12

Problèmes d'équilibre

1 Le levier

De quoi s'agit-il ?

Déterminer le barycentre de points affectés d'un poids lorsque tous les points sont alignés.

Enjeux

Établir une formule générale donnant le point d'équilibre d'une tige à laquelle plusieurs objets sont suspendus. Les questions de barycentres offrent une introduction significative à la notion de combinaison linéaire (voir la section 7 du chapitre 16).

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – De quoi expérimenter l'équilibre d'une tige où sont suspendus plusieurs objets, par exemple : des règles graduées en bois, des écrous (tous de même poids), des élastiques et du fil de nylon.

Prérequis. – Calcul avec les nombres négatifs, calcul algébrique.

1.1 Le cas de deux objets

Comment s'y prendre ?

Préparation du matériel. – On fore un petit trou au milieu de chaque règle graduée de manière à pouvoir y attacher une ficelle par laquelle on pourra la suspendre. Il faut que la règle graduée tienne en équilibre avec les graduations tournées vers le bas. Pour cela, il est sans doute nécessaire de forer un deuxième trou de manière à compenser celui qui a été prévu par le fabriquant d'un côté de la règle. Plus le point de suspension est placé haut, plus l'équilibre sera stable. Il est préférable que l'enseignant choisisse un modèle de règle, qu'il fasse l'expérience lui-même au préalable et qu'il prépare ensuite suffisamment de règles pour les groupes de travail qu'il aura prévus.

Des écrous sont attachés à un bout de fil, lui-même attaché à un élastique qui est placé autour de la règle et qui peut être déplacé le long de celle-ci. Dans la suite, nous appellerons poids un ou plusieurs écrous attachés de la sorte. Les graduations permettront alors de déterminer de manière assez précise les positions des différents poids qui seront suspendus à la règle.

Remarque. – Le fait d'utiliser une tige suspendue en son milieu a pour effet de supprimer l'effet du poids de la tige sur l'expérience.

> Une tige est attachée en son milieu à un fil, lui-même tenu en main. On y suspend deux poids. Où peut-on les placer de telle sorte que la tige reste parfaitement horizontale ? Donner si possible plusieurs solutions.

Les élèves sont répartis en différents groupes et expérimentent en choisissant différents poids.

En exprimant les distances à partir du point de suspension de la tige, on obtient par exemple :

1 écrou	2 écrous
20 cm	10 cm
15 cm	7.5 cm

1 écrou	3 écrous
15 cm	5 cm
18 cm	6 cm

2 écrous	3 écrous
15 cm	10 cm
18 cm	12 cm

> Trouver une formule générale reliant les distances d_1 et d_2 entre le point où la tige est suspendue et les poids constitués respectivement de p_1 et p_2 écrous.

Il s'agit ici d'inférer la formule

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{p_2}{p_1},$$

ou encore

$$p_1 d_1 = p_2 d_2.$$

1.2 Le cas de trois objets

Comment s'y prendre ?

> Soient trois poids constitués respectivement de 1, 2 et 3 écrous que l'on souhaite suspendre à la règle. Il s'agit de prévoir les endroits où les placer pour réaliser l'équilibre, et de vérifier ensuite expérimentalement. Y a-t-il plusieurs endroits possibles ?

L'idée est de regrouper deux poids afin de se ramener au cas précédent. On réalise l'expérience suivante en pensée. On regroupe deux poids, par exemple ceux de 1 et de 3 écrous. Il faut donc placer d'une part 4 écrous et d'autre part 2 écrous. Si on place les 2 écrous à 20 cm à droite du milieu de la tige, le poids de 4 écrous doit être placé à 10 cm à gauche de ce milieu. On sépare maintenant le poids de 4 écrous en deux poids de 1 écrou et 3 écrous. Si on déplace le poids de 3 écrous de 3 cm vers la droite, il faut, pour conserver l'équilibre, déplacer celui de 1 écrou de 9 cm vers la gauche.

On aurait pu déplacer le poids de 3 écrous de 4 cm vers la droite. Il aurait alors fallu déplacer celui de 1 écrou de 12 cm vers la gauche.

On aurait encore pu déplacer le poids de 3 écrous de 12 cm vers la droite. Il aurait alors fallu déplacer celui de 1 écrou de 36 cm vers la gauche. Dans ce cas, le poids de 3 écrous se trouverait à droite du point de suspension de la tige.

On aurait aussi pu placer le poids de 2 écrous à 24 cm à droite du milieu de la tige. Dans ce cas, le poids groupé aurait été placé à 12 cm à gauche.

On aurait encore pu... Il y a énormément de solutions. Voici les quelques solutions obtenues ci-dessus que l'on peut vérifier expérimentalement :

1 écrou	3 écrous	2 écrous
19 cm à gauche	7 cm à gauche	20 cm à droite
22 cm à gauche	6 cm à gauche	20 cm à droite
46 cm à gauche	2 cm à droite	20 cm à droite
21 cm à gauche	9 cm à gauche	24 cm à droite
24 cm à gauche	8 cm à gauche	24 cm à droite

On voit qu'il y a beaucoup de solutions. Peut-on exprimer toutes ces solutions en une seule formule ?

Soit p_1, p_2 et p_3 les nombres d'écrous des trois poids suspendus à des distances d_1, d_2 et d_3 du point d'attache G de la tige (figure 1).

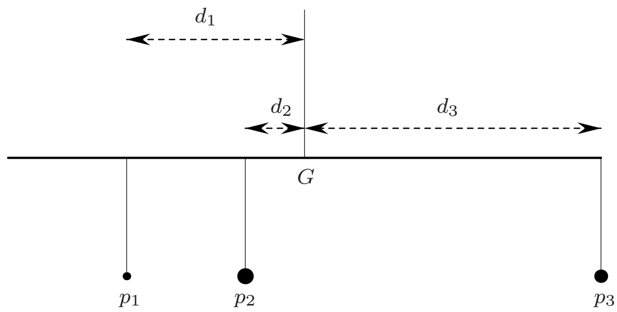

Fig. 1

Regardons d'abord le cas où p_1, p_2 et p_3 valent respectivement 1, 3 et 2.

Si la tige est en équilibre, on a

$$4\ell = 2d_3, \qquad (12.1)$$

où ℓ est la distance à laquelle il faut placer les deux premiers poids regroupés pour équilibrer les 2 écrous situés à une distance d_3 du point G (figure 2).

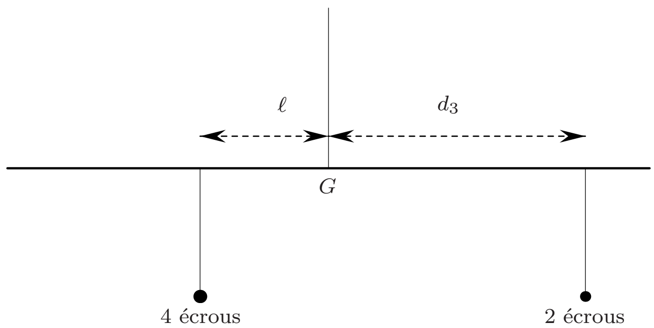

Fig. 2

Si on déplace le poids de 3 écrous à une distance e_2 vers la droite, il faut déplacer le poids de 1 écrou à une distance e_1 vers la gauche de telle manière que

$$e_1 = 3e_2.$$

Comme $e_1 = d_1 - \ell$ et $e_2 = \ell - d_2$ (figure 3), on a

$$d_1 - \ell = 3(\ell - d_2),$$

et donc

$$4\ell = d_1 + 3d_2.$$

En replaçant ce résultat dans l'expression (12.1), on obtient

$$d_1 + 3d_2 = 2d_3.$$

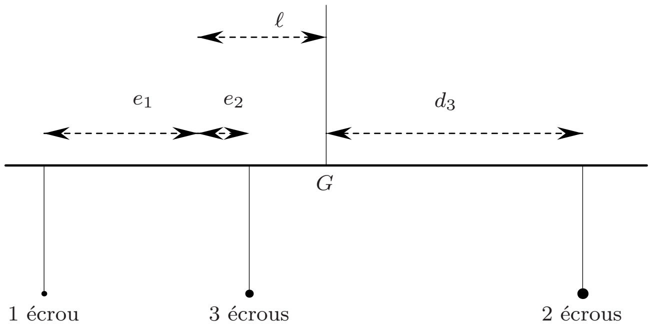

Fig. 3

Si on décidait de mettre le deuxième poids à droite de G, on trouverait comme expression :

$$d_1 = 3d_2 + 2d_3.$$

On peut vérifier que toutes les solutions trouvées plus haut vérifient une des deux expressions, qui indiquent également comment trouver toutes le solutions possibles : si on choisit par exemple d_1 et d_2, elles permettent de calculer d_3.

Pour généraliser à tous les poids possibles, il suffit de remarquer que les nombres 1, 3 et 2 sont bien les mesures des poids (en écrous !). On a donc

$$p_1d_1 + p_2d_2 = p_3d_3 \quad \text{ou} \quad p_1d_1 = p_2d_2 + p_3d_3.$$

1.3 Le cas de n objets

Comment s'y prendre ?

Trouver une relation générale entre les positions de n poids suspendus à une tige en équilibre elle-même suspendue en son milieu.

Prenons le cas de quatre poids p_1, p_2, p_3 et p_4. Supposons qu'on les a numérotés selon leur position (de gauche à droite). En reproduisant ce que l'on a fait avec trois poids, on arrive aux différentes expressions

$$p_1d_1 + p_2d_2 + p_3d_3 = p_4d_4,$$

ou

$$p_1d_1 + p_2d_2 = p_3d_3 + p_4d_4,$$

ou

$$p_1d_1 = p_2d_2 + p_3d_3 + p_4d_4.$$

Le choix de l'expression adéquate dépend de la position des poids p_2 et p_3 relativement au point de suspension G.

Il est difficile de généraliser ces formules lorsqu'on les laisse ainsi. En effet, il faudrait écrire un nombre d'expressions qui serait variable selon le nombre de poids. On peut déjà se faciliter le travail en les écrivant toutes avec le deuxième membre nul :

$$p_1d_1 + p_2d_2 + p_3d_3 - p_4d_4 = 0$$

ou

$$p_1d_1 + p_2d_2 - p_3d_3 - p_4d_4 = 0$$

ou

$$p_1d_1 - p_2d_2 - p_3d_3 - p_4d_4 = 0.$$

On peut alors écrire ces trois expressions sous la forme

$$p_1d_1 \pm p_2d_2 \pm p_3d_3 - p_4d_4 = 0.$$

Les signes attachés à p_2d_2 et à p_3d_3 dépendent des positions de p_2 et de p_3 à gauche ou à droite de G.

Pour n poids, on pourra écrire

$$p_1d_1 \pm p_2d_2 \ldots \pm p_{n-1}d_{n-1} - p_nd_n = 0. \tag{12.2}$$

Il y a donc « beaucoup » de formules possibles qui diffèrent selon les signes. Ceux-ci dépendent des positions relatives des poids par rapport à G. S'ils sont à droite de G, le signe est négatif. S'ils sont à gauche, le signe est positif. Si on décide de remplacer les distances d_i par les abscisses x_i des points de suspension des poids et que l'on fixe l'origine en G, on obtient alors une expression qui est la même dans tous les cas. En effet, si p_i est à gauche de G, $x_i = -d_i$, sinon $x_i = d_i$. L'équation (12.2) devient alors

$$-p_1x_1 - p_2x_2 \ldots - p_{n-1}x_{n-1} - p_nx_n = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$p_1x_1 + p_2x_2 \ldots + p_{n-1}x_{n-1} + p_nx_n = 0. \tag{12.3}$$

1.4 Recherche du point d'équilibre

Comment s'y prendre ?

On attache plusieurs objets à une règle. Trouver le point où il faut suspendre la règle pour qu'elle soit en équilibre.

À la section précédente, la position de G était fixée au préalable. C'est le contraire de ce que l'on fait en général : la position des points étant fixée, on cherche la position du point G. Expérimentalement, cela pose des difficultés pratiques puisque la règle sur laquelle les poids sont attachés a elle-même un poids qui modifie le point d'équilibre. Par contre, par une expérience de pensée, on peut imaginer que la règle a un poids nul.

Il n'est toutefois pas possible d'utiliser la formule (12.3), puisque celle-ci suppose que les abscisses des points de suspension des poids sont données relativement au point G de suspension de la règle. Or, c'est précisément ce dernier point que l'on cherche. Une question intermédiaire va permettre de trouver une solution.

Comment se transforme la formule (12.3) si on place l'origine des abscisses n'importe où ?

Soient donc une autre origine pour les abscisses, g l'abscisse du point G et x_i les abscisses des points p_i. Il faut se ramener au cas précédent, c'est-à-dire amener l'origine des abscisses en G. Cela se fait simplement en retirant g à chaque abscisse. L'expression (12.3) devient alors

$$p_1(x_1 - g) + p_2(x_2 - g) \ldots + p_{n-1}(x_{n-1} - g) + p_n(x_n - g) = 0,$$

où g est l'abscisse du point d'équilibre. Cette expression peut s'écrire

$$\sum p_i x_i \quad = \quad (\sum p_i) g. \tag{12.4}$$

Elle permet de trouver l'abscisse du point d'équilibre à partir des différents poids et de leurs abscisses, ce qui donne

$$g = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}. \tag{12.5}$$

Il est également possible de résoudre cette question sans imaginer une règle de poids nul. Le poids de la tige a une influence sur la position du point d'équilibre. On fait l'hypothèse que cette influence est la même que celle d'un objet qui serait suspendu au milieu de la tige et qui aurait le même poids que celle-ci. On remplace donc la tige et son poids par un poids ponctuel (p_{n+1}) situé en son milieu (d'abscisse x_{n+1}). Notons que cette supposition pourrait être justifiée dans une théorie plus complète.

Une fois réalisé le calcul du point d'équilibre de la tige, la position trouvée peut également faire l'objet d'une vérification expérimentale.

2 Barycentres dans un plan

De quoi s'agit-il ?

Déterminer le barycentre de points affectés d'un poids lorsque tous les points sont dans un même plan.

Enjeux

Établir une formule générale donnant le point d'équilibre d'une plaque à laquelle plusieurs objets sont suspendus.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – Premiers éléments de calcul vectoriel (cf. le chapitre 8 à la page 218).

2.1 Le cas de trois poids égaux

Comment s'y prendre ?

Soit une plaque circulaire suspendue à un fil en son centre. On souhaite lui accrocher trois objets de poids égaux. Caractériser les manières de placer ces objets pour que la plaque reste parfaitement horizontale.

On reprend la méthode de regroupement utilisée précédemment. La plaque est suspendue au centre G. On place un des poids en un point de la plaque A. On regroupe les deux autres poids. Pour que la plaque reste en équilibre, il faut que le point P où on les place se trouve sur la droite AG (figure 4). Comme le poids en P est double de celui en A, la distance de P à G doit valoir la moitié de celle de A à G.

Lorsque l'on sépare les deux poids, il faut, pour garder l'équilibre, les placer sur une ligne passant par P en veillant à ce qu'ils se trouvent à même distance de P. On en déduit que les trois poids doivent être placés en des points formant un triangle dont G est l'intersection des médianes.

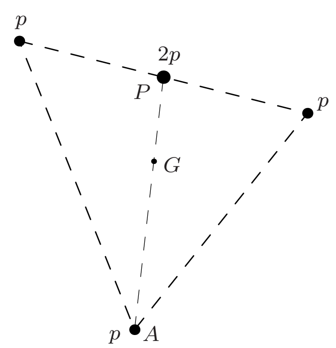

Fig. 4

2.2 Le cas de trois poids quelconques

Comment s'y prendre ?

Soit une plaque circulaire suspendue à un fil en son centre. On souhaite lui accrocher trois objets de poids quelconques. Caractériser les manières de placer ces objets pour que la plaque reste parfaitement horizontale.

Soit à placer, par exemple, des poids formés respectivement de 3 écrous, 2 écrous et 4 écrous (figure 5).

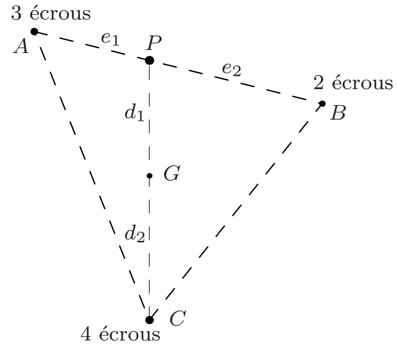

Fig. 5

Plaçons le poids de 4 écrous en C et imaginons dans un premier temps que les poids de 3 et 2 écrous sont regroupés au point P se trouvant sur la droite CP. Pour que la plaque reste en équilibre, la condition suivante doit être vérifiée :

$$5d_1 = 4d_2. \tag{12.6}$$

Si les deux poids de 3 et 2 écrous sont placés en deux endroits distincts, A et B, il faut alors respecter en plus la condition

$$3e_1 = 2e_2. \tag{12.7}$$

Ceci permet de déterminer concrètement des manières de disposer les trois poids pour garder l'équilibre. Il y a moyen toutefois de caractériser de manière plus générale les positions des poids, comme cela a été fait pour le levier.

Comme les distances sur la droite AB, où se trouvent les poids de 3 et 2 écrous, ne peuvent se comparer à celles sur la droite PC, l'idée est de s'occuper des positions des poids les uns relativement aux autres en termes de vecteurs (changements de position) et non plus de distances. Supposons connaître les coordonnées des points A, B et C où sont placés les poids de 3, 2 et 4 écrous. Les expressions (12.6) et (12.7) se traduisent par (figure 6)

$$5\overrightarrow{PG} = 4\overrightarrow{GC} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}.$$

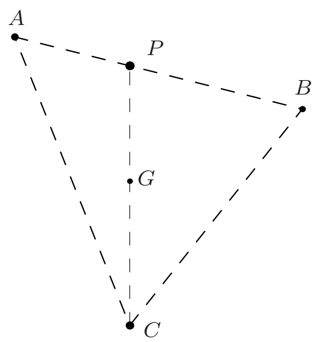

Fig. 6

Ces deux relations entre des vecteurs peuvent se réécrire comme relations entre des coordonnées (indiquées ci-après simplement par les lettres désignant les points) :

$$\begin{aligned} 5(G-P) &= 4(C-G) \quad \text{ou encore} \quad (5+4)G = 5P + 4C\,; \\ 3(P-A) &= 2(B-P) \quad \text{ou encore} \quad (3+2)P = 3A + 2B. \end{aligned}$$

En les combinant, on trouve alors une relation entre les coordonnées de G et celles des trois points où sont suspendus les poids :

$$9G \quad = \quad 3A + 2B + 4C.$$

Le coefficient de G provient de la somme $3 + 2 + 4$ qui sont les nombres d'écrous, c'est-à-dire les mesures des poids (dans l'unité « écrou »). On peut donc écrire immédiatement l'expression correspondante dans le cas général :

$$(p_1 + p_2 + p_3)G \quad = \quad p_1A + p_2B + p_3C, \tag{12.8}$$

où p_1, p_2 et p_3 sont les mesures des poids suspendus en A, B et C. C'est une relation entre quatre positions. Dès que trois d'entre elles sont fixées, elle permet de calculer la quatrième.

2.3 Recherche du point d'équilibre

Comment s'y prendre ?

De la manière dont le problème a été posé, la position de G est fixe. C'est le contraire de ce que l'on fait en général : la position des trois points étant fixée, on cherche la position du point G. Expérimentalement, cela pose des difficultés pratiques, puisque le dispositif sur lequel les objets seraient attachés a lui-même un poids qui modifie le point d'équilibre. Comme dans le cas du levier, par une expérience de pensée, on peut imaginer les trois objets reliés par une structure ne pesant rien et trouver leur point d'équilibre au moyen de l'expression (12.8).

Prolongement possible

Le résultat obtenu se généralise au cas de n objets. On peut le faire par récurrence en reproduisant la démarche utilisée pour trois poids : on regroupe deux poids et on se base sur le résultat obtenu pour $n-1$ poids. On trouve ainsi le résultat pour n objets dont les coordonnées sont données par A_i et les poids par p_i, à savoir

$$(\sum p_i)G = \sum p_iA_i.$$

3 Équilibre d'un point

De quoi s'agit-il ?

Établir expérimentalement les conditions d'équilibre d'un point soumis à des forces.

Enjeux

La loi de composition des forces, c'est-à-dire la somme de deux forces par la règle du parallélogramme ; les premières propriétés de cette somme.

Il s'agit de la modélisation d'une situation physique. Cette modélisation montre la parenté des forces avec d'autres entités mathématiques ou physiques représentées par des vecteurs. Voir aussi à cet égard la section 8.4 du chapitre 16.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Une corde de traction, comme par exemple celles qu'on utilise au cours de gymnastique. Un assemblage de trois cordes de ce type nouées en un point.

Un seau d'eau.

Un dispositif de composition de forces d'un type déjà décrit par E. Mach [1903] dans un célèbre ouvrage sur l'histoire de la mécanique. La figure 7, extraite de cet ouvrage, en donne une idée. La figure 8 montre un dispositif analogue disponible dans le commerce. Mais on peut sans trop de peine construire cela soi-même, de la manière suivante.

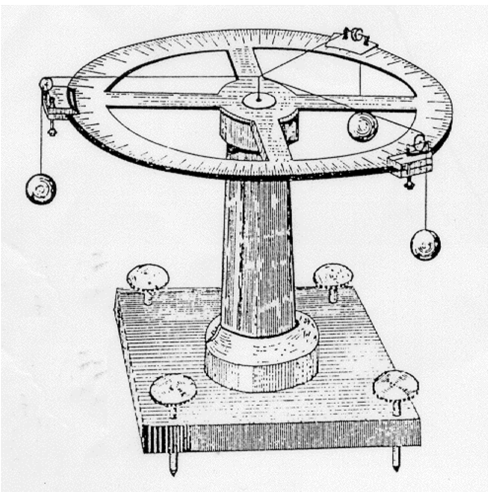

Fig. 7

Fig. 8

On noue trois ficelles en un point et on fait passer chacune d'elles sur une poulie fixée en périphérie de la table. Au bout de chaque ficelle on attache un objet pesant, par exemple un godet contenant de la grenaille de plomb. Il faut aussi disposer d'une balance pour peser ces godets. Nous conseillons de choisir une table ronde, pour que le dispositif ne suggère aucune direction privilégiée dans le plan horizontal. Toutefois, une table carrée ou rectangulaire ne présenterait pas d'inconvénient majeur.

3.1 Équilibrer deux forces d'égale intensité

Comment s'y prendre ?

Lorsque deux personnes tirent à chaque bout d'une corde avec des forces égales dans des sens opposés, la situation est équilibrée, et donc la corde ne bouge pas. Considérons maintenant un système de trois cordes nouées en un point. Une personne A tire sur une des cordes. On demande à deux autres personnes B et C de tirer sur les deux autres cordes, symétriquement par rapport à la première corde, comme le montre la figure 9, qui est une vue du dessus. La personne A s'efforce de maintenir son effort constant. Les personnes B et C ajustent leur force pour que le nœud ne bouge pas. Comment varie la force qu'elles doivent développer lorsqu'elles augmentent l'angle entre leurs deux cordes ?

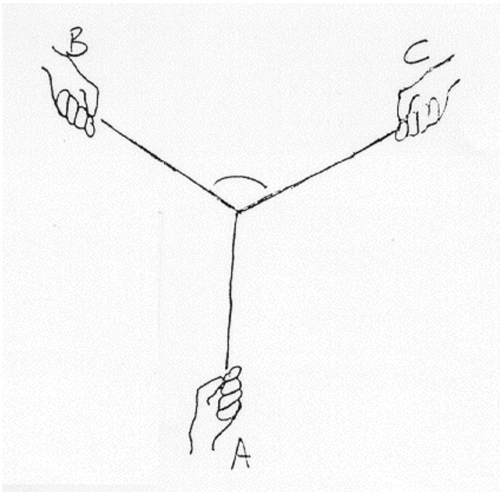

Fig. 9

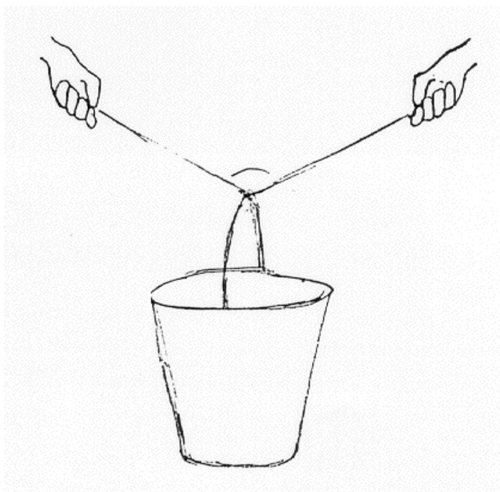

Fig. 10

Cette expérience, purement qualitative, fait voir qu'au fur et à mesure que l'angle en question grandit, la force que doivent développer B et C devient de plus en plus grande. Et lorsque l'angle s'approche de 180°, la force qu'il faudrait développer devient tellement grande que B et C ne peuvent plus résister.

Une corde est nouée sur l'anse d'un seau rempli d'eau. Que se passe-t-il lorsque deux personnes tirent symétriquement sur la corde, comme le montre la figure 10 ?

Plus les forces exercées symétriquement sur la corde sont grandes, plus grand est l'angle entre les deux moitiés de la corde. Il s'avère impossible de tirer assez fort pour que cet angle devienne un angle plat.

Une fois réalisées ces deux expériences assez grossières, on va s'efforcer de comprendre mieux ce qui se passe en mesurant les angles et les forces[1]. Pour cela, on se sert de l'appareil représenté à la figure 8.

[1] Ci-après, nous donnons les mesures des forces en grammes-forces. Nous pensons que mesurer ici les forces en Newton ne pourrait qu'embrouiller les élèves.

Disposons deux poulies aux deux extrémités d'un diamètre de la table, faisons passer une ficelle sur ces deux poulies et suspendons des deux côtés des poids égaux, par exemple 50 g de chaque côté (voir figure 11). Le point central ne bouge pas. Remplaçons une des deux forces de 50 g par deux forces de même intensité disposées symétriquement comme le montre la figure 12. Quelle intensité x (commune) devrons-nous donner à ces deux forces pour que le point central ne bouge pas ? Et comment varie cette intensité lorsque nous faisons varier l'angle α ?

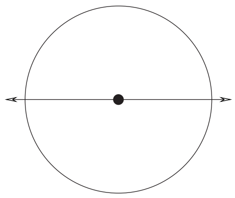

Fig. 11

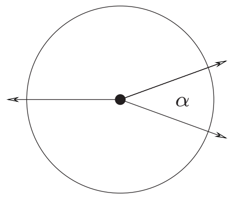

Fig. 12

Faisons l'expérience pour quelques valeurs de l'angle α. Nos résultats sont consignés dans le tableau suivant.

angle α	30°	60°	90°	120°	150°	160°	180°
force x	24 g	29,5 g	35g	51 g	97,5 g	144 g	?

La figure 13 reprend graphiquement ces résultats. Elle montre que la force varie avec l'angle, mais selon une loi que l'on ne perçoit pas immédiatement. Essayons donc de préciser cette loi.

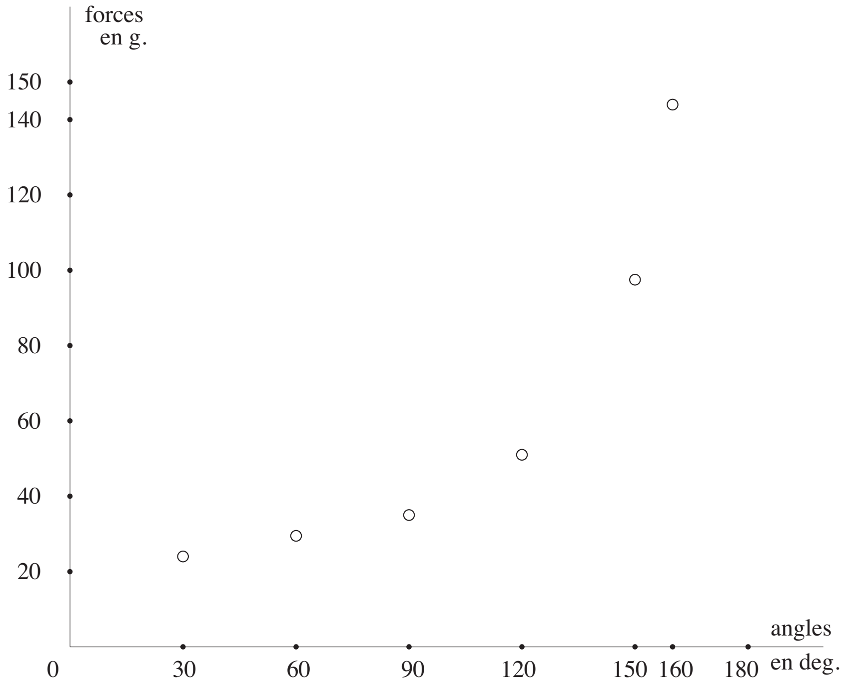

Fig. 13

Les points que nous venons de déterminer sont-ils – fut-ce à peu près – sur le graphe d'une fonction familière ? Difficile à dire. Tentons d'y voir plus clair.
En fait, la situation que nous examinons a un premier aspect géométrique, puisqu'on y discerne d'abord trois directions issues d'un point. Ne serait-il pas éclairant de dessiner les forces à une certaine échelle sur cette figure géométrique ? En ce faisant, nous garderions sous les yeux un maximum d'informations. D'où la proposition suivante : choisir une échelle pour représenter les forces, par exemple 5 cm pour 100 g, et représenter chacune des forces à l'échelle, en respectant sa direction.

À la figure 14, nous avons représenté toutes les forces mesurées ci-dessus. Chacune d'elles correspond à une flèche issue du point fixe et dont la longueur a été calculée à l'échelle choisie.

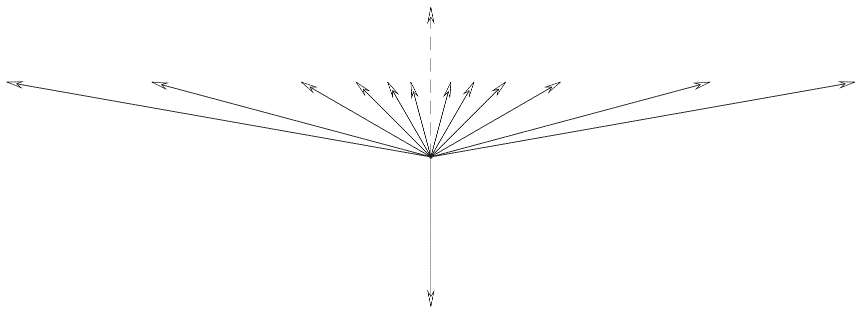

Fig. 14

Il n'est pas étonnant que la figure obtenue soit symétrique, ou plus précisément qu'elle possède un axe de symétrie, déterminé par la force donnée. Mais – chose curieuse –, les extrémités de toutes les flèches ont l'air d'être alignées sur une droite perpendiculaire à cet axe. Ainsi, toutes ces forces auraient sur cet axe la même projection orthogonale.

Qui plus est, le point commun de projection coupe sans doute cette force F en deux : en effet, si on envisage le cas limite d'un angle nul entre les deux forces symétriques, on voit bien que chacune de ces deux forces doit avoir une intensité moitié de celle de la force F.

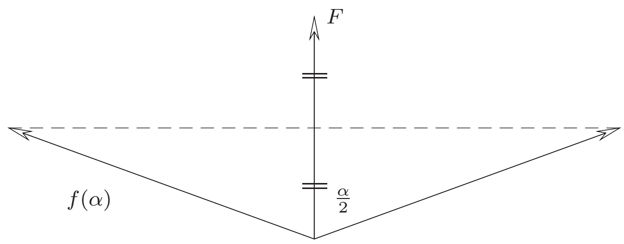

Fig. 15

Si on accepte cette analyse, on trouve la relation cherchée entre l'angle et la force. En effet, comme on le voit sur la figure 15, on a

$$f(\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{F}{2},$$

et par conséquent

$$f(\alpha) = \frac{F}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

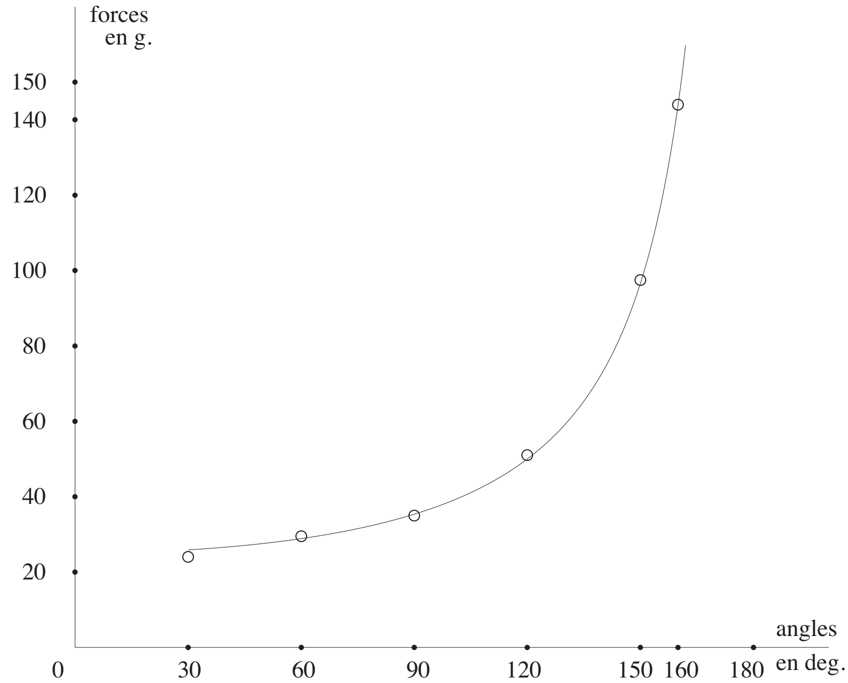

Fig. 16

La figure 16 superpose notre courbe expérimentale de tout-à-l'heure et le graphe de la fonction que nous venons de découvrir. La correspondance est assez bonne pour que nous puissions accepter notre modèle théorique de la situation.

Renversons maintenant la situation en nous donnant deux forces symétriques par rapport à une droite d, comme sur la figure 17. Trouver une troisième force qui les équilibre.

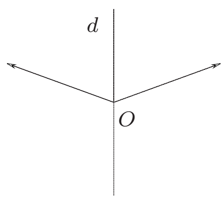

Fig. 17

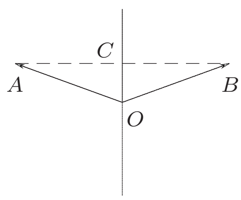

Fig. 18

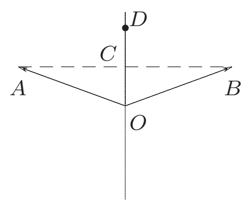

Fig. 19

Une solution – trouvée en s'inspirant de la figure 15 – consiste à projeter les deux forces sur la droite d, ce qui peut se faire en dessinant le segment AB. On obtient ainsi le point C (figure 18). L'intensité de la force cherchée correspond au double de OC, ce qui nous amène au point D (figure 19). La force cherchée est donnée par le segment OE opposé à OD (figure 20).

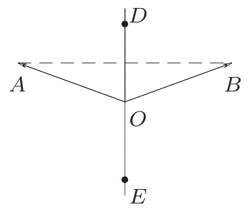

Fig. 20

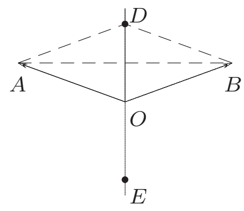

Fig. 21

On peut alors observer qu'il y a aussi moyen de trouver le point E, celui qui détermine la force cherchée, en se servant d'une diagonale du losange $OADB$: c'est ce que montre la figure 21.

3.2 Équilibrer deux forces d'intensités inégales

Comment s'y prendre ?

> On donne maintenant deux forces de directions et de grandeurs quelconques (par exemple deux forces tirant sur des ficelles écartées de 83°, l'une de 54 g et l'autre de 87 g) (voir figure 22), et on demande de les équilibrer par une troisième force.

L'argumentation suivante est plausible, quoique nullement évidente. On a vu qu'on peut remplacer deux forces symétriques « par une diagonale du losange qu'elles définissent ». On peut alors supposer qu'on pourrait remplacer deux forces non symétriques par « une diagonale appropriée du parrallélogramme qu'elle définissent » (voir figure 23). Il suffirait ensuite d'équilibrer cette force par son opposée. On détermine l'intensité et l'orientation de cette force en mesurant à l'échelle sur la figure 24. Nous avons réalisé l'expérience sur l'appareil de la figure 8 à la page 390. Il s'avère que cette conjecture est bonne, aux erreurs de mesure près.

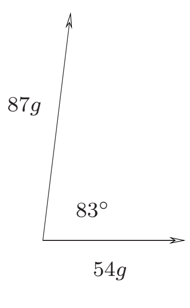

Fig. 22

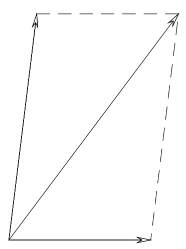

Fig. 23

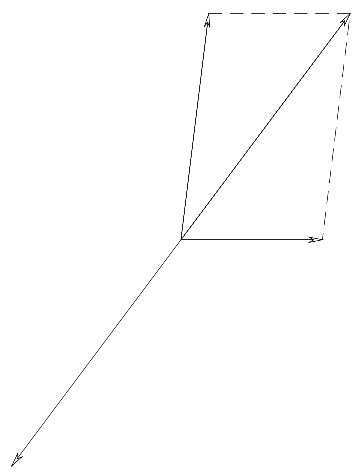

Fig. 24

Si les élèves ne font pas cette conjecture, ils peuvent déterminer la force cherchée en tâtonnant expérimentalement, puis la représenter à l'échelle.

C'est le moment pour le professeur de donner le coup de pouce qui s'impose : il expliquera la loi du parallélogramme des forces.

On peut remplacer cette dernière question par « l'expérience de pensée » suivante, que nous présentons sous forme de dialogue.

L'un. – Considérons un fil dont une extrémité est attachée à une glissière dans laquelle elle se meut sans frottement. On pourra imaginer par exemple une tringle à rideau munie d'une attache à roulettes à laquelle on a fixé une ficelle. La figure 25 schématise cette situation. On sait que lorsqu'on tire sur la ficelle dans une direction perpendiculaire à la glissière, on n'observe aucun mouvement. Pour que l'attache mobile se déplace, il faut et il suffit d'incliner la direction de la traction (voir figure 26). En disant qu'il *suffit* de faire cela, on suppose implicitement que la glissière ne comporte aucun frottement. Jusqu'ici, ce que nous avons affirmé relève de l'expérience commune. Et si maintenant on tire sur deux ficelles nouées à l'attache (voir 27), comment pensez-vous qu'il faudra tirer pour que l'attache ne bouge pas ?

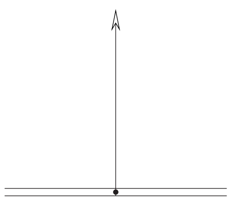

Fig. 25

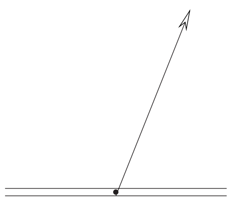

Fig. 26

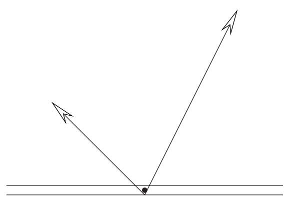

Fig. 27

L'autre. – Regardons d'abord une seule force. Pour qu'il n'y ait pas mouvement, on s'arrange pour que la situation soit équilibrée, autrement dit pour que la projection orthogonale de la force sur la glissière soit nulle. Si on tire avec deux forces, il semble raisonnable de supposer qu'il n'y aura pas de mouvement si les deux forces ont le long de la glissière des projections orthogonales qui se compensent, par exemple comme sur la figure 28.

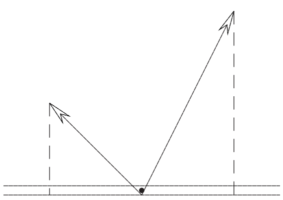

Fig. 28

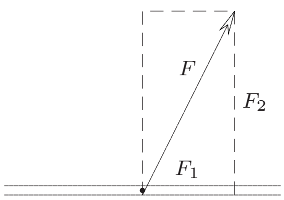

Fig. 29

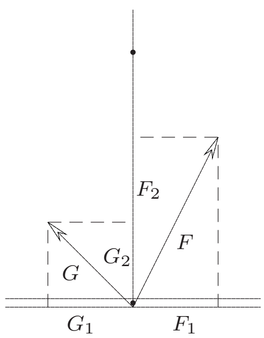

Fig. 30

L'un. – On ne voit en effet guère d'autre réponse plausible. Considérons maintenant la chose sous l'angle suivant. La figure 29 représente à nouveau un force inclinée par rapport à la glissière. Appelons cette force F, et désignons respectivement par F_1 et F_2 ses projections dans la direction de la glissière et dans la direction orthogonale. On peut dire que F_1 est ce qui tend à mouvoir l'attache, tandis que F_2

est ce qui tire sur la glissière. Convenons de munir F_1 du signe $+$ si la traction s'exerce vers la droite, et du signe $-$ si elle s'exerce vers la gauche. Revenons maintenant au cas où deux forces F et G sont appliquées à l'attache, et décomposons chacune d'elles de la manière indiquée (voir figure 30). Est-ce qu'il n'est pas raisonnable de penser que ce qui tend à mouvoir l'attache, c'est $F_1 + G_1$, et que ce qui tire sur la glissière, c'est $F_2 + G_2$?

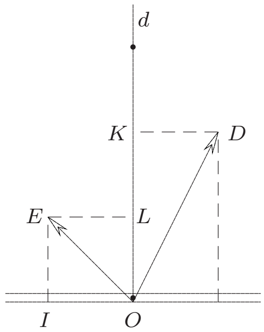

Fig. 31

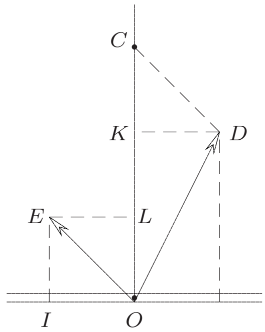

Fig. 32

L'autre. – Mais oui, c'est une conjecture plausible. Et alors, comme nous l'avons vu avant, la condition pour que l'attache demeure immobile s'écrirait $F_1 + G_1 = 0$. L'effet conjoint des deux forces serait alors le même que celui d'une seule force H perpendiculaire à la glissière et dont les projections seraient 0 et F_2+G_2. C'est ce que montre la figure 30.

L'un. – Alors je peux montrer une façon simple de trouver géométriquement le point qui détermine la force H. Je reproduis la figure 30 en donnant des noms à ses points principaux : voir figure 31. Ensuite, je mène par D une parallèle à EO qui coupe la droite d en un point C (figure 32). Le triangle DKC est isométrique au triangle OIE. En effet, les côtés KD et IO sont isométriques. Les angles en I et en K sont tous deux droits, et enfin les angles en O et en D sont de même amplitude par construction (leurs côtés sont deux à deux parallèles). Donc KC est isométrique à OL. Par conséquent OC a pour longueur $F_2 + G_2$. Ainsi C détermine bien la force H. On peut exprimer ce résultat autrement : la force H est donnée par la diagonale appropriée du parallélogramme $ODCE$.

> On donne deux forces égales et opposées, par exemple de 100 g chacune. On voudrait, sans menacer l'équilibre, remplacer une de ces deux forces par deux autres, mais dont l'une est donnée à l'avance. Est-ce possible ?

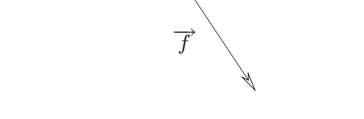

Fig. 33

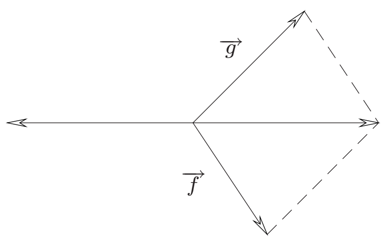

Fig. 34

La figure 33 représente la situation pour un certain choix de la force $\overrightarrow{f}$ donnée à l'avance[2]. La réponse est que l'on peut trouver la force demandée : on construit le parallélogramme dont une diagonale est la force à remplacer et dont un des côtés est la force donnée à l'avance. La force $\overrightarrow{g}$ cherchée est donnée par l'autre côté du parallélogramme (voir figure 34).

3.3 D'autres questions d'équilibre

Prolongements possibles

Le dispositif expérimental proposé permet de poser quelques autres questions conduisant à approfondir d'une part le problème physique de l'équilibre d'un point soumis à des forces, mais aussi d'autre part la règle du parallélogramme. Voici quelques-unes de ces questions.

Trois points fixes (trois poulies) sont donnés sur le bord de la table. On choisit un quatrième point quelque part sur la table et on y amène le point de jonction des trois ficelles. Est-il toujours possible, en faisant passer les ficelles par les trois points donnés, d'y suspendre trois poids – à déterminer – tels que le point de jonction des ficelles soit en équilibre ?

Supposons d'abord que le quatrième point choisi soit à l'intérieur du triangle déterminé par les trois points fixes. Les directions des forces à appliquer pour obtenir l'équilibre nous sont imposées (figure 35). Construisons alors un parallélogramme ayant deux de ses côtés dans deux des directions données, et sa diagonale dans la troisième direction. Une telle construction est toujours possible (figure 36). Il nous suffira ensuite de choisir nos poids proportionnels aux côtés et à la diagonale du parallélogramme ainsi construit.

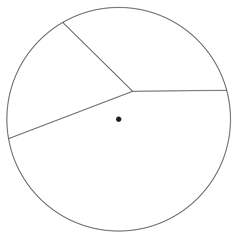

Fig. 35

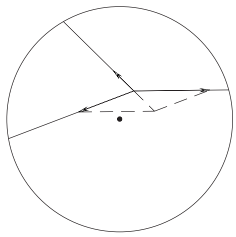

Fig. 36

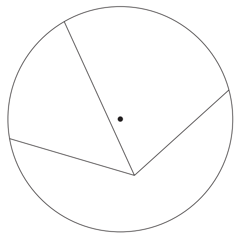

Fig. 37

D'autre part, si le quatrième point choisi est à l'extérieur du triangle déterminé par les trois points fixes, on ne peut plus contruire le parallélogramme requis : la figure 37 montre une situation de ce genre. Pour réaliser l'équilibre dans un tel cas, il faudrait une ficelle qui pousse au lieu de tirer, ce qui n'est pas possible.

La conclusion est que l'intérieur du triangle déterminé par les trois points fixes est l'ensemble des points que l'on peut amener à l'équilibre par un choix approprié des trois forces. Remarquons au passage que si un point est en équilibre sous l'action de trois forces, il demeure en équilibre si on multiplie la grandeur de chacune de ces forces par un même nombre.

[2] Nous représentons maintenant les forces par des lettres surmontées d'une flèche.

L'appareil présenté à la figure 8 à la page 390 permet de vérifier notre conclusion expérimentalement avec une bonne précision. Les trois points fixes sont les sommets des poulies. La figure 38 illustre une réponse particulière.

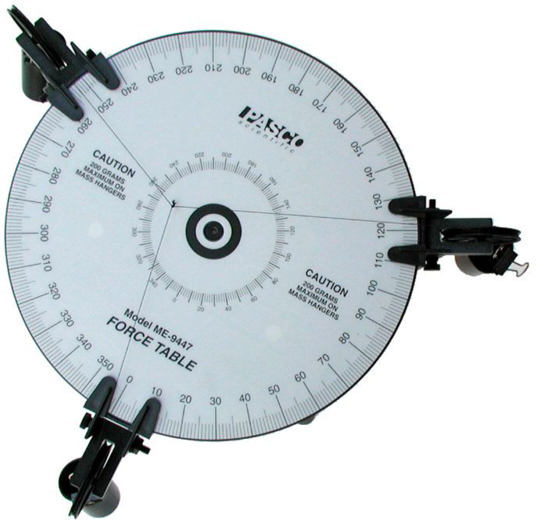

Fig. 38

Une remarque pratique s'impose à propos de cette expérience. Le point dont on étudie l'équilibre (c'est-à-dire l'endroit où se rejoignent les trois ficelles) n'est plus maintenant le centre du cercle. Or chaque poulie se trouve dans un plan vertical passant par ce centre. Il s'ensuit que la ficelle qui passe sur une poulie n'est plus dans le plan de celle-ci, et qu'elle risque donc de quitter la poulie. L'expérience montre qu'avec l'appareil de la figure 8 on peut quand même tolérer un angle assez important (de l'ordre d'une trentaine de degrés) entre chaque ficelle et le plan de la poulie correspondante sans que cet accident se produise.

On accroche des poids aux trois ficelles. Y a-t-il toujours moyen de déterminer où il faut placer les trois points fixes au bord de la table pour que le point de jonction des ficelles demeure en place ?

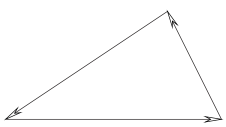

Fig. 39

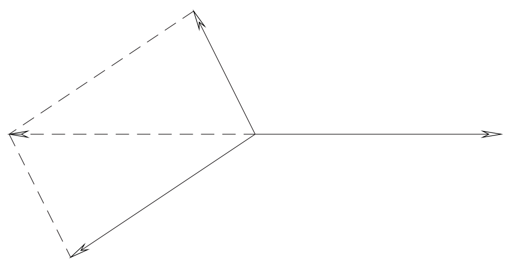

Fig. 40

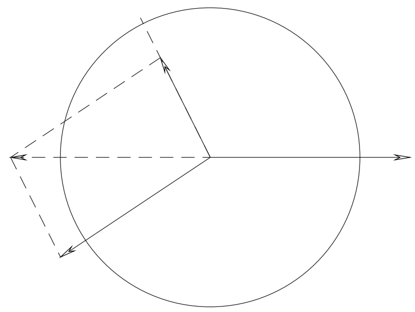

Fig. 41

Pour obtenir un équilibre, il faut que l'on puisse, avec les trois forces, « faire un parallélogramme et sa diagonale ». C'est possible, en vertu de l'inégalité triangulaire, si le plus grand poids est plus petit que la somme des deux autres. Si tel est le cas en effet, on peut « disposer les trois forces en triangle » (figure 39), et donc aussi les disposer comme sur la figure 40 en configuration d'équilibre. Il suffit alors de déposer cette figure sur la table en plaçant l'origine des trois forces au centre : celles-ci pointent vers trois points du bord de la table où on peut placer les poulies (figure 41). Il y a bien entendu une infinité de solutions, correspondant à une rotation d'ensemble d'un angle quelconque du système des trois ficelles autour du centre de la table.

Nous savons qu'un point est en équilibre sous l'action de trois forces si la somme de deux d'entre elles est opposée à la troisième et de même intensité que celle-ci. Mais pour vérifier cela, peut-on commencer par sommer deux quelconques des forces ?

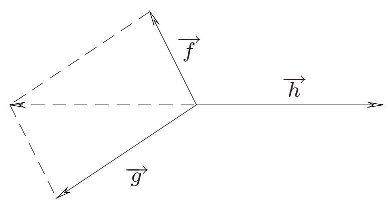

Fig. 42

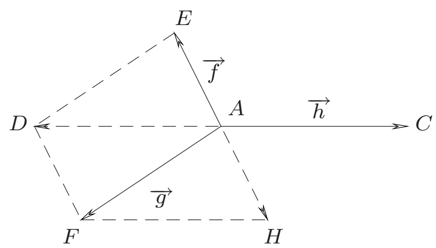

Fig. 43

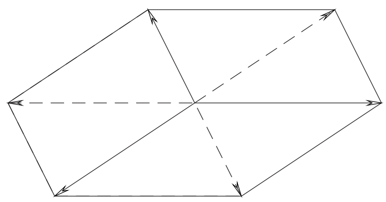

Fig. 44

La figure 42 montre deux forces $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ en équilibre avec une force $\overrightarrow{h}$. Montrons tout d'abord que les forces $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$ sont en équilibre avec la force $\overrightarrow{f}$. Pour cela, construisons la somme $\overrightarrow{k}$ de $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$ comme le montre la figure 43. Il faut montrer que $\overrightarrow{k}$ est égal et opposé à $\overrightarrow{f}$. Or,

AC est égal et parallèle à DA par construction ;

FH est égal et parallèle à AC par construction ;

donc DA est égal et parallèle à FH ;

donc DF est égal et parallèle à AH puisque $DFHA$ est un parallélogramme ;

mais DF est égal parallèle à EA par construction ;

donc AH est égal et parallèle à EA ;

et par conséquent $\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{f}$.

On tire aussi de cet exercice un nouvel énoncé de la condition d'équilibre d'un point soumis à trois forces : le point est en équilibre si la somme des trois forces qui lui sont appliquées est nulle. Cet énoncé a ceci d'agréable qu'il fait jouer le même rôle à chacune des trois forces.

Si, arrivés à cette question, les élèves manient déjà les vecteurs et s'ils ont reconnu la nature vectorielle des forces, alors la démonstration que nous venons d'achever se résume à remarquer que

$$\text{si} \quad \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} = -\overrightarrow{h},$$
$$\text{alors} \quad \overrightarrow{g} + \overrightarrow{h} = -\overrightarrow{f}.$$

Il est assez agréable de constater, comme le montre la figure 44 , que trois forces en équilibre et leurs sommes deux à deux déterminent les sommets d'un hexagone dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

> On se donne trois poids et trois points fixes au bord de la table. Existe-t-il un point sur la table qui soit en équilibre sous l'action de ces trois poids ? Si oui, où est ce point ?

Traitons d'abord un cas particulier. Soient les trois forces dont les intensités sont spécifiées par les segments de la figure 45 et les trois points de la figure 46.

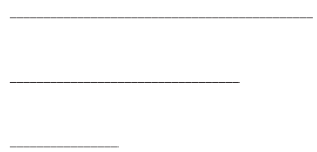

Fig. 45

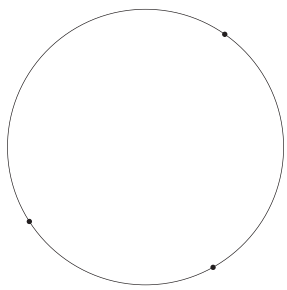

Fig. 46

Pour pouvoir trouver un point en équilibre, il faut d'abord bien entendu que les trois forces puissent être disposées en un système de somme nulle. Nous savons pour cela que le plus grand des trois poids doit être plus petit que la somme des deux autres (voir ci-dessus). Tel est le cas pour les forces que nous nous sommes données. Disposons-les donc en un système de somme nulle (figure 47).

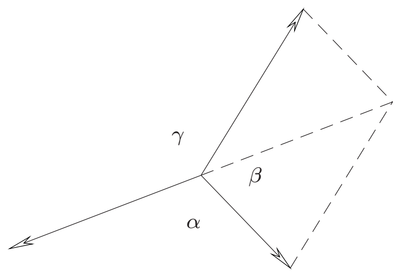

Fig. 47

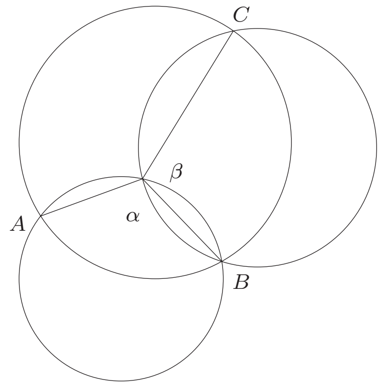

Fig. 48

Ces trois forces déterminent trois angles α, β et γ. Traçons sur AB un arc de cercle tel que tout angle $\widehat{AXB}$ ayant son sommet X sur cet arc soit égal à α. Traçons de même sur BC un arc de cercle correspondant à l'angle β (voir figure 48). L'intersection de ces deux arcs de cercle nous donne une position possible pour l'équilibre. Nous avons donc une solution à notre problème : le point cherché existe et nous l'avons situé.

Par ailleurs, si les angles α et β avaient été tous deux suffisamment proches de π, les deux cercles ne se seraient pas coupés. Nous pourrions alors essayer de travailler au départ d'un autre couple de côtés du triangle ABC. Mais on voit bien que, quels que soient les angles de ce triangle, il existera des cas, si α et β sont trop grands, où nous ne trouverons pas de point d'intersection aux deux cercles.

On tire sur un point avec des forces de même grandeur réparties de telle sorte que deux forces successives fassent entre elles un angle de 72°. L'anneau est-il en équilibre ?

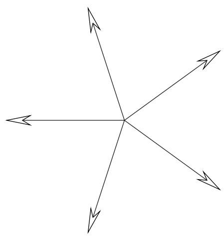

Fig. 49

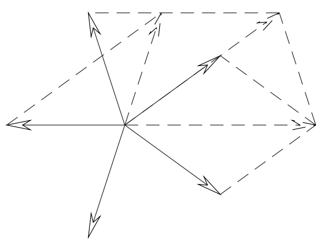

Fig. 50

La figure 49 montre les forces en jeu. On peut en faire la somme par la règle du parallélogramme, et on trouve une force nulle, aux erreurs de tracé près. La figure à construire est quelque peu confuse (figure 50). Mais on peut aussi s'aviser que pour trouver la somme de deux forces, au lieu de passer par la diagonale du parallélogramme (figure 51), il suffit d'enchaîner les deux flèches (voir figure 52). Si on procède de la sorte pour les cinq forces en jeu dans notre problème, les flèches dessinent évidemment un pentagone régulier (figure 53), et il va alors de soi que leur somme est nulle.

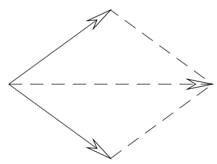

Fig. 51

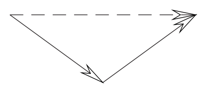

Fig. 52

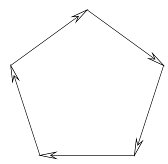

Fig. 53

Vers où cela va-t-il ? Ce chapitre prépare évidemment l'enseignement de la mécanique. Plus précisément, nous avons examiné ici l'équilibre d'un point. La matière qui vient naturellement ensuite est l'étude de l'équilibre d'un solide indéformable, avec pour cas particulier l'équilibre dans un champ de pesanteur uniforme et la théorie des centres de gravité. Le parallélogramme des forces est aussi l'un des éléments clés de la dynamique, qui est l'étude des mouvements des corps sous l'action des forces.

16

La linéarité comme fil conducteur

> ... on trouve à l'origine des mathématiques des problèmes qui se résolvent par une seule multiplication ou division, c'est-à-dire par le calcul d'une valeur d'une fonction $f(x) = ax$, ou la résolution d'une équation $ax = b$: ce sont là des problèmes typiques d'algèbre linéaire, et il n'est pas possible de les traiter, ni même de les poser correctement sans « penser linéairement ».
>
> ... on s'est aperçu du caractère essentiellement linéaire de presque toute l'algèbre moderne, dont cette « linéarisation » est elle-même l'un des traits marquants.
>
> N. Bourbaki

1 Introduction

Tout notre travail jusqu'ici a consisté à illustrer la notion de structure linéaire à travers l'ensemble de la scolarité. Ce dernier chapitre, de nature plus théorique, esquisse le développement de cette structure depuis les grandeurs jusqu'aux espaces vectoriels et permet ainsi de situer tous les autres chapitres.

Plus précisément, nous essayons de montrer d'abord comment naît la notion de *rapport* entre deux grandeurs, avant même que celles-ci soient mesurées, et ensuite ce que devient cette notion dès qu'il est question de mesures, la mesure d'une grandeur étant un nombre positif. Après nous regardons ce que deviennent les rapports lorsqu'on en arrive aux grandeurs orientées, c'est-à-dire celles dont les mesures sont des nombres relatifs. Et enfin nous étudions les mutations considérables que subit la notion de rapport lorsqu'on essaie de l'appliquer aux grandeurs vectorielles, ce qui nous amène jusqu'aux deux concepts de *combinaison linéaire* et de *transformation linéaire*.

Ce qui s'appelle *rapport* au départ d'une telle étude ne peut plus, après quelques mutations, continuer à porter le même nom. C'est pourquoi nous désignons du nom de *structure linéaire* ou de *linéarité* cette plante dont la semence est le rapport entre deux grandeurs et qui, sans cesser jamais d'être elle-même, se développe et finit par produire des fruits qui s'appellent combinaisons et transformations linéaires.

Soulignons un choix méthodologique important. Qui dit *rapport* évoque une certaine relation entre deux choses. Qui dit *proportion* évoque l'égalité de deux rapports et renvoie donc à quatre choses. Nous adoptons ici de bout en bout un point de vue que nous croyons beaucoup plus éclairant, à savoir celui de *fonction linéaire*, renvoyant d'emblée à une multitude de rapports égaux. Notre idée est de partir des tableaux de proportionnalité entre grandeurs – ces tableaux expriment des fonctions –, et de voir comment il faut adapter de tels tableaux pour passer des grandeurs aux mesures des grandeurs, puis aux grandeurs orientées et enfin aux vecteurs.

Notre parcours est un survol. À aucun moment nous ne nous attardons aux détails sans grande portée. À chaque étape, nous essayons de montrer les contextes significatifs où naît une théorie et les grands axes de celle-ci, qui expliquent son efficacité. Nous essayons de montrer sur quelles difficultés bute chaque théorie lorsqu'on tente de l'appliquer dans de nouveaux contextes, et comment il faut la plupart du temps la restructurer pour dépasser les obstacles. La restructurer plutôt que la retoucher, car une théorie est une construction logique, et dès qu'on change un axiome ou une définition, tout ce qui en résulte est à refaire. Ce qui nous intéresse, c'est l'enchaînement des idées, le développement d'une pensée qui augmente sa puissance, c'est-à-dire sa généralité, par bonds successifs.

Au terme du parcours, la théorie la plus générale et la plus abstraite puise son sens dans tous les contextes, tous les champs de phénomènes et de problèmes qu'elle a traversés, tous les obstacles qu'elle a surmontés pour se constituer en instrument de pensée efficace. La théorie abstraite exposée comme un monument logique isolé provoque l'admiration et fige la pensée. La théorie abstraite conquise au terme d'un parcours de questions significatives et de révisions motivées[1], provoque les transferts d'intuition, la mobilité de la pensée, la capacité de résoudre des problèmes. Elle a des racines pour l'alimenter.

Voyons maintenant à quels lecteurs cette étude est destinée. L'idée d'analyser l'évolution d'une notion à travers une succession de contextes problématiques de plus en plus généraux *ne peut évidemment pas inspirer directement un enseignement d'initiation.* La motivation d'un premier enseignement se trouve en effet dans les phénomènes intrigants, les questions curieuses, et non dans les concepts qui servent d'instruments pour en parler et y répondre. L'intérêt pour les concepts eux-mêmes, que ce soit sur un plan mathématique ou épistémologique, ne vient qu'après. Il est le fait d'une pensée qui réfléchit sur elle-même.

Mais une telle réflexion peut fournir un fil conducteur pour l'enseignement. En particulier, parcourir les étapes de généralisation successives d'une théorie peut inspirer un enseignement en spirale. On dit souvent – à raison –, que les enseignants doivent en savoir plus que leurs élèves. Toutefois, si les choses qu'ils savent en plus ne sont que des théories sans racines, fussent-elles brillantes, ils en seront embarrassés. Le savoir supplémentaire dont les enseignants ont un pressant besoin, c'est un savoir à la fois mathématique et épistémologique, ce sont des mathématiques alimentées par l'expérience.

2 Un exemple élémentaire

Comme nous l'avons dit, toute cette étude porte sur la proportionnalité et les phénomènes apparentés. Notre propos sera simplifié si nous commençons par un exemple familier qui illustre les diverses facettes de l'idée de proportionnalité. Presque tous les matériaux dont sont faits les objets usuels peuvent nous fournir un tel exemple. Pour fixer les idées, considérons l'aluminium.

(1) Une fonction. Supposons que nous disposions d'un certain nombre d'objets en aluminium, des gros, des moyens, des petits, dans le désordre. Mesurons le volume et la masse de chacun et disposons nos résultats en tableau, le volume d'un objet à gauche et sa masse en regard sur la même ligne (voir tableau 1). Ce tableau comporte autant de lignes que nous avons d'objets. Mais nous pouvons toujours l'étendre en y écrivant le volume et la masse d'un nouvel objet en aluminium absolument quelconque.

[1] On parle beaucoup aujourd'hui du *constructivisme* comme philosophie de l'enseignement. Mais si ce que l'on enseigne est, par nécessité, soumis à des révisions, cela signifie que le savoir ne se construit pas comme une maison, au départ d'un plan préétabli, et en ajoutant à chaque étape de nouvelles briques à la partie déjà définitivement en place. Dans la construction du savoir, il faut au contraire refaire le plan à diverses reprises.

On dit qu'il existe une *fonction* qui à tout volume d'aluminium fait correspondre sa masse et réciproquement. Le tableau 1 représente une petite partie de cette fonction.

volume	masse
1 dm^3	$2,7$ kg
2 dm^3	$5,4$ kg
5 dm^3	$13,5$ kg
20 dm^3	54 kg
12 dm^3	$32,4$ kg
15 dm^3	$40,5$ kg
8 dm^3	$21,6$ kg
3 dm^3	$8,1$ kg
...	...

Tableau 1.

(2) Deux additions. On peut additionner les volumes : par exemple rassembler 5 dm^3 et 2 dm^3. On peut aussi additionner les masses : par exemple ajouter 4 kg à 10 kg. Ainsi la fonction en question fait correspondre une grandeur munie d'une somme (le volume) à une autre grandeur munie elle aussi d'une somme (la masse).

(3) Les sommes se correspondent. Prenons deux éléments dans la première colonne du tableau et faisons-en la somme :

$$2 \text{ dm}^3 + 3 \text{ dm}^3 = 5 \text{ dm}^3.$$

Celle-ci se trouve dans le tableau en regard de la somme des masses correspondantes :

$$5,4 \text{ kg} + 8,1 \text{ kg} = 13,5 \text{ kg}.$$

Ainsi, une somme de volumes a pour masse la somme des masses correspondantes et réciproquement.

(4) La proportionnalité. Deux volumes quelconques sont entre eux comme les masses correspondantes. Par exemple 2 dm^3 est à 3 dm^3 comme $5,4$ kg est à $8,1$ kg. On exprime souvent cela en abrégé sous la forme

$$\frac{2}{3} = \frac{5,4}{8,1}.$$

(5) Égalité des rapports internes. On exprime aussi cette dernière propriété autrement, à savoir en parlant de *rapports internes*. On passe de 2 à 3 dm^3 en multipliant 3 dm^3 par 1,5 ou 3/2. Le rapport est le même entre les masses correspondantes : on passe de $5,4$ kg à $8,1$ kg en multipliant $5,4$ kg par 1,5 ou 3/2. L'adjectif *interne* exprime le fait que les rapports considérés sont internes à une colonne du tableau.

(6) La règle de trois. La règle de trois est une expression calculatoire de la même situation. Si 2 dm^3 pèsent $5,4$ kg, alors 1 dm^3 pèse 2 fois moins, c'est-à-dire $2,7$ kg. Mais alors 3 dm^3 pèsent 3 fois plus, c'est-à-dire $8,1$ kg.

(7) Le rapport externe. Dans notre exemple, ce que l'on désigne du nom de *rapport externe* est la masse volumique, qui est de $2,7$ kg/dm^3. On passe d'un volume quelconque à la masse correspondante en multipliant le volume par la masse volumique. Par exemple :

$$3 \text{ dm}^3 \times 2,7 \text{ kg/dm}^3 = 8,1 \text{ kg}.$$

L'adjectif *externe* exprime le fait que le rapport en question fait sortir d'une colonne pour aller vers l'autre.

(8) Des accroissements constants. Si dans la première colonne du tableau on passe de chaque ligne à la suivante en ajoutant toujours la même quantité, il en va de même dans la deuxième colonne, et réciproquement. C'est ce qu'illustre le tableau 2.

volume	masse
1 dm^3	$2,7$ kg
2 dm^3	$5,4$ kg
3 dm^3	$8,1$ kg
4 dm^3	$10,8$ kg
5 dm^3	$13,5$ kg
6 dm^3	$16,2$ kg
7 dm^3	$18,9$ kg
8 dm^3	$21,6$ kg
...	...

Tableau 2.

(9) Un graphique en ligne droite. Si on porte les masses en fonction des volumes dans un système d'axes gradués régulièrement, on obtient un graphique en ligne droite.

(10) Une pente constante. Ce graphique monte avec une pente constante. Cette pente peut être identifiée à la masse volumique.

(11) Une formule, une fonction du premier degré. La masse m s'exprime en fonction du volume v par la formule $m = av$, dans laquelle a représente la masse volumique. La fonction qui se trouve au second membre de cette égalité est du premier degré.

Ce sont-là onze facettes de la linéarité, observées sur un exemple particulier et à un niveau d'abstraction modéré. Elles nous serviront de référence – par analogie et constraste –, pour parler ci-après de la linéarité à d'autres niveaux, plus élémentaires ou plus avancés. La multiplicité même de ces facettes montre que le concept de linéarité est moins immédiat qu'on n'aurait tendance à le croire.

Sur les tableaux de proportionnalité en général , voir le chapitre 5.

3 Les rapports de grandeurs

> Un rapport est la relation, telle ou telle, selon la taille, entre deux grandeurs du même genre.
>
> Euclide

3.1 Avant les rapports, les grandeurs elles-mêmes

La proportionnalité (ou la linéarité) a des antécédents. Tout commence avec les grandeurs. Rappelons donc brièvement comment celles-ci apparaissent dans l'expérience commune.

Les objets ont, selon le cas, une longueur, une hauteur, une aire, un volume, une masse, ... Ce sont là divers types de grandeurs. S'intéresser à un type de grandeur, c'est donc regarder les objets d'un certain point de vue.

Une fois que l'on a fixé son attention sur un type de grandeur, la première démarche consiste à vérifier si deux objets ont ou non la même grandeur. S'il s'agit de la longueur de baguettes, de tiges ou de segments, c'est facile : on les juxtapose. Pour les masses de deux objets, on les met sur les plateaux d'une balance. L'égalité ou l'inégalité des aires est souvent plus difficile à vérifier, même pour des surfaces planes. En effet, leur forme empêche souvent lorsqu'on les superpose, soit de les mettre en coïncidence, soit d'inclure l'une dans l'autre. Toutefois on vérifie sans peine par superposition que deux figures planes sont isométriques et donc de même aire. Vérifier l'égalité ou l'inégalité de deux volumes est aussi bien souvent difficile. Une exception toutefois : celle des « capacités », qui sont des volumes de liquide remplissant des récipients. Dans ces cas, on procède par transvasements. Les inégalités de grandeurs conduisent naturellement à ce que Piaget appelle des *sériations*, opérations qui consistent à classer des objets par ordre de grandeurs croissantes ou décroissantes.

Un dernier préliminaire de la linéarité, c'est l'addition des grandeurs. Elle est le plus souvent une opération simple : on met deux tiges bout à bout pour additionner leurs longueurs, on rassemble deux objets pour additionner leurs masses, et de même on rapproche deux surfaces pour additionner leurs aires et deux solides pour additionner leurs volumes.

Jusqu'ici nous avons parlé de diverses grandeurs que peuvent avoir des objets. Mais les intervalles de temps, qui ne sont pas des objets au sens immédiat de ce terme, ont aussi une grandeur (leur durée), et l'on est amené à les comparer, sérier, additionner. Ils posent un problème particulier du fait qu'ils ne se transportent pas dans le temps comme les objets se transportent dans l'espace. Pour manipuler des intervalles de temps, il faut identifier des phénomènes de même durée et reproductibles.

L'observation suivante est évidente, mais elle jouera un grand rôle dans la suite de ce travail : *on ne peut jamais comparer ou additionner que deux grandeurs de même espèce* : cela n'a pas de sens de comparer ou additionner par exemple une longueur et une masse, ou une surface et un temps.

Sur les grandeurs en général, voir les chapitres 1, 2 et 3.

3.2 Deux grandeurs de natures différentes

Observons quelques phénomènes familiers. Pour peindre une surface deux fois plus grande qu'une autre, on a besoin de deux fois plus de peinture. Si on marche deux fois plus longtemps – d'un même pas –, on va deux fois plus loin. Avec deux fois plus d'essence, on va deux fois plus loin. Si on ensemence un champ deux fois plus grand, on obtient sauf exception une récolte deux fois plus abondante. Deux fois plus de longueur d'un câble pèse deux fois plus lourd. Deux fois plus de surface découpée dans une tôle pèse deux fois plus lourd.

Mais les choses ne sont pas toujours aussi régulières. Un être humain deux fois plus âgé qu'un autre n'est ni deux fois plus haut, ni deux fois plus lourd que le premier. Un carré de côté double d'un autre n'a pas une aire double, mais bien une aire quadruple. Quand une voiture va deux fois plus vite, sa distance de freinage en cas d'urgence est plus que deux fois plus longue.

Quoiqu'il en soit, dans beaucoup de phénomènes, *deux fois* d'un côté correspond à *deux fois* de l'autre.

Et d'autre part, le rapport le plus simple à saisir est celui *du simple au double*. Mais si on double le double, on obtient le rapport *de un à quatre*. Le rapport *de un à un demi* est aussi un rapport facile. Par exemple, couper une ficelle ou une bandelette en deux parts égales est une opération élémentaire. La diviser exactement en trois exige par contre un tâtonnement. Ensuite couper deux fois en deux amène à *un quart*. Lorsqu'on dispose d'un demi, on arrive facilement à *un et un demi*. Il existe ainsi un petit nombre de rapports que nous concevons facilement. Nous n'envisagerons que ceux-là pour commencer et nous n'introduirons des rappports plus compliqués qu'à la section 4.

Dans chacune des situations évoquées ci-dessus, nous avons mis deux grandeurs en correspondance. Par exemple, toute surface à peindre exigeait un volume déterminé de peinture, et avec un volume donné de peinture, on peut peindre une surface bien déterminée. Nous pouvons représenter cela par un tableau en deux colonnes. Dans la première nous inscrivons les aires a_1, a_2, a_3, ... des surfaces à peindre, et en face les volumes de peinture v_1, v_2, v_3, ... correspondants. Bien entendu, un tel tableau n'aura jamais qu'un nombre fini de lignes, mais on peut toujours l'allonger en y inscrivant de nouvelles aires et de nouveaux volumes.

aire	vol.
a_1	v_1
a_2	v_2
a_3	v_3
a_4	v_4
a_5	v_5
a_6	v_6
...	...

Tableau 3.

Ce tableau est l'expression d'une *fonction*. La notion de fonction est très importante pour nous : en effet, toutes les situations que nous envisagerons dans la suite auront pour première expression une fonction, représentable par un tableau en deux colonnes.

Le tableau 3 possède *la propriété des rapports internes* au sens où, comme nous l'avons vu, si on passe, dans la colonne de gauche, d'une certaine aire à une autre deux fois plus grande (ou quatre fois, ou une fois et demie plus grande, ou deux fois plus petite, ...) on trouve dans la colonne de droite un volume double (ou, selon le cas, quatre fois, ou une fois et demie plus grand, ou deux fois plus petit, ...). On exprime aussi cela en disant que les aires et les volumes sont proportionnels. On dit également, en choisissant à titre d'exemple deux couples de valeurs correspondantes, que

$$a_1 \text{ est à } a_2 \text{ comme } v_1 \text{ est à } v_2.$$

À cause de cette propriété, on dit que le tableau 3 est un *tableau de proportionnalité*. Rappelons que les rapports en question sont appelés *rapports internes* parce qu'ils concernent deux grandeurs situées à l'intérieur d'une même colonne.

Ce tableau possède aussi *la propriété de la somme*. En effet, pour peindre deux surfaces, on peut – mais cela va sans dire ! –, rassembler les deux volumes de peinture préparés pour chacune d'elles. En se référant au tableau, on exprime cela de la manière suivante : à la somme de deux éléments de gauche (par exemple a_1 et a_2, et nous noterons leur somme $a_1 \oplus a_2$) correspond la somme des deux éléments correspondants de droite (ici $v_1 \oplus v_2$). Nous utilisons le symbole $\oplus$ pour désigner la somme de deux grandeurs, pour éviter la confusion avec la somme de deux nombres.

3.3 Deux grandeurs de même nature

Passons maintenant à la proportionnalité entre deux grandeurs de même nature. Elle va nous apporter tout un lot de propriétés nouvelles. Nous commencerons par quelques situations concrètes qui font voir des proportions entre longueurs. Les figures habituellement associées au théorème de Thalès pourraient en inspirer d'autres, que le lecteur évoquera sans peine. Nous passerons ensuite aux masses. Pour être complet, il faudrait aussi évoquer les aires, les volumes, les durées, ...

Les objets semblables

Très jeunes, les enfants s'aperçoivent que deux objets ont la même forme, même si leurs dimensions sont différentes. Par exemple, ils voient bien qu'un petit bateau est un modèle réduit d'un grand, ou qu'une photographie est un agrandissement d'une autre. Considérons donc, à titre d'exemple, le dessin d'un tangram et sa reproduction en deux fois plus grand (voir figure 1).

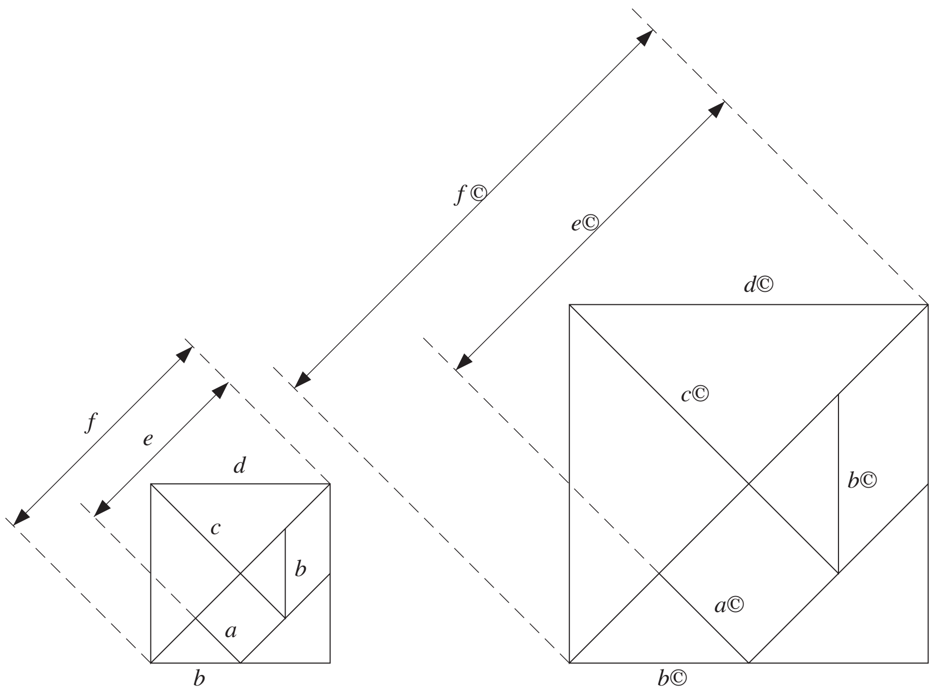

Fig. 1

À tout segment tel que a de la figure de gauche correspond un segment a' deux fois plus grand dans la figure de droite. Disposons dans la première colonne d'un tableau les segments (ou plutôt les lettres qui les représentent) relevés dans le petit tangram. Il y en a de six longueurs différentes. Écrivons en regard les segments du tangram agrandi (voir tableau 4). Ce tableau représente une fonction, en l'occurrence avec un nombre fini de lignes. On passe d'un segment de gauche au segment correspondant de droite en multipliant la longueur par deux.

a	a'
b	b'
c	c'
d	d'
e	e'
f	f'

Tableau 4.

L'existence d'un rapport entre les deux éléments d'une même ligne du tableau est une propriété nouvelle pour nous : en effet, à la section précédente, nos fonctions mettaient en relation deux grandeurs de natures différentes, et il n'existe aucun rapport, aucune comparaison possible entre de telles grandeurs. Lorsque comme ici il existe toujours un même rapport entre éléments correspondants de la fonction, nous appelons ce rapport le *rapport externe*.

D'autre part, le tableau 4 possède aussi la *propriété des rapports internes*, comme on le vérifie sur quelques exemples : ainsi, c vaut deux fois a, et c' vaut deux fois a' ; de même f vaut deux fois c, et f' vaut deux fois c' ; ou encore e vaut une fois et demie c, et de l'autre côté e' vaut une fois et demie c'. Ce dernier cas relève aussi, si on veut, de la *propriété de la somme* : on peut dire en effet que e, qui vaut $a \oplus c$, correspond dans le tableau à e', qui vaut $a' \oplus c'$.

Nous avons donc maintenant affaire à un tableau qui possède les trois propriétés respectivement du rapport externe, des rapports internes et de la somme. Bien entendu, nous n'avons vérifié ces deux dernières propriétés que sur quelques cas, mais nous nous satisferons pour l'instant de cette vérification partielle. D'autre part, il y dans le tangram au moins un rapport plus compliqué que les quelques rapports simples que nous avons identifiés jusqu'ici. En effet, le rapport de a à b n'est ni le rapport de un à deux, ni le rapport de un à un et demi. Il en va de même du rapport de b à c, et de celui de c à d. C'est un rapport inconnu comme nous en trouverons quelques-uns sur notre chemin[2].

Les formats de papier

Nous venons d'engendrer un tableau de proportionnalité à partir de deux figures semblables. Restons dans le domaine des longueurs et construisons une fonction à partir d'une toute autre expérience.

Si on plie une feuille de format A3 en deux dans le sens de sa largeur, on obtient le format A4. Si on fait de même avec ce dernier, on obtient le format A5. Et on peut continuer de même. Chose remarquable, si on dispose toutes les feuilles rectangulaires obtenues comme sur la figure 2 qui les représente à l'échelle, on s'aperçoit que les diagonales de tous les rectangles sont alignées. On n'observe pas ce curieux phénomène avec tous les formats de papier. Par exemple, si on part du format Quarto, on obtient des rectangles dont les diagonales ne se superposent qu'une fois sur deux. C'est ce qu'on voit sur la figure 3, qui les montre elle aussi à l'échelle.

[2] Notre propos est de *construire* la notion de proportionnalité. Dans un exposé déductif, on ne laisse pas traîner de difficulté non résolue. Par contre lorsqu'on construit un concept en cherchant une voie d'accès pas trop difficile, on est amené non pas à ignorer, mais à renvoyer à plus tard certaines questions inaccessibles à un stade donné de la construction. Comment croire en effet que l'on pourrait régler d'emblée le problème des rapports irrationnels, ou même celui des rapports exprimés par des fractions compliquées ? La connaissance de quelques rapports simples nous semble être un soutien assez clair à ce stade de la construction.

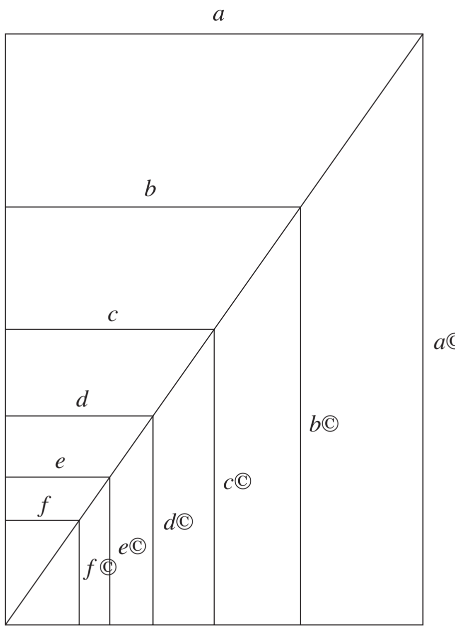

Fig. 2

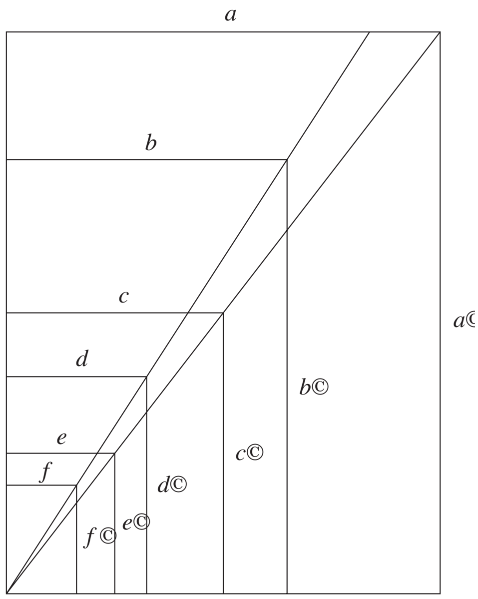

Fig. 3

Revenons à la figure 2, et disposons dans la première colonne d'un tableau tous les petits côtés des rectangles, et dans la seconde colonne tous les grands côtés (voir tableau 5). On dirait que ce tableau est comme le précédent constitué sur la base d'un même rapport entre a et a', b et b', etc. Mais alors que, dans le cas du tangram agrandi, ce rapport externe était de un à deux, ici ce n'est aucun des rapports simples qui nous sont familiers. En effet a ne va dans a' ni deux fois, ni une fois et demie, ni une fois et un quart... Mais il semble pourtant, à vue, que a va dans a' autant de fois que b dans b', c dans c', etc. Laissons en suspens la détermination exacte de ce rapport.

a	a'
b	b'
c	c'
d	d'
e	e'
f	f'

Tableau 5.

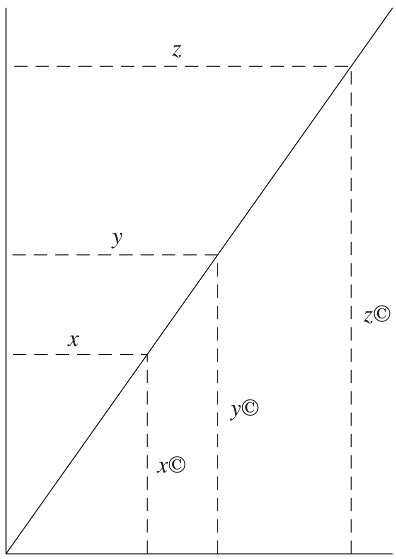

Fig. 4

Quoiqu'il en soit, nous reconnaissons dans le tableau 5 l'égalité de quelques rapports internes. En effet, étant donné la façon dont nous avons obtenu nos rectangles par pliage, nous voyons par exemple que c va deux fois dans a et c' deux fois dans a', que e va deux fois dans c et e' deux fois dans c'. De même f va quatre fois dans b, et f' quatre fois dans b'. Ces quelques exemples nous portent à croire que le tableau 4 satisfait à la propriété des rapports internes.

En définitive, ce que la figure 2 suggère, c'est que si l'on assemble des rectangles de manière que leurs diagonales se superposent de la manière indiquée, les côtés de ces rectangles sont proportionnels. Ainsi, pour créer des couples de segments de même rapport, il suffit de dessiner, comme sur la figure 4, une demi-droite dans un angle droit et d'ajouter à la figure des segments tels que x, x', y, y', etc. C'est là une sorte de machine à fabriquer des segments proportionnels.

Sur les figures semblables, voir le chapitre 2. Sur le théorème de Thalès, qui est la clef des similitudes, voir chapitre 6.

La balance

Avec une balance ordinaire, on peut par tâtonnement créer une masse égale à une masse donnée, et donc ensuite doubler une masse. Il faut pour cela disposer d'une matière qui, telle la plasticine, se laisse couper en morceaux quelconques. On peut aussi diviser une masse en deux parts égales. On arrive ainsi à prendre une fois et demie une masse donnée. On voit qu'on peut dans le domaine des masses, réaliser les quelques rapports simples auxquels nous nous sommes bornés jusqu'ici. Nous laissons au lecteur le soin d'imaginer comment l'on peut non seulement réaliser ces rapports, mais aussi, lorsque deux masses sont données, vérifier si elles ont entre elles un de ces rapports simples.

Il existe d'ailleurs une façon commode de réaliser ou de vérifier un rapport de masses donné. Par exemple, pour réaliser le rapport de deux à trois, qui est aussi le rapport de un à un et demi, on construit une balance dont les longueurs des bras sont entre elles comme deux est à trois (voir figure 5). Une telle balance est en équilibre lorsque les masses posées sur ses plateaux sont entre elles comme deux est à trois, la masse deux étant du côté du bras de longueur trois et la masse trois du côté du bras de longueur deux. On a là une sorte de machine à fabriquer des masses proportionnelles.

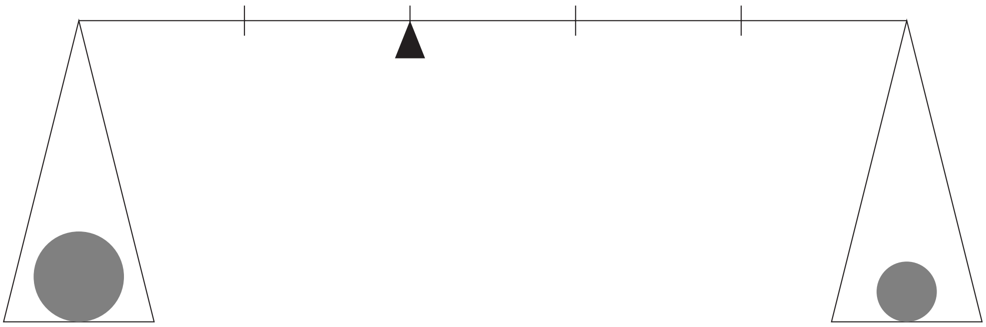

Fig. 5

Créons donc à l'aide d'une telle balance un ensemble de couples de masses (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), etc. et mettons-les en tableau (voir tableau 6). Ce tableau possède la propriété des rapports internes. Cela signifie que si la balance de la figure 5 est équilibrée, elle le demeurera si on double les deux masses, ou si on les multiplie par un et demi, etc. Le tableau 5 possède aussi la propriété de la somme, dont il est facile de se donner un exemple.

m_1	m'_1
m_2	m'_2
m_3	m'_3
m_4	m'_4
m_5	m'_5
m_6	m'_6
...	...

Tableau 6.

Sur les poids et les balances, voir chapitre 2.

4 Numérisation des rapports, mesures

> MESURE. s. fem. Ce qui sert à connoître la grandeur, l'étenduë, la quantité de quelque corps. La *mesure* des longueurs est la ligne ou grain d'orge, le pouce contenant douze lignes, le pied douze pouces, le pas geometrique cinq pieds, la toise six pieds, la perche des Geometres dix pieds ; en quelques lieux elle va jusqu'à vingt-deux pieds ; le stade cent vingt-cinq pas ; le mille huit stades ; la lieue Françoise trois mille.
>
> A. Furetiere (1694)

Reprenons les choses à la base. Deux grandeurs de même espèce peuvent être comparées pour voir si elles sont égales, ou si l'une est plus grande que l'autre (voir 3.1). Souvent dans le quotidien on ne se contente pas de constater l'inégalité : on la qualifie en disant que telle grandeur est un peu plus grande que telle autre, ou beaucoup plus grande, ou énormément plus grande, etc. En s'exprimant ainsi, on compare certes dans chaque cas deux grandeurs, mais on va vers la comparaison des rapports. En effet, si une grandeur est beaucoup plus grande qu'une autre, le rapport entre les deux est plus grand que si la première est seulement un peu plus grande que l'autre.

Pour dépasser cette vue qualitative des rapports, nous avons chiffré quelques rapports simples. Les tout premiers, ceux de un à deux, de un à un demi, et de un à un et demi, étaient parfois simples à *percevoir*. Par exemple on voit à peu près bien qu'un objet est deux fois plus long qu'un autre lorsque les deux ne sont ni trop grands ni trop petits et qu'ils sont disposés parallèlement dans un plan frontal par rapport à l'observateur. Il est déjà beaucoup plus difficile d'estimer si un objet est deux fois plus lourd qu'un autre, en les soupesant l'un dans une main et l'autre dans l'autre. Estimer qu'un intervalle de temps est deux fois plus long qu'un autre ne peut se faire à peu près correctement que pour des intervalles situés dans une gamme de durées assez restreinte et proches l'un de l'autre dans le temps.

S'il est vrai que les rapports de grandeurs ne peuvent être *perçus* que dans de tels cas simples, par contre des rapports un peu plus compliqués peuvent être *construits* ou *vérifiés* par des opérations mécaniques. Comme nous l'avons vu, on engendre par itération du doublement les rapports de un à quatre, ou de un à huit, et par itération du partage en deux parts égales, les rapports de un à un quart ou un huitième. Par reports successifs, on vérifie sans peine qu'une tige est trois ou quatre ou cinq fois plus grande qu'une autre. Par contre un rapport de quatre à sept par exemple est déjà beaucoup plus difficile à vérifier.

Ainsi, caractériser numériquement tous les rapports possibles n'est pas une question triviale. Il s'agit du problème de la mesure, qui est l'objet de cette nouvelle section. Ce sera un voyage comportant un bon nombre d'étapes.

4.1 Fixer une unité de mesure

Nous pourrions attaquer la question sous l'angle le plus général possible, en nous demandant comment attacher un nombre au rapport de deux grandeurs quelconques. Mais l'intérêt principal de pouvoir chiffrer les rapports réside dans la possibilité, pour chaque domaine de grandeur (les longueurs, les masses, etc.) de rapporter chaque grandeur à une grandeur particulière choisie pour unité. Faire cela, c'est ramener la comparaison des grandeurs d'une même espèce à la comparaison de leur rapport chiffré à l'unité, c'est-à-dire de leur mesure. Très tôt dans l'histoire, les communautés humaines ont découvert cette pratique extraordinairement féconde qui consiste à choisir dans chaque domaine une grandeur de référence (ou un petit nombre de telles grandeurs). Nous plaçons la suite de notre exposé dans cette perspective-là.

Sur le choix d'une unité, qu'elle soit de rencontre ou conventionnelle, voir les chapitres 1, 2.

4.2 Mesure en nombre entier et encadrement

Multiplier une grandeur a par un nombre naturel[3] n, c'est faire la somme de n grandeurs égales à a, ce qui se note na.

[3] Nous supposons les nombres naturels connus, au moins dans leurs propriétés les plus élémentaires. Par ailleurs, ce n'est pas ici le lieu de rappeler en détail comment on les construit, que ce soit dans leur aspect cardinal, ou dans leur aspect ordinal. Cette construction a des analogies avec celle des grandeurs. On trouvera quelques compléments d'information à ce sujet dans N. Rouche [1992]. Bien entendu, dans la réalité, les enfants n'apprennent pas d'abord

Soient deux grandeurs u et a, et n un nombre naturel. Si u multipliée par n est égale à a, autrement dit si $a = nu$, alors on dit que n est la *mesure* de a dans l'unité u. On dit aussi que *u va n fois dans a*, ou encore que *u est contenue n fois dans a*. Le rapport entre les grandeurs u et a est ainsi caractérisé par le seul nombre n.

Il arrive souvent, lorsqu'on a deux grandeurs u et a, avec u plus petite que a, que pour un certain nombre n, nu soit plus petite que a, et que par contre $(n+1)u$ soit plus grande que a. On dit alors que la grandeur a est *encadrée* par nu et $(n+1)u$.

Dans un tel cas, la mesure de a n'est connue qu'approximativement. Une première façon d'affiner la mesure consiste simplement à choisir une unité plus petite. Mais on voit tout de suite combien une telle décision est peu commode. En effet si, pour chaque mesure que l'on veut faire, on choisit une unité assurant la précision que l'on désire, on obtiendra des mesures rapportées à toutes sortes d'unités, qui ne seront pas facilement comparables entre elles. Il faut donc chercher des solutions plus commodes.

Sur les mesures en nombres entiers et les encadrements, voir les chapitres 1, 2.

4.3 Les unités de commune mesure

Lorsque l'unité u n'est pas contenue un nombre naturel de fois dans une grandeur a, il arrive qu'il existe une troisième grandeur c qui soit contenue un nombre entier m de fois dans u, et aussi un nombre entier n de fois dans a. Autrement dit, on a alors

$$u = mc \quad \text{et} \quad a = nc.$$

La grandeur c est appelée *unité de commune mesure* entre a et b. On dit alors que

u est à a comme m est à n.

Le rapport entre les deux grandeurs u et a est dans ces conditions caractérisé par deux nombres.

On se demande naturellement si, étant donné deux grandeurs, il en existe toujours une troisième qui soit unité de commune mesure pour les deux autres. La réponse n'a rien d'évident. On la doit aux Pythagoriciens vers les VIe ou Ve siècles avant J.-C. Et cette réponse est *non*. Parfois il y a une unité de commune mesure, et parfois il n'y en a pas. Dans le premier cas, on dit que le rapport des deux grandeurs est *rationnel*, et dans le second qu'il est *irrationnel*[4].

4.4 Les mesures fractionnaires

Ramener la comparaison de deux grandeurs à celle de deux nombres est une idée intéressante, quoique recourir à un seul nombre est évidemment plus pratique. Mais nous avons vu ci-dessus qu'étant donné deux grandeurs u et a, u étant la plus petite, on ne peut pas toujours trouver un nombre naturel n qui soit la mesure de a dans l'unité u. Toutefois si on ne peut pas trouver un nombre naturel, peut-être peut-on trouver un nombre d'un autre type ? Ou alors, si on n'a pas encore de nombre adéquat, *comment étendre la notion de nombre* pour que, quelles que soient deux grandeurs u et a, on trouve un nombre μ tel que $a = \mu u$? Pour arriver à ce résultat, l'humanité est passée par plusieurs étapes.

---

les naturels, et ensuite les grandeurs : ces deux apprentissages non seulement progressent simultanément, mais encore s'épaulent fortement l'un l'autre. Cette remarque suffit à montrer que notre étude ne saurait être considérée comme un projet d'enseignement. En dissociant ici dans une certaine mesure les naturels des grandeurs, nous avons pour seul objectif de montrer le plus clairement possible comment les mesures dépendent des naturels.

[4] L'adjectif *irrationnel* renvoie à la difficulté de rendre raison de tous les rapports entre grandeurs en recourant aux seuls nombres naturels. Il est remarquable d'ailleurs que le mot *raison* vienne du latin *ratio*, qui veut dire *rapport*.

Repartons du fait que toute grandeur peut-être multipliée par un nombre naturel n quelconque. Cette opération de multiplication possède une réciproque : toute grandeur peut être partagée (divisée) en n parts égales, quel que soit le nombre naturel n. Diviser une grandeur a par n, c'est trouver une grandeur b telle que $a = nb$. Le résultat de la division de a par n s'écrit $b = \frac{a}{n}$ ou $b = \frac{1}{n}a$.

On peut aussi enchaîner une division d'une grandeur a par un nombre naturel n, ce qui donne $\frac{1}{n}a$, et une multiplication du résultat par un nombre naturel m, ce qui donne $m(\frac{1}{n}a)$. Comme on obtient le même résultat en exécutant les deux opérations dans l'ordre inverse[5], on peut supprimer les parenthèses et écrire simplement $\frac{m}{n}a$. On dit alors que $\frac{m}{n}$ est un *opérateur fractionnaire* agissant sur a.

Rappelons que, si deux grandeurs u et a sont telles que $a = nu$, nous disons que n est la *mesure de a dans l'unité u*. Si maintenant deux grandeurs a et u sont telles que $a = \frac{m}{n}u$, nous dirons que $\frac{m}{n}$ est la *mesure de a dans l'unité u*. Il s'agit cette fois d'une *mesure fractionnaire.* La fraction comme opérateur composé (deux opérations enchaînées) se mue ici en un nombre qui exprime un rapport. Ce changement de statut de la fraction n'est pas facile à admettre, les enseignants en savent quelque chose.

Étant donné deux grandeurs u et a, existe-t-il toujours deux nombres naturels m et n tels que $a = \frac{m}{n}u$? La réponse est *non*, comme tout à l'heure, lorsque nous nous interrogions sur l'existence d'une commune mesure entre deux grandeurs quelconques. Nous ne nous attarderons pas ici sur cette impossibilité.

Dans la pratique, on trouve toujours une mesure exprimable par une fraction (sachant bien par ailleurs que toute mesure est approximative). C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous supposerons qu'étant donné deux grandeurs u et a de même nature, il existe toujours un nombre α tel que $a = \alpha u$. Ce nombre α est l'expression numérique du rapport entre u et a.

Quoiqu'il en soit, les mesures fractionnaires ont été très communément utilisées au cours de l'histoire. Mais elles ont un inconvénient grave. En effet, lorsqu'on a mesuré des grandeurs, on est souvent amené à calculer avec les mesures. L'ennui est que le calcul sur les fractions n'est pas facile, comme en témoignent les écoliers.

Examinons maintenant un autre perfectionnement de l'idée de mesure.

Sur les mesures fractionnaires, voir chapitre 2.

4.5 Les mesures décimales

Une démarche importante dans l'histoire de l'humanité a consisté à mesurer toute grandeur non seulement dans une unité convenue, mais encore en utilisant ses sous-unités décimales, de sorte que le nombre exprimant la mesure soit décimal, avec toutes les facilités de calcul que cela comporte. Ceci fait, on dispose de la notion la plus répandue de mesure d'une grandeur. Soit u l'unité convenue : à toute grandeur a nous pouvons associer le nombre décimal α tel que $a = \alpha u$. Le nombre α peut être un décimal très long. Il peut même être de longueur infinie, et être périodique ou non. Nous n'examinerons pas ces phénomènes ici, d'autant que, dans la pratique, toute mesure est approximative et s'arrête à quelques chiffres après la virgule.

Sur les mesures décimales, voir chapitre 3.

[5] Ce qui n'a rien d'évident : couper une tarte en 4 et prendre 3 morceaux, c'est bien autre chose que de partager 3 tartes entre 4 personnes. Sur cette difficulté, cf. N. ROUCHE [1992].

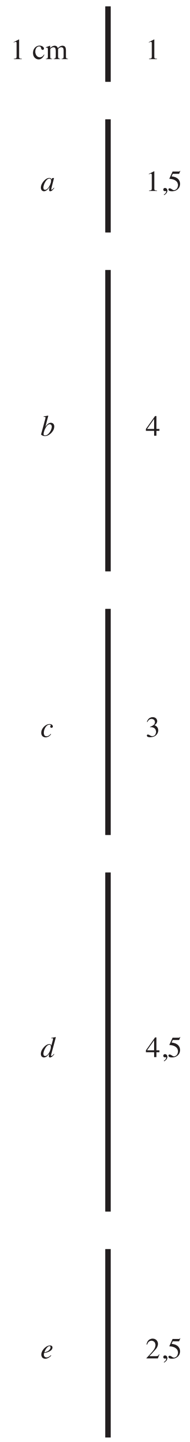

Fig. 6

4.6 Le rapport entre deux nombres

Nous venons de voir, très sommairement, comment les nombres fractionnaires et décimaux peuvent naître des rapports entre grandeurs[6]. Mais les nombres eux-mêmes[7], munis des opérations que nous connaissons, se comportent à beaucoup d'égards comme des grandeurs. En particulier, entre deux nombres quelconques, nous pouvons définir un rapport. Soient α et β deux nombres (α non nul). Il existe un nombre ρ tel que $\beta = \rho\alpha$. Or, nous savons que $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$. En gros, le nombre ρ dit combien de fois α va dans β. Nous dirons que ρ est le *rapport* entre α et β.

4.7 Un tableau de mesures

Considérons maintenant un tableau dans la première colonne duquel nous disposons des segments, avec chaque fois leur mesure en regard dans la deuxième colonne : voir figure 6. Il n'y a pas de *rapport* (au sens technique du terme rapport) entre un segment et sa mesure : on ne peut pas augmenter ou diminuer un segment en espérant obtenir un nombre. Le tableau en question ne comporte pas de rapport externe. Le principe qui a permis de le constituer est la mesure des longueurs de la première colonne.

Par contre il existe évidemment des rapports internes à la première colonne, et aussi – nous venons de le voir –, des rapports internes entre les nombres de la deuxième colonne. Il résulte des propriétés de la mesure que ces rapports sont égaux. Montrons-le sur un exemple. Les grandeurs a et b de la figure 6 sont telles que $a = 1,5$ cm et $b = 4$ cm. Le rapport des deux mesures est ici $\frac{1,5}{4}$. Par ailleurs $\frac{b}{4} = 1$ cm. Il vient donc que $a = 1,5(\frac{b}{4}) = \frac{1,5}{4}b$, et le rapport de a à b est donc bien de $\frac{1,5}{4}$.

Enfin nous retrouvons ici la propriété de la somme. En effet, la mesure de la somme de deux longueurs est égale à la somme de leurs mesures.

Ces résultats, que nous venons de montrer sur un tableau de longueurs, sont valables pour une grandeur de nature quelconque. Quel est l'avantage d'avoir ainsi mis des mesures (des nombres) en regard des grandeurs ? Cet avantage est décisif. Comparer des grandeurs, les additionner, les multiplier par un nombre, les diviser en parts égales sont des opérations souvent malaisées, voire impossibles dès qu'elles mettent en œuvre des objets difficiles à manipuler vu leur encombrement ou leur poids. Les mesures ont pour vocation, pour fonction essentielle, de se substituer aux grandeurs chaque fois que c'est possible. Les mesures sont « les grandeurs passées sur le papier et dans la tête ». Elles représentent *fidèlement* les grandeurs parce que, comme nous venons de le voir, entre les grandeurs et leurs mesures, il y a proportionnalité : les sommes et les rapports se conservent : on peut manipuler les mesures au lieu des grandeurs elles-mêmes.

[6] C'est bien aussi comme cela qu'ils sont nés dans l'histoire, même si, depuis la fin du XIX[e] siècle, la plupart des traités construisent les nombres dans la théorie des ensembles, ce qui fait que, dans ce cas, ils précèdent la géométrie et les rapports géométriques.

[7] Remarquons que les nombres dont nous parlons sont les réels positifs. Nous nous occuperons des nombres relatifs

Fig. 7

4.8 Changer d'unité

L'unité que l'on choisit pour mesurer des grandeurs est arbitraire : le choix n'obéit qu'à des motifs de commodité. Qu'arrive-t-il si on change d'unité ? Revenons à notre tableau de longueurs de la figure 6. Les longueurs y sont mesurées en centimètres. La figure 7 montre les mêmes longueurs mesurées en pouces : 1 pouce vaut 2,54 cm. Les nouvelles mesures s'obtiennent à partir des anciennes en multipliant celles-ci par la mesure de l'ancienne unité dans la nouvelle. Un phénomène paradoxal déroute beaucoup de gens : c'est que plus l'unité est petite, plus les mesures sont grandes. Les deux dernières colonnes de la figure 7 constituent elles aussi un tableau de proportionnalité.

Sur les changements d'unité, voir le chapitre 3.

4.9 Les représentations de données

S'il est vrai, comme nous l'avons souligné à la section 4.7, qu'il est souvent avantageux de substituer les mesures aux grandeurs, il est parfois utile de revenir des mesures à des grandeurs faciles à percevoir, telles que des longueurs, des secteurs circulaires, etc. Ainsi lorsqu'on dispose d'un ensemble de données sous forme de mesures, on peut les représenter graphiquement, ce qui a l'avantage, par rapport à la consultation d'un tableau de nombres, d'offrir une vue d'ensemble des données et de faciliter les comparaisons.
Montrons sur un exemple qu'une représentation graphique s'obtient à la suite de deux opérations. Le tableau 7 montre les consommations journalières d'eau d'une famille.

alimentation	5 l
vaisselle	8 l
hygiène corporelle	38 l
WC	43 l
lessive	16 l
entretien	10 l

Tableau 7.

D'abord, on choisit une échelle de 1 cm pour 10 litres, en vue de représenter les quantités par des bâtonnets. Le tableau 8 montre dans sa troisième colonne, les longueurs obtenues. Les deux dernières colonnes du tableau expriment une proportionnalité.

à la section 6.

Ensuite il faut construire le graphique, c'est-à-dire dessiner (par exemple) des bâtonnets dont les hauteurs aient les mesures calculées. C'est de nouveau l'expression d'une proportionnalité. La figure 8 montre le diagramme.
On peut aussi transformer ces données en pourcentages de la consommation totale, comme le montre le tableau 9. La réduction à la base 100, si on la fait pour plusieurs familles, facilite la comparaison des proportions d'eau consacrées par ces familles aux différents usages. Par contre elle fait disparaître la communication des valeurs réellement consommées.

alimentation	5 l	0,5 cm
vaisselle	8 l	0,8 cm
hygiène corporelle	38 l	3,8 cm
WC	43 l	4,3 cm
lessive	16 l	1,6 cm
entretien	10 l	1 cm

Tableau 8.

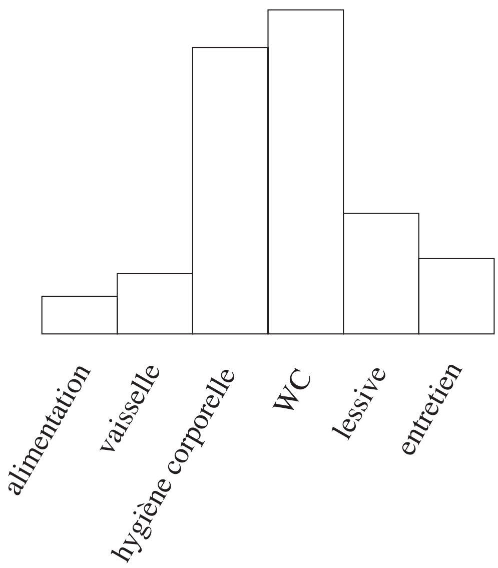

Fig. 8

alimentation	5 l	4,1 %
vaisselle	8 l	6,7 %
hygiène corporelle	38 l	31,6 %
WC	43 l	35,8 %
lessive	16 l	13,3 %
entretien	10 l	8,3 %

Tableau 9.

Les pourcentages peuvent se traduire en diagrammes circulaires. Il faut pour cela les convertir en secteurs circulaires, ce qui est encore une opération de proportionnalité.

Sur divers modes de représentation de données, voir les chapitres 4 et 5.

5 Les rapports de mesures

> L'espace et le temps sont des quantités de nature différente, . . . on sent bien qu'on ne peut diviser l'espace par le temps ; ainsi quand on dit que *les vitesses sont comme les espaces divisés par les temps*, c'est une expression abrégée qui signifie que les vitessses sont comme les rapports des espaces à une même commune mesure, divisés par les rapports des temps à une même commune mesure ; c'est-à-dire que si l'on prend, par exemple, le pied pour la mesure des espaces, et la minute pour la mesure des temps, les vitesses de deux corps qui se meuvent uniformément sont entre elles comme les nombres de pieds parcourus divisés par les nombres de minutes employées à les parcourir, et non pas comme les pieds divisés par les minutes.
>
> J. d'Alembert

Voyons maintenant ce que deviennent les tableaux de proportionnalité lorsqu'on passe des grandeurs aux mesures. L'effet le plus notable de ce passage sera de nous faire retrouver un rapport externe pour les tableaux de proportionnalité entre grandeurs d'espèces différentes.

5.1 Grandeurs de même nature

Commençons toutefois par des grandeurs de même nature, et retournons au tableau 4 qui mettait en regard les longueurs des segments visibles sur un petit tangram et sur un autre deux fois plus grand. Complétons ce tableau en lui adjoignant à gauche une colonne reprenant les longueurs des segments du petit tangram, et à droite une colonne avec les longueurs des segments du grand (voir tableau 10). Pour toutes les mesures, nous avons choisi pour unité la longueur du segment a.

1	a	a'	2
1,41...	b	b'	2,82...
2	c	c'	4
2,82...	d	d'	5,64...
3	e	e'	6
4	f	f'	8

Tableau 10.

Entre la première et la quatrième colonnes du tableau, il y proportionnalité, avec 2 pour rapport externe. On vérifie sans peine pour ces colonnes de mesures la propriété des rapports internes et celle de la somme.

Sur les tableaux de proportionnalité entre grandeurs de même nature, voir le chapitre 5. Dans le même chapitre, on étudie un dessin à l'échelle.

5.2 Grandeurs de natures différentes

Revenons maintenant aux tableaux qui établissent une correspondance entre grandeurs de natures différentes, telles par exemple que des volumes et des masses de solides d'une même matière. Choisissons l'aluminium comme à la section 2 et reprenons dans un tableau quelques volumes et quelques masses (voir tableau 11). Ajoutons à ce tableau deux nouvelles colonnes : une à gauche des volumes et qui représente leurs mesures en dm^3, et une à droite des masses et qui représente leurs mesures dans l'unité kg : voir tableau 12. Ce qui est intéressant maintenant, c'est que la première et la quatrième colonnes sont deux colonnes de nombres. Or nous avons vu qu'entre deux nombres (non nuls), il y a un rapport. Si nous enjambons les deux colonnes centrales, *nous retrouvons un rapport externe* (que nous n'avions pas entre les grandeurs elles-mêmes), et qui se trouve être le même pour tous les couples. Nous avons donc construit un *tableau de proportionnalité entre les mesures.*

vol.	masse
v_1	m_1
v_2	m_2
v_3	m_3
v_4	m_4
v_5	m_5
v_6	m_6
...	...

Tableau 11.

dm^3	vol.	masse	kg
2	v_1	m_1	5,4
3	v_2	m_2	8,1
5	v_3	m_3	13,5
12	v_4	m_4	32,4
15	v_5	m_5	40,5
8	v_6	m_6	21,6
...	...	...	...

Tableau 12.

Ce rapport constant est appelé la *masse volumique* de la matière dont sont faits les corps que nous étudions. Évidemment, cette masse volumique dépend des unités que nous avons choisies. Dans notre exemple, et puisque nous avons choisi pour unité de volume le dm^3 et pour unité de masse le kg, la masse volumique vaut 2,7 kg/dm^3.

Sur le tableau de proportionnalité des mesures, nous retrouvons aussi la propriété des rapports internes : le rapport des mesures de volumes de deux corps est toujours égal au rapport des mesures de leurs masses.

Et enfin, nous retrouvons aussi la propriété de la somme : la somme de deux mesures de volumes correspond à la somme des mesures des masses correspondantes.

En conclusion, lorsque nous avons affaire à un tableau de proportionnalité qui met en correspondance deux grandeurs de deux natures différentes, le tableau de leurs mesures possède les trois propriétés de l'existence d'un rapport externe, de l'égalité des rapports internes et de la correspondance des sommes.

Voir au chapitre 5 un exemple de proportionnalité entre massse et volume.

5.3 Graphiques de fonctions linéaires

À titre d'exemple, repartons du tableau 12. Nous voulons le mettre en graphique, ce qui aboutira à la figure 9. Montrons que cette opération se décompose en plusieurs autres.

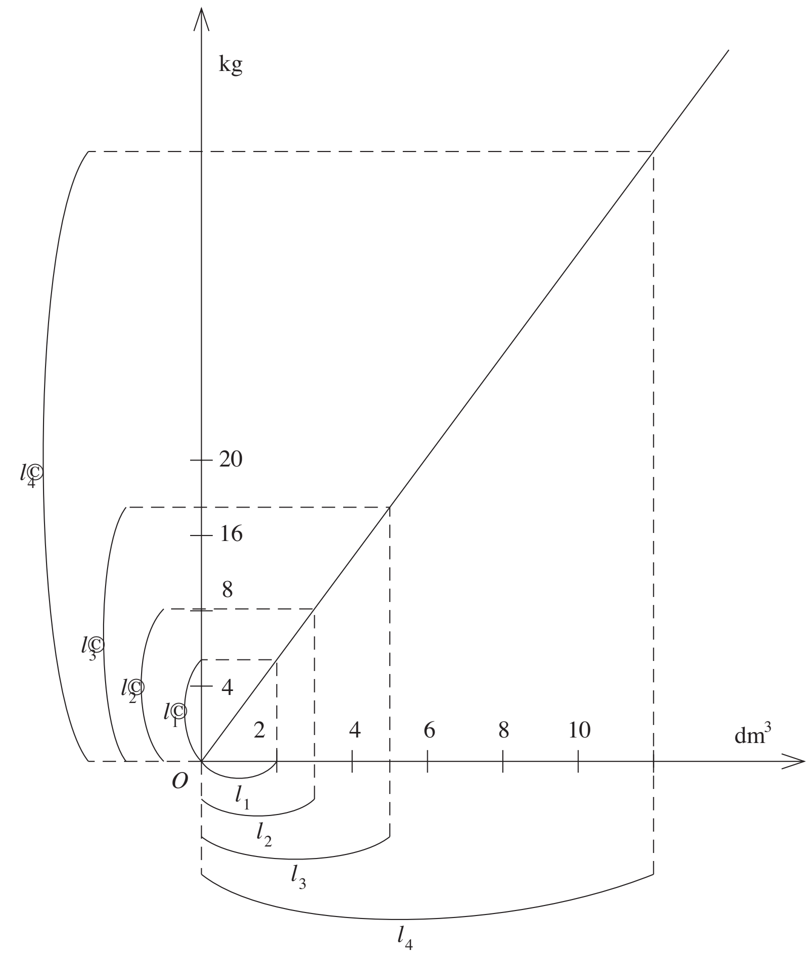

Fig. 9

Ayant décidé de représenter les volumes par des segments, nous devons choisir la longueur du segment qui représentera l'unité de volume : disons 0,5 cm pour 1 dm^3. Nous devons choisir ensuite une longueur de segment pour représenter l'unité de masse : disons 0,25 cm pour 1 kg. Ceci fait, nous pouvons comme le montre le tableau 13 faire correspondre des mesures de longueurs aux volumes et aux masses. Mais ce n'est pas tout, car nous devons encore convertir ces longueurs en segments, pour pouvoir les reporter sur le graphique. C'est ce que montre le tableau 14.

On retrouve dans la figure 9 les rectangles à côtés proportionnels avec leurs diagonales superposées, que nous avons déjà rencontrés à la section 3.3. Le tableau 14 montre comment on recourt de façon répétée à des proportionnalités pour représenter une fonction de façon commode. Remarquons que le choix de deux échelles et le retour aux grandeurs par le tracé des axes gradués sont des opérations de routine pour représenter des fonctions quelconques, et donc pas seulement des fonctions linéaires.

cm	dm^3	vol.	masse	kg	cm
1	2	v_1	m_1	5,4	1,35
1,5	3	v_2	m_2	8,1	2,025
2,5	5	v_3	m_3	13,5	3,375
6	12	v_4	m_4	32,4	8,1
7,5	15	v_5	m_5	40,5	10,125
4	8	v_6	m_6	21,6	5,4
...	...	...	...	...	...

Tableau 13.

long.	cm	dm^3	vol.	masse	kg	cm	long.
l_1	1	2	v_1	m_1	5,4	1,35	l'_1
l_2	1,5	3	v_2	m_2	8,1	2,025	l'_2
l_3	2,5	5	v_3	m_3	13,5	3,375	l'_3
l_4	6	12	v_4	m_4	32,4	8,1	l'_4
l_5	7,5	15	v_5	m_5	40,5	10,125	l'_5
l_6	4	8	v_6	m_6	21,6	5,4	l'_6
...	...	...	...	...	...	...	...

Tableau 14.

Voir des exemples et contre-exemples de fonctions linéaires aux chapitres 5 et 6.

5.4 Des objets et des opérateurs

Pour faire le point, à ce stade de notre étude, réexaminons les divers rôles qu'y ont joués les grandeurs et les nombres.

Au début nous n'avions pratiquement que des grandeurs. Nous ne nous sommes servis à ce stade initial que de nombres très simples tels que 2, $\frac{1}{2}$ ou 1 et $\frac{1}{2}$.

Puis nous avons *opéré* sur les grandeurs en nous servant des nombres : nous avons multiplié une grandeur par un naturel, divisé une grandeur par un naturel, puis combiné ces deux opérations pour arriver à multiplier une grandeur par une fraction (un rationnel). Et nous avons soupçonné au passage l'arrivée de nouveaux nombres, les irrationnels, mais avec une fonction analogue, celle d'opérer sur une grandeur en la « multipliant ».

À ce stade, nous nous intéressions donc à deux sortes de choses : les grandeurs (et leurs rapports) d'une part, et les nombres *opérant* sur les grandeurs de l'autre. Les grandeurs étaient plutôt de l'ordre des choses que l'on *perçoit*, et les nombres de l'ordre des choses qui *guident une action*, des choses avec lesquelles on *agit*, des sortes d'*outils*.

Les opérateurs numériques nous ont amenés à exprimer les rapports par des nombres. Et, moyennant le choix d'une unité standard, nous sommes arrivés à associer à chaque grandeur sa mesure, et à toute mesure la grandeur correspondante. Nous pouvions alors, et c'était bien commode, substituer le plus souvent les mesures aux grandeurs. Mais à partir de là, les nombres jouaient un double rôle : d'une part à travers les mesures, ils prenaient la place des grandeurs, mais d'autre part ils continuaient à jouer le rôle d'opérateurs, non plus sur les grandeurs mais sur leurs mesures.

De là viennent des distinctions plus ou moins éclairantes comme celle des *nombres concrets* (par exemple 4 dans « 4 mètres ») et des *nombres abstraits* (par exemple 3 dans « 3 fois 4 mètres », ou encore 3 et 4 dans « 3×4 » lorsque les nombres ne renvoient qu'à eux-mêmes). Ou encore la distinction entre *multiplicande* et *multiplicateur* puisque dans un produit, les deux facteurs ne jouent pas toujours le même rôle[8].

Pour la suite de l'exposé, retenons principalement qu'à ce stade, *un seul et même type d'objet mental, à savoir les nombres,* joue deux rôles. Plus tard, dans le développement de la structure linéaire, ces deux rôles seront assumés par des objets mentaux distincts.

6 Les rapports de grandeurs orientées

> Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs ; et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire, aux nombres précédés des signes + ou −. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions ; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe −, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce.
>
> A.-L. Cauchy

Jusqu'ici tout notre exposé a porté sur les grandeurs et la mesure des grandeurs. La mesure d'une grandeur est toujours un nombre positif. Nous n'avons donc à aucun moment éprouvé le besoin de recourir à des nombres négatifs. Mais il y a des situations où apparaissent des « grandeurs » de deux types, que l'on pourrait dire *antagonistes*, et qui conduisent à des mesures tant négatives que positives. Tel est le cas par exemple des abscisses sur une droite, des temps sur l'échelle des durées, des vitesses, des charges électriques et de bien d'autres. Nous regroupons ces types de grandeurs sous la dénomination commune de *grandeurs orientées*[9].

Commençons par étudier deux d'entre elles qui sont apparentées aux longueurs, à savoir les positions et variations de position sur une droite.

Au début de cet exposé, nous avons étudié les *grandeurs en elles-mêmes*, munies d'un ordre et d'une somme (cf. 3.1) avant d'étudier les *rapports de grandeurs* et les tableaux de proportionnalité (cf. 3.2 et 3.3). Nous procéderons ici dans le même ordre, en rappelant d'abord ce que sont ces grandeurs orientées munies d'un ordre et d'une somme, puis en nous occupant à leur propos des rapports et proportions.

6.1 Les positions et les variations de position

Pour situer un point sur une droite, on choisit une origine sur celle-ci, on se donne la longueur du segment entre le point et l'origine et on marque cette longueur par un symbole arbitraire exprimant le fait que le point se trouve d'un côté ou de l'autre de l'origine. Le symbole peut être un + ou un −, mais remarquons que nous ne parlons pas encore ici de mesures. Ces longueurs marquées sont ordonnées, mais pas du tout comme les longueurs ordinaires. En ce qui les concerne, les symboles

[8] Et qu'en outre lorsqu'on les dispose l'un en dessous de l'autre pour effectuer l'algorithme de la multiplication, il faut bien en mettre un au dessus et l'autre en dessous, et que l'algorithme n'est pas le même selon le choix que l'on fait.

[9] Dans cette étude, nous réservons le nom de *grandeur orientée* aux « grandeurs » qui sont mesurées par *un* nombre relatif. Nous n'utiliserons donc pas cette expression pour les grandeurs de nature vectorielle à deux dimensions ou davantage.

$<$ et $>$ veulent dire respectivement non pas *plus petit* et *plus grand*, mais bien *avant* et *après* dans le sens choisi sur la droite.

Une longueur marquée a pour fonction première de repérer un point sur la droite, de dire où il est. À cause de cela, on voit mal a priori le sens qu'il y aurait à définir une addition sur ces longueurs.

Passons maintenant aux variations de position sur une droite. Ce sont les distances (plus précisément les longueurs) dont on peut déplacer un point sur la droite, mais affectées d'un signe (par exemple $+$ ou $-$) selon que le point est déplacé dans un sens ou l'autre sur la droite. On ordonne les variations de position en disant que

1) si deux variations de position sont positives, l'une est plus petite que l'autre si la distance (au sens ordinaire) correspondant à la première est plus petite que la distance correspondant à la seconde ;

2) si les deux variations sont l'une positive et l'autre négative, la négative est plus petite que la positive ;

3) et enfin si les deux variations sont négatives, celle qui correspond à la plus grande distance est plus petite que l'autre.

Comme on met deux baguettes ou deux segments bout à bout pour les additionner, il semble naturel de convenir qu'additionner deux variations de position, c'est les exécuter l'une après l'autre, les enchaîner. Mais cette définition souffre d'une limitation gênante. En effet, pour pouvoir enchaîner deux variations de position, il faut que le point d'arrivée de la première coïncide avec le point de départ de la seconde. Or on voudrait pouvoir additionner deux variations de position quelconques. Il nous faut pour cela adapter la notion de variation de position.

Répétons que pour additionner deux longueurs, représentées par deux baguettes, nous mettons ces dernières bout à bout en les alignant. Et pour ce faire, il nous faut le plus souvent déplacer les baguettes pour les amener dans la position voulue. Une baguette (un segment) donnée représente toujours la même longueur, où qu'elle se trouve dans l'espace, ce qui nous laisse la liberté de l'amener où nous voulons.

Pour pouvoir additionner deux variations de position quelconques sur une droite, il nous suffit de donner aux variations de position sur la droite la même liberté de mouvement que nous donnons aux baguettes dans l'espace. Autrement dit, deux déplacements d'un point sur la droite (ou deux segments orientés) seront considérés comme représentant la même variation de position pour autant qu'ils aient même longueur et même sens. Il faut un effort d'imagination pour assimiler ce nouveau concept de variation de position.

Jusqu'ici nous avons associé aux positions et variations de position des longueurs munies d'un signe. Nous n'avons donc pas encore parlé de mesurer ces longueurs. Si nous les mesurons (comme on mesure des longueurs ordinaires), mais affectons les nombres trouvés, selon le cas, d'un signe $+$ ou d'un signe $-$, nous obtenons les nombres relatifs. En outre, l'ordre sur les positions et les variations de position nous fournit l'ordre sur les nombres relatifs. Et enfin l'addition des variations de position nous fournit les règles applicables à l'addition des nombres relatifs.

Jusqu'ici également nous n'avons considéré que des grandeurs orientées qui se ramènent à des longueurs munies d'un signe. Quant aux autres, les temps, vitesses, etc., elles se ramènent aux précédentes moyennant des opérations de mesure et des choix d'échelles de représentation analogues à ceux que l'on rencontre dans les grandeurs ordinaires (cf. section 4). Nous n'en parlerons donc pas davantage.

6.2 Les tableaux de proportionnalité entre nombres relatifs

Fixons maintenant notre attention sur les grandeurs orientées mesurées, et donc sur les nombres relatifs. Nous voudrions étendre à ceux-ci la notion de tableau de proportionnalité. Pour cela, nous devons convenir de ce que sera un rapport entre deux nombres relatifs. Supposons pour un moment que les règles de la multiplication des relatifs aient été élaborées, et justifiées de l'une ou l'autre façon, comme on le fait dans l'enseignement secondaire. Nous dirons alors que si y et x sont deux nombres relatifs quelconques, le rapport de x à y est le nombre (relatif) a qui est tel que $y = ax$. Ceci fait, nous pouvons dresser des tableaux de proportionnalité correspondant à des rapports externes a quelconques.

-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Tableau 15.

-3	6
-2	4
-1	2
0	0
1	-2
2	-4
3	-6
4	-8
5	-10

Tableau 16.

Les tableaux 15 et 16 sont caractérisés respectivement par les rapports externes 2 et -2.

On vérifie sans peine que dans de tels tableaux, la propriété de la somme et celle des rapports internes sont vérifiées, ce qui est rassurant. Ces tableaux sont illustrés par les figures 10 et 11.

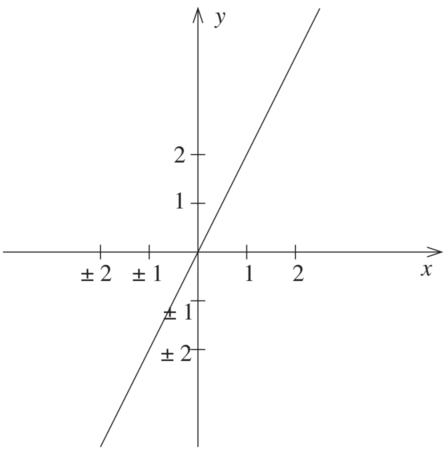

Fig. 10

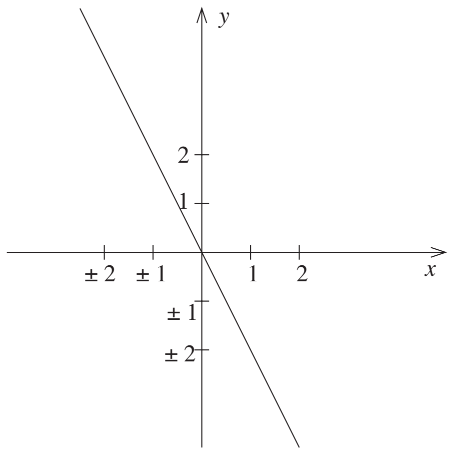

Fig. 11

Supposons maintenant que nous ayons choisi pour la multiplication des relatifs une règle des signes différant de la règle ordinaire. Par exemple que *moins par moins donne moins* et que les autres cas de la règle des signes demeurent inchangés. Nous devons alors remplacer le tableau 16 par le tableau 17 et la figure 11 par la figure 12.

-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	-2
2	-4
3	-6
4	-8
5	-10

Tableau 17.

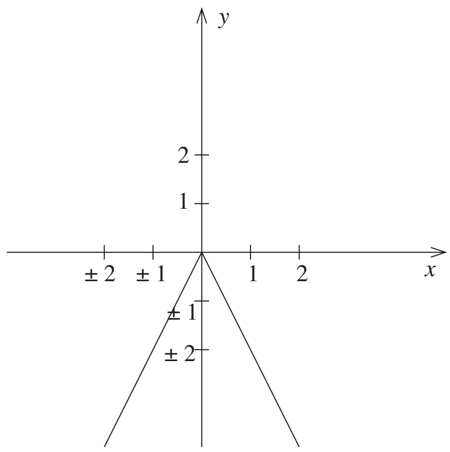

Fig. 12

Le tableau 17 ne vérifie plus ni la propriété de la somme, ni celle des rapports internes. La figure 12 ne représente plus une droite.

Nous pourrions vérifier de même les perturbations qu'introduiraient d'autres modifications à la règle des signes. La conclusion est que celle-ci a un effet majeur : elle permet l'extension aux nombres relatifs de la notion de tableau de proportionnalité, c'est-à-dire de la notion de fonction linéaire. Elle permet la représentation de chaque droite passant par l'origine par une équation simple. Toute autre règle bouleverserait la géométrie analytique[10].

Sur l'extension des tableaux de proportionnalité aux nombres relatifs, voir le chapitre 5.

6.3 Nouveaux objets, nouveaux opérateurs

Jetons maintenant un coup d'œil d'ensemble sur cette sixième section. Nos avons vu que la notion de tableau de proportionnalité résiste au passage des grandeurs ordinaires aux grandeurs orientées, des rapports et mesures positifs aux rapports et mesures exprimés par des nombres relatifs, de la somme des mesures positives à la somme des mesures exprimées par des nombres relatifs. Toutefois, dans les nouveaux tableaux de proportionnalité, les rapports externe et internes et la propriété de la somme ont évidemment changé de visage. Heureusement ce changement est une généralisation : ce que nous avons dit avant le passage aux nombres relatifs demeure applicable aux situations nouvelles lorsque celles-ci ne font apparaître, parmi les nombres relatifs, que des nombres positifs.

Lorsque nous considérions les grandeurs ordinaires, nous avons remarqué que les mesures et les opérateurs étaient tous deux des nombres, positifs en l'occurrence (voir 5.4). Ceci demeure vrai dans le cadre des grandeurs orientées : les mesures et les opérateurs sont encore tous deux des nombres, à ceci près qu'il s'agit maintenant de nombres relatifs. C'est seulement à la section 7 que nous verrons les mesures et les opérateurs prendre des visages différents.

6.4 Les fonctions affines

Les fonctions linéaires, représentées par des tableaux de proportionnalité, ont pour graphiques des droites passant par l'origine (voir figures 10 et 11). Mais dans de nombreuses circonstances, d'autres types de fonctions se présentent naturellement. Par exemple, un mouvement uniforme sur un axe des x répond à une équation du type

$$x(t) = x_0 + vt,$$

t	$x(t)$
-3	$-3,5$
-2	-2
-1	$-0,5$
0	1
1	$2,5$
2	4
3	$5,5$
4	7
5	$8,5$

Tableau 18.

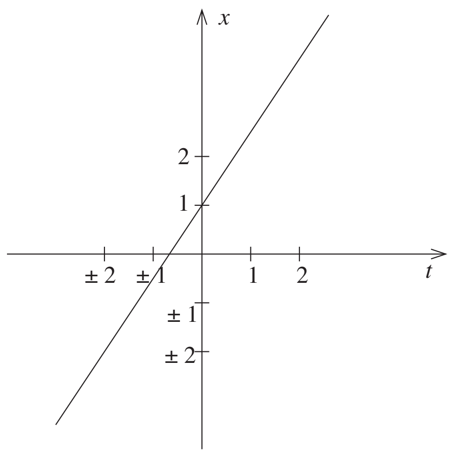

Fig. 13

où t est le temps, v la vitesse et x_0 l'abscisse du point mobile au temps $t = 0$. Un exemple d'une telle fonction (que l'on n'obtient bien entendu qu'après avoir choisi des unités pour les abscisses,

[10] H. Freudenthal [1983] a observé que c'est à partir du moment où la géométrie analytique est entrée dans la pratique mathématique courante, c'est-à-dire dans la deuxième moitié du XVII[e] siècle, que les nombres relatifs ont été utilisés constamment.

les temps et la vitesse) est $x(t) = 1 + 1,5t$. Le tableau 18 et la figure 13 sont deux expressions de cette fonction.

Le tableau 18 n'est pas défini par un rapport externe, et il ne possède ni la propriété de la somme, ni celle des rapports internes. Il ne représente donc pas une fonction linéaire. Toutefois, si on met en regard la différence entre deux termes de la première colonne et la différence entre les deux termes correspondants de la seconde colonne, et que l'on fait cela autant de fois que l'on veut, on obtient un tableau de proportionnalité. Le tableau 19 illustre cette propriété en montrant les différences entre éléments successifs de chaque colonne.
Cette proportionnalité des différences n'exprime rien d'autre, dans le cas du mouvement uniforme, que la propriété que résume la formule : *même durée, même distance parcourue.*

	t	$x(t)$	
	-3	$-3,5$	
1	-2	-2	1,5
1	-1	$-0,5$	1,5
1	0	1	1,5
1	1	$2,5$	1,5
1	2	4	1,5
1	3	$5,5$	1,5
1	4	6	1,5
1	5	$7,7$	1,5

Tableau 19.

Sur les fonctions affines, voir entre autres le chapitre 6.

7 Les vecteurs et les transformations

> Je ne suis toujours pas satisfait de l'algèbre, parce qu'elle ne donne pas la voie d'accès la plus courte aux plus belles constructions de la géométrie. C'est pourquoi je pense qu'en ce qui concerne la géométrie, nous avons besoin d'une autre analyse encore qui soit clairement géométrique ou linéaire et qui exprime directement les *situations* comme l'algèbre exprime directement les *grandeurs*.
>
> G. Leibniz

Dans cette étude, nous avons d'abord examiné les grandeurs au sens ordinaire, dont les mesures étaient des nombres positifs. Nous avons ensuite étudié les grandeurs orientées, dont les mesures étaient des nombres relatifs. Mais les grandeurs ordinaires et les grandeurs orientées n'épuisent pas le champ des grandeurs, si on accepte de donner à ce mot une signification assez étendue. En effet, les changements de position dans l'espace (et non plus seulement sur une droite), les translations, les forces, les vitesses, les champs électriques et magnétiques, etc. sont autant de choses qui peuvent être plus ou moins grandes, plus ou moins intenses, et qui sont par conséquent douées de grandeur. Mais en outre elles ont une direction dans l'espace, et un sens sur cette direction. On les qualifie de *vectorielles*.

Nous n'essaierons pas d'étendre la notion de tableau de proportionnalité successivement aux changements de position, translations, forces, vitesses, etc., car cela nous conduirait trop loin, et dans certains cas n'aurait guère de sens[11]. Nous ne ferons ici cette tentative d'extension que pour les *changements de position* d'un point dans un plan (et dans l'espace ce serait la même chose), ce qui nous conduira aux combinaisons et transformations linéaires. Ensuite, à la section 8, nous reprendrons un par un les autres types de grandeurs vectorielles pour indiquer la spécificité de chacun.

7.1 De la droite au plan

À la section 6.1, nous avons étudié les variations de position sur une droite. Passons maintenant au plan et à l'espace.

[11] Voir à ce sujet la section 8.

Considérons un mobile ponctuel passant d'un point à un autre. Le mouvement le plus simple qui réalise cela suit le segment qui a pour origine le point de départ du mobile et pour extrémité son point d'arrivée. Cette variation de la position est ainsi caractérisée par un segment orienté qui va du point de départ au point d'arrivée. Ce segment possède une longueur, une direction et un sens.

Si nous voulons étendre la notion de tableau de proportionnalité, ou – si on préfère –, de fonction linéaire, à ces objets nouveaux, nous devrons d'abord définir, en ce qui les concerne, les notions de *somme* et de *rapport*.

Pour la *somme*, inspirons nous des variations de position sur une droite. Par définition, additionner deux variations de position dans un plan ou l'espace consistera à enchaîner les deux segments orientés qui les représentent. Mais pour que cette addition soit définie pour deux variations de position quelconques, il faut que nous puissions toujours déplacer les segments orientés pour les amener en position enchaînée. Et donc, de même – rappelons-le –, que nous pouvions déplacer deux baguettes quelconques pour additionner leurs longueurs, nous nous donnerons la liberté de déplacer n'importe quel segment orienté, en prenant toutefois la précaution de lui conserver toujours même longueur, même direction et même sens. Nous désignerons les segments orientés ainsi libérés, du nom de *vecteurs libres*, ou en abrégé de *vecteurs*.

Venons-en maintenant au *rapport* de deux vecteurs. On pense tout de suite à ce que peut vouloir dire *multiplier un vecteur par un nombre relatif*. C'est multiplier sa longueur par la valeur absolue de ce nombre et, tout en maintenant sa direction, changer son sens ou non selon que le nombre par lequel on multiplie est négatif ou positif. Et on est tenté alors de dire que deux vecteurs ont entre eux le *rapport* α, où α est un nombre relatif, si en multipliant le premier par α on obtient le second.

Mais une telle définition du rapport n'est pas vraiment satisfaisante. En effet, selon cette définition, deux vecteurs ne peuvent avoir un rapport entre eux que s'ils ont même direction. Or nous voudrions assez naturellement que deux vecteurs quelconques, même de directions différentes, aient entre eux un rapport, ce qui n'est pas possible avec notre définition. Que faire ?

7.2 Un tableau de proportionnalité étriqué

Malgré cette restriction, essayons de construire un tableau de proportionnalité qui s'appuie sur cette notion de rapport. Juste pour voir. Commençons par deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{a'} = \lambda \overrightarrow{a}$, de rapport λ (voir tableau 20).
Inscrivons ensuite dans notre tableau n'importe quels couples $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b'})$ et $(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c'})$ tels que

$\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{a'} = \lambda \overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{b} = \mu \overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{b'} = \mu \overrightarrow{a'}$
$\overrightarrow{c} = \nu \overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{c'} = \nu \overrightarrow{a'}$
$\ldots$	$\ldots$
$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$	$\overrightarrow{b'} + \overrightarrow{c'}$
$\ldots$	$\ldots$

Tableau 20.

$$\overrightarrow{b} = \mu \overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b'} = \mu \overrightarrow{a'},$$
$$\overrightarrow{c} = \nu \overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{c'} = \nu \overrightarrow{a'},$$

où μ et ν sont deux nombres quelconques, et aussi tout couple de la forme

$$(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b'} + \overrightarrow{c'}) \tag{1}$$

à condition que $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b'})$ et $(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c'})$ soient déjà dans le tableau.

On vérifie sans peine que dans un tel tableau, tout vecteur de droite est égal au vecteur correspondant de gauche multiplié par λ. Ainsi λ est le *rapport externe* du tableau. On vérifie aussi que ce tableau possède les deux propriétés des rapports internes et de la somme.

Toutefois, l'objection que nous pouvions craindre est bien là : $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{a'}$ étant choisis au départ dans une certaine direction, tous les autres vecteurs du tableau ont cette même direction. Et donc nous ne sommes pas arrivés à construire un tableau de proportionnalité dans la première colonne duquel nous puissions inscrire n'importe quel vecteur, avec en face celui qui lui correspondrait dans un rapport donné à l'avance.

À nouveau, que faire ? Nous devons certainement remplacer notre notion trop étroite de rapport. Il nous faudrait une notion de rapport qui permette le passage d'un vecteur quelconque à un autre vecteur quelconque. Existe-t-il une telle notion ? Pour l'instant, mystère...

7.3 Une généralisation du rapport interne

Ce qui est possible par contre, c'est de passer de *deux* vecteurs quelconques à *un* vecteur quelconque, à condition que les deux premiers soient non nuls et de directions différentes. Soient en effet deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de ce type. Alors, n'importe quel autre vecteur $\overrightarrow{c}$ peut être représenté sous la forme

$$\overrightarrow{c} = \alpha\,\overrightarrow{a} + \beta\,\overrightarrow{b}, \tag{2}$$

où α et β sont deux nombres appropriés (rappelons que nous travaillons dans le plan). On dit dans ces conditions que $\overrightarrow{c}$ est une *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Une combinaison linéaire n'est pas un rapport, mais elle généralise la notion de rapport du fait qu'elle s'y ramène lorsqu'on revient du plan à la droite.

Pouvons-nous, à partir de là, construire quelque chose qui ressemble à un tableau de proportionnalité ? Essayons de *remplacer les rapports internes par des combinaisons linéaires.* Commençons par inscrire dans la première colonne deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non nuls et dans la deuxième colonne les vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$ tels que (voir tableau 21)

$$\overrightarrow{a'} = \lambda\,\overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b'} = \lambda\,\overrightarrow{b}, \tag{3}$$

où λ est un nombre non nul. On le voit, nous essayons de maintenir pour le *rapport externe* notre ancienne notion de rapport.

Ajoutons ensuite, dans la première colonne, toutes les combinaisons linéaires que nous voulons des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, par exemple $\alpha_1\overrightarrow{a} + \beta_1\overrightarrow{b}$ ou encore $\alpha_2\overrightarrow{a} + \beta_2\overrightarrow{b}$. Nous pouvons par ce procédé inscrire dans cette première colonne n'importe quel vecteur choisi au hasard. Décidons d'inscrire en face les combinaisons linéaires correspondantes (c'est-à-dire de mêmes coefficients) de $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$.

$\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{a'} = \lambda\,\overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{b'} = \lambda\,\overrightarrow{b}$
$\alpha_1\overrightarrow{a} + \beta_1\overrightarrow{b}$	$\alpha_1\overrightarrow{a'} + \beta_1\overrightarrow{b'}$
$\alpha_2\overrightarrow{a} + \beta_2\overrightarrow{b}$	$\alpha_2\overrightarrow{a'} + \beta_2\overrightarrow{b'}$
...	...

Tableau 21.

De cette façon, les combinaisons linéaires de gauche – qui nous servent de rapports internes –, correspondent bien à celles de droite. Notre tableau ainsi constitué peut contenir autant de couples que nous voulons.

Assurons-nous maintenant que notre tableau vérifie la propriété des rapports internes, en prenant *rapport interne* au sens nouveau de combinaison linéaire. Soit une combinaison linéaire de deux éléments quelconques de gauche, par exemple

$$\mu(\alpha_1\overrightarrow{a} + \beta_1\overrightarrow{b}) + \nu(\alpha_2\overrightarrow{a} + \beta_2\overrightarrow{b}), \tag{4}$$

ce qui revient aussi à

$$(\mu\alpha_1 + \nu\alpha_2)\,\overrightarrow{a} + (\mu\beta_1 + \nu\beta_2)\,\overrightarrow{b}. \tag{5}$$

La même opération exécutée dans la colonne de droite nous amène à

$$\mu(\alpha_1 \overrightarrow{a'} + \beta_1 \overrightarrow{b'}) + \nu(\alpha_2 \overrightarrow{a'} + \beta_2 \overrightarrow{b'}), \tag{6}$$

et ensuite à

$$(\mu\alpha_1 + \nu\alpha_2)\overrightarrow{a'} + (\mu\beta_1 + \nu\beta_2)\overrightarrow{b'}. \tag{7}$$

Cette expression s'écrit aussi

$$\lambda[(\mu\alpha_1 + \nu\alpha_2)\overrightarrow{a} + (\mu\beta_1 + \nu\beta_2)\overrightarrow{b}]. \tag{8}$$

On voit ainsi qu'entre (4) et (6) on retrouve le rapport externe λ.

Par ailleurs, nous n'avons pas à contrôler que notre tableau vérifie la propriété de la somme, puisque la somme est un cas particulier de combinaison linéaire.

Nous avons donc bien construit un tableau de proportionnalité, si nous acceptons d'appeler ainsi un tableau dans lequel les combinaisons linéaires ont pris la place des rapports internes.

La nature même du rapport externe de ce tableau est telle que tout vecteur de droite est égal au vecteur correspondant de gauche multiplié par un nombre λ. Une telle transformation des vecteurs du plan porte le nom d'*homothétie*. Voilà donc l'aboutissement de notre recherche à ce stade : nous voyons les homothéties comme pouvant être exprimée par des « tableaux de proportionnalité », en un sens convenablement adapté.

Un commentaire s'impose toutefois. Dans le cadre conceptuel où nous nous trouvons, une homothétie transforme les vecteurs *libres*, c'est-à-dire ces variations de position que nous pouvons transporter n'importe où, sans autre contrainte que de respecter leur grandeur, leur direction et leur sens. Mais le terme *homothétie* est plus souvent utilisé en un sens différent. Il désigne alors une transformation du plan dans laquelle un point origine reste fixe tandis que tous les autres s'écartent ou se rapprochent de l'origine dans une proportion donnée. Dans ce sens, une homothétie *n'agit pas sur des vecteurs libres, mais bien sur des points*. Nous reviendrons sur cette distinction à la section 8.1.

7.4 Une généralisation du rapport externe

Mais revoyons maintenant attentivement le développement qui nous a conduits aux homothéties. Pour constituer le tableau 21, nous avons d'abord inscrit à gauche des combinaisons linéaires quelconques de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, puis des combinaisons linéaires des vecteurs ainsi obtenus. Ceci fait, nous avons constaté que nous obtenions en face les mêmes combinaisons linéaires, mais cette fois des vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$. Or, et c'est cela qui est curieux, pour prouver ce résultat (la correspondance bien régulière des combinaisons linéaires entre la gauche et la droite, voir l'expression (7)), nous ne nous sommes pas du tout servis de la condition

$$\overrightarrow{a'} = \lambda\overrightarrow{a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b'} = \lambda\overrightarrow{b}. \tag{9}$$

Nous n'avions imposé cette dernière condition que pour préserver cette forme de rapport externe pour notre tableau (ce qui a d'ailleurs réussi).

Donc, si nous voulons, nous pouvons choisir les vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$ arbitrairement, et la propriété des rapports internes (des combinaisons linéaires) sera encore vérifiée. Celle de la somme aussi.

Mais, ceci fait, se pose une question cruciale. En effet, dans ces nouvelles conditions, notre rapport externe est perdu dans la forme que nous lui avions souhaitée. Alors, existe-t-il encore entre les deux colonnes quelque chose que nous puissions appeler *rapport externe* ? Ou en termes plus imagés, quel peut bien être le contenu géométrique du passage de la colonne de gauche à celle de droite ?

Regardons cela de près. Tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de gauche peut être écrit sous la forme

$$\overrightarrow{x} = x_1\,\overrightarrow{a} + x_2\,\overrightarrow{b}. \tag{10}$$

Le vecteur correspondant de droite est alors de la forme

$$\overrightarrow{x'} = x_1\,\overrightarrow{a'} + x_2\,\overrightarrow{b'}. \tag{11}$$

Mais $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$ peuvent aussi être écrits comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, par exemple sous la forme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a'} &= r_{11}\,\overrightarrow{a} + r_{12}\,\overrightarrow{b},\\ \overrightarrow{b'} &= r_{21}\,\overrightarrow{a} + r_{22}\,\overrightarrow{b}.\end{aligned}$$

En tenant compte de (11), nous obtenons encore

$$\overrightarrow{x'} = (x_1r_{11} + x_2r_{21})\,\overrightarrow{a} + (x_1r_{12} + x_2r_{22})\,\overrightarrow{b}. \tag{12}$$

Autrement dit, si le vecteur $\overrightarrow{x}$ s'exprime en fonction des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ par le couple (x_1, x_2), son image $\overrightarrow{x'}$ s'exprime par rapport aux même vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ par le couple $(x_1r_{11}+x_2r_{21}, x_1r_{12}+x_2r_{22})$. Pour le lecteur qui connaît déjà un peu le calcul vectoriel, on peut reformuler cela en disant que la transformation qui envoie $\overrightarrow{x}$ sur $\overrightarrow{x'}$ a pour expression dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$,

$$\begin{aligned}x'_1 &= r_{11}x_1 + r_{21}x_2,\\ x'_2 &= r_{12}x_1 + r_{22}x_2.\end{aligned}$$

Telle est donc la loi de passage des $\overrightarrow{x}$ aux $\overrightarrow{x'}$ ou, en d'autres termes, voilà ce qui nous tient lieu de *rapport externe*.

En réalité, nous arrivons là à des tableaux de proportionnalité (considérablement) généralisés qui expriment ce que l'on appelle les *transformations linéaires du plan*, pour la découverte desquelles nous renvoyons le lecteur à des exposés plus complets. Par delà les homothéties, on y trouve les isométries, les similitudes, les compressions, les cisaillements, ...

Notons toutefois une difficulté. Ces transformations sont habituellement vues comme expédiant chaque point du plan sur un autre (et parfois le même). Or un vecteur libre n'est pas a priori associé à un point. L'intuition le perçoit soit comme un segment orienté transportable, soit comme l'ensemble des segments orientés de même longueur, direction et sens qu'un segment donné. Dans les deux cas, cela exige un travail que d'associer tout vecteur libre à un et un seul point du plan et réciproquement.

7.5 Nouveaux objets, nouveaux opérateurs

Pour en revenir à la mutation à laquelle nous venons d'assister, insistons sur sa signification profonde. Dans nos tableaux de proportionnalité relatifs aux grandeurs, aux mesures de grandeurs et aux grandeurs orientées, nous avions des rapports internes et externes, mais ces rapports avec des noms différents étaient de la même nature et avaient tous le même contenu géométrique simple. Par contre, en passant aux « rapports » entre grandeurs à deux dimensions, nous assistons à une bifurcation de la notion : les rapports internes deviennent des combinaisons linéaires (notion au contenu géométrique encore assez simple, caractérisée par deux nombres), mais les rapports externes deviennent des relations au contenu géométrique divers, impossibles à saisir d'un seul coup d'œil intuitif, et caractérisées par quatre nombres.

Remarquons pour en finir avec les variations de position que nous pourrions aussi les étudier dans l'espace. Les conclusions seraient analogues, quoique nous aurions alors à faire à des combinaisons linéaires de trois vecteurs, et le substitut des rapports externes serait représenté non plus par quatre nombres mais par neuf.

Le chapitre 8 introduit au calcul vectoriel en termes de déplacements. Il est complété par le chapitre 9 qui introduit le produit scalaire, expression de la bilinéarité. Voir aussi sur ces deux sujets, le chapitre 15.

7.6 Le plan quadrillé

Une comparaison peut éclairer la façon dont nous avons introduit les variations de position au début de cette section 7. Lors d'une leçon de gymnastique, un professeur dit à ses élèves : « Faites un pas en avant. » Les élèves peuvent exécuter ce mouvement parce qu'ils ont un *avant* et un *arrière* : chacun d'eux est un corps orienté. Tel n'est pas le cas d'un point dans un plan, et il n'est donc pas possible de décrire de cette façon une variation de position d'un point. Mais le professeur peut dire aussi : « Faites un pas vers le mur de gauche, ou vers le nord. » En disant cela, il se réfère à un repère déjà présent dans l'environnement. Nous aurions pu procéder de manière analogue, mais ce n'est pas ce que nous avons fait. Enfin le professeur peut faire lui-même un pas dans une direction choisie au hasard, puis dire à ses élèves : « Faites comme moi », voulant dire par là : « Faites un pas de la même longueur que le mien, dans la même direction et le même sens. » C'est comme cela que nous avons procédé, en évoquant un mobile ponctuel qui passe d'un point à un autre, puis en considérant que nous pouvions envisager un mouvement identique à partir de n'importe quel autre point.

En procédant ainsi, nous avons pu poser, sans avoir à tenir compte de quoi que ce soit d'autre, d'aucun repère préexistant, la question de ce que pourrait bien être un rapport entre deux variations de position. En échouant à définir un tel rapport dans le cas général, mais en reconnaissant ensuite la possibilité d'une sorte de rapport entre deux variations de position (non nulles et de directions différentes) et une troisième, nous avons fait naître la notion de *combinaison linéaire* et, implicitement, celle de base du plan vectoriel. En mettant ensuite au point un « tableau de proportionnalité » qui respecte cette sorte de rapport nouveau, nous avons fait naître la notion de *transformation linéaire*, autre et dernier avatar du rapport. Tout cela était conforme à l'objectif annoncé au début de cette étude et qui était de faire apparaître diverses mutations de la notion de rapport.

Il va de soi pourtant que dans la pratique, lorsqu'on veut spécifier une variation de position dans un plan, celui-ci est souvent déjà occupé par des objets ou des figures pouvant servir de repère. Par exemple sur les plans de villes, on peut se référer à un quadrillage. Celui-ci tient lieu de repère et permet d'emblée la décomposition des variations de position en deux composantes : avancer de tant, dans tel sens, dans une direction du quadrillage, puis de tant, dans tel sens, dans l'autre direction, le côté du carré servant d'unité de mesure. Cette façon plus concrète d'introduire les variations de position est mieux adaptée à une première approche de la linéarité que notre recherche des avatars de la notion de rapport. C'est le moment de rappeler que nous ne proposons pas du tout cette recherche comme thème d'un enseignement élémentaire.

Sur l'utilisation du plan quadrillé pour introduire les vecteurs géométriques, voir le chapitre 8.

8 Quelques sources de vecteurs

> ... Toute grandeur vectorielle dépend de deux éléments hétérogènes, l'un de nature arithmétique et l'autre de nature géométrique, qui sont un nombre et une direction. On peut lui attacher un *vecteur*, abstraction mathématique qui est à la grandeur vectorielle ce que le nombre est à la grandeur scalaire et, de même que l'étude des grandeurs scalaires se ramène à des raisonnements sur les nombres, celle des grandeurs vectorielles se ramène à des raisonnements sur les vecteurs.
>
> R. Bricard

8.1 Repérer les points d'un plan

À la section 6.1, nous avons étudié le repérage des points sur une droite. Examinons maintenant le repérage des points d'un plan. On ne peut pas spécifier la position d'un point si ce n'est par rapport à quelque chose. Et donc il faut au départ se donner un repère. Alors on part d'un point (que l'on appelle *l'origine*) dans une direction donnée, ce qui ne conduit qu'aux points d'une seule droite. Pour balayer les autres points du plan, il faut changer de direction. On peut par exemple tourner la droite choisie au départ, ce qui engendre les coordonnées polaires. Ici nous choisissons plutôt une deuxième droite passant par l'origine et partant dans une autre direction que la première. En munissant chacune des deux droites d'une unité orientée, nous obtenons un repère au sens bien connu en géométrie.

Si le plan que l'on considère est déjà muni d'un quadrillage (ou d'un pavage de parallélogrammes identiques entre eux), on installe un repère en choisissant deux droites sécantes du quadrillage, puis en orientant celles-ci.

La position d'un point par rapport à un repère est donnée par l'enchaînement de deux variations de position : on avance de tant depuis l'origine le long du premier axe, puis on avance de tant parallèlement au second axe. C'est là une combinaison linéaire des deux variations de position représentées par les deux unités orientées. Elle va de l'origine au point que l'on veut situer. Appelons-la *vecteur-position* de ce point. Ses deux coefficients sont appelés les *coordonnées* du point. Les vecteurs-positions sont aussi parfois appelés *vecteurs liés.*

Ce procédé fait jouer aux deux axes des rôles différents. Pour leur faire jouer le même rôle, on peut construire le parallélogramme défini par les deux axes et les parallèles à ceux-ci passant par le point à situer, puis considérer la variation de position qui, en suivant la diagonale, va de l'origine au sommet opposé de ce parallélogramme.

Et maintenant pourquoi s'intéresser au produit d'un vecteur-position par un nombre et à la somme de deux vecteurs-positions ? Car à première vue un tel vecteur semble avoir rempli son office dès qu'il a montré où est un point.

Toutefois, multiplier les vecteurs-positions de tous les points d'une figure par un même nombre aboutit à agrandir ou rapetisser la figure sans changer sa forme, ce qui a beaucoup de sens. En faisant cela, on réalise une *homothétie.*

D'autre part, si certains points du plan sont affectés d'une masse, pour déterminer le centre d'inertie de ce système de points, on est amené à faire la somme de tous les vecteurs-positions de ces points multipliés chacun par la masse correspondante. Cette application justifie amplement le produit d'un vecteur-position par un nombre et la somme de deux vecteurs-positions.

Ces deux opérations s'introduisent d'ailleurs de façon naturelle, puisque pour multiplier un vecteur-position par un nombre, il suffit de multiplier chacune de ses coordonnées par le nombre, et pour additionner deux vecteurs-positions, il suffit d'additionner deux à deux leurs coordonnées.

Comparés aux variations de position, les vecteurs-positions ont l'avantage de correspondre chacun à un point du plan et réciproquement. Ils semblent donc particulièrement adaptés à l'étude des transformations linéaires du plan : ce sont des transformations dans lesquelles chaque point est envoyé sur un autre point (ou sur lui-même). L'homothétie mentionnée ci-dessus en est un exemple, mais il y a aussi les rotations, les symétries orthogonales et bien d'autres.

Parmi ces transformations, certaines sont linéaires, c'est-à-dire conservent les combinaisons linéaires, et d'autres non. Mais c'est là un résultat théorique qui ne sera habituellement rencontré que bien après l'étude des transformations familières.

8.2 Les translations

Soit une figure dans un plan. Si on la fait glisser sans la tourner vers un autre endroit du plan, on obtient une deuxième figure identique à la première. En répétant ce mouvement (un glissement dans la même direction et sur la même distance) à partir de la deuxième figure, on en crée une troisième. On peut en créer de même une quatrième, une cinquième, etc. On voit ainsi se constituer une frise. En repartant de la première figure et par des mouvements identiques, quoique de sens opposé, on allonge la frise de l'autre côté. On peut imaginer une frise infinie dans les deux sens.

On peut aussi passer de la frise à un papier peint (un réseau plan). Il suffit de choisir un deuxième mouvement, dans une direction différente du premier, et de reproduire la frise autant de fois que l'on voudra par application réitérée de ce mouvement dans les deux sens.

On peut étudier, sur le papier peint, les passages d'un motif de base quelconque à un autre, de la même manière que l'on étudiait le passage d'un point à un autre par une variation de position. Les motifs du papier peint ont simplement pris la place des points. Le passage d'un motif à un autre, caractérisé par sa longueur, sa direction et son sens, peut être reproduit au départ de n'importe quel motif. C'est intuitivement l'analogue du vecteur libre.

Dans ce cadre, la multiplication d'un mouvement par un nombre (en l'occurrence un entier) apparaît naturellement : on envoie le motif tant de fois plus loin dans un sens ou l'autre. La somme de deux mouvements procède par enchaînement, comme dans le cas des variations de position.

D'autre part, on ne doit pas ici introduire la notion de repère : elle se dégage en quelque sorte d'elle même, puisque n'importe quel mouvement peut être exprimé comme la somme de deux mouvements de directions différentes, multipliés chacun par un nombre approprié.

De ces considérations sur les papiers peints, on peut passer par analogie aux vecteurs libres du plan.

Changeons maintenant de point de vue. On peut engendrer une frise tout autrement que ci-dessus, à condition que l'on ait déjà acquis le concept de translation du plan entier (sans aller nécessairement jusqu'à la composition des translations). On part d'une figure. On translate le plan, de manière à envoyer la figure à un autre endroit. Puis on pose la question : comment faudrait-il compléter la figure de départ pour qu'elle retombe sur elle-même (qu'elle soit invariante) à la suite de la seule translation envisagée ? La figure complétée est une frise.

On peut alors engendrer un papier peint en demandant simplement de compléter la figure de départ de sorte qu'elle se transforme en une figure invariante par application de deux translations du plan de directions différentes.

On peut ensuite explorer toutes les translations du plan qui laissent le papier peint invariant. Et on voit bien comment l'on retrouve ainsi le produit d'une translation par un nombre, la somme (la composée) de deux translations, et comment on choisit deux translations de directions différentes dont les combinaisons linéaires permettent de retrouver toutes les autres.

Quelles que soient par ailleurs les façons de procéder pour créer une frise ou un papier peint, les vecteurs mis au point dans de tels contextes sont plus proches des vecteurs libres que des vecteurs-positions. Comme expliqué ci-dessus, cela demande un effort d'associer chacun d'eux à un point du plan pour pouvoir ensuite envisager les transformations du plan d'un point de vue vectoriel.

Un avantage toutefois des frises et papiers peints, c'est que si le motif de base est lui-même invariant pour certaines symétries orthogonales ou rotations, ces symétries se transmettent au plan entier et conduisent donc naturellement aux isométries du plan entier (mais non à d'autres transformations).

L'extension des isométries au plan entier est un caractère intéressant pour ceux qui étudient – ce que nous ne ferons pas ici –, les propriétés de groupe de ces tranformations et les théorèmes de réduction : toute isométrie directe est une translation ou une rotation, et toute isométrie inverse est une symétrie glissée.

8.3 Les vitesses

Les vecteurs se rencontrent dans d'autres champs que la géométrie. Considérons maintenant les vitesses, qui relèvent d'abord de la cinématique, avant de jouer un rôle en dynamique, là où les forces interviennent. Concentrons-nous dans un premier temps sur les mouvements rectilignes et uniformes d'un mobile ponctuel.

La vitesse d'un tel mobile possède une grandeur, une direction et un sens. Il est par conséquent tentant de la représenter par un vecteur. Mais tout d'abord on ne peut la représenter par un segment orienté qu'après avoir fait un double choix, nécessaire pour fixer la longueur du segment : premièrement on doit se donner une unité de longueur et une unité de temps, par exemple le mètre et la seconde, ce qui fixe l'unité de vitesse, dans notre exemple le mètre par seconde ; deuxièmement, on doit se donner une échelle de représentation des vitesses, en convenant par exemple de faire correspondre un centimètre à un centimètre par seconde.

Ceci fait, la vitesse correspond-elle à un vecteur libre ou à un vecteur lié ? A priori pas à un vecteur libre, car elle est attachée à un point, à savoir le mobile. Il serait donc très artificiel d'associer à la vitesse un segment transportable en tout point de l'espace, et encore moins à un ensemble infini de segments orientés de mêmes longueur, direction et sens. Mais si on veut faire correspondre la vitesse à un vecteur lié, on tombe sur une autre difficulté, à savoir que le segment orienté-vitesse doit être attaché à un point mobile, et non à une origine fixe, comme c'était le cas pour les vecteurs-positions. Ainsi, si la vitesse est représentable par un vecteur, il s'agit d'un vecteur très particulier, peut-être une variété de vecteur que nous n'avons pas encore rencontrée. Nous reviendrons sur cette difficulté.

Ceci dit, pour que la vitesse soit représentée fidèlement par un vecteur, il faut encore que cela ait un sens de la multiplier par un nombre. Aucune difficulté à cela, car doubler, tripler, ... une vitesse, en changeant ou non son sens, sont des opérations raisonnables et utiles.

Ensuite, quel sens y a-t-il à additionner deux vitesses ? On peut se faire une idée, mais ce n'est pas si facile, d'un mobile susceptible de prendre deux mouvements (nous en sommes toujours aux mouvements rectilignes et uniformes) et qui les prendrait tous les deux en même temps. Par exemple, il pourrait aller vers le nord à telle vitesse, et pourrait aussi aller vers l'ouest à telle autre vitesse. Les deux mouvements ensemble le porteraient vers le nord-ouest. Mais qu'est-ce que cela veut dire *les deux mouvements ensemble ?* Pour réaliser cela pratiquement, il faut se souvenir qu'un mobile se meut toujours par rapport à quelque chose. Soit par exemple un nageur qui nage vers le nord en eau dormante. Remplaçons ensuite, fut-ce mentalement, l'eau dormante par un fleuve qui coule vers l'ouest. Il se fait que la vitesse du nageur par rapport à la rive s'obtient en ajoutant, par la règle du parallélogramme, sa vitesse initiale vers le nord et la vitesse du fleuve.

La question ainsi posée débouche à terme sur celle du *mouvement relatif*. La vitesse du nageur par rapport au fleuve est sa *vitesse relative*. La vitesse du fleuve est sa *vitesse d'entraînement*. Enfin, la vitesse du nageur par rapport à la rive (repère fixe ou réputé tel) est sa *vitesse absolue*. La vitesse absolue est la somme de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative[12].

Étant donné ce que nous avons dit de la manière de faire correspondre des segments orientés aux vitesses, la façon la plus naturelle d'additionner les vitesses est bien la règle du parallélogramme. On ne voit pas en effet à quoi correspondrait le fait d'enchaîner deux vecteurs vitesses.

En ce qui concerne par ailleurs les transformations linéaires, si étroitement liées aux vecteurs géométriques, on ne voit guère *a priori* pourquoi on s'en occuperait du côté des vitesses.

Si maintenant nous passons des mouvements rectilignes et uniformes aux mouvements quelconques, la définition de la vitesse se complique. Elle devient ce que l'on appelle la *vitesse instantanée*. Sa direction (la tangente à la trajectoire) et sa grandeur sont déterminées au terme d'un processus de limite appelé *dérivation*. Non seulement, comme dans le cas précédent, elle est attachée à un point mobile, mais encore elle ne conserve le plus souvent ni sa grandeur et ni sa direction, elle en change à chaque instant. Il n'empêche, ce que nous avons dit ci-dessus du caractère vectoriel de la vitesse demeure vrai. Mais cela nous entrainerait trop loin de le montrer ici.

La relation entre les vitesses et les vecteurs est étudiée au chapitre 13.

8.4 Les forces

Comme les vitesses, les forces sont candidates pour être représentées par des vecteurs, puisqu'elles ont comme ces dernières une grandeur, une direction et un sens. Mais elles partagent avec les vitesses la propriété que pour les représenter par des segments orientés, il faut d'abord les mesurer dans une unité à choisir (par exemple le kilogramme-force qui est la plus disponible) et ensuite choisir une échelle de représentation, par exemple un centimètre par kilogramme-force.

Ensuite est-ce qu'une force serait représentable plutôt par un vecteur lié, ou plutôt par un vecteur libre ? Il ne serait guère possible de répondre à cette question sans examiner les circonstances où des forces entrent en jeu. Dans un premier temps, bornons-nous au problème le plus simple : celui où quelques forces tirent sur un point et où on s'intéresse à l'équilibre de celui-ci. Les forces sont appliquées au point, et par conséquent le bon modèle est plutôt celui des vecteurs liés. Toutefois, on peut tirer sur le point par l'intermédiaire de cordes dont la longueur n'a a priori pas d'importance. Et donc on pourrait admettre que la force soit accrochée en un point quelconque de la corde. Cette remarque n'a pas pour l'instant de grande conséquence, et donc oublions-la provisoirement. Nous y reviendrons un peu plus tard.

En ce qui concerne la somme des forces, c'est clairement la loi du parallélogramme qui joue, car on voit mal ce que pourrait vouloir dire l'action d'enchaîner deux segments orientés représentant des forces. La condition d'équilibre du point est que la somme des forces, calculée par la loi du parallélogramme, soit nulle.

Multiplier les forces par un nombre est une opération qui a aussi un sens dans le problème de l'équilibre d'un point. En effet, par exemple, si un point est en équilibre sous l'action de quelques forces, il demeure en équilibre si toutes ces forces sont multipliées par un même nombre.

[12] Cette loi ne va pas de soi, comme on s'en rend compte jusqu'à un certain point en considérant les accélérations. Quittons momentanément le cadre des mouvements uniformes, et supposons que le nageur ait un mouvement accéléré par rapport au fleuve et que le fleuve lui-même ait un mouvement accéléré par rapport à la rive. Dans un tel cadre, on définit pour le nageur une accélération relative, une accélération d'entraînement et une accélération absolue. Mais il est généralement faux que la somme des deux premières soit égale à la troisième.

Multiplier, comme nous venons de le faire, toutes les forces appliquées en un point par un même nombre revient à soumettre les vecteurs-forces à une homothétie. Par delà cette remarque, on voit mal *a priori* pourquoi on développerait une théorie des tranformations linéaires à propos des forces.

Dépassons maintenant le problème élémentaire de l'équilibre d'un point, et jetons un coup d'œil sur les questions plus générales où des forces interviennent. Bornons-nous aux questions de statique, car la dynamique nous entraînerait trop loin. Un problème fondamental est celui de l'équilibre d'un solide soumis à quelques forces. Ces forces tirent ou poussent sur le solide *en des points bien déterminés.* La condition (nécessaire et suffisante) d'équilibre est double : la somme (vectorielle) des forces doit être nulle, et la somme des moments des forces par rapport à un point fixe quelconque doit aussi être nulle[13]. Pour faire la somme des forces, le plus simple est de les imaginer toutes appliquées à un point quelconque donné et de procéder comme pour l'équilibre d'un point. Lorsqu'on fait cela, on libère en pensée les forces de leur point d'application sur le solide. Elles deviennent des vecteurs libres pour le temps du calcul. Par contre, pour faire la somme des moments des forces, on ne peut plus déplacer celles-ci, sauf éventuellement que chacune peut glisser sur sa *ligne d'action*, c'est-à-dire sur la droite déterminée par son point d'application et sa direction. En raison de cette contrainte, les mécaniciens ont introduit la notion de *système de vecteurs glissants*, aussi appelé *torseurs.* Ce n'est pas ici le lieu d'en faire la théorie.

Ceci suffit sans doute à montrer que les forces sont représentées fidèlement par des vecteurs, au sens où on leur applique les règles de calcul introduites pour les vecteurs géométriques (ou plus généralement pour les éléments des espaces vectoriels). Les vecteurs sont un outil de représentation des forces et donnent la clé de nombreux calculs qu'on leur applique, mais ils ne disent pas tout sur les forces. Un peu comme les nombres sont des outils de représentation pour celui qui pèse et paie des marchandises, mais les nombres ne disent pas tout sur les marchandises.

Sur la relation entre les forces et les vecteurs, voir le chapitre 12.

8.5 Les nombres complexes

Les nombres complexes sont parmi les objets mathématiques qui ont historiquement le plus contribué à l'émergence des vecteurs. Contentons-nous ici de montrer ce que devient la notion de tableau de proportionnalité lorsqu'on tente de l'étendre aux complexes. Disposons dans une première colonne tous les nombres complexes que nous voulons. Écrivons en face les mêmes nombres multipliés par un nombre complexe ζ, qui jouera le rôle de rapport externe. Un tel tableau satisfait aux deux propriétés de la somme et des rapports internes, les notions de somme et de rapport étant prises ici au sens des complexes. Ces propriétés résultent simplement du fait que les complexes forment un corps.

Il est intéressant de noter que la fonction linéaire à laquelle renvoie un tel tableau n'est autre qu'une similitude du plan complexe. À la section 7 notre généralisation des tableaux de proportionnalité engendrait toutes les transformations linéaires du plan. Ici nous n'atteignons que les similitudes. Par ailleurs, notre analyse de la section 7 s'étend sans peine aux espaces à n dimensions. Les nombres complexes eux ne s'appliquent qu'au plan. Quoiqu'il en soit, la représentation des similitudes par les complexes fait de ceux-ci un instrument très efficace d'étude des problèmes euclidiens plans.

Sur la relation entre les nombres complexes et les vecteurs, voir le chapitre 10.

[13] Nous sommes obligés ici de déborder un peu le cadre théorique de la présente étude. Le lecteur qui ne comprendrait pas ce paragraphe ne perdra pas grand chose de l'ensemble.

9 Conclusions

Jetons un dernier regard sur notre parcours. Nous sommes partis de la proportionnalité entre deux grandeurs. Nous avons envisagé d'emblée la proportionnalité, non sous la forme de l'égalité de *deux* rapports, mais sous la forme des tableaux de proportionnalité. Nous avons donc privilégié les *familles* – toujours extensibles –, de rapports égaux, ou plus généralement les fonctions linéaires. Penser les choses par familles stimule davantage la pensée que de les envisager une par une[14].

Regarder cette matière sous l'angle des tableaux et des fonctions nous a permis de mettre en évidence d'emblée les trois propriétés fondamentales : celles du rapport externe, de la somme et des rapports internes. Tout notre travail a consisté ensuite à voir comment ces notions s'adaptaient à des contextes divers, sucessivement les mesures, les grandeurs mesurées, les grandeurs orientées et leurs mesures, et enfin les grandeurs vectorielles. Nous avons étudié plusieurs généralisations du concept de somme, qui a pourtant conservé le même nom d'un bout à l'autre, et plusieurs généralisations du concept de rapport, celles-ci tellement profondes que le nom même de rapport a dû être remplacé, selon la matière traitée, par ceux de combinaison linéaire et de quotient de deux nombres complexes.

Au terme de ce parcours, nous avons un double espoir. C'est d'abord que le fil conducteur de la linéarité (il n'est pas le seul, mais il est important) soutienne la conception d'un enseignement en spirale, aide à en assurer la cohérence, et ramène l'attention sur les structures dans l'enseignement des mathématiques. À l'époque des mathématiques modernes, on a cru possible d'exhiber très tôt dans l'enseignement, et de manière axiomatique, certaines structures importantes. Du fait que cela s'est avéré difficile, certains ont eu tendance à conclure qu'il fallait accorder moins d'importance aux structures. Cela nous semble contraire à la nature même des mathématiques et préjudiciable à l'enseignement. Nous proposons plutôt *d'envisager les structures autrement*, à savoir en étant attentif à leur émergence et à leur maturation à travers toute la scolarité, quoique *sans vouloir les inculquer prématurément dans une forme abstraite.*

Notre deuxième espoir est qu'un enseignant qui aurait compris les connexions importantes qui relient tant de matières, serait mieux armé pour interpréter les difficultés rencontrées par les élèves dans les circonstances toujours pressantes d'une classe au travail.

[14] C'était une des conclusions méthodologiques de CREM [1995]