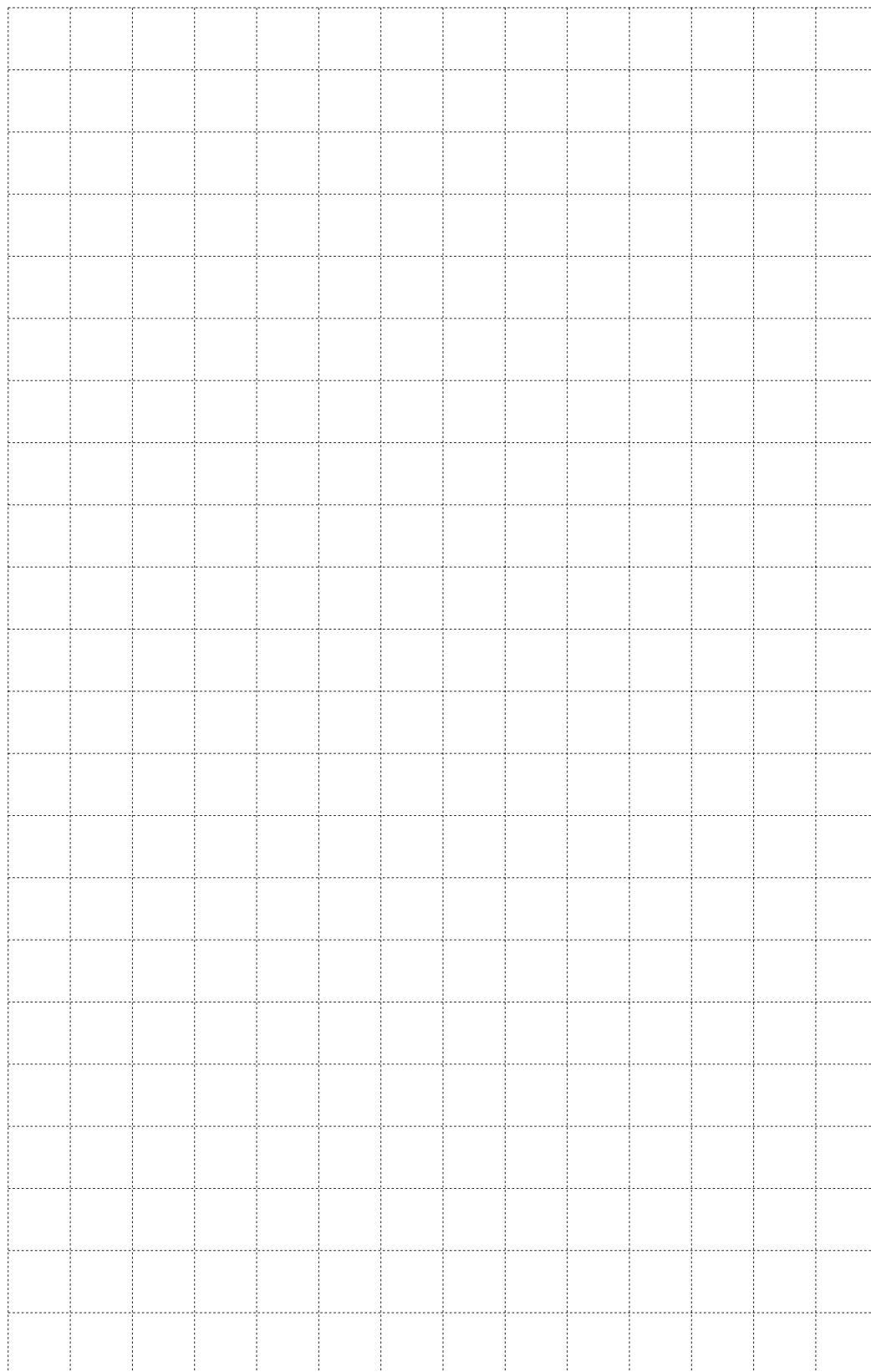
De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30

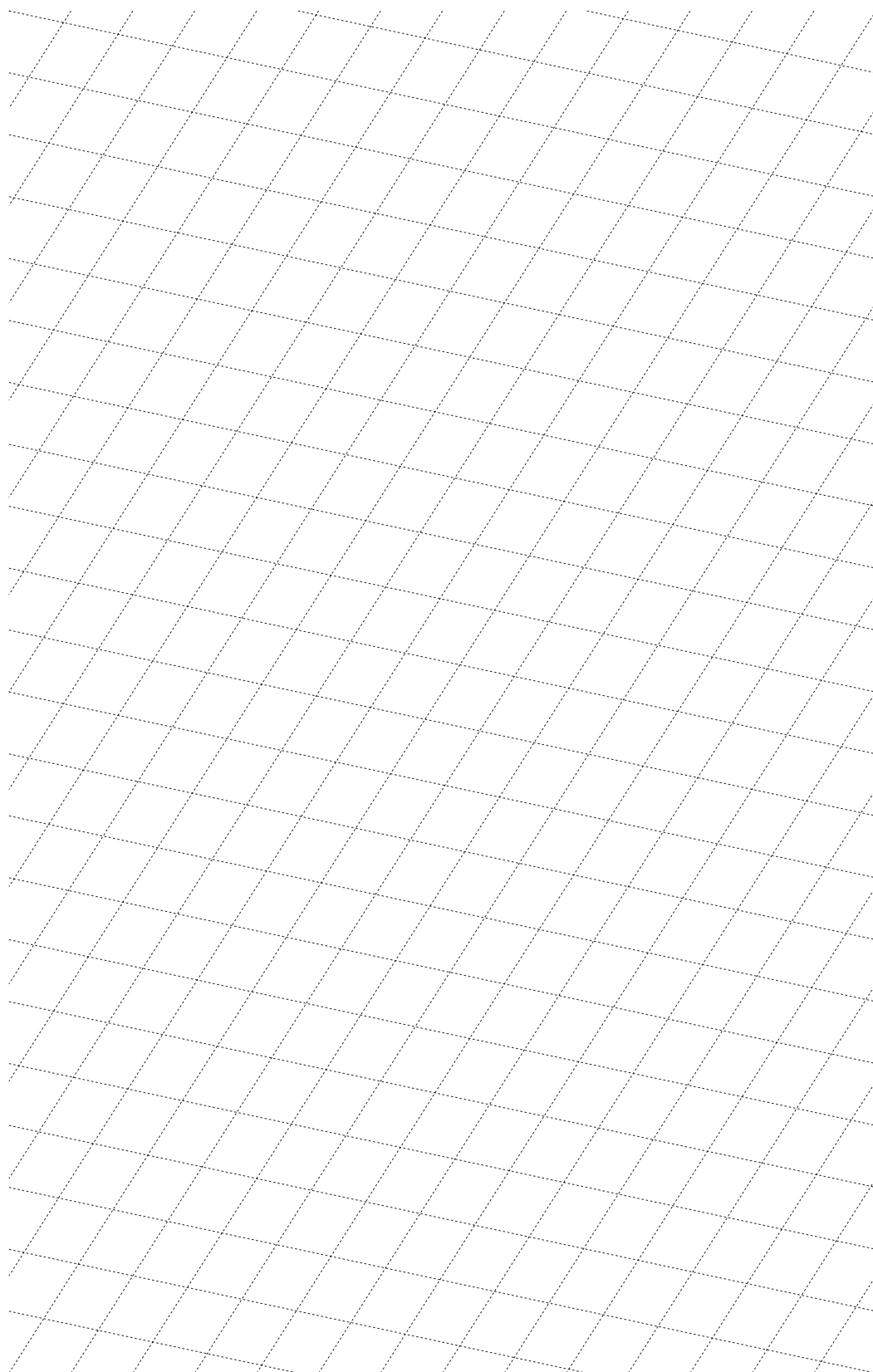
Quidam emit aves 30 pro denariis 30. In quibus fuerunt perdices, columbe et passerres. Perdices vero emit denariis 3; columba denariis 2 et passerres 2 pro denario 1, scilicet passer 1 pro denariis $\frac{1}{2}$. Queritur quot aves emit de unoquoque genere. Divide denarios 30 per aves 30 exibat denarius 1. Dic ergo habeo monetam ad $\frac{1}{2}$, et ad 2, et ad 3; et volo facere monetam ad 1. In similibus enim questionibus procedendum est per modum consolationum, ut habeamus integros numeros avium. Quare ut species viliorum avium equetur spetiebus cariorum multitudinem dicas : habeo monetam ad $\frac{1}{2}$, et ad 2 et ad 3 et volo facere monetam ad 1, hoc est. Habeo monetam ad 1 et ad 4 et ad 6 et volo facere monetam ad 2. Fac ex passeribus et perdicibus primam consolationem; et erunt aves 5 pro denariis 5 scilicet passerres 4 et perdix 1; et de passeribus cum columbis fac secundam; et habebis 3 aves pro denariis 3, scilicet passerres 2 et columbam 1. Deinde ut habeas aves 30 consolatas mittes primam consolationem ter in quibus erunt passerres 12 et perdices 3. Et remanebunt aves 15 consolate. Pro quibus mittes secundam consolationem quinquies et habebis passerres 10 et columbas 5. Et sic in predictis avibus 30 erunt passerres 22 et columbe 5 et perdices 3 ut in questione ostenditur. Et scias quia de suprascriptis potes habere aves sanas quantas voluerit pro totidem denariis ultra 15 sed infra 15 non possunt haberi aves nisi 13 et 11 et 8. Nam in avibus 13 cadit prima consolatio bis et secunda semel. Et in avibus 11 cadit secunda consolatio bis et prima semel. Et in avibus 8 cadit unaqueque consolatio semel.

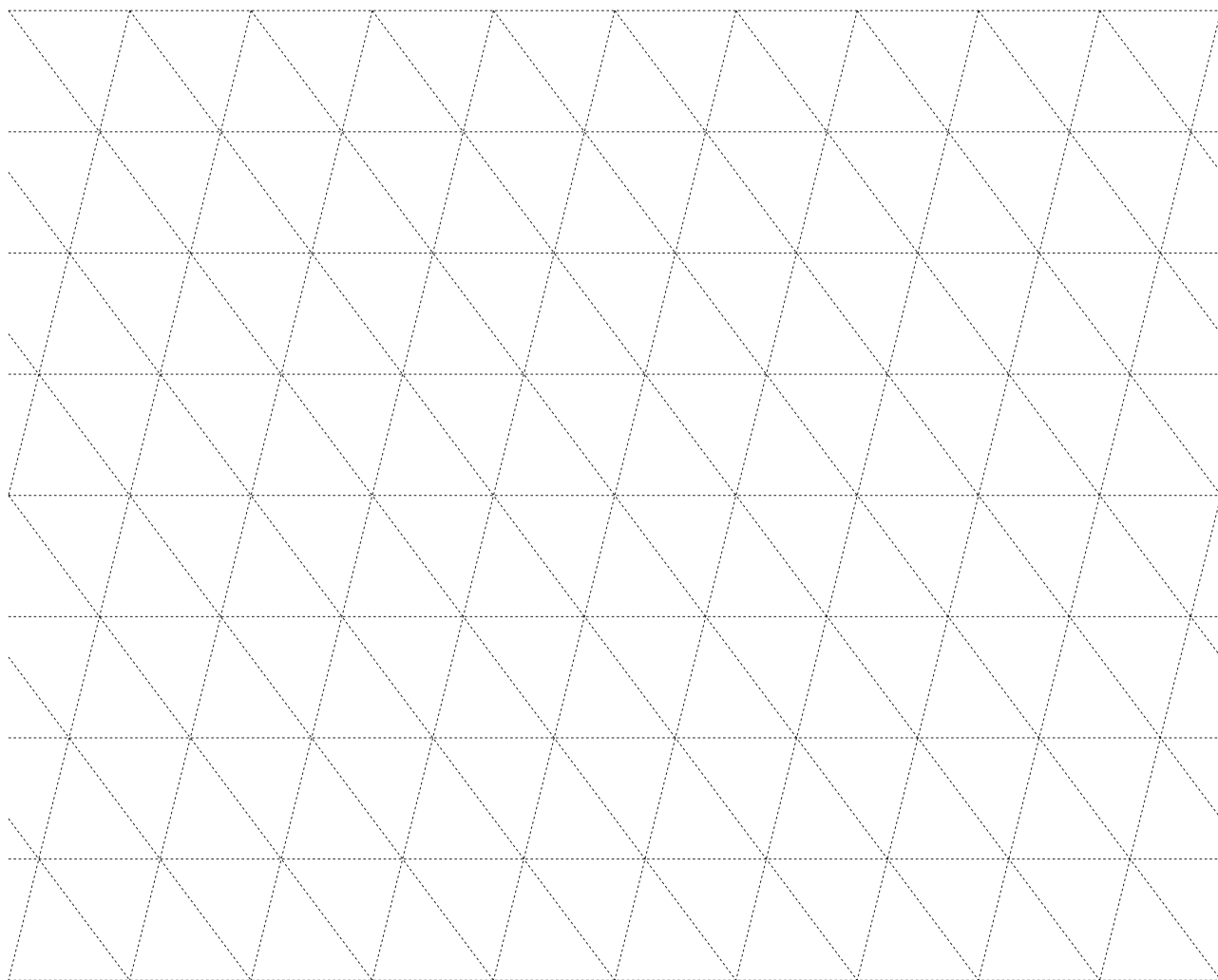
De l'homme qui a acheté trente oiseaux de trois espèces pour 30 deniers.

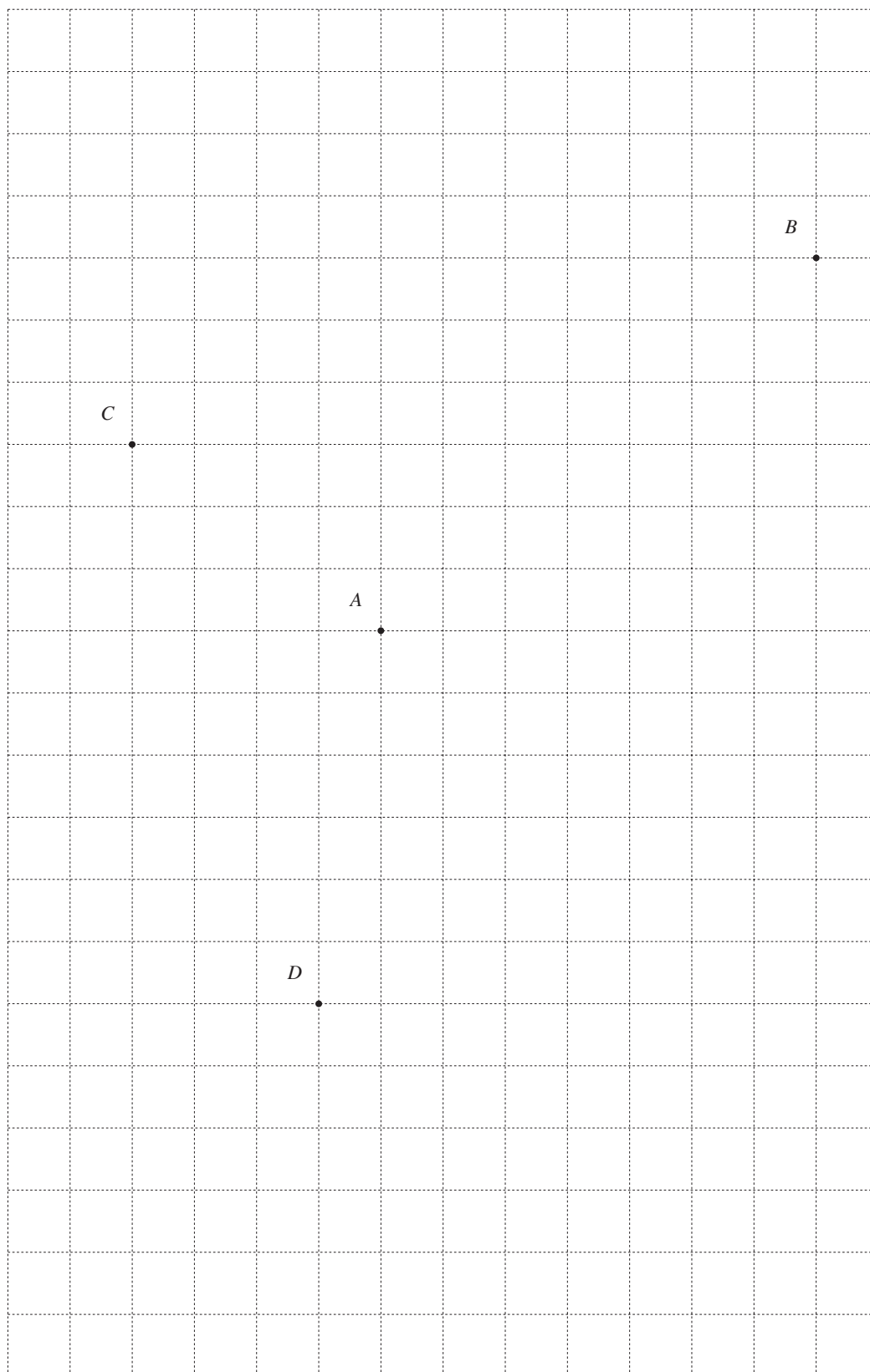
Quelqu'un a acheté 30 oiseaux pour 30 deniers, parmi lesquels il y a des perdrix, des colombes et des moineaux. En fait, il a acheté les perdrix pour 3 deniers, les colombes pour 2 et 2 moineaux pour 1 denier, à savoir 1 moineau pour $\frac{1}{2}$ denier. On demande combien d'oiseaux de chaque espèce il a achetés. Divise 30 deniers par 30 oiseaux, il viendra 1 denier. Je dis donc que j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3 ; et je veux faire de l'argent-monnaie à 1. En effet, dans de semblables questions, nous devons procéder par la méthode des compensations, puisque nous avons un nombre entier d'oiseaux. C'est pourquoi, pour que l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères, tu dois dire : j'ai de l'argent-monnaie à $\frac{1}{2}$ et à 2 et à 3 et je veux faire de l'argent-monnaie à 1, c'est-à-dire j'ai de l'argent-monnaie à 1 et à 4 et à 6 et je veux faire de l'argent-monnaie à 2. Fais des moineaux et perdrix une première compensation et il y aura 5 oiseaux pour 5 deniers, à savoir 4 moineaux et 1 perdrix ; et, des moineaux avec les colombes, fais-en une seconde ; et tu auras 3 oiseaux pour 3 deniers, à savoir 2 moineaux et 1 colombe. Ensuite, pour avoir 30 oiseaux compensés, tu prendras trois fois la première compensation dans laquelle il y aura 12 moineaux et 3 perdrix. Et il restera 15 oiseaux compensés, pour lesquels tu prendras cinq fois la seconde compensation et tu auras 10 moineaux et 5 colombes. Et ainsi, en ce qui concerne les 30 oiseaux dont il a été question auparavant, il y aura 22 moineaux et 5 colombes et 3 perdrix, comme il est montré en marge. Et tu dois savoir que, de ce qui est suscrit, tu peux avoir autant d'oiseaux qu'on voudra pour la même quantité de deniers au-delà de 15, mais en deçà, ce n'est pas possible, si ce n'est pour 13 et 11 et 8. En vérité, dans le cas des 13 oiseaux, la première compensation apparaîtra deux fois et la seconde, une fois. Et pour 11 oiseaux, la seconde compensation apparaîtra deux fois et la première, une fois. Et pour 8 oiseaux, chacune des compensations apparaîtra une fois.

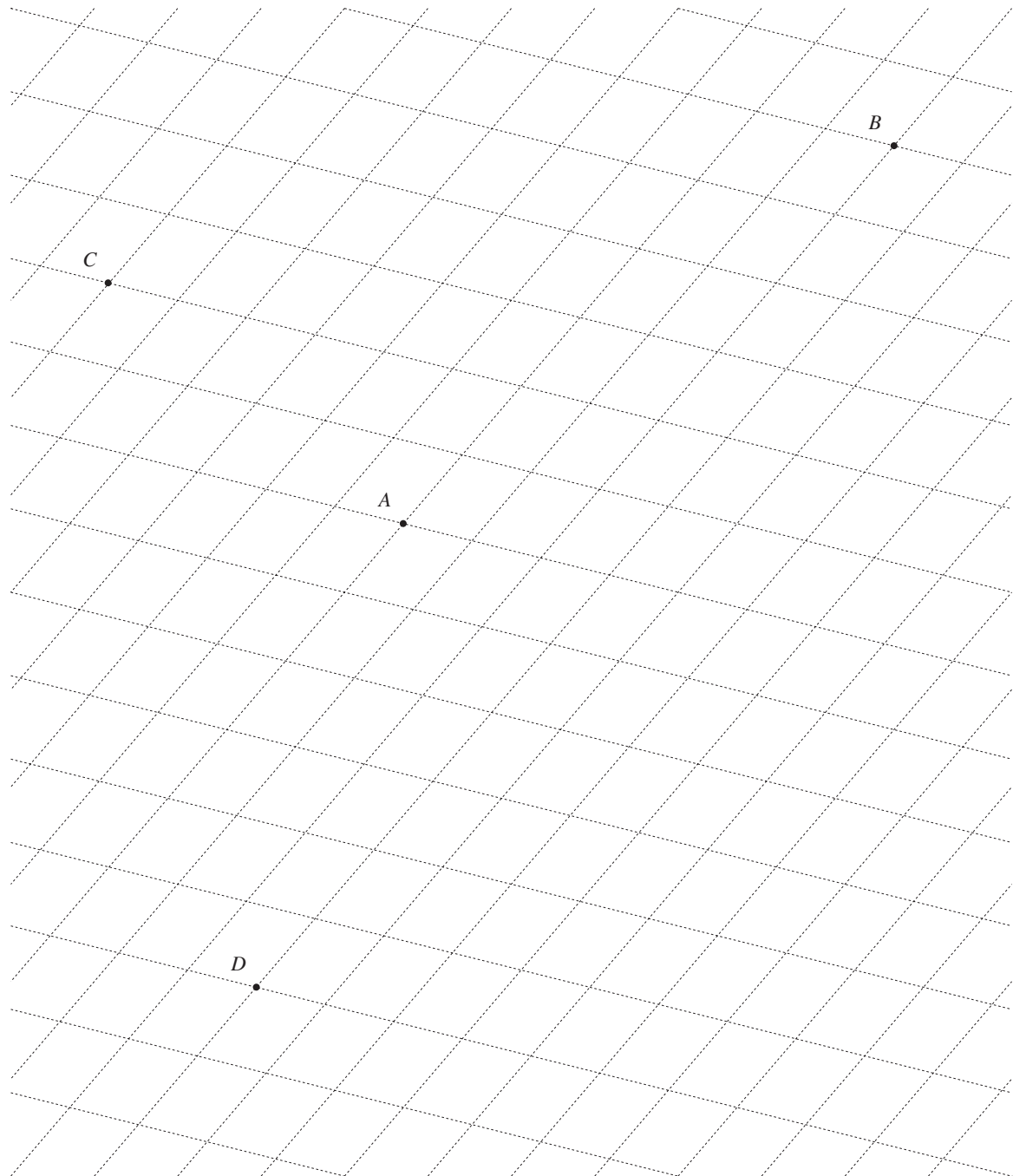


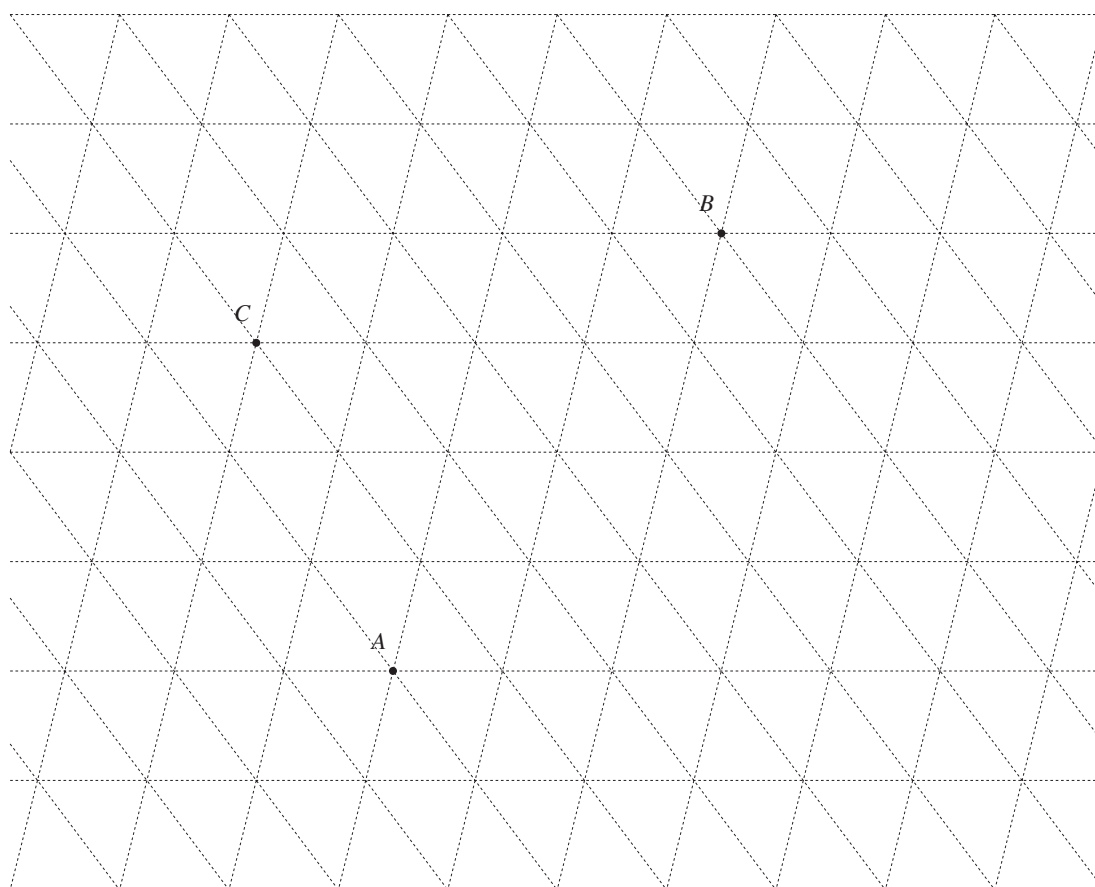


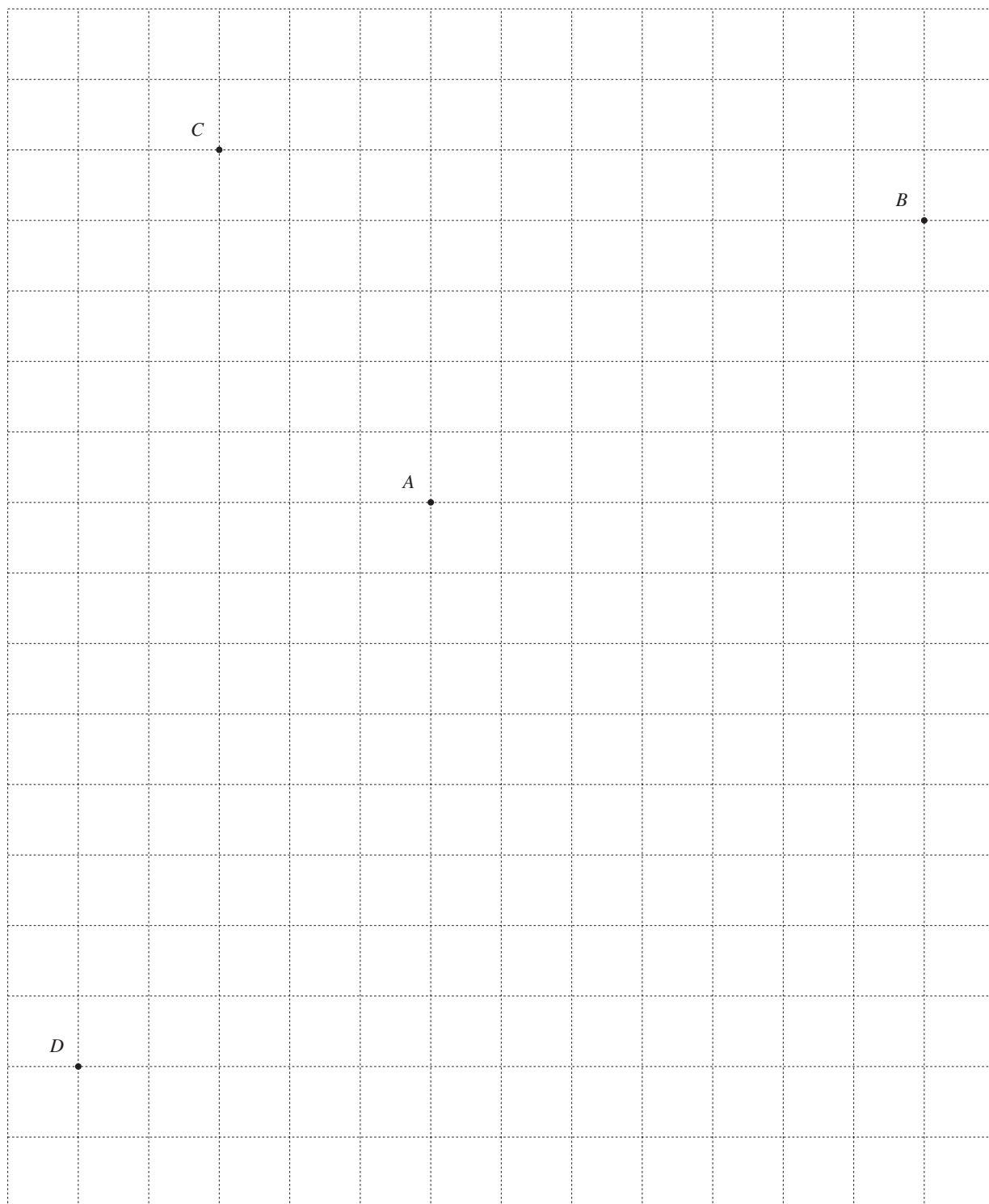


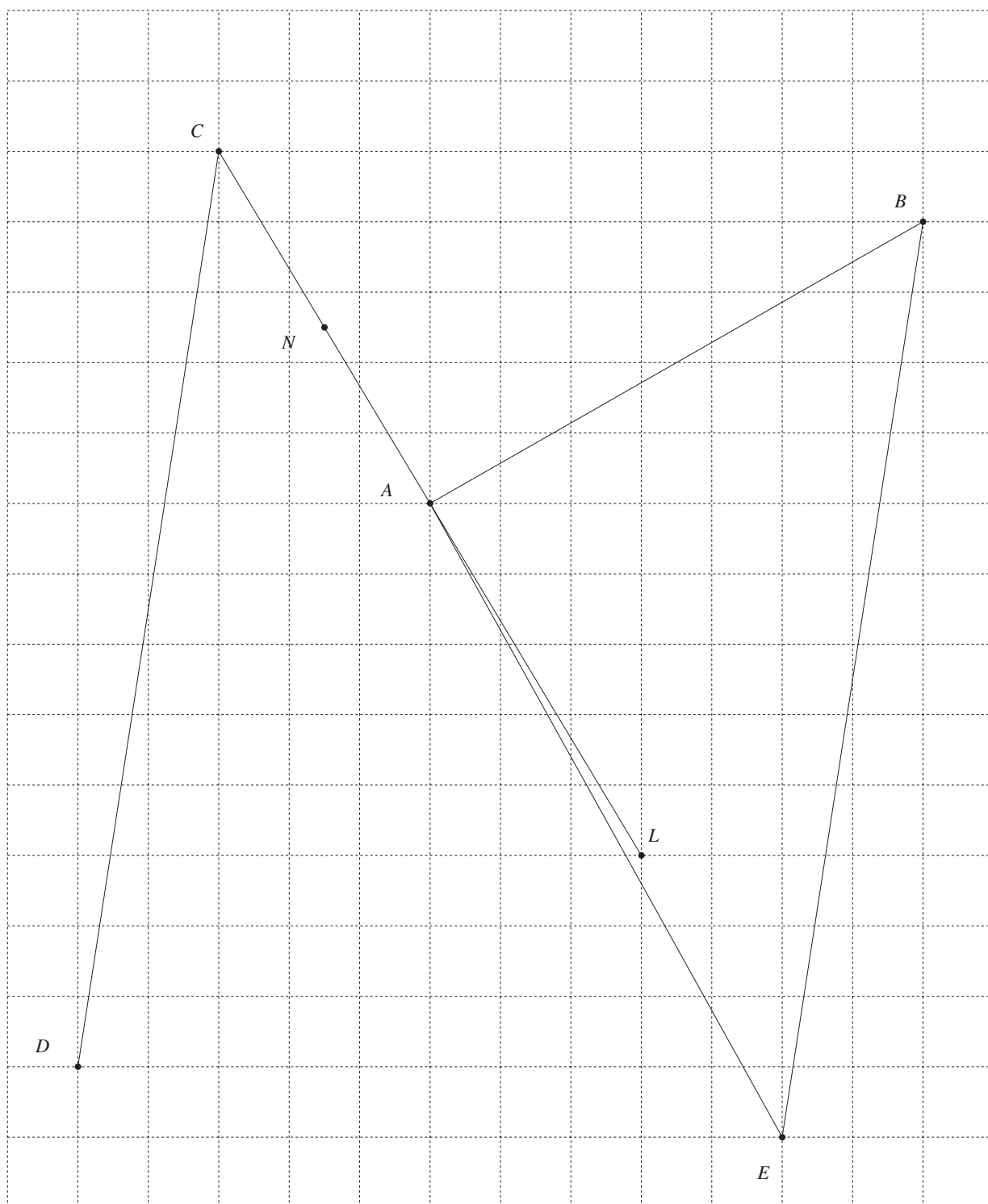


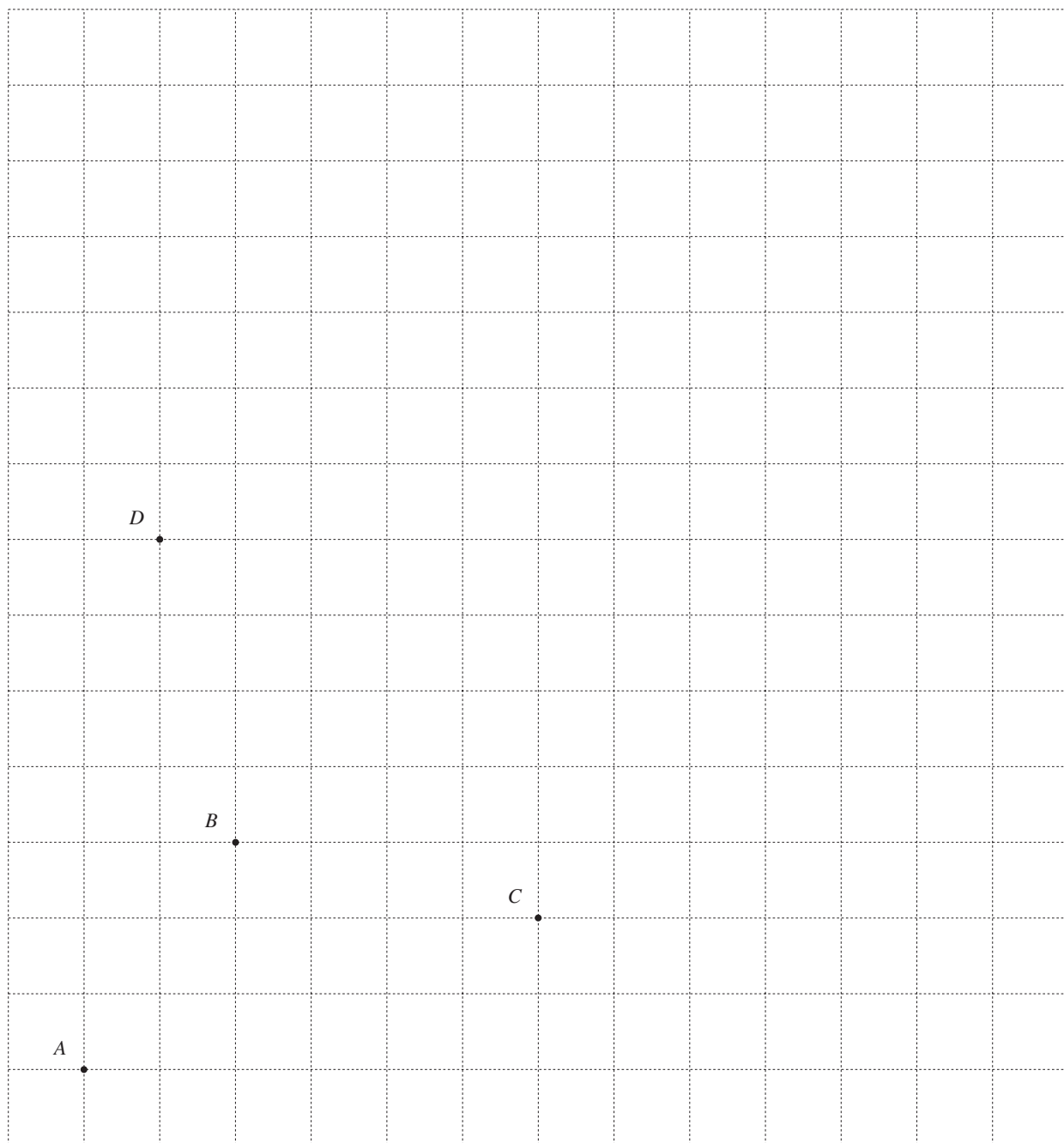


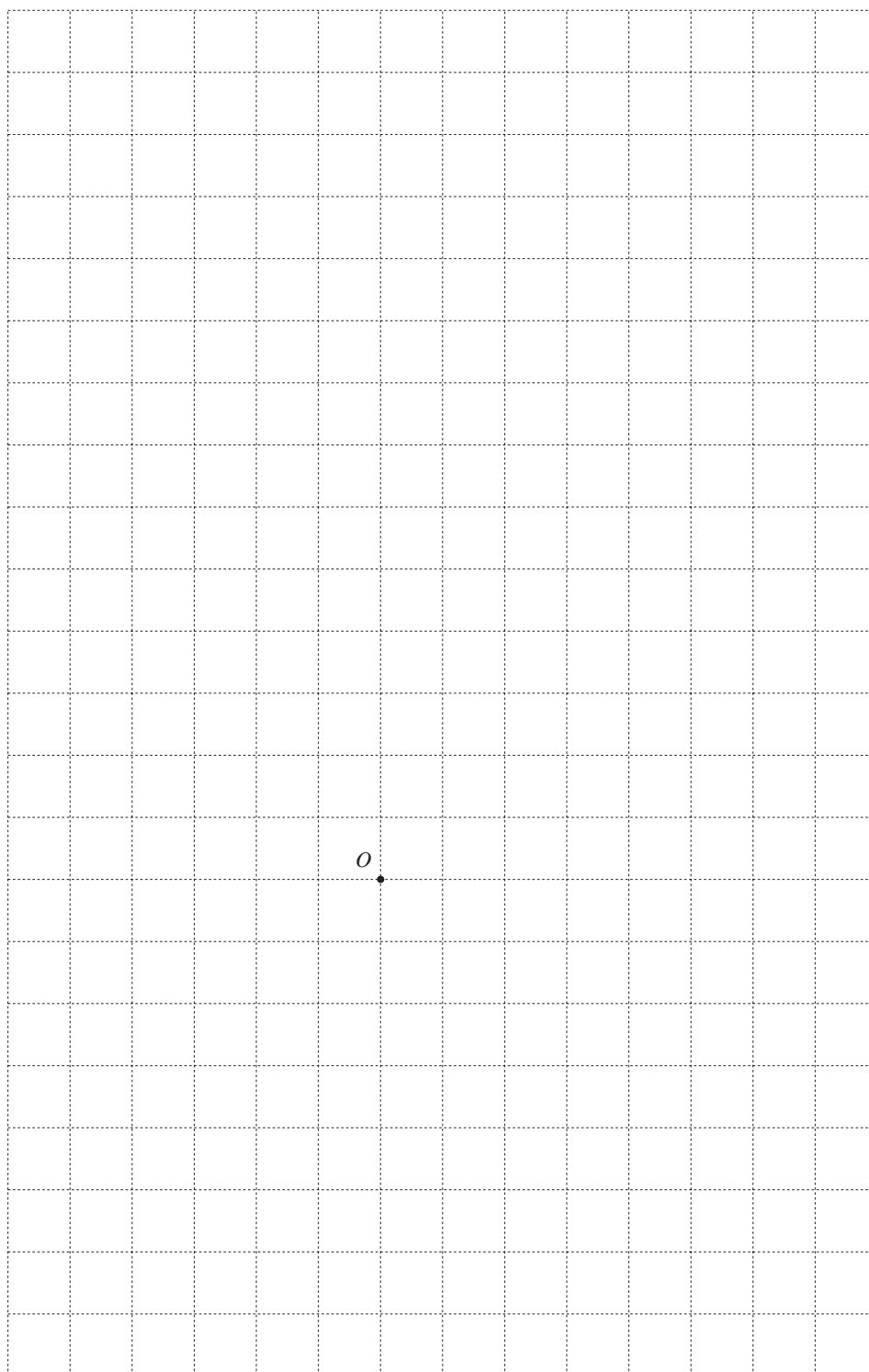


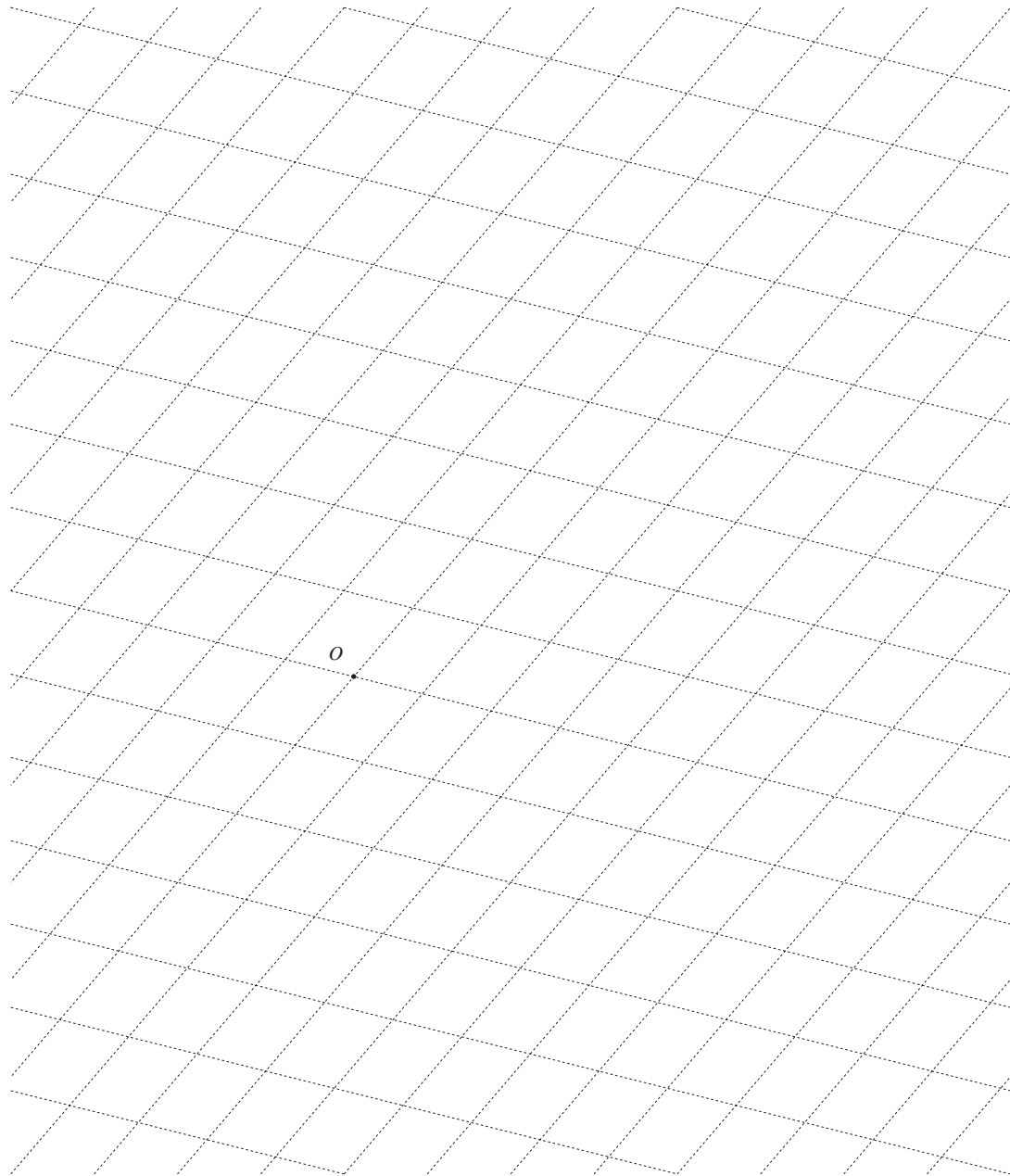


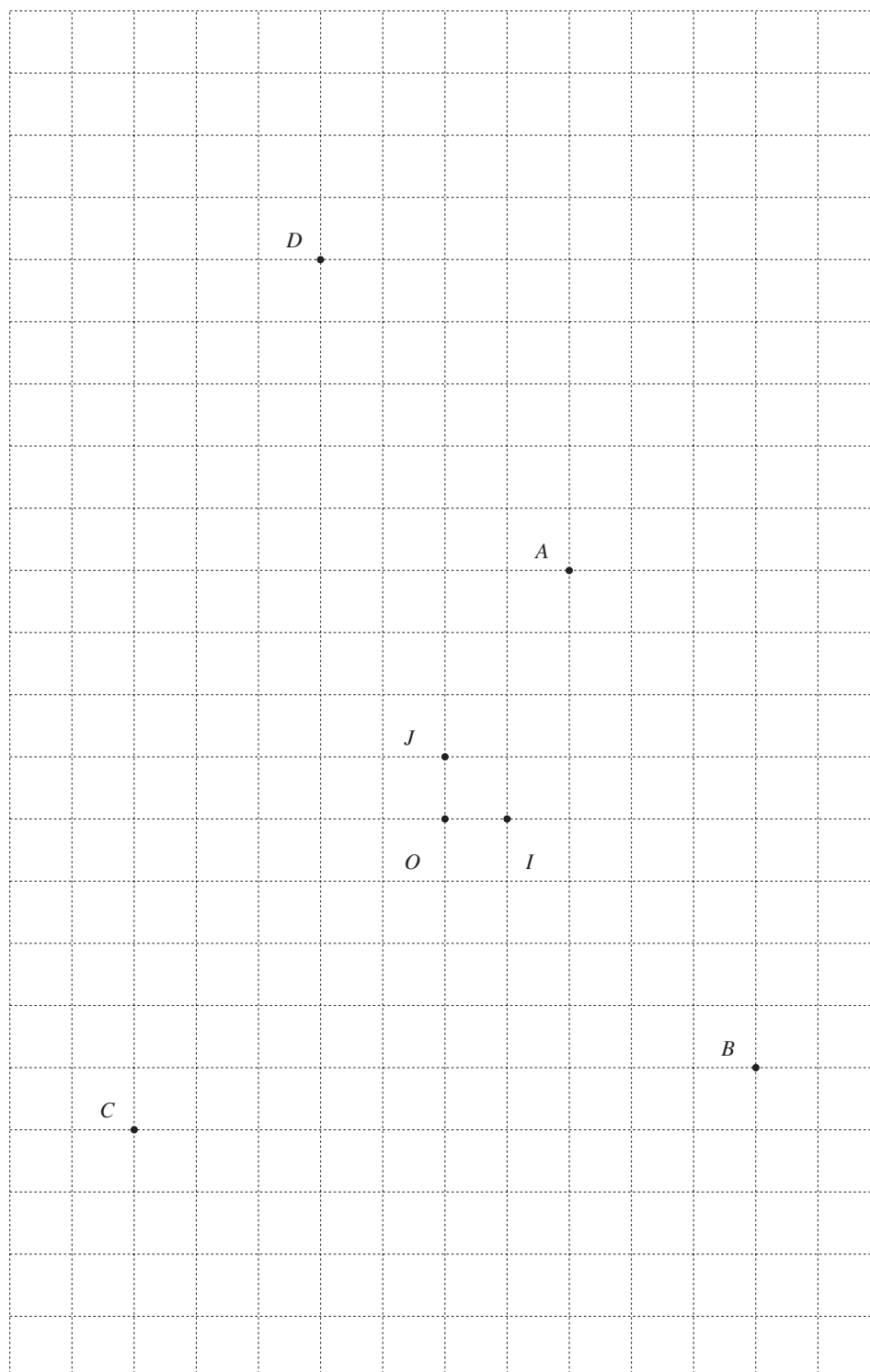




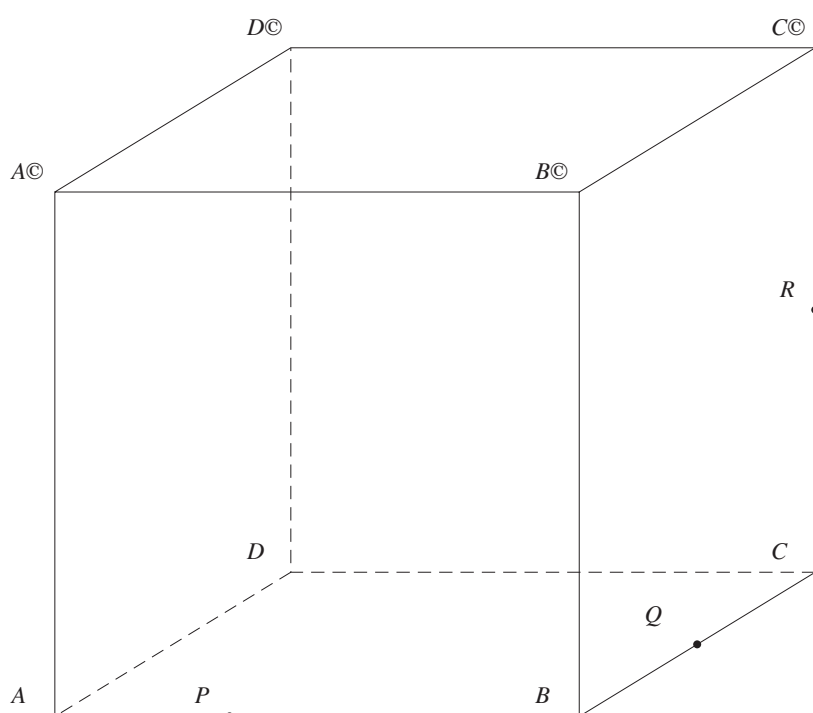




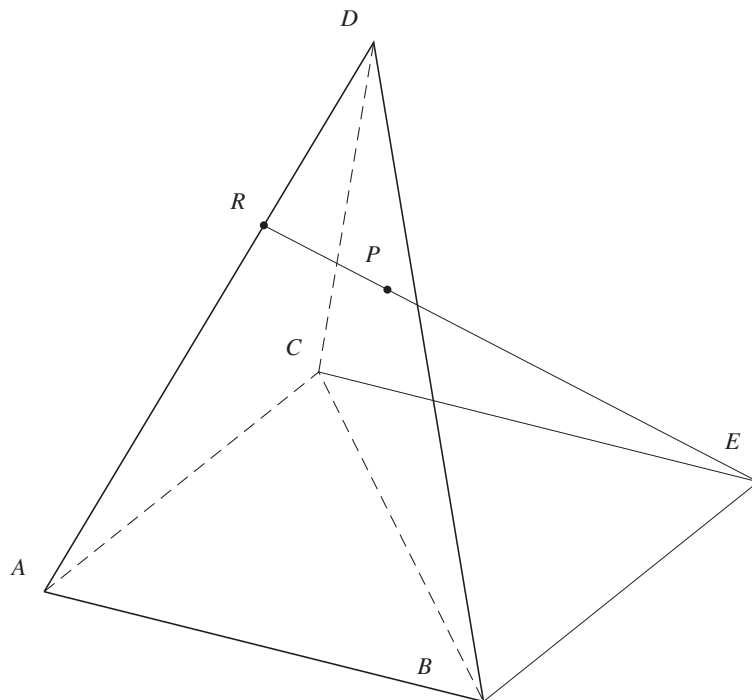




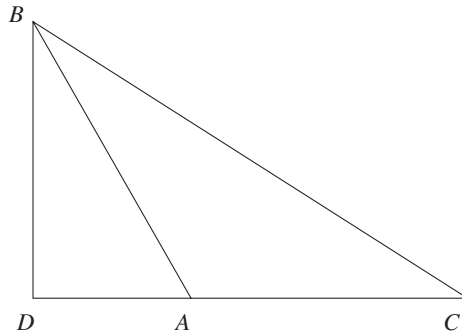
Construire la section du cube de la figure ci-dessous par le plan PQR , où P est situé sur l'arête $[AB]$ au tiers à partir de A , Q est situé au milieu de l'arête $[BC]$, et R est situé au milieu de l'arête $[CC']$. On demande ensuite de déterminer les coordonnées de tous les sommets de cette section, après avoir choisi un repère approprié.



On considère le tétraèdre $ABCD$, R le point situé sur l'arête $[AD]$ au tiers à partir de D et E le point du plan ABC tel que $BACE$ forme un parallélogramme. On demande de déterminer le point de percée P de la droite RE dans la face BCD , de situer ce point avec précision sur la droite RE et dans la face BCD en utilisant un repère approprié.

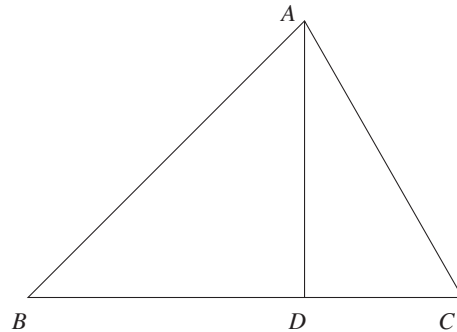


<II.12> In his triangulis qui obtusum habent angulum tanto ea que obtusum subtendit angulum ambobus lateribus amplius potest que obtusum continent angulum, quantum est quod tenetur bis sub uno eorum atque ea que sibi directe iuncta ad obtusum angulum a perpendiculari extra deprehenditur.



Ex III^a secundi atque penultima Iⁱ huius argumentum elicies.

<II.13> Omnis oxigonii tanto ea que acutum respicit angulum ambobus lateribus angulum acutum continentibus minus potest, quantum est quod bis continetur sub uno eorum cui perpendicularis intra superstat eaque sui parte que perpendiculari anguloque acuto interiacet.

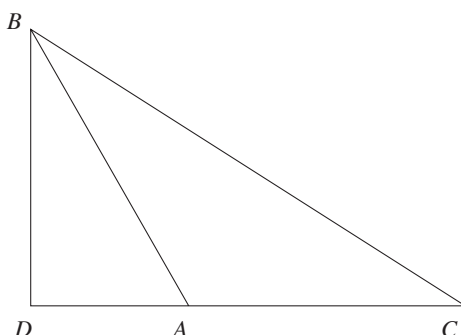


Ex VII^a secundi atque penultima Iⁱ argumentare ducta perpendiculari ab angulo supremo ad basim.

Euclide - Les Éléments - Livre II, proposition 12.

12

Dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus.



Soit le triangle obtusangle ABC ayant l'angle sous BAC obtus, et, qu'à partir du point B soit menée BD , perpendiculaire sur CA , prolongée. Je dis que le carré sur BC est plus grand que les carrés sur BA , AC de deux fois le rectangle contenu par CA , AD .

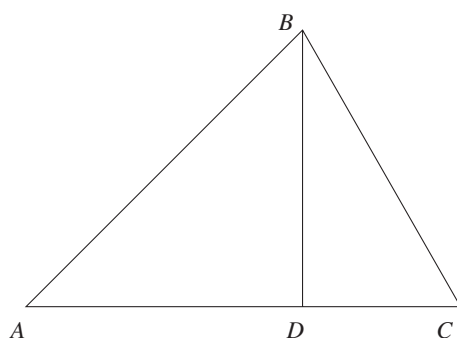
En effet, puisque la droite CD a été coupée au hasard au point A , le carré sur DC est donc égal aux carrés sur CA , AD et deux fois le rectangle contenu par CA , AD (II. 4). Que celui sur DB soit ajouté de part et d'autre. Les carrés sur CD , DB sont donc égaux aux carrés sur CA , AD , DB , et à deux fois le rectangle contenu par CA , AD . Mais d'une part celui sur CB est égal à ceux sur CD , DB ; en effet l'angle en D est droit (I. 47). Et d'autre part celui sur AB est égal à ceux sur AD , DB . Donc le carré sur CB est égal aux carrés sur CA , AB et deux fois le rectangle contenu par CA , AD . De sorte que le carré sur CB est plus grand que les carrés sur CA , AB de deux fois le rectangle contenu par CA , AD .

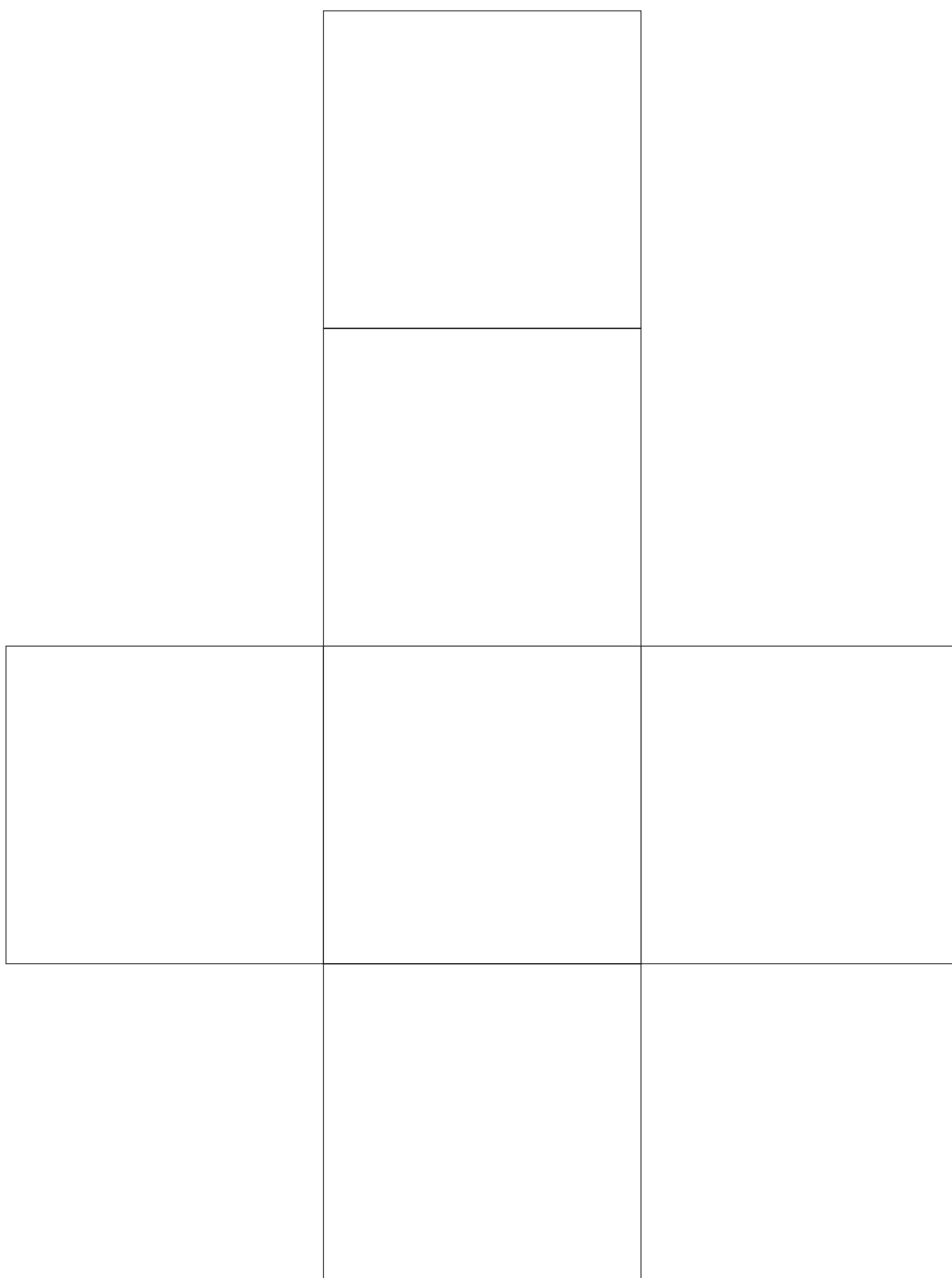
Donc dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus. Ce qu'il fallait démontrer.

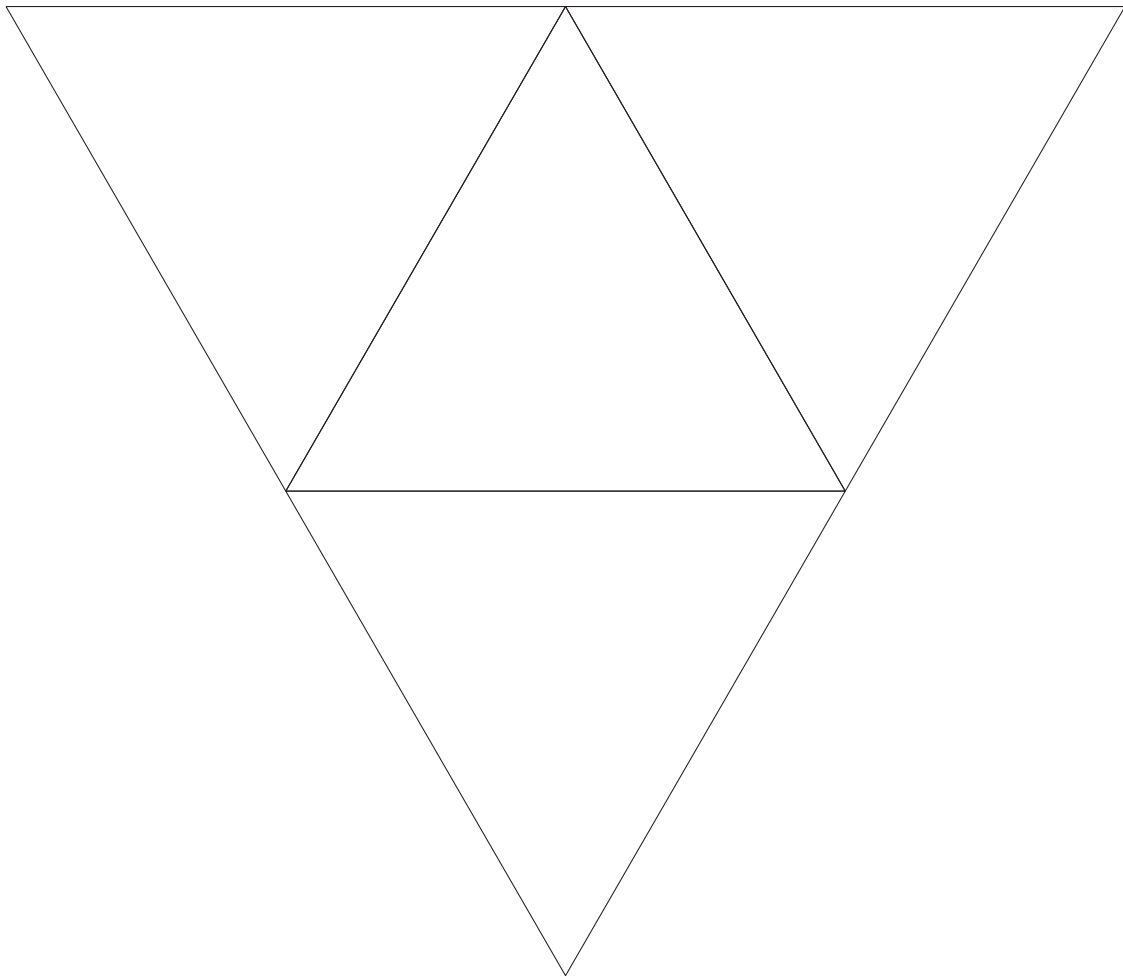
Euclide - Les Éléments - Livre II, proposition 13.

13

Dans les triangles acutangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle aigu est plus petit que les carrés sur les côtés contenant l'angle aigu de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'intérieur par la perpendiculaire en-deçà de l'angle aigu.







Of NEGATIVE SQUARES, and their IMAGINARY ROOTS in Algebra.

As for instance: Supposing a man to have advanced or moved forward, (from A to B,) 5 Yards; and than to retreat (from B to C) 2 Yards: If it be asked, how much he had Advanced (upon the whole march) when at C? I find (by Subducting 2 from 5,) that he is Advanced 3 Yards. (Because $+5 - 2 = +3$.)



So that +3, signifies 3 Yards Forward; and -3, signifies 3 Yards Backward: But still in the same Streight Line. And each designs (at least in the same Infinite Line,) one Single Point: And but one. And thus it is in all Lateral Equations; as having but one Single Root.

Now what is admitted in Lines, must on the same Reason, be allowed in Plains also.

As for instance: Supposing that in one Place, we Gain from the Sea, 30 Acres, but Lose in another Place, 20 Acres: If it be now asked, How many Acres we have gained upon the whole: The Answer is, 10 Acres, or $+10$. (Because of $30 - 20 = 10$.) Or, which is all one 1600 Square Perches. (For the *English* Acre being Equal to a Plain of 40 Perches in length, and 4 in breadth, whose Area is 160; 10 Acres will be 1600 Square Perches.) Which if it lye in a Square Form, the Side of that Square will be 40 Perches in length; or (admitting of a Negative Root,) -40 .

But if then in a third Place, we lose 20 Acres more; and the same Question be again asked, How much we have gained in the whole; the Answer must be -10 Acres. (Because $30 - 20 - 20 = -10$.) That is to say, The Gain is 10 Acres less than nothing. Which is the same as to say, there is a Loss of 10 Acres: or of 1600 Square Perches.

Anf hitherto, there is now new Difficulty arising, nor any other Impossibility than what we met with before, (in supposing a Negative Quantity, or somewhat Less than nothing:) Save only that $\sqrt{1600}$ is ambiguous; and may be $+40$, or -40 . And from such Ambiguity it is, that Quadratick Equations admit of Two Roots.

But now (supposing this Negative Plain, -1600 Perches, to be in the form of a Square;) must not this Supposed Square be supposed to have a Side? Anf if so, What shall this Side be?

We cannot say it is 40, nor that it is -40 . (Because either of these Multiplied into itself, will make $+1600$; not -1600).

But thus rather, that it is $\sqrt{-1600}$, (the Supposed Root of a Negative Square;) or (which is Equivalent thereunto) $10\sqrt{-16}$, or $20\sqrt{-4}$, or $40\sqrt{-1}$.

Where $\sqrt{}$ implies a Mean Proportional between a Positive and a Negative Quantity. For like as $\sqrt{bc}$ signifies a Mean Proportional between $+b$ and $+c$; or between $-b$, and $-c$; either of which, by Multiplication, makes $+bc$;) So doth $\sqrt{-bc}$ signify a Mean Proportional between $+b$ and $-c$, or between $-b$ and $+c$; either of which being Multiplied, make $-bc$. And this as to Algebraick consideration, is the true notion of such Imaginary Root, $\sqrt{-bc}$.

Ces quantités, dites *imaginaires*, provenant des racines supposées de carrés négatifs, sont censées impliquer que la situation est impossible. Et il en est effectivement ainsi si l'on s'en tient strictement à ce qui est communément admis. Car il est impossible qu'un nombre (négatif ou positif), multiplié par lui-même puisse produire (par exemple) -4 , en vertu de la règle des signes. Mais il est tout aussi impossible qu'une quantité quelconque, même non supposée carrée, puisse être négative. En effet, il n'est pas possible qu'une grandeur puisse être *moindre que rien*, ou qu'un nombre soit *plus petit que zéro*.

Mais cette supposition (de l'existence de quantités négatives) n'est ni inutile, ni absurde, lorsqu'elle est bien comprise. Et si, du point de vue de la notation algébrique pure, cela amène une quantité inférieure à zéro, lorsqu'on l'applique à la physique, elle représente une quantité tout aussi réelle que si le signe était $+$, mais il faut l'interpréter en sens contraire.

Ainsi, par exemple : supposons qu'un homme ait avancé (de A vers B) de 5 yards, et qu'ensuite, il ait reculé (de B vers C) de 2 yards. Si on demande de combien il a avancé (quand il est en C), ou à combien de yards il est devant A , je trouve (en soustrayant 2 de 5) qu'il a avancé de 3 yards (parce que $5 - 2 = 3$).



Mais si, ayant avancé de 5 yards vers B , il recule ensuite de 8 yards vers D , et qu'on demande de combien il a avancé quand il est en D , ou combien plus en avant il est de A , je dis -3 yards (parce que $5 - 8 = -3$). C'est-à-dire qu'il a avancé de 3 yards de moins que rien.

Ce qui, du point de vue de la justesse de l'expression ne peut être, puisqu'il ne peut exister moins que rien. Ainsi, si on se limite à la ligne AB vers l'*avant*, la situation est impossible.

Mais si (contrairement à notre supposition) la ligne partant de A peut être prolongée vers l'arrière, nous trouverons D 3 yards derrière A (ce qui est supposé être avant lui).

Et donc, dire qu'il a *avancé* de -3 yards représente ce que nous exprimerions, en langage ordinaire, par : il a reculé de 3 yards, ou il manque 3 yards pour être aussi en avant qu'il l'était en A .

Ceci ne répond pas seulement par un nombre négatif à la question posée, car il n'a pas (comme on l'avait supposé) avancé du tout, mais au contraire, il est si loin d'avoir avancé, qu'il a reculé de 3 yards, et qu'il est en D , 3 yards plus en arrière que lorsqu'il était en A .

Et, par conséquent, -3 désigne le point D aussi réellement que $+3$ désigne le point C . Non pas en avant, comme on l'avait supposé, mais en arrière de A . Ainsi, $+3$ signifie 3 yards en avant et -3 , 3 yards en arrière, mais toujours sur la même ligne droite. Et chacun désigne (en tout cas sur la même ligne droite infinie) un et un seul point. Et il en va ainsi pour toute équation du premier degré qui n'admet qu'une seule racine.

Maintenant, ce qu'on admet sur les droites doit, pour la même raison, être admis dans les plans. Et par exemple, supposons qu'en un endroit, nous gagnons 30 acres sur la mer, mais que nous en perdons 20 en un autre lieu, et qu'on demande combien d'acres nous avons gagné en tout ; la réponse est 10 acres ou +10 (parce que $30 - 20 = 10$). Ceci représente aussi 1600 perches carrées (car l'acre anglais est une surface rectangulaire de 40 perches de longueur sur 4 perches de largeur dont l'aire est 160 ; 10 acres valent donc 1600 perches carrées).

Si cette surface est un carré, son côté sera long de 40 perches ou (si on admet la racine négative) -40 . Mais si en un troisième endroit, on perd 20 acres de plus, et qu'on pose la même question : combien avons nous gagné en tout ? La réponse doit être -10 acres (car $30 - 20 - 20 = -10$) c'est-à-dire que le gain est de 10 acres moins que rien. Ce qui revient à dire qu'il y a une perte de 10 acres ou de 1600 perches carrées.

Et de là naît une nouvelle difficulté, qui n'est pas plus une impossibilité que celle que nous avons rencontrée précédemment (en supposant une quantité négative ou moindre que rien). Ne considérer que $\sqrt{1600}$ est ambigu, cela peut être 40 ou -40 . Et de cette ambiguïté, il ressort que les équations quadratiques ont deux racines.

Maintenant (en supposant que cette surface négative -1600 perches a la forme d'un carré), ne doit-on pas admettre que ce supposé carré possède un côté ? Et si oui, que sera ce côté ?

Nous ne pouvons pas dire qu'il vaut 40, ni -40 (parce que l'une ou l'autre de ces valeurs, multipliée par elle-même, donnera +1600, pas -1600). Mais plus vraisemblablement, sa valeur est $\sqrt{-1600}$ (la supposée racine d'un carré négatif) ou (ce qui est équivalent) $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$. Le symbole $\sqrt{}$ suggère une moyenne proportionnelle entre une quantité positive et une quantité négative. Car, de la même manière que $\sqrt{bc}$ représente une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $+c$, ou entre $-b$ et $-c$ (dont le produit vaut bc dans les deux cas), $\sqrt{-bc}$ indique une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $-c$, ou entre $-b$ et $+c$ (dont le produit vaut $-bc$). Et ceci, sur le plan algébrique, fournit la véritable interprétation d'une telle racine imaginaire $\sqrt{-bc}$.

CHAPITRE II

Multiplication et division des droites.

PRODUIT DE DEUX DROITES.—PRODUITS DE PLUSIEURS DROITES.

28. Jusqu'à présent, dans les calculs que nous avons effectués sur les droites, nous n'avons fait intervenir que la multiplication *par un nombre réel*. Nous avons maintenant à considérer des produits de droites multipliées les unes par les autres, et pour cela, nous devons tout d'abord définir le produit de deux droites, que nous supposerons ramenées à la même origine O.

Le produit de deux droites OA, OB est une droite OC dont la LONGUEUR est égale au PRODUIT des longueurs de OA et OB, et dont l'INCLINAISON est égale à la SOMME des inclinaisons de OA et OB.

Il suit de là que l'équipollence¹⁰ $OA \cdot OB = OC$ entraîne les deux égalités¹¹

$$\text{gr.}OA \times \text{gr.}OB = \text{gr.}OC \quad \text{et} \quad \text{inc.}OA + \text{inc.}OB = \text{inc.}OC.$$

Une première remarque, indispensable à faire, c'est que, tandis que la somme de deux droites était tout à fait indépendante de tout autre élément du plan, leur produit dépend au contraire de l'origine des inclinaisons que l'on a choisie.

Malgré la multiplicité des inclinaisons d'une droite donnée, il ne peut y avoir aucune indécision sur la direction du produit, puisque l'inclinaison de celui-ci ne peut jamais être altérée que d'un nombre entier de circonférences, ce qui ne change rien à sa direction.

Sans contester ce qu'une définition comme celle que nous venons de donner peut en apparence présenter d'arbitraire *a priori*, il est bon de montrer cependant qu'elle se justifie assez naturellement, à la condition qu'on admette pour unité la droite OI de longueur égale à l'unité et dirigée suivant l'origine des inclinaisons.

D'après la définition de la multiplication admise en Arithmétique, on doit former le produit OC, au moyen du multiplicande OA, comme le multiplicateur OB est formé au moyen de l'unité OI. Or, quelles opérations a-t-on fait subir à OI pour l'amener en OB ? On a modifié la longueur dans le rapport $\frac{\text{gr.}OB}{\text{gr.}OI} = \text{gr.}OB$, puis on a fait tourner la droite ainsi obtenue, dans le sens convenable, de l'angle $\beta = \text{inc.}OB$. L'analogie nous conduit donc à dire, que pour avoir le produit OA.OB, nous devons modifier la longueur de OA dans le rapport gr.OB, ce qui donnera une droite de longueur gr.OA x gr.OB dirigée suivant OA, puis faire tourner cette droite de l'angle β . Or, elle avait pour inclinaison $\alpha = \text{inc.}OA$. Son inclinaison après la rotation sera donc $\alpha + \beta$; c'est-à-dire que nous retombons précisément sur la droite OC, telle que nous l'avons définie plus haut.

¹⁰ Il faut entendre l'égalité.

¹¹ La notation gr.AB désigne la longueur (grandeur) d'une droite AB, indépendamment de la direction de cette droite.

La notation inc.AB désigne l'inclinaison d'une droite AB. C'est l'angle formé par la droite OM (OM=AB) et une droite OX appelée *origine des inclinaisons*. L'inclinaison est *positive* si la rotation qui amène OX sur OM s'effectue dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, sinon elle est négative.