

LES MOUVEMENTS ET LES VITESSES

Avant-propos

La notion de vitesse est essentielle en mécanique. Elle se précise à travers deux étapes importantes de sa construction : son évaluation numérique et sa caractérisation géométrique. Or, dès qu'un mouvement se révèle être un peu complexe, ces deux aspects se retrouvent presque inextricablement liés, et là où en mathématiques on étudie au départ deux notions distinctes : la dérivée et le vecteur, en physique on ne considère plus qu'un seul objet : la vitesse.

À la croisée des deux disciplines, une image mentale commune peut se dégager de l'étude de photographies stroboscopiques du mouvement de projectiles. Elle est subordonnée à un principe général de discrétisation : les éclairs successifs d'un stroboscope figent des positions très rapprochées du projectile, et invitent à décomposer son mouvement en une succession très dense de mouvements simples, quasi rectilignes et uniformes, mais dont la direction et l'intensité de la vitesse changent tout le temps.

C'est à partir de cette image discrète que nous proposons ici de construire progressivement la notion de vitesse.

En bref, ce chapitre vise à

- détailler pourquoi et comment la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme peut être considérée comme un prototype de grandeur vectorielle en physique,
- définir la vitesse instantanée d'un mobile comme vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme « idéal »,
- mettre en évidence l'efficacité de ce double point de vue :

grandeur vectorielle/mouvement rectiligne idéal

à travers l'étude du mouvement circulaire uniforme.

En plus des photographies stroboscopiques – et des expériences de pensée, chères aux physiciens – le recours aux fonctions d'un tableur permet de proposer des modèles et de simuler des situations. En outre, dans le cas du mouvement circulaire uniforme, la définition même de ce genre de mouvement permet d'en *construire a priori des stroboscopies* à l'aide d'un tableur !

1 Marcher ou nager, c'est la même chose ?

De quoi s'agit-il ?

Décrire un mouvement rectiligne uniforme (inaccessible à des mesures directes) à partir des caractéristiques d'autres mouvements rectilignes uniformes (accessibles à de telles mesures).

Enjeux

La caractérisation vectorielle de la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme. Une interprétation cinématique des équations paramétriques d'une droite.

Sur les vitesses situées dans le cadre général du calcul vectoriel, voir la section 8.3 du chapitre 16.

De quoi a-t-on besoin ?

Un tableur (EXCEL, par exemple).

Prérequis

Les éléments du calcul vectoriel dans le plan, par exemple en termes de changements de position (voir le chapitre 8). La notion de mouvement rectiligne uniforme, en particulier de vitesse d'un tel mouvement, conçue dans un premier temps comme vitesse moyenne.

1.1 La décomposition d'un mouvement rectiligne

Comment s'y prendre ?

La situation suivante est simple, et très classique¹.

Question 1.

Lors d'un entraînement de triathlon, un athlète doit traverser à la nage une rivière large de 200 m et animée d'un fort courant. Il part du pied A d'un pont qui traverse cette rivière (cf. la figure 1 ci-dessous) et s'efforce de toujours nager droit devant lui, perpendiculairement à la berge, mais – bien sûr ! – le courant le déporte. Yves et Xavier sont eux aussi au pied A du pont, et observent le nageur prêt à s'élancer. Comment devraient-ils s'organiser (aussi simplement que possible) pour estimer la vitesse du nageur pendant sa traversée ?

Une manière simple de s'organiser

Voici une méthode qui suppose qu'Yves et Xavier disposent tout au plus d'une montre ou d'un chronomètre, et savent marcher... intelligemment.

Xavier emprunte le sentier le long de la berge et marche en restant toujours à hauteur du nageur ; en allongeant le pas, il fait des enjambées d'un mètre (en moyenne) et note la distance parcourue pour chaque minute écoulée. Yves fait de même sur le pont, et en s'efforçant lui aussi de rester toujours à hauteur du nageur. Tout cela revient donc à situer la position du nageur de minute en minute, dans un repère orthonormé « naturel ».

¹ Pour des variantes et des prolongements, on se reportera par exemple à E. Hecht [1999] : p. 51-59, A. Meessen [1984] : problème 5 à la p. 122, Physical Science Study Committee [1970] : p. 86-87 ou FESec [1997] : p. V9 à V11, ... sans oublier Formes et mouvements, CREM [2001a] : p. 274-275.

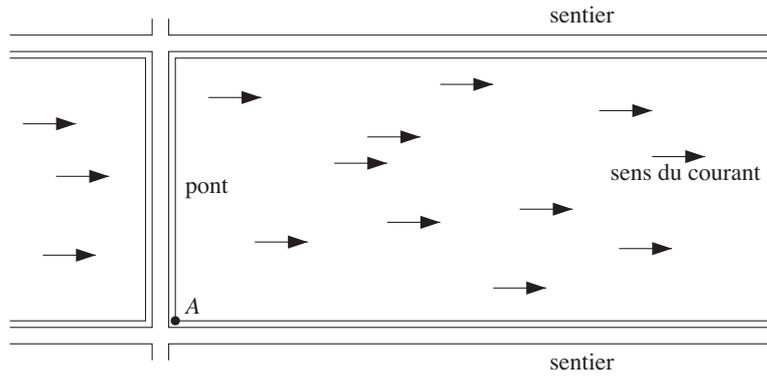


Fig. 1 : Le décor.

Il est relativement raisonnable de faire ici une *hypothèse d'uniformité* concernant les déplacements de Xavier et d'Yves. Pour fixer les idées, supposons donc que Xavier parcourt ainsi d'une démarche régulière 40 mètres par minute, tandis qu'Yves traverse pareillement le pont d'un pas égal en 10 minutes, c'est-à-dire à raison de 20 mètres par minute.

Les élèves peuvent facilement simuler cette situation à l'aide d'un tableur, et représenter ainsi les positions respectives de Xavier, d'Yves et du nageur toutes les minutes.

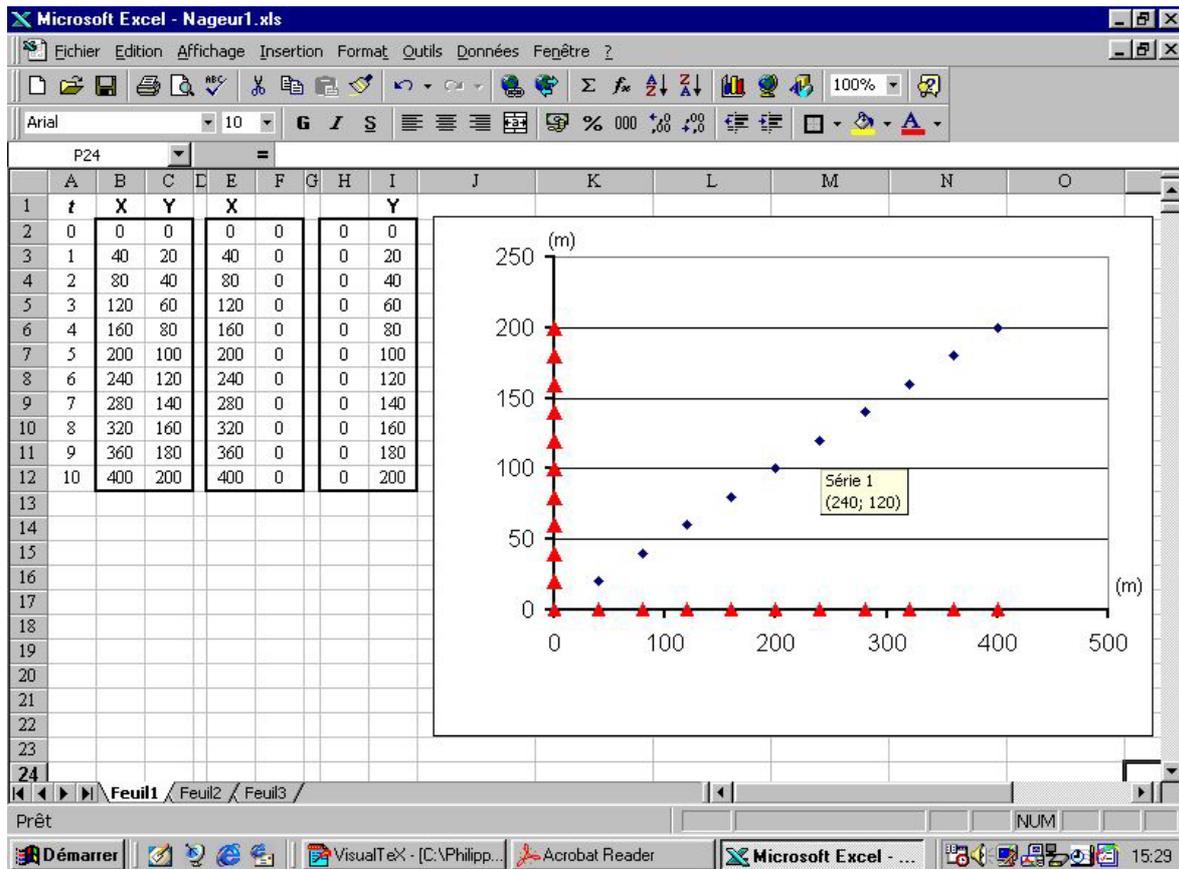


Fig. 2 : Les positions de Xavier, Yves et du nageur, toutes les minutes.

Par subdivisions successives, ils peuvent ensuite faire apparaître les positions des trois protagonistes de la question de manière presque continue.

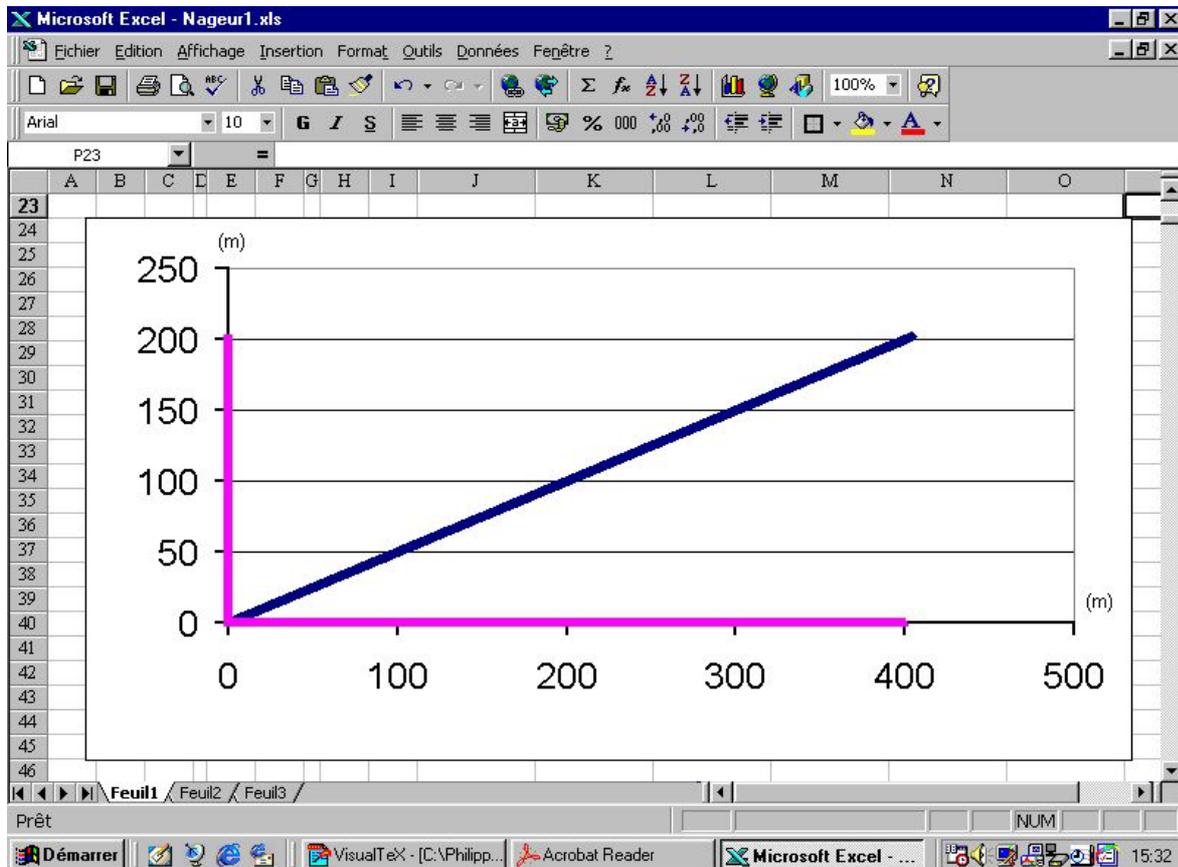


Fig. 3 : Les positions de Xavier, Yves et du nageur, toutes les 0,01 s.

Yves atteint ainsi l'autre rive en même temps que le nageur ; celui-ci a donc, lui aussi, mis 10 minutes pour traverser la rivière. Quelles sont les autres caractéristiques de son mouvement ?

Le déplacement du nageur est rectiligne

Décrire le déplacement du nageur revient à exprimer sa position en fonction de celles d'Yves et de Xavier. Or, nous avons supposé que le déplacement de chacun des deux observateurs est rectiligne et uniforme. La position de Xavier – comptée en mètres à partir du point *A* – s'exprime donc par l'équation

$$x = 40t,$$

où *t* est la durée de marche, comptée en minutes ; et pareillement pour Yves

$$y = 20t.$$

La position du nageur est ainsi déterminée à tout instant grâce aux deux équations

$$\begin{cases} x = 40t, \\ y = 20t, \end{cases}$$

qui méritent dès lors d'être appelées les *équations du mouvement*.

Occupons-nous de la trajectoire du nageur, c'est-à-dire de l'ensemble de toutes ses positions. C'est une figure géométrique indépendante du temps. Elle s'obtient donc en « chassant » le temps t hors des deux équations du mouvement. La première équation donne $t = \frac{x}{40}$, ce qui permet d'écrire la deuxième, à savoir

$$y = 20 \cdot \frac{x}{40} = \frac{1}{2}x.$$

C'est l'équation d'une droite². Le nageur suit donc une trajectoire rectiligne dont le point de départ est l'origine A du repère « naturel ».

Le mouvement du nageur est uniforme

Rappelons qu'un mouvement est qualifié d'uniforme si une même durée d'observation correspond toujours à un même espace parcouru, indépendamment de l'instant où débute l'observation.

Le mouvement du nageur détermine celui de Xavier et d'Yves, et chacun de ces mouvements est rectiligne. Montrons alors que le déplacement du nageur est uniforme si et seulement si celui de Xavier et d'Yves le sont aussi.

Supposons d'abord que les mouvements de Xavier et d'Yves sont uniformes. Situons leurs positions à deux instants d'observation (différents) : soient X_1, X_2 et Y_1, Y_2 . Les mouvements étant uniformes, si la durée d'observation est la même, les distances parcourues par chacun doivent donc être identiques (cf. figure 4). On a

$$|X_1X'_1| = |X_2X'_2|,$$

$$|Y_1Y'_1| = |Y_2Y'_2|,$$

où X'_1, X'_2 et Y'_1, Y'_2 désignent les positions atteintes à la fin de l'observation.

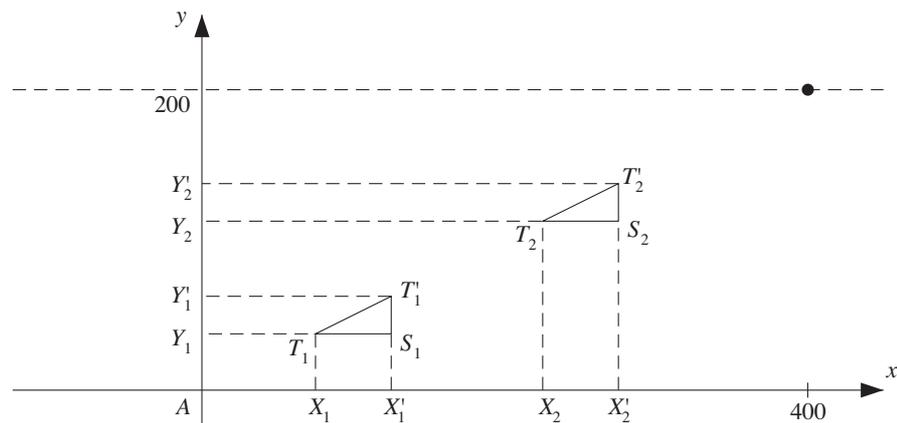


Fig. 4 : L'uniformité en termes de triangles isométriques.

² Le contexte est différent, mais les idées mises en œuvre ici sont exactement celles des chapitres 5 et 6.

Mais alors les triangles (rectangles) $T_1S_1T'_1$ et $T_2S_2T'_2$ sont isométriques : pendant cette durée d'observation, les distances $|T_1T'_1|$ et $|T_2T'_2|$ parcourues par le nageur sont donc bien identiques.

La réciproque s'établit d'une manière analogue, c'est-à-dire à l'aide d'une isométrie de triangles rectangles. Supposons que le mouvement du nageur est rectiligne uniforme. La trajectoire du nageur étant rectiligne, les angles \widehat{T}_1 et \widehat{T}_2 des triangles rectangles $T_1S_1T'_1$ et $T_2S_2T'_2$ sont égaux, et le mouvement du nageur étant uniforme, les distances $|T_1T'_1|$ et $|T_2T'_2|$ sont égales. Les triangles rectangles $T_1S_1T'_1$ et $T_2S_2T'_2$ sont donc isométriques, d'où on déduit immédiatement que les distances parcourues par Xavier (resp. Yves) pendant les durées d'observation sont identiques.

Une estimation de la vitesse du nageur

Le déplacement du nageur étant rectiligne et uniforme, sa vitesse est constante, et peut se calculer dès qu'on connaît la distance parcourue pendant un intervalle de temps. Or, la distance parcourue pendant les 10 minutes que dure la traversée s'obtient grâce au théorème de Pythagore (cf. figure 5) :

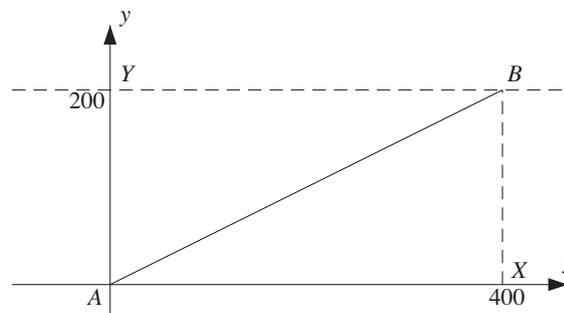


Fig. 5 : L'espace parcouru par le nageur.

$$|AB| = \sqrt{|AX|^2 + |AY|^2} = \sqrt{400^2 + 200^2} = 200\sqrt{5} = 447,21\dots \text{ (m)}$$

La vitesse du nageur est donc approximativement de 45 mètres par minute (c'est-à-dire 0,75 m/s ou 2,7 km/h).

1.2 La vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme

Comment s'y prendre ?

Aussi satisfaisantes qu'elles soient, les réponses apportées à la question 1 méritent d'être approfondies. C'est ce que la question suivante se propose de faire. Son caractère plus théorique explique que sa résolution n'est pas nécessairement laissée à la seule initiative des élèves. L'enseignant veillera néanmoins à ce que les caractéristiques essentielles de la vitesse en tant que *grandeur vectorielle* – puisque c'est de cela qu'il s'agit ici – soient clairement mises en évidence pour tous les élèves.

Question 2.

Quelles sont les relations qui lient les trois vitesses, celle de Xavier, celle d'Yves et celle du nageur, et plus précisément, comment exprimer ces relations en termes mathématiques (direction, sens des mouvements) et en termes physiques (mobiles concernés, grandeurs associées aux mouvements) ?

Un bilan des observations

On vient de montrer que le mouvement du nageur est rectiligne et uniforme si et seulement si celui d'Yves et Xavier le sont et que la vitesse du nageur peut être évaluée en conséquence, à partir des vitesses respectives d'Yves et de Xavier.

Ceci remis en mémoire, les déplacements et donc les vitesses d'Yves, de Xavier et du nageur ont néanmoins des caractéristiques physiques assez différentes. Précisons ces différences.

- Chacun des déplacements considérés concerne des personnes différentes, et dans notre représentation, ce sont bien des *points* différents qui bougent.
- D'autre part, les *droites* suivant lesquelles les mouvements rectilignes uniformes se manifestent sont complètement distinctes pour chacun des trois protagonistes.
- Enfin, ni Yves ni Xavier n'exercent d'effet physique contraignant sur le nageur, ils ne lui communiquent pas l'énergie nécessaire à son effort et ils ne sont donc en rien la cause de son mouvement.

Et néanmoins, comme on l'a vu par exemple en écrivant l'équation de la trajectoire du nageur, les trois mouvements ne sont pas indépendants. Les déplacements de Xavier et d'Yves permettent même de reconstituer complètement le mouvement du nageur.

Comment relier le mouvement de Xavier ou d'Yves, avec ce que le nageur ressent ?

On peut introduire dans le raisonnement des mouvements et donc des vitesses dont les effets physiques sont directement perceptibles par le nageur.

- Si le nageur est en eau calme (un étang ou un lac par exemple), l'absence de courant lui permet de nager effectivement droit devant lui sans être déporté. Cette vitesse existe aussi pour notre triathlète pris dans le courant d'eau : c'est celle qu'il acquiert par l'exercice de sa (seule) force musculaire. C'est aussi celle qu'il s'efforce de diriger toujours perpendiculairement à la rive. Comme il essaie de se diriger ainsi indépendamment du courant, on appelle cette vitesse : la *vitesse du nageur par rapport au courant*, ou *par rapport à l'eau*.
- Si le nageur se laisse dériver sous l'effet du courant sans nager³, son déplacement, comme sa vitesse, est parallèle à la rive. La vitesse

³ ... Mais sans oublier de rester à la surface de l'eau...

correspondante n'est alors en fait que la vitesse du courant, ou si on veut être précis : la *vitesse du courant par rapport à la rive*.

Résumons-nous : nous disposons maintenant de cinq vitesses au lieu de trois pour analyser le mouvement du nageur ! Mais comme trois d'entre elles possèdent des effets physiques ressentis directement par le nageur, il y a peut-être du sens à décrire la manière dont ces effets sont reliés les uns aux autres.

Comment combiner des grandeurs caractérisées aussi bien par leur direction que par leur intensité ?

Chacune des vitesses rencontrées jusqu'à maintenant est associée à un mouvement rectiligne uniforme et est entièrement déterminée par quatre caractéristiques :

- le point en mouvement, ou *point d'application* de la vitesse,
- la *direction* de la vitesse, c'est-à-dire la droite suivant laquelle le mouvement rectiligne se produit,
- le *sens* de la vitesse, qui est un des deux sens⁴ de parcours sur la droite en question,
- l'*intensité* de la vitesse, c'est-à-dire la mesure de l'espace parcouru par unité de temps.

Les résultats obtenus dans la question 1 suggèrent alors une manière de combiner des grandeurs physiques ayant autant de caractéristiques géométriques diverses. La vitesse du nageur par rapport au courant et la vitesse du courant par rapport à la rive sont en effet deux grandeurs physiques du type que l'on vient de définir. Elles concernent directement notre nageur. Il y a donc du sens à envisager leur effet simultané, qui se manifeste dans le mouvement résultant du nageur. De plus, les caractéristiques de ce mouvement résultant sont déterminées à partir d'un rectangle naturellement associé à la situation :

- ce mouvement résultant est lui aussi rectiligne, et on sait déterminer sa direction, c'est celle de la diagonale d'un rectangle dont les côtés sont proportionnels à chacune des vitesses primitives ;
- il est de plus lui aussi uniforme, de telle sorte qu'on sait aussi mesurer l'intensité de la vitesse correspondante : elle est équivalente à la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les côtés sont équivalents à chacune des mesures des vitesses primitives.

Pour faire bref, une grandeur physique possédant les quatre caractéristiques géométriques décrites plus haut, et obéissant à cette règle de combinaison « en rectangle » sera appelée une *grandeur vectorielle*, afin de mettre en évidence les traits communs de ce type de grandeur avec la notion de vecteur.

On représente alors par $\vec{v}_{nageur/rive}$ la vitesse du nageur par rapport à la rive, considérée comme grandeur vectorielle ; on note pareillement

⁴ Le sens du courant est distinct de sa direction, du moins dans le langage mathématique. . .

$\vec{v}_{\text{courant}/\text{rive}}$ la vitesse du courant par rapport à la rive, et $\vec{v}_{\text{nageur}/\text{courant}}$ la vitesse du nageur par rapport au courant. La résultante⁵ des deux vitesses $\vec{v}_{\text{nageur}/\text{courant}}$ et $\vec{v}_{\text{courant}/\text{rive}}$ donne donc naissance à la vitesse $\vec{v}_{\text{nageur}/\text{rive}}$ du nageur :

$$\vec{v}_{\text{nageur}/\text{rive}} = \vec{v}_{\text{nageur}/\text{courant}} + \vec{v}_{\text{courant}/\text{rive}}.$$

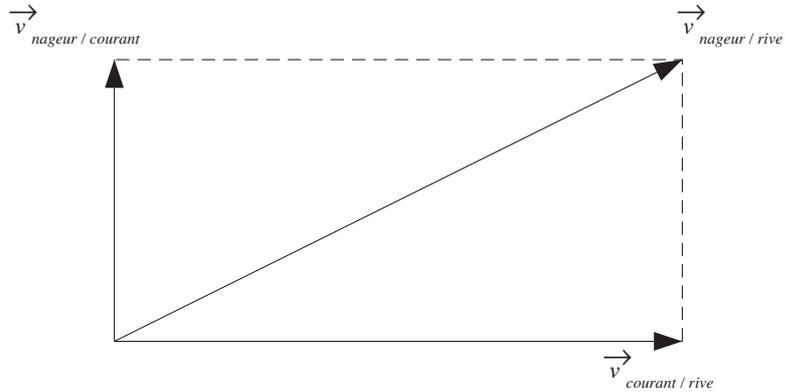


Fig. 6 : La combinaison des vitesses se visualise ici à l'aide d'un rectangle.

L'opération de combinaison ou d'addition vectorielle met ainsi bien en jeu les *quatre* caractéristiques des grandeurs concernées : le point d'application (commun), la direction, le sens et la mesure ou intensité.

... Mais on n'a pas encore répondu à la question !

Au travers de la notion de grandeur vectorielle, la relation

$$\vec{v}_{\text{nageur}/\text{rive}} = \vec{v}_{\text{nageur}/\text{courant}} + \vec{v}_{\text{courant}/\text{rive}}$$

est maintenant revêtue d'une signification tant mathématique que physique. Mais cette relation n'est pas celle qui a été mise en scène dans la question 1, et qui serait plutôt du type

$$\vec{v}_{\text{nageur}/\text{rive}} = \vec{v}_{\text{Yves}} + \vec{v}_{\text{Xavier}},$$

où \vec{v}_{Xavier} et \vec{v}_{Yves} désignent les vitesses de Xavier et d'Yves. Comme il est important ici de préciser les points d'application des vitesses en question, il vaudrait même mieux écrire :

$$\vec{v}_{\text{nageur}/\text{rive}}(T_1) = \vec{v}_{\text{Yves}}(Y_1) + \vec{v}_{\text{Xavier}}(X_1),$$

où Y_1 et X_1 sont les positions respectives de Yves et de Xavier lorsque le nageur est observé en T_1 dans la rivière (cf. figure 7). Mais que signifie une telle écriture, mathématiquement correcte, au point de vue physique ?

⁵ Ou combinaison, ou encore somme vectorielle...

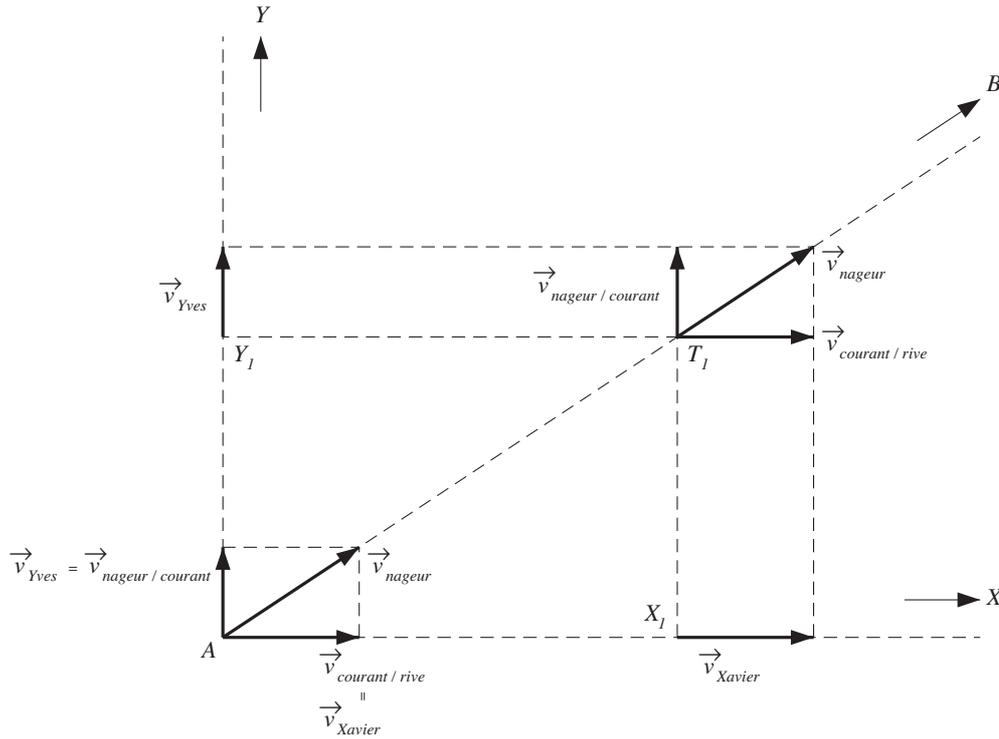


Fig. 7 : Des grandeurs a priori différentes traduisent des effets équivalents.

La réponse vient en deux étapes. Au moment initial, c'est-à-dire lorsque Xavier, Yves et le nageur entament leurs mouvements respectifs au pied A du pont, on a

$$\vec{v}_{nageur/rive}(A) = \vec{v}_{nageur/courant}(A) + \vec{v}_{courant/rive}(A),$$

et donc aussi

$$\vec{v}_{nageur/rive}(A) = \vec{v}_{Yves}(A) + \vec{v}_{Xavier}(A), \quad (1)$$

puisque'au point A, on a des égalités de vitesses

$$\vec{v}_{nageur/courant}(A) = \vec{v}_{Yves}(A) \quad \text{et} \quad \vec{v}_{courant/rive}(A) = \vec{v}_{Xavier}(A).$$

D'autre part, le mouvement d'Yves est rectiligne et uniforme, de telle sorte qu'il y a un sens physique à écrire

$$\vec{v}_{Yves}(A) = \vec{v}_{Yves}(Y_1), \quad (2)$$

puisque cela signifie que, lors d'un déplacement le long de sa propre trajectoire rectiligne, Yves ne voit pas changer sa vitesse. On donne ainsi une signification physique à ce que cette vitesse-là ne soit pas liée à son point d'application : c'est une caractéristique fondamentale du mouvement sous-jacent ! Pour la même raison, on a aussi

$$\vec{v}_{Xavier}(A) = \vec{v}_{Xavier}(X_1), \quad (3)$$

et

$$\vec{v}_{nageur/rive}(A) = \vec{v}_{nageur/rive}(T_1). \quad (4)$$

La relation (1) devient ainsi, suite à (2), (3) et (4),

$$\vec{v}_{nageur/rive}(T_1) = \vec{v}_{Yves}(Y_1) + \vec{v}_{Xavier}(X_1),$$

qui est bien la relation en jeu dans la question 1. En termes de grandeur vectorielle, cette relation s'interprète donc maintenant comme une manière d'exprimer globalement — c'est-à-dire indépendamment du point d'application — la composition de mouvements rectilignes uniformes.

Et si on veut vraiment aller au fond des choses...

Une question en appelle une autre. Quelles sont en général les conditions physiques qui autorisent certaines vitesses à se libérer de leur point d'application? Par exemple, quelle est la signification physique des égalités mathématiques

$$\vec{v}_{Yves}(Y_1) = \vec{v}_{nageur/courant}(T_1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_{Xavier}(X_1) = \vec{v}_{courant/rive}(T_1) ?$$

À nouveau, il vaut mieux décomposer le raisonnement en deux étapes. D'abord, une égalité telle que

$$\vec{v}_{Yves}(Y_1) = \vec{v}_{nageur/courant}(Y_1)$$

exprime que deux grandeurs vectorielles ont la même manifestation physique au même point. Mais l'égalité qui vient ensuite à l'esprit, à savoir

$$\vec{v}_{nageur/courant}(Y_1) = \vec{v}_{nageur/courant}(T_1),$$

se révèle avoir un statut assez nouveau! En effet, le point d'application de cette vitesse se déplace le long d'une trajectoire rectiligne qui n'est pas du tout celle du mouvement sous-jacent, c'est-à-dire du nageur (cf. la figure 7), et ce n'est donc pas le caractère uniforme du mouvement du nageur qui peut rendre compte à lui seul de l'égalité en question. Comment interpréter néanmoins cette égalité en termes de mouvements rectilignes uniformes?

Cette interprétation prend en compte l'hypothèse suivante : quel que soit l'endroit de la rivière où il se trouve, le nageur déploie pour se déplacer (en restant perpendiculaire au courant) une énergie qui est toujours la même⁶. De manière presque équivalente, s'il n'y a pas de courant, et si plusieurs nageurs de même force que notre triathlète partent en même temps de la rive en nageant droit devant eux, ils progresseront en restant toujours à même hauteur ; une telle circonstance s'observe d'ailleurs assez souvent dans les premiers instants d'une course de vitesse en natation. Et la conclusion est analogue si on imagine que ces nageurs partent de la ligne Y_1T_1 .

⁶ Cela sous-entend, par exemple, qu'il n'y a pas un endroit dans la rivière où la température de l'eau est anormalement froide, et où un engourdissement ou des crampes peuvent ralentir le nageur ; ce genre d'effet est évoqué dans la question 4 plus loin.

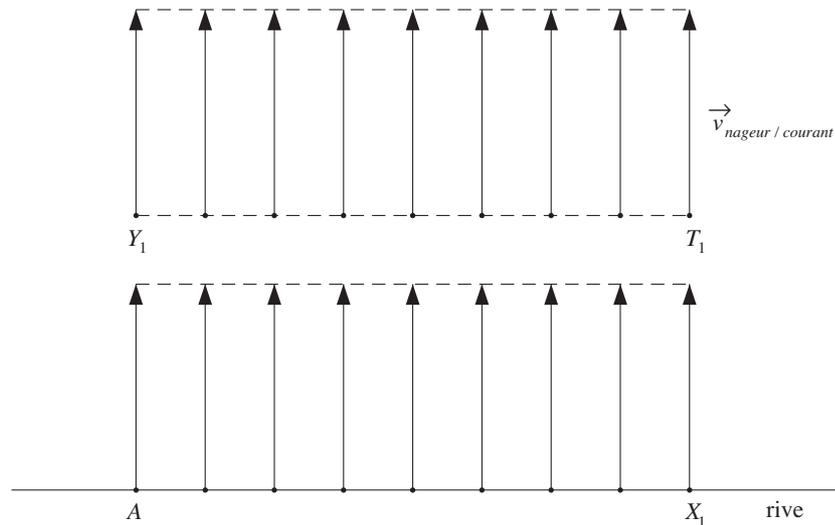


Fig. 8 : Le transport parallèle de la vitesse du nageur par rapport au courant.

C'est au sens de telles expériences de pensée que l'égalité

$$\vec{v}_{nageur/courant}(Y_1) = \vec{v}_{nageur/courant}(T_1)$$

prend alors une double signification physique, à savoir :

- il existe un mouvement rectiligne uniforme qui part du point Y_1 pour arriver en T_1 ,
- et le long de la trajectoire de ce mouvement, une famille continue de mouvements rectilignes uniformes permet de relier $\vec{v}_{nageur/courant}(Y_1)$ à $\vec{v}_{nageur/courant}(T_1)$.

En bref, deux mouvements rectilignes uniformes peuvent être considérés comme équivalents dès qu'il y a moyen de les « transporter par parallélisme » l'un sur l'autre de manière continue.

Une description analogue s'applique aux deux égalités

$$\vec{v}_{Xavier}(X_1) = \vec{v}_{courant/rive}(X_1) = \vec{v}_{courant/rive}(T_1),$$

et correspond d'ailleurs à l'idée d'un courant constant en tout point de la rivière, c'est-à-dire un courant dont la mesure de l'effet donne toujours le même résultat, quel que soit l'endroit de la rivière où cette mesure est réalisée.

1.3 Du rectangle au parallélogramme

Comment s'y prendre ?

Revenons-en à notre triathlète, et remarquons d'abord qu'il y a un moyen bien simple pour aider le nageur à se déplacer perpendiculairement à la direction du courant. Il suffit qu'il nage en restant face à un troisième larron – appelons-le Jacques – qui se déplace sur l'autre rive, en restant toujours à la même hauteur que Xavier (cf. la figure 9).

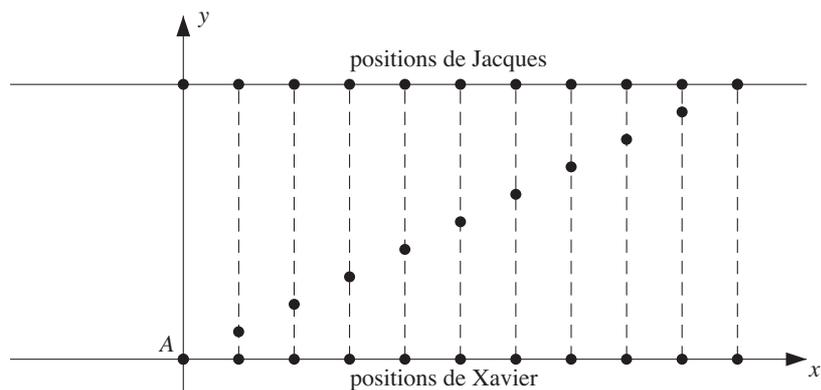


Fig. 9 : Le nageur se dirige en restant en face de Jacques.

Question 3.

Que se passe-t-il alors si Jacques, au lieu de partir du point Y , à l'extrémité du pont sur l'autre rive, entame son mouvement par exemple 120 mètres avant ce point ? Que faut-il changer dans la résolution de la question 1 ?

Pour que cette nouvelle situation reste comparable à celle qui précède, on suppose encore que la vitesse de Jacques reste la même que celle de Xavier, que le nageur s'efforce de garder toujours Jacques en point de mire et qu'il essaie de maintenir sa vitesse (dans la direction qu'il vise) à 20 mètres par minute.

Il n'y a pas grand-chose à changer !

En fait, on peut reproduire textuellement tout le raisonnement développé dans la réponse à la question 1 ainsi que la formulation vectorielle qui en a été présentée dans la réponse à la question 2. Car ce qui importe, c'est qu'on combine encore deux mouvements rectilignes uniformes : le fait que leurs directions ne soient plus orthogonales ne change rien à l'affaire. Le mouvement résultant du nageur est donc encore rectiligne et uniforme : le parallélogramme remplace le rectangle (cf. la figure 10).

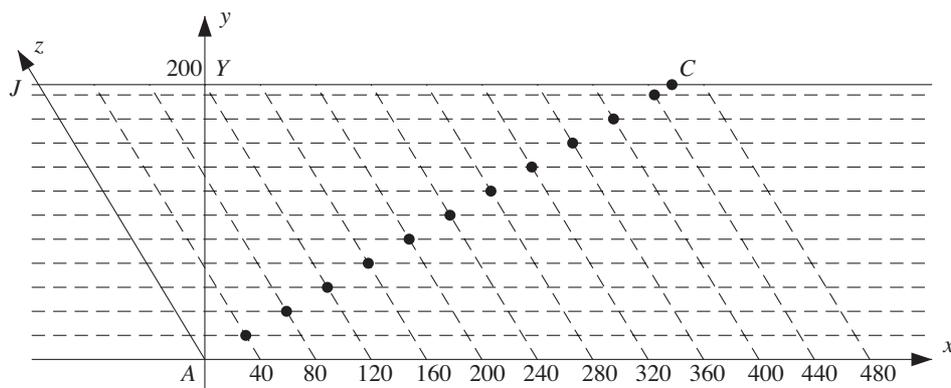


Fig. 10 : La trajectoire du nageur est déterminée par des parallélogrammes.

L'écriture vectorielle permet de manifester cette permanence du raisonnement. En effet,

$$\vec{v}_{nageur/rive} = \vec{v}_{nageur/courant} + \vec{v}_{courant/rive},$$

pourvu qu'on identifie correctement la direction des différents vecteurs $\vec{v}_{nageur/rive}$, $\vec{v}_{nageur/courant}$ et $\vec{v}_{courant/rive}$, puisque c'est uniquement en terme de directions que les changements par rapport à la question 1 se produisent.

Le calcul de la vitesse du nageur

Le calcul de la vitesse réelle du nageur dans la nouvelle situation peut encore s'obtenir par analogie avec le cas « rectangulaire ». D'abord, dans un repère adapté (cf. la figure 10), les deux équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} x = 40t, \\ z = 20t, \end{cases}$$

où t est toujours la durée du déplacement compté en minutes. Ensuite, le calcul du temps nécessaire à la traversée résulte de l'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AJY (cf. la figure 11) : la relation

$$200^2 + 120^2 = (20t)^2$$

implique en effet : $t = \sqrt{136} = 11,66\dots$ (en minutes).

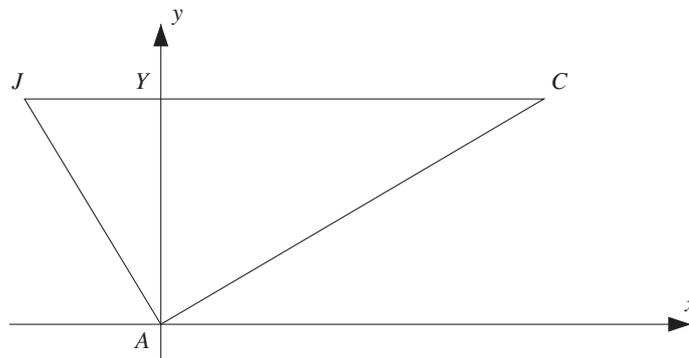


Fig. 11 : Le théorème de Pythagore permet d'évaluer la vitesse.

On en déduit $|YC| = 40 \cdot (11,66\dots - 3) = 346,47\dots$ (m). Le théorème de Pythagore, employé cette fois-ci dans le triangle AYC permet alors d'évaluer

$$|AC| = 400,05\dots \text{ (m)}.$$

Et finalement, la vitesse du nageur vaut

$$\text{mesure de } \vec{v}_{nageur/rive} = \frac{400,05\dots}{11,66\dots} = 34,30\dots \text{ (m/min)}.$$

Ce résultat n'a rien de bien étonnant : le nageur a mis plus de temps qu'auparavant pour parcourir une plus petite distance !

1.4 Synthèse : la notion de grandeur vectorielle

Beaucoup de grandeurs utilisées en physique proviennent d'une description géométrique des phénomènes qu'on souhaite étudier, cette description incluant presque toujours le mode de calcul de ces grandeurs. Les vitesses des mouvements rectilignes uniformes fournissent peut-être l'exemple le plus simple de grandeurs susceptibles d'une telle description géométrique. A ce titre, elles servent de modèles à ce qu'on appelle ici une *grandeur vectorielle*. On se limite dans la suite aux premières considérations relevant de la mécanique du point matériel.

La définition de grandeur vectorielle

Lorsqu'on étudie le mouvement d'un point matériel dans le plan ou dans l'espace, la première chose à délimiter est l'ensemble des positions que ce point peut occuper durant son mouvement. Il s'agit souvent d'une région plus ou moins bien définie du plan ou de l'espace, sans qu'on exige *a priori* de se restreindre ainsi à la seule trajectoire. De plus, la partie en question n'est pas nécessairement rectiligne ou plane : le mouvement pendulaire ou le mouvement à la surface de la terre en sont deux illustrations. Cette partie de l'espace dans laquelle se déroule le mouvement du point matériel s'appelle l'*espace de configuration* de ce point ; on est supposé assez naturellement y disposer d'un procédé de calcul de la distance séparant deux points quelconques.

Une grandeur physique d'une espèce donnée est qualifiée de *grandeur vectorielle* si elle possède les trois séries de propriétés suivantes.

- D'abord, des *propriétés de représentation géométrique* : au sens où il existe une représentation géométrique de cette grandeur qui possède
 - une origine ou point d'application, pris dans l'espace de configuration,
 - une direction,
 - un sens,
 - une intensité évaluée par rapport à une unité de mesure associée à l'espèce de grandeur en question (par exemple le mètre par seconde, s'il s'agit d'une vitesse).

Une telle représentation géométrique est souvent figurée par un segment orienté dans un plan ou un espace, qui est de par sa nature même, distinct de l'espace de configuration. Ce segment est attaché à son point d'application, qui est le seul point commun à ces deux mondes différents : l'espace de configuration et l'espace de représentation de la grandeur en question. Des échelles appropriées (par exemple une échelle pour les longueurs et une échelle pour les vitesses) permettent de faire coexister dans un même dessin des grandeurs vectorielles de nature différente.

- Ensuite, des *propriétés de composition* : l'ensemble de ces représentations géométriques attachées à un même point obéit aux règles du calcul des vecteurs liés à ce point. Plus précisément, l'ensemble de toutes les grandeurs de cette espèce attachées à un même point

est muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien, la structure euclidienne reflétant le choix de l'unité de mesure de la grandeur en question.

- Enfin, des *propriétés de comparaison* : l'ensemble de toutes les grandeurs de cette espèce attachées à un même point peut être transporté par parallélisme en un autre point de l'espace de configuration, et être ainsi comparé à l'ensemble des grandeurs de même espèce attachées à ce dernier point.

De manière un peu plus concrète, les *propriétés de composition* attribuées à ces grandeurs signifient que

- lorsqu'une telle grandeur est multipliée par n'importe quel nombre (réel, et différent de 0), il en résulte une grandeur de même espèce, dont la représentation géométrique garde le même point d'application, conserve sa direction, ne modifie son sens que si le signe du nombre est négatif, et voit son intensité multipliée par la valeur absolue du nombre considéré (cf. la figure 12) ;

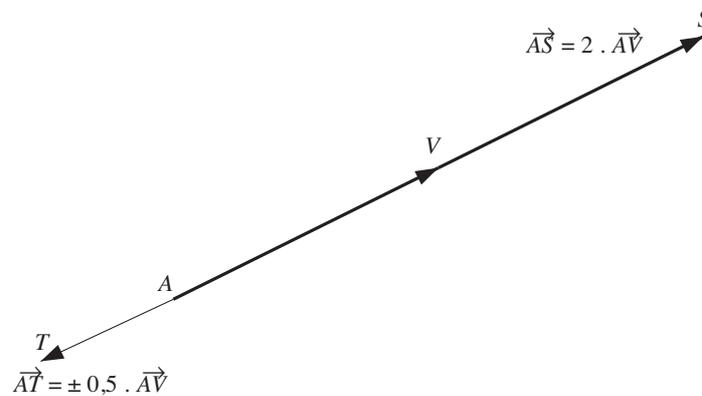


Fig. 12 : La représentation géométrique de multiples d'une grandeur vectorielle.

- dès que deux d'entre elles ont leurs représentations géométriques qui possèdent le même point d'application, ces grandeurs peuvent être composées ou combinées pour redonner une grandeur de même espèce, et la représentation géométrique du résultat se réalise suivant la « règle du parallélogramme » (cf. la figure 13).

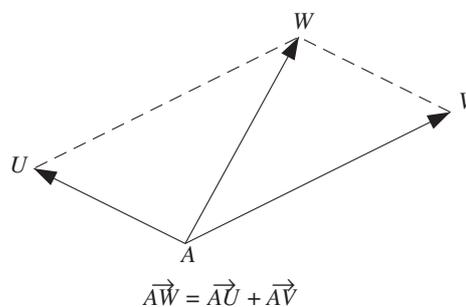


Fig. 13 : La composition de grandeurs vectorielles se représente grâce à la règle du parallélogramme.

Ces deux définitions suffisent pour établir que les représentations géométriques des grandeurs en question obéissent aux règles usuelles (associativité, commutativité, distributivités, ...) du calcul des vecteurs attachés, ou liés, à un point donné de l'espace de configuration.

La raison d'être des *propriétés de comparaison* peut paraître anodine ou détournée, mais elle est pourtant fondamentale! Ces propriétés décrivent en termes géométriques un protocole de comparaison des grandeurs attachées à des points différents de l'espace de configuration, et qui n'est pas limité à la seule intensité de ces grandeurs. C'est en particulier ce protocole qui permet de définir l'égalité de grandeurs vectorielles de même espèce attachées à des points distincts.

Un exemple fondamental de grandeur vectorielle

Les questions 2 et 3 ont montré en effet que la vitesse d'un point animé d'un mouvement rectiligne uniforme se comporte en chaque point de l'espace de configuration comme un vecteur attaché à ce point. Lorsqu'on travaille en des points distincts de l'espace de configuration, ces mêmes questions ont mis en évidence un critère d'égalité. Pour mémoire, ce critère peut s'énoncer comme suit :

si $\vec{v}(P)$ et $\vec{w}(Q)$ sont des vitesses attachées respectivement aux points P et Q , alors $\vec{v}(P) = \vec{w}(Q)$ si et seulement si, en notant P' et Q' les positions respectivement atteintes par P et Q après les mêmes durées de parcours : le quadrilatère $PP'Q'Q$ (situé entièrement dans l'espace de configuration) est un parallélogramme.

Plus concrètement peut-être, deux telles vitesses sont égales en tant que grandeurs vectorielles si et seulement si les trajectoires des points mobiles correspondants sont parallèles et parcourues dans le même sens, et si les intensités des vitesses correspondantes sont égales. C'est ce qui semble traduire au mieux l'idée intuitive d'égalité de ces grandeurs lorsque l'espace de configuration est l'espace usuel⁷.

D'autres exemples de grandeurs vectorielles

À toute position d'un point (mobile) à un instant donné dans un repère fixé, on peut associer le vecteur-position de ce point, dont l'origine est l'origine du repère et l'extrémité la position du point mobile à l'instant considéré. Ainsi, dans le cas de la situation étudiée dans la question 1, si on note $N(t)$ la position du nageur à l'instant t , on peut écrire les équations

⁷ Quand on commence à étudier les premiers rudiments de la mécanique dans l'enseignement secondaire, on se place presque toujours dans l'espace de configuration le plus commode possible, qui est le plan – ou l'espace – affine euclidien. On y dispose d'un « parallélisme absolu », qui permet souvent de considérer comme allant de soi les propriétés de comparaison des grandeurs vectorielles.

Il faut néanmoins essayer de garder présent à l'esprit que la représentation sur une même figure des positions et des vitesses n'est pas naturelle, au sens où il s'agit en effet de grandeurs de nature différente. Les sections suivantes permettront de préciser cette remarque. Par exemple, les propriétés du mouvement *circulaire* uniforme montrent que, dans le cas d'un mouvement à la surface de la terre, la vitesse est toujours située *dans le plan tangent* à la sphère terrestre, et n'a donc *que* son origine en commun avec celle-ci!

du mouvement

$$\begin{cases} x = 40t, \\ y = 20t, \end{cases}$$

comme une égalité entre grandeurs vectorielles

$$\overrightarrow{AN}(t) = t \cdot \overrightarrow{AN},$$

où $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$ est le vecteur-position du nageur après une minute d'effort. Un déplacement – ou changement de position – est alors une différence (vectorielle) entre deux vecteurs-position, etc ; on retrouve ainsi, à quelques nuances de langage près, la géométrie du plan ou de l'espace affine.

Les questions 7 et 15 ci-après construiront la vitesse (instantanée) comme grandeur vectorielle dans le cas de deux types de mouvement curviligne : le mouvement du projectile (lancé horizontalement), et le mouvement circulaire uniforme.

Les forces constituent un autre exemple de grandeur vectorielle (voir le chapitre 12).

La quantité de mouvement, le champ électrique, le champ magnétique, ... constituent encore d'autres exemples de grandeurs vectorielles qu'on rencontre en physique.

Par contre, la température, la charge électrique, ... sont des exemples de grandeurs physiques qui *ne* sont *pas* vectorielles, mais scalaires.

2 Comment immobiliser le temps ?

De quoi s'agit-il ?

Décrire quantitativement le mouvement d'un projectile à partir des caractéristiques de deux mouvements rectilignes bien choisis. Montrer pourquoi la vitesse instantanée *doit* être une grandeur vectorielle.

Enjeux

La caractérisation vectorielle de la vitesse instantanée.

De quoi a-t-on besoin ?

Un montage appelé « le jet d'eau articulé » décrit dans les figures 15 et 16 ci-dessous, ainsi que dans le texte qui accompagne ces figures.

Deux photographies stroboscopiques, ou chronophotographies, (cf. les figures 19 et 22 dans la suite, en annexe aux pages 496 et 497).

Un tableur (EXCEL, par exemple).

Prérequis

Les notions et lois fondamentales concernant la chute libre⁸, plus précisément :

- l'accélération de la pesanteur g est constante et vaut $9,81 \text{ m/s}^2$,
- la vitesse est une fonction linéaire du temps : $v = gt$,
- et l'espace parcouru est décrit par la formule $e = \frac{gt^2}{2}$.

⁸ Il serait possible de ne pas en faire des prérequis, et de les découvrir ici : les photographies étudiées dans la suite permettant en effet d'établir ces lois. Mais cela nous éloignerait de notre but...

2.1 Le nageur se fatigue.

Comment s'y prendre ?

Tout ce qui a précédé supposait que notre triathlète nageait avec une vigueur anormalement constante.

Question 4.

Comment peut-on se rendre compte que le nageur se fatigue ?

Ce qui ne change pas, et ce qui change

Comme la vitesse du courant est exactement celle de Xavier, celui-ci n'a aucun moyen de se rendre compte que le nageur est en train de se fatiguer.

Par contre, Yves, qui n'est concerné que par la partie transversale du mouvement du nageur, en perçoit toutes les variations. Si le nageur progresse avec moins de vigueur, Yves avancera moins vite, et s'il doit s'immobiliser pour rester à hauteur du nageur, c'est que celui-ci, fatigué, s'est laissé emporter par le courant.

Une simulation vaut mieux qu'un long discours...

En voici une, mais beaucoup d'autres sont envisageables.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	(en minutes)
$x(t)$	0	80	160	240	320	400	480	560	640	720	800	(en mètres)
$y(t)$	0	38	72	102	128	150	168	182	192	198	200	(en mètres)

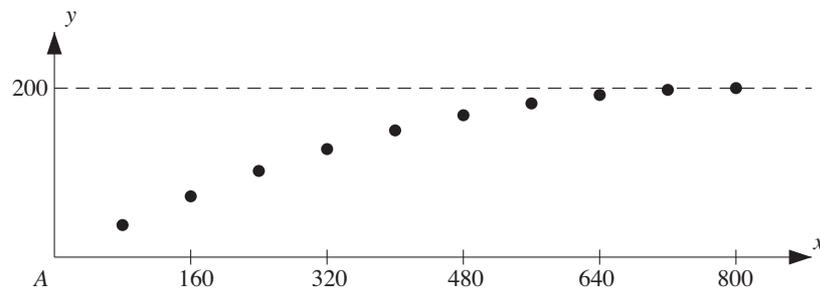


Fig. 14 : L'effet de la fatigue.

Au vu de tout ce qui a été mis en évidence précédemment, une question se pose presque tout de suite : comment parler de la vitesse du nageur dans une telle situation ? Son déplacement n'est manifestement plus rectiligne, ni uniforme⁹ !

2.2 Le jet d'eau articulé

Comment s'y prendre ?

Lorsqu'on arrose une pelouse avec un tuyau d'arrosage, quelle est la forme du jet d'eau ?

⁹ Sauf bien sûr dans le cas où le nageur se laisse emporter par le courant. Mais un triathlète qui se respecte ne se laisse jamais entraîner de la sorte...

Si on arrose à la verticale, le jet d'eau fournit une description de l'arroseur... arrosé. Si on n'arrose pas à la verticale mais, par exemple, suivant un angle de 30° avec l'horizontale, le jet d'eau emprunte une trajectoire qui n'est pas rectiligne, mais bien incurvée vers le sol.

En effet, aussi puissant que soit le jet d'eau et même si la direction initiale du jet est bien rectiligne, l'eau retombe de toute façon sur la pelouse : la trajectoire ne peut donc pas être une droite. Par ailleurs, on observe que la portée de l'arrosage varie avec l'angle initial du jet, et la pression d'eau à la sortie.

Voici un procédé expérimental qui permet de mieux observer et de commencer à décrire la forme du jet d'eau. On se procure une longue latte en bois, bien rigide, d'environ 2 m de long. L'extrémité du tuyau d'arrosage est fixée sur 50 cm à une des faces de cette latte ; il peut se révéler utile d'insérer entre la latte et le tuyau une fine tranche d'isomo (ou polystyrène expansé) afin d'empêcher que le jet d'eau ne mouille trop la latte. À partir de la sortie du tuyau, on fixe des petits clous dans l'autre face de la latte, à des intervalles réguliers (de 30 cm par exemple). On y suspend des lattes, marquées de 10 cm en 10 cm, de telle sorte qu'elles puissent pivoter autour de leur point d'attache (cf. la figure 15).

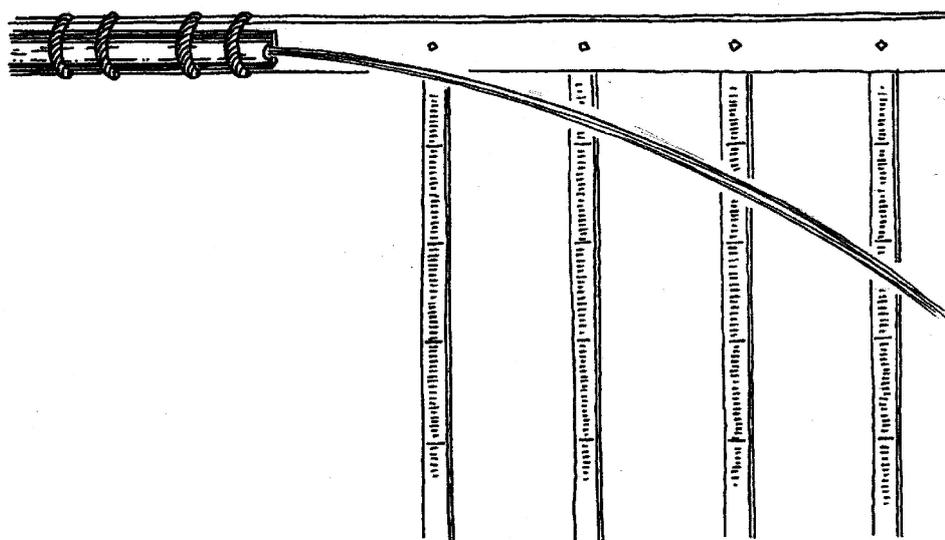


Fig. 15 : Le jet d'eau articulé.

On peut ainsi reproduire (à l'échelle) la forme du jet d'eau avec une plus ou moins bonne précision. On trouve dans certains laboratoires de physique de l'enseignement secondaire des appareillages de ce type, produits par des firmes spécialisées (un exemple est visible sur la figure 16 ci-dessous), et qui permettent de réaliser des mesures de meilleure qualité.

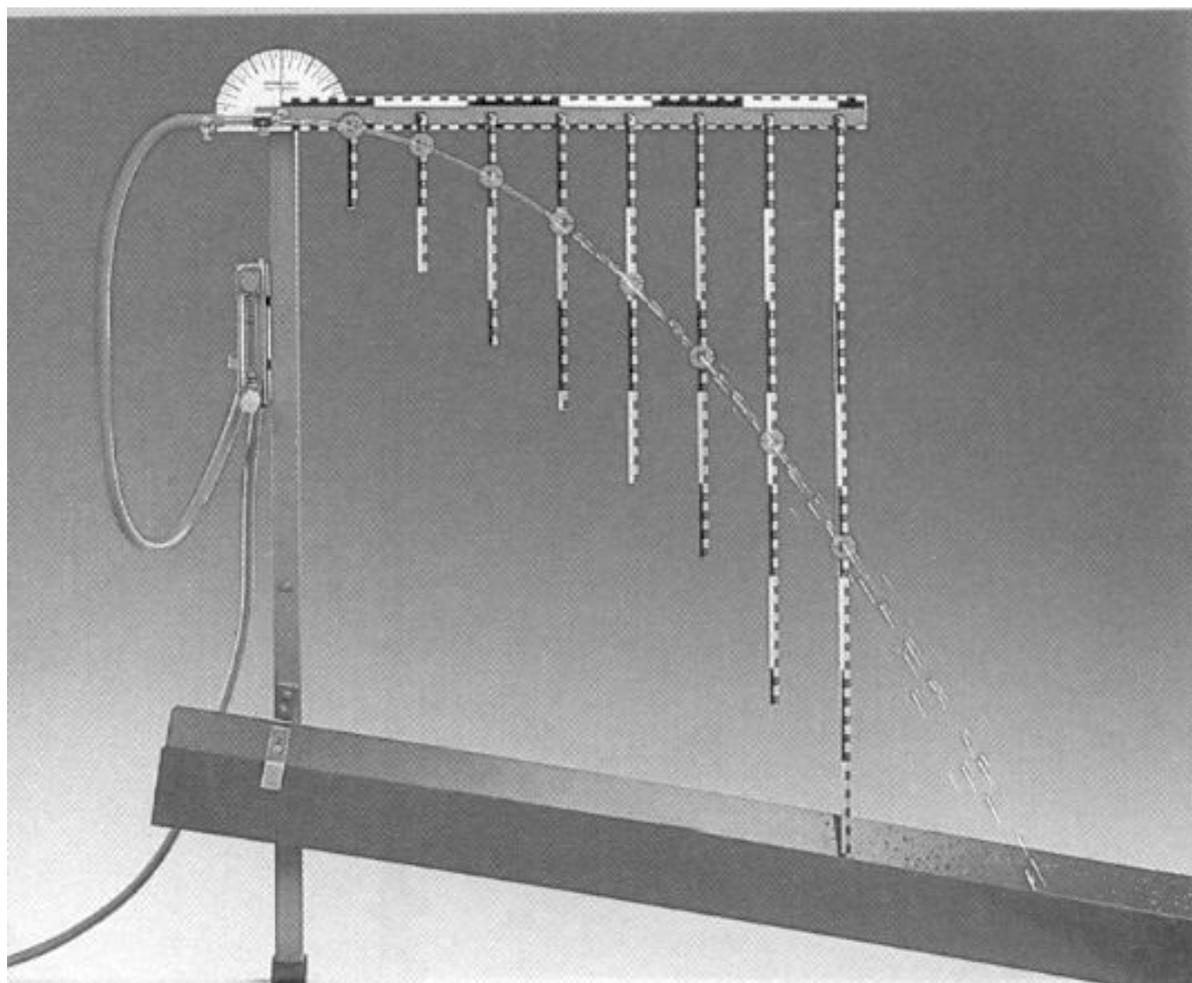


Fig. 16 : Un jet d'eau mieux articulé

Question 5.

Qu'observe-t-on lorsqu'on redresse cet appareillage (le tuyau et le système formé du bâton et des lattes graduées, solidairement), en visant à 30° avec l'horizontale par exemple ?

Quelle(s) conclusion(s) peut-on en tirer ?

Une observation étonnante, et ce qui s'en déduit

Dès qu'on redresse le jet d'eau, on observe que les écarts verticaux de la trajectoire par rapport à la direction initiale du jet ne changent pas ou, plus simplement, que redresser le jet d'eau n'a aucune influence sur sa déviation.

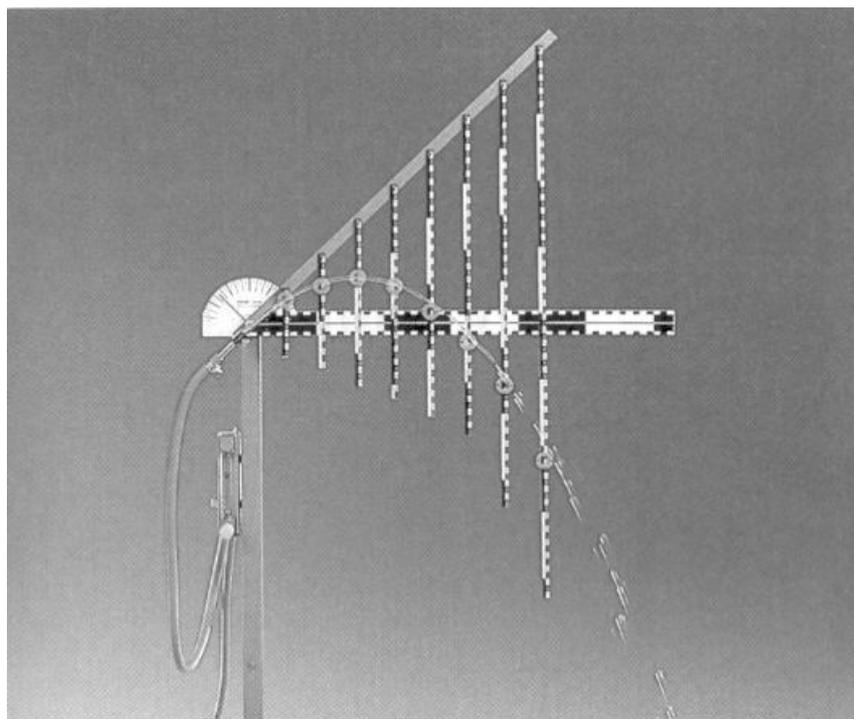


Fig. 17 : La déviation verticale du jet d'eau ne change pas.

En termes plus géométriques, et avec la représentation et les notations de la figure 18 : tant que $|AM| = |AM'|$, on a $|MT| = |M'T'|$.

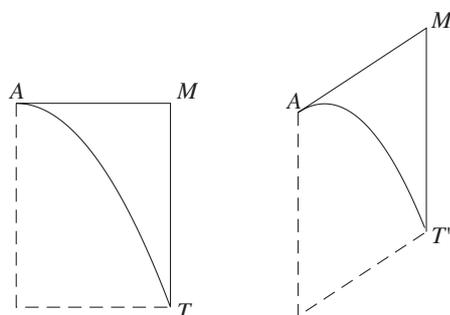


Fig. 18 : Les rectangles deviennent des parallélogrammes.

Il s'ensuit que comprendre la trajectoire du jet d'eau lorsque sa direction initiale est horizontale permet ensuite de comprendre la trajectoire lorsque la direction initiale est quelconque.

Par ailleurs, comme la direction initiale du jet d'eau semble n'avoir aucune influence sur la déviation verticale, on peut suspecter que la cause du caractère curviligne de la trajectoire est « quelque chose » dont l'effet est relativement universel. Malheureusement, si on peut conjecturer que la pesanteur est ce « quelque chose », l'expérience du jet d'eau articulé ne permet pas de s'en convaincre...

2.3 La conjugaison de deux mouvements

Comment s'y prendre ?

Une manière efficace d'étudier des mouvements (relativement) complexes consiste – pourvu que le mouvement s'y prête! – à en tirer une photographie en pose dans une chambre noire éclairée uniquement par un stroboscope. On appelle cela une photographie stroboscopique ou une chronophotographie; pour disposer d'un peu plus de détails techniques à ce sujet, on peut se reporter à A. Meessen [1984] : compléments, p. 18 à 22. Des résultats analogues peuvent aussi s'obtenir à l'aide d'un appareil photographique numérique (à partir d'une fréquence de prises de vues de 10 images/seconde) ou d'une caméra vidéo, utilisée en plan fixe. Dans ce dernier cas, il suffit lors de la reproduction sur magnéto, de reporter les positions successives du mobile sur une feuille transparente.

La figure 19 est une chronophotographie du mouvement de deux balles :

- l'une, commence à tomber au point A (cf. la figure 20), verticalement, suivant un mouvement de chute libre, exactement à l'instant où
- l'autre, lancée initialement sur un plan horizontal, quitte ce plan à partir de ce même point A .

Un système de déclenchement simultané (visible dans le coin supérieur gauche de la figure) permet de synchroniser le départ des deux balles au point A . La fréquence des éclairs est de $1/30$ s, et la distance entre deux horizontales égale 15,24 cm (extrait de Physical Science Study Committee [1970]).

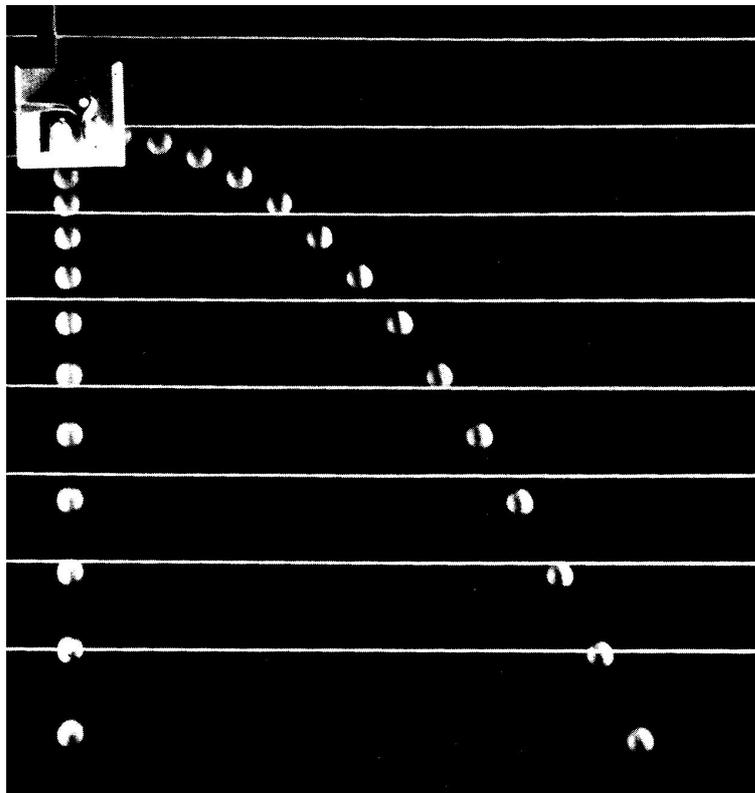


Fig. 19 : Une chronophotographie du mouvement de deux balles.

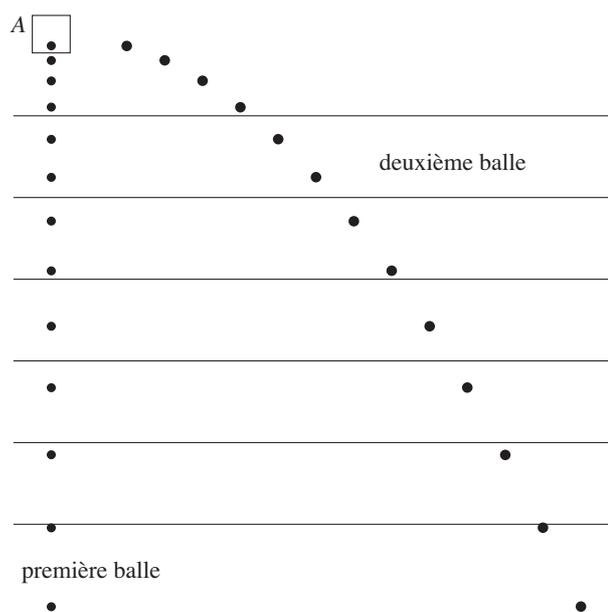


Fig. 20 : Le point A et le mouvement des deux balles.

Quelle relation y a-t-il entre le jet d'eau – orienté horizontalement – et une chronophotographie comme celle ci-dessus ? Le jet d'eau est évidemment un ensemble de gouttes, et on peut faire l'hypothèse (très raisonnable) que la forme du jet d'eau est celle de la trajectoire de n'importe laquelle de ses gouttes. En d'autres termes, le jet d'eau fige l'histoire (physique) du mouvement de n'importe quelle goutte, il immobilise toute la trajectoire en continu d'une goutte. On pourrait parler du « modèle corpusculaire » du jet d'eau. La chronophotographie de la figure 19 est donc un outil idéal pour étudier la forme du jet d'eau, puisqu'elle fige, elle aussi, l'écoulement du temps, et nous dévoile ainsi beaucoup de propriétés des mouvements qui, sans cela, échapperaient à l'œil.

Question 6.

Quelles sont les équations du mouvement de chacune de ces deux balles ?
Quelles sont les équations de leur trajectoire ?

La première balle est animée d'un mouvement de chute libre

La première balle tombe suivant une trajectoire verticale qui ne peut être qu'un mouvement de chute libre.

Si on veut s'en convaincre, il suffit de comparer les espaces parcourus sur la photographie avec ceux prédits par la loi de chute libre. Avant cela, il faut fixer un repère commun¹⁰ pour le mouvement des deux balles (il est tracé sur la figure 21).

¹⁰ ... et observer en fait un léger décalage entre la position initiale de la première balle et celle de la deuxième balle. Cela ne porte pas à conséquence pour la très grande majorité des calculs numériques qui suivent.

La loi de la chute libre s'écrit alors $y = -\frac{gt^2}{2}$, où $g = 9,81\text{m/s}^2$, y est mesuré en mètres et le temps t est compté en secondes à partir de l'instant (initial) où la première balle passe par le point A .

La comparaison s'effectue simplement à partir d'un tableau reprenant les positions en fonction du temps écoulé.

t	(en multiples de 1/30 s)	1	2	3	4	5	6	...
$-y$	(observé, en mètres)	?	0,03	0,05	0,09	0,14	0,19	...
$-y$	(calculé, en mètres)	0,005	0,02	0,05	0,09	0,14	0,20	...

...	7	8	9	10	11	12	13	14
...	0,27	0,34	0,44	0,54	0,65	0,79	0,92	1,07
...	0,27	0,35	0,44	0,56	0,66	0,78	0,92	1,07

Les résultats concernant les positions calculées sont arrondis avec la même borne d'erreur absolue que celle qu'il semblait raisonnable d'attribuer à la chronophotographie, c'est-à-dire 1 cm.

La projection verticale du mouvement de la deuxième balle coïncide avec le mouvement de la première balle.

C'est la conclusion la plus manifeste de cette chronophotographie! Elle implique immédiatement que la deuxième équation du mouvement de la deuxième balle s'écrit (aussi) $y = -\frac{gt^2}{2}$.

La projection horizontale du mouvement de la deuxième balle est un mouvement (rectiligne) uniforme.

La construction de cette projection n'offre aucune difficulté (cf. la figure 21).

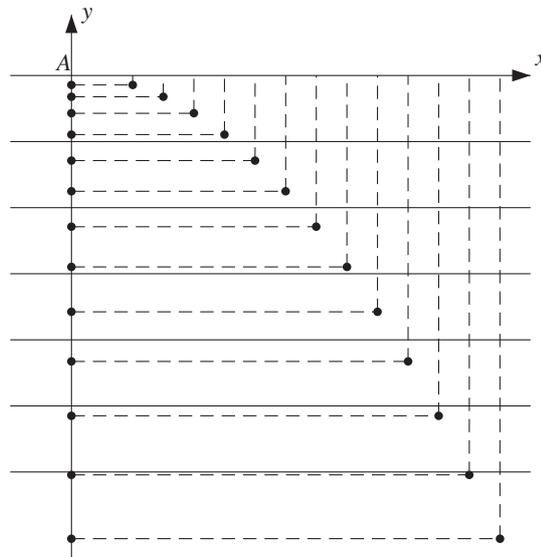


Fig. 21 : Les projections verticales et horizontales des positions de la deuxième balle.

Un tableau des positions observées met bien en évidence le caractère uniforme du mouvement.

t	(en multiples de $1/30$ s)	1	2	3	4	5	6	...
x	(observé, en mètres)	?	0,15	0,22	0,29	0,36	0,43	...

...	7	8	9	10	11	12	13	14
...	0,50	0,56	0,63	0,70	0,77	0,84	0,91	0,97

La vitesse de ce mouvement (rectiligne) uniforme vaut donc (approximativement¹¹)

$$\frac{0,07}{\frac{1}{30}} = 2,1(\text{m/s}).$$

Dès lors, la première équation du mouvement s'écrit $x = 2,1t$.

La trajectoire de la deuxième balle est parabolique.

On vient d'obtenir les deux équations du mouvement de la deuxième balle :

$$\begin{cases} x = 2,1t, \\ y = -\frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

En isolant le temps t dans la première équation, on obtient $t = \frac{x}{2,1}$, d'où

$$y = -\frac{g}{2} \left(\frac{x}{2,1} \right)^2 = -1,1122 \dots x^2,$$

puisque $g = 9,81\text{m/s}^2$. C'est l'équation d'une parabole passant par le point A .

2.4 La vitesse de la deuxième balle

Comment s'y prendre ?

Ainsi, et comme dans le cas de la trajectoire du nageur, la trajectoire de la balle n'est pas trop difficile à déterminer. Mais dans le cas du nageur, c'est surtout la *vitesse* et ses caractéristiques qui ont été l'objet de la réflexion.

Comme pour la question 2, le caractère plus théorique des deux questions suivantes explique que leur résolution ne soit pas nécessairement laissée à la seule initiative des élèves, et l'enseignant veillera encore à ce que les étapes essentielles des raisonnements soient bien rencontrées par tous les élèves.

Question 7.

Comment définir la vitesse de la balle qui suit la trajectoire parabolique de la figure 19, à chaque instant où l'éclair du stroboscope « l'immobilise » ?

¹¹ Les erreurs résultent du défaut de synchronisation entre les départs des deux balles, déjà relevé plus haut.

Il faut une nouvelle définition de vitesse...

Jusqu'ici la notion de vitesse a toujours été associée à un mouvement rectiligne, même si on a déjà pu relever des différences significatives, suivant qu'on parlait de la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme, ou des vitesses moyenne ou instantanée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Or, dans le cas du mouvement parabolique, la trajectoire n'a plus rien de rectiligne ! Alors, que faire ?

Evidemment, l'intuition nous souffle qu'il y a encore un sens à parler de vitesse, même pour un mouvement qui n'est pas rectiligne. Il s'agit donc de passer d'une sensation de vitesse pour un mouvement curviligne à une *définition* de vitesse.

Or, dans un mouvement curviligne, l'intuition de vitesse peut assez naturellement être associée à l'idée de direction, sous une forme très visuelle et intuitive elle aussi. Par exemple, la chronophotographie d'une balle qui rebondit (cf. la figure 22 ci-après, extraite de Physical Science Study Committee [1970]) suggère qu'à chaque rebond, la vitesse change de direction.

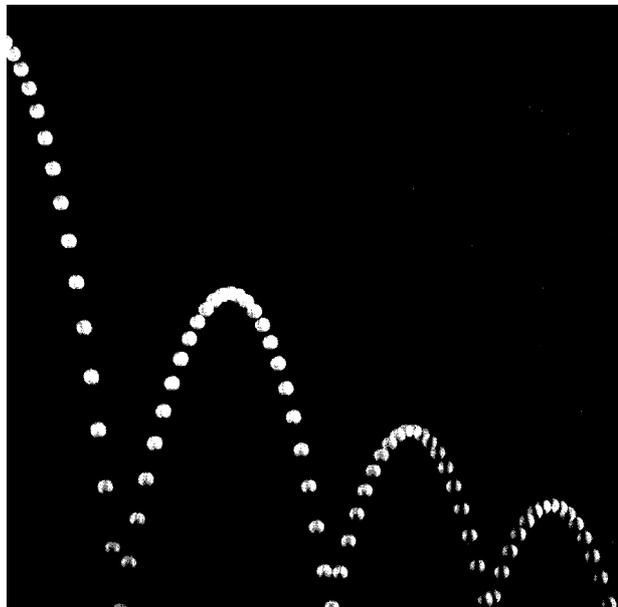


Fig. 22 : Quelle est la direction de la vitesse au rebond ?

Nous savons que la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme est une grandeur vectorielle, et que ce statut de grandeur vectorielle est indissociable¹² de l'idée de direction. Une première hypothèse de travail consiste donc à vouloir définir la vitesse pour un mouvement curviligne comme une grandeur vectorielle.

Dès lors, on doit commencer par se choisir un point d'application de cette grandeur à définir. Pour fixer les idées, ce sera le point P correspondant ici à la position de la balle à l'instant d'observation $t = \frac{5}{30}$ s.

¹² Il s'agit de grandeurs physiques ! Les vecteurs du mathématicien sont moins contraignants.

Il y beaucoup de vitesses possibles pour le point P.

Une chronophotographie ne fige que certaines positions de la balle. Une première approximation de la réalité consiste alors à ne retenir que ces positions-là, à réduire donc le mouvement réel à la succession de mouvements (aussi simples que possible) qui font passer d'une position à la suivante. C'est ce qu'on appelle « discrétiser le mouvement ».

Mais le mouvement le plus simple possible qui fait passer du point P au point suivant P_1 est le mouvement rectiligne uniforme correspondant. À ce mouvement est associée une vitesse qui est une grandeur vectorielle ; on la note $\vec{v}_{r.u.}(P)$, ou $\vec{v}_{r.u.}$ si la mention du point P n'est pas essentielle. La figure 23 représente la direction de cette vitesse.

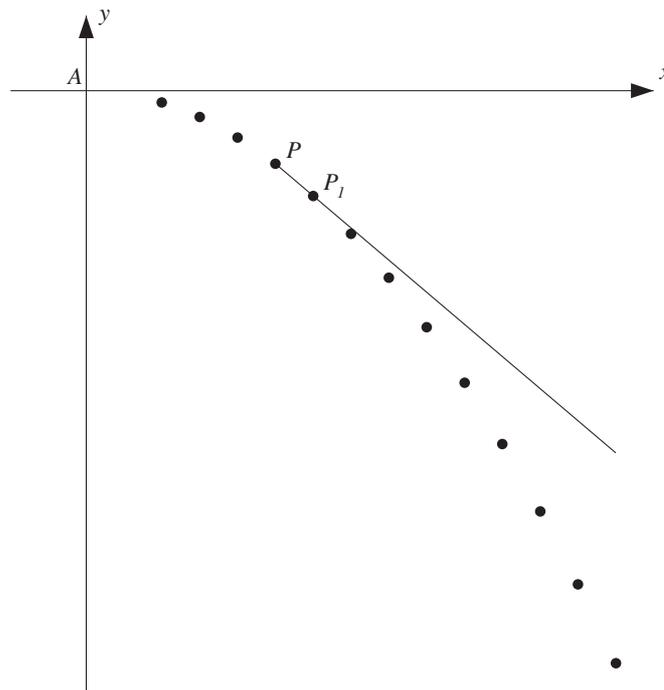


Fig. 23 : La direction de la vitesse du mouvement discrétisé.

Et comme la chronophotographie qui nous occupe a été réalisée avec une fréquence d'éclair de $\frac{1}{30}$ s, on peut aussi calculer la mesure de cette vitesse (notée alors $v_{r.u.}$, sans la flèche) grâce aux positions déjà relevées,

t	(en multiples de $1/30$ s)	...	5	6	...
x	(observé, en mètres)	...	0,36	0,43	...
$-y$	(calculé, en mètres)	...	0,14	0,19	...

et à l'éternel théorème de Pythagore (cf. la figure 24)

$$v_{r.u.} = \frac{\sqrt{(0,05)^2 + (0,07)^2}}{\frac{1}{30}} = 2,58 \dots \text{ (m/s)}.$$

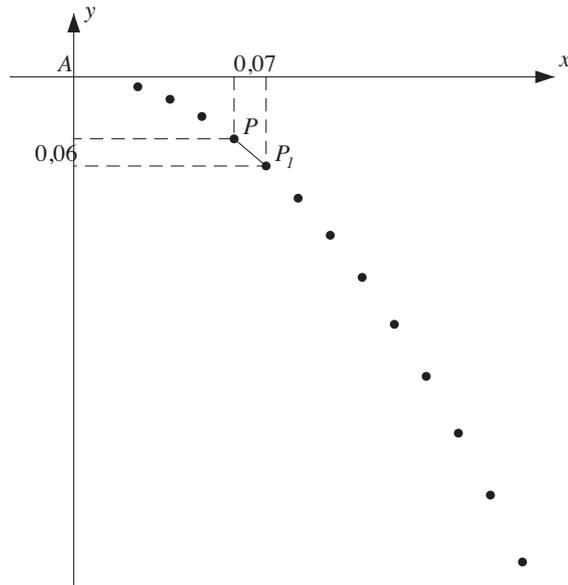


Fig. 24 : La mesure de la vitesse du mouvement discrétisé.

Mais cette vitesse est entièrement tributaire du choix de la fréquence d'éclairs du stroboscope. Par exemple, si la discrétisation est réalisée à la fréquence de $\frac{1}{10}$ s, la direction de la vitesse au point P est différente, comme le montre la figure 25.

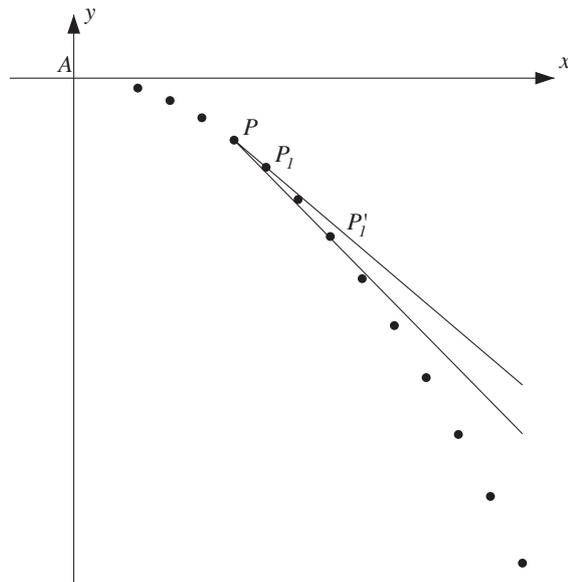


Fig. 25 : La direction de la vitesse dépend de la discrétisation choisie.

La mesure de cette vitesse est également différente. Les données correspondantes

t	(en multiples de $1/30$ s)	...	5	8	...
x	(observé, en mètres)	...	0,36	0,56	...
$-y$	(calculé, en mètres)	...	0,14	0,34	...

permettent d'obtenir

$$v_{r.u.} = \frac{\sqrt{(0,2)^2 + (0,2)^2}}{\frac{1}{10}} = 2,82 \dots \text{ (m/s)}.$$

Résumons-nous ! En discrétisant le mouvement, il est possible – au départ d'un point P fixé – de l'approximer (localement) par un mouvement rectiligne uniforme, et donc d'y associer une vitesse en tant que grandeur vectorielle. Le problème est qu'il y a beaucoup de discrétisations possibles, donc beaucoup de mouvements rectilignes uniformes possibles, et donc beaucoup de vitesses possibles pour le même point P . Et qu'à part ce point d'application P commun, toutes ces vitesses ont des directions et des mesures différentes.

Une définition idéale

La fréquence des éclairs du stroboscope ne permet pas d'aller voir le mouvement de la balle d'assez près, c'est-à-dire sans discontinuité entre les positions successives. Mais heureusement, les élèves en savent maintenant assez pour passer de l'expérimentation à la simulation !

D'abord, ils peuvent facilement reproduire à l'aide du tableur les positions de la balle au $\frac{1}{30}$ s, en accord avec les résultats de la chronophotographie, et les équations du mouvement qui en ont été déduites.

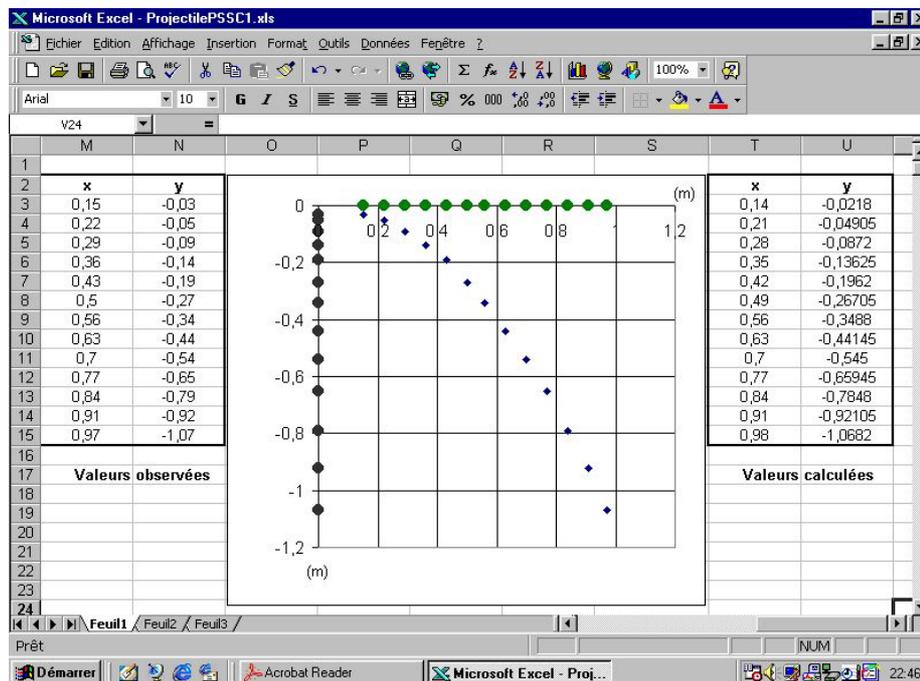


Fig. 26 : Les positions des deux balles (et de la projection horizontale), au trentième de secondes.

À partir des équations du mouvement, et en travaillant sur des intervalles de temps suffisamment brefs, ils peuvent ensuite faire apparaître la trajectoire parabolique de la deuxième balle, apparemment sans discontinuité.

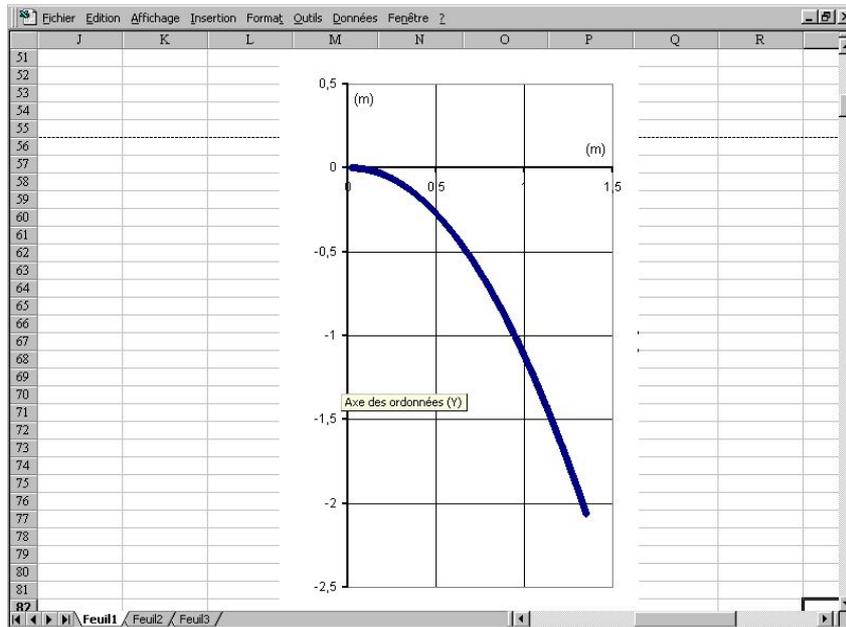


Fig. 27 : La trajectoire de la deuxième balle, au millième de secondes.

Plus l'intervalle de temps est petit (c'est-à-dire plus la fréquence des éclairs du stroboscope est grande), et plus la trajectoire discrétisée se révélera proche de la trajectoire réelle. Mais cette trajectoire quasi continue n'est pas pour autant la trajectoire complète. Pour s'en rendre compte, il suffit de « zoomer », par exemple autour du point P atteint après $\frac{5}{30}$ s ; on obtient alors la figure suivante.

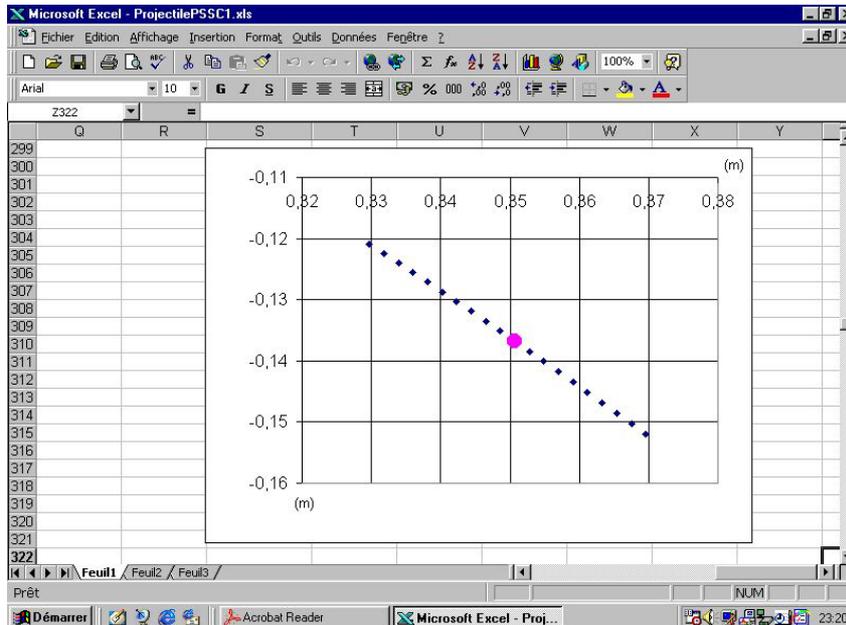


Fig. 28 : La trajectoire de la balle au voisinage du point P , au millième de secondes.

Cette image est tout à fait surprenante : la trajectoire de la balle se révèle extrêmement proche de celle d'un mouvement rectiligne uniforme ! Passé l'effet de surprise, cette image donne lieu à quelques observations et conséquences importantes.

D'abord, elle confirme encore un peu plus la représentation de la trajectoire parabolique comme une succession suffisamment resserrée de trajectoires de mouvements rectilignes uniformes. Visuellement, la direction et la grandeur de la vitesse en des points successifs ne paraissent même pas être différentes. Mais bien sûr, la trajectoire globale nous rappelle que cette apparence est trompeuse : il n'y a rien de rectiligne, ni d'uniforme dans ce mouvement.

D'autre part, deux positions successives sont tellement resserrées qu'il n'y a rien de bien audacieux à supposer qu'entre ces deux positions le mouvement est quasiment rectiligne et uniforme. On ne voit d'ailleurs pas très bien ce qu'on pourrait proposer d'autre : c'est en effet le seul *modèle* de mouvement dont on dispose.

De plus, le tableur permet de calculer l'intensité de la vitesse en question, à des instants successifs, avec une bien meilleure précision qu'auparavant. Ainsi, au départ de la simulation au millième de secondes, on obtient

t (en s)	$x = 2,1t$ (en m)	$y = -\frac{gt^2}{2}$ (en m)	$v_{r.u.x}(t)$ (en m/s)	$v_{r.u.y}(t)$ (en m/s)
0,165	0,3465	-0,13353863	2,1	-1,623555
0,166	0,3486	-0,13516218	2,1	-1,633365
0,167	0,3507	-0,13679555	2,1	-1,643175
0,168	0,3528	-0,13843872

où

$$v_{r.u.x}(t) = \frac{x(t + 0,001) - x(t)}{0,001},$$

et

$$v_{r.u.y}(t) = \frac{y(t + 0,001) - y(t)}{0,001}.$$

On en tire que

$$v_{r.u.}(0.166) = \sqrt{(2,1)^2 + (-1,633365)^2} = 2,6604 \dots \text{ m/s},$$

$$v_{r.u.}(0.167) = \sqrt{(2,1)^2 + (-1,643175)^2} = 2,6664 \dots \text{ m/s}.$$

De manière générale, ce mode d'approche permet donc d'assimiler la trajectoire parabolique à une succession suffisamment resserrée de trajectoires de mouvements rectilignes uniformes, dont la direction et la grandeur de la vitesse changent continûment.

Ainsi, on peut proposer de définir la vitesse du point P comme celle de ce morceau de mouvement rectiligne uniforme (au départ de P) obtenu à partir de « la meilleure simulation possible » ou de « la meilleure chro-

nophotographie possible »¹³. L'origine photographique de cette définition aide peut-être à mettre en évidence pourquoi on parle alors aussi de vitesse instantanée¹⁴; on la note $\overrightarrow{v_{inst.}}(P)$ ou tout simplement $\overrightarrow{v}(P)$.

Mais n'y a-t-il pas moyen d'être un peu plus précis quant aux caractéristiques de direction et de mesure de cette vitesse idéale ?

Le rectangle magique

Puisque la vitesse du point P se définit à partir d'un mouvement rectiligne idéal, elle peut être décomposée, comme dans le cas du nageur. Si pour abrégé on ne note pas les points d'application, on peut donc écrire

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y},$$

où $\overrightarrow{v_x}$ est la vitesse du point P_x dans son mouvement rectiligne obtenu par projection du mouvement du point P sur l'axe des x , et pareillement pour $\overrightarrow{v_y}$, comme les représente la figure 29.

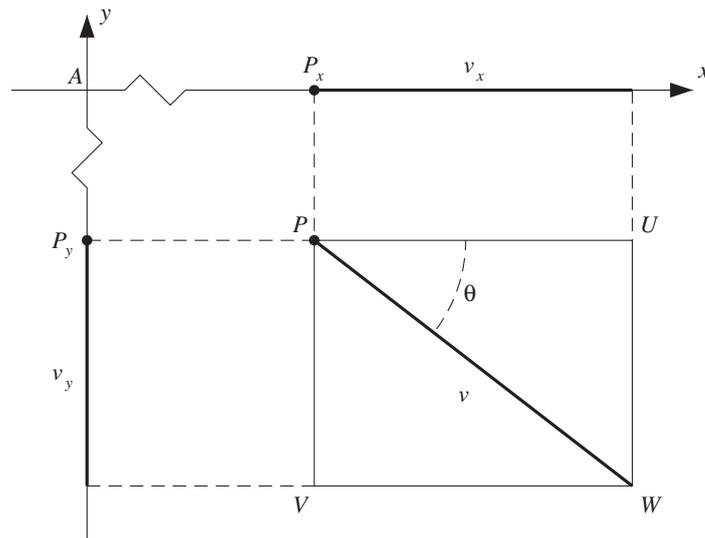


Fig. 29 : Le rectangle magique.

Or, il s'agit à chaque fois de mouvements idéaux, c'est-à-dire des mouvements observés sur « la meilleure chronophotographie – ou simulation – possible », et nous savons que

- le mouvement rectiligne horizontal (c'est-à-dire le long de l'axe des x) est un mouvement rectiligne *uniforme*,
- le mouvement rectiligne vertical (c'est-à-dire le long de l'axe des y) est un mouvement *de chute libre*.

¹³ En d'autres termes, la vitesse ainsi définie est une notion « idéale » que les chronophotographies et les simulations permettent d'approcher. Une telle approximation peut toujours être améliorée, pourvu que les appareils de mesure (stroboscope, appareils photographiques) ou les outils de calcul le permettent.

¹⁴ Comme on le rappelle plus bas, cette appellation concorde avec celle déjà utilisée dans l'étude de la chute libre.

Cela nous permet d'identifier \vec{v}_x et \vec{v}_y à des grandeurs vectorielles bien déterminées,

- pour ce qui concerne le point d'application, la direction et le sens, tout est clair,
- et pour ce qui concerne la mesure de chacune de ces vitesses :
 - la valeur v_x étant *a priori* la mesure de la vitesse (instantanée) du point P_x animé d'un mouvement *uniforme*, elle est identique à la vitesse « ordinaire » de ce point et comme cette dernière a déjà été calculée plus haut, on a : $v_x = 2,1$ (m/s) ;
 - la valeur v_y étant *a priori* la mesure de la vitesse (instantanée) du point P_y animé d'un mouvement *de chute libre*, on sait qu'il s'agit d'une fonction linéaire du temps et qu'elle vaut à l'instant considéré : $v_y = g \cdot \frac{5}{30} = 1,635 \dots$ (m/s).

Dès lors, si on note θ l'angle que forme la vitesse \vec{v} avec l'horizontale passant par le point P (cf. encore la figure 29), on calcule

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{|UW|}{|PU|} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g \cdot \frac{5}{30}}{2,1} = 0,7785 \dots,$$

d'où $\theta \approx 38^\circ$, et

$$\begin{aligned} v\left(\frac{5}{30}\right) &= v(0,166\dots) = |PW| = \sqrt{|PU|^2 + |UW|^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(2,1)^2 + \left(g \cdot \frac{5}{30}\right)^2} = 2,6614\dots \text{ (m/s)}. \end{aligned}$$

Pour mémoire, le calcul réalisé plus haut directement sur la chronophotographie avait fourni $v_{r.u.} = 2,58\dots$ (m/s) ; par ailleurs, on peut aussi calculer : $v(0,166) = 2,6574\dots$ (m/s) et $v(0,167) = 2,6634\dots$ (m/s), et comparer ces résultats avec $v_{r.u.}(0.166) = 2,6604\dots$ (m/s) et $v_{r.u.}(0.167) = 2,6664\dots$ (m/s).

Ces deux résultats achèvent de déterminer toutes les caractéristiques de la vitesse au point P , considérée comme grandeur vectorielle idéale ou alors – plus précisément ? – comme *vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme idéal*¹⁵.

2.5 La formulation vectorielle de l'équation du mouvement de la deuxième balle

Comment s'y prendre ?

Arrêtons-nous encore un instant sur les équations du mouvement de la balle, telles que la question 6 nous les a fait découvrir.

Question 8.
Comment reformuler en termes de grandeurs vectorielles les équations du mouvement obtenues lors de l'analyse de la chronophotographie ?

¹⁵ Ce mouvement rectiligne uniforme idéal est tangent à la trajectoire de la balle au point P , mais c'est là une autre histoire...

Comme il n'y a plus de raison pour fixer *a priori* l'instant d'observation, on va reprendre l'analyse de la chronophotographie (cf. la figure 19) pour un instant d'observation t quelconque. On note alors $P(t)$ la position de la balle à un tel instant, et on convient d'abrégier $P(t)$ en P lorsqu'il n'en résulte aucune ambiguïté.

Une décomposition du mouvement héritée du rectangle magique

Puisque la décomposition de la vitesse a déjà permis de résoudre la question précédente, on va pareillement décomposer le mouvement du point P suivant les deux directions associées à ce mouvement,

- l'horizontale, qui est la direction initiale du mouvement,
- et la verticale, qui est la direction d'un mouvement ordinaire¹⁶ de chute libre.

Avec les notations de la figure 30 ci-après, le mouvement horizontal à considérer est donc celui de la projection P_x du point P sur l'axe des x ; c'est un mouvement (rectiligne) uniforme. Comme on a (déjà) noté v_x la mesure (constante) de la vitesse de ce point, on a

$$|AP_x(t)| = v_x t.$$

Le mouvement vertical est celui de la projection P_y du point P sur l'axe des y ; c'est un mouvement (rectiligne) de chute libre. La loi fondamentale de la chute libre permet d'écrire

$$|AP_y(t)| = \frac{gt^2}{2}.$$

Considérons alors le *changement de position* qui amène le point A sur le point P , et associons-y la grandeur vectorielle définie comme suit,

- son point d'application est le point A ,
- sa direction est celle de la droite passant par les deux points A et P ,
- son sens est celui qui mène de A à P sur cette droite,
- sa mesure est celle de la distance, prise en mètres, qui sépare les deux points en question.

On note \overrightarrow{AP} ce changement de position. On peut définir pareillement les changements de position $\overrightarrow{AP_x}$ et $\overrightarrow{AP_y}$, et on a (cf. la figure 30)

$$\overrightarrow{AP}(t) = \overrightarrow{AP_x}(t) + \overrightarrow{AP_y}(t).$$

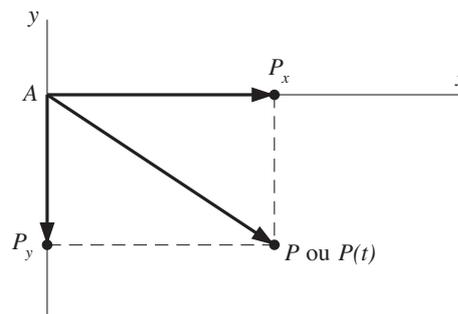


Fig. 30 : Le changement de position est une grandeur vectorielle qui se décompose.

¹⁶ C'est-à-dire sans autre mouvement qui s'y ajoute.

Une décomposition qui se décompose encore...

On peut mieux exprimer l'information fournie par l'expression précédente en mettant en valeur les mesures des changements de position calculées plus haut : $|AP_x(t)| = v_x t$ et $|AP_y(t)| = \frac{gt^2}{2}$. Pour cela, on introduit deux nouvelles grandeurs vectorielles :

- le vecteur $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$ est un changement de position qui sert de *référence* pour tout mouvement suivant la direction initiale du tir de la balle ; il a comme point d'application le point A , comme direction celle de l'axe des x , comme sens le sens positif de parcours de cet axe, et comme mesure l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre,
- le vecteur $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$ est un changement de position qui sert de *référence* pour tout mouvement suivant la direction verticale ; il a encore comme point d'application le point A , comme direction celle de l'axe des y , comme sens le sens positif de cet axe, et toujours comme mesure l'unité de longueur (le mètre).

On fait alors apparaître les différentes caractéristiques de la grandeur vectorielle $\overrightarrow{AP_x}(t)$ en l'écrivant sous la forme

$$\overrightarrow{AP_x}(t) = v_x t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}}.$$

Cette écriture concentre en effet toute l'information de mesure dans le facteur $v_x t$ et toute l'information de direction dans le terme $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$. Pareillement, l'écriture

$$\overrightarrow{AP_y}(t) = \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$$

distingue l'information de mesure dans le terme $\frac{gt^2}{2}$, celle de direction dans le terme $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$ et précise avec le signe « - » que le sens de $\overrightarrow{AP_y}(t)$ et le sens de $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$ sont opposés.

Lorsqu'on écrit finalement l'équation $\overrightarrow{AP}(t) = \overrightarrow{AP_x}(t) + \overrightarrow{AP_y}(t)$ en précisant toutes les caractéristiques des grandeurs vectorielles $\overrightarrow{AP_x}(t)$ et $\overrightarrow{AP_y}(t)$, on obtient (cf. la figure 31)

$$\overrightarrow{AP}(t) = v_x t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}.$$

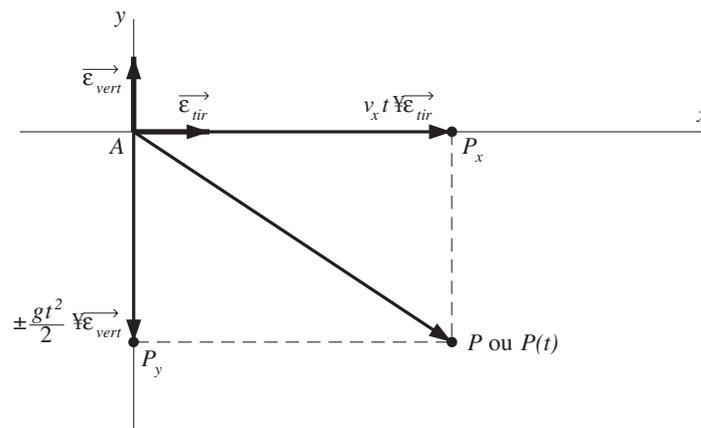


Fig. 31 : L'équation vectorielle du mouvement de la balle se visualise à l'aide d'un rectangle.

La position de la balle est ainsi complètement décrite à n'importe quel instant en termes de grandeurs vectorielles de référence. L'équation obtenue mérite bien d'être appelée l'*équation vectorielle du mouvement*. Pour mémoire, on a obtenu comme équations du mouvement dans le problème du nageur (cf. la question 1 et la synthèse de la section 1)

$$\overrightarrow{AN}(t) = t \cdot \overrightarrow{AN},$$

où $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$ est le vecteur-position du nageur après une minute d'effort. Ces équations s'écrivent aussi

$$\overrightarrow{AN}(t) = 40t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{Xavier}} + 20t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{Yves}},$$

où $\overrightarrow{\varepsilon_{Xavier}}$ (respectivement $\overrightarrow{\varepsilon_{Yves}}$) est le changement de position qui sert de référence pour tout mouvement le long de la berge (respectivement le long du pont), en parfaite analogie avec les équations vectorielles du mouvement du projectile.

3 Le tir oblique

De quoi s'agit-il ?

Décrire de manière quantitative la forme d'un jet d'eau.

Enjeux

L'équation vectorielle générale du mouvement d'un projectile.

De quoi a-t-on besoin ?

Une chronophotographie (cf. la figure 33, en annexe à la page 498).

3.1 Retour au jet d'eau articulé

Comment s'y prendre ?

Revenons-en à l'étude du jet d'eau.

Nous savons déjà que la forme du jet d'eau est celle de la trajectoire de n'importe laquelle des gouttes qui le constituent. La question qui nous intéresse maintenant est de décrire le mouvement d'une goutte d'eau dès sa sortie du tuyau d'arrosage, suivant les principes qui ont permis de décrire le mouvement de la balle dans la chronophotographie. Mais cette fois-ci, il s'agit de prendre en compte le fait que le tuyau est dirigé suivant un angle avec l'horizontale qui n'est pas nécessairement nul. Or, la description d'un tir à l'horizontale n'est pas sans rapport avec celle d'un tir dans une direction quelconque. En effet, l'expérience du jet d'eau articulé (cf. la question 5) a livré un résultat assez étonnant : peu importe que la direction de tir soit horizontale ou oblique, lorsque les distances mesurées dans cette direction sont les mêmes, alors les écarts verticaux correspondants sont eux aussi identiques. Tout semble donc être indépendant de la direction... ? Comme les grandeurs vectorielles prennent explicitement en compte les questions de direction, il est assez naturel de se poser la question suivante.

Question 9.

En termes de grandeurs vectorielles, qu'est-ce qui change – et qu'est-ce qui ne change pas – dans la description du mouvement d'une balle ou d'une goutte d'eau, lorsqu'on passe d'une direction de tir horizontale à une direction de tir oblique ?

Commençons par adapter les notations. Le point A devient le point de sortie de la goutte d'eau ou, de manière plus explicite, l'orifice du tuyau d'arrosage. On note $G(t)$ la position de la goutte d'eau à un instant d'observation t quelconque, et on a donc $G(0) = A$. On convient toujours d'abréger $G(t)$ en G lorsqu'il n'en résulte aucune ambiguïté.

Comme précédemment, on décompose le mouvement en deux mouvements qui intègrent ce que l'expérience du jet d'eau articulé a mis en évidence. Le mouvement vertical est donc celui de la projection G_y du point G sur l'axe des y *parallèlement à la direction de tir* ; et le mouvement dans la direction de tir – ou mouvement oblique – est alors celui de la projection G_z du point G sur l'axe des z (c'est-à-dire l'axe de la direction initiale du mouvement) *parallèlement à la verticale* (cf. la figure 32). Suivant les résultats obtenus lors de la résolution de la question 3, on peut dès lors écrire – en parfaite analogie avec le cas du tir horizontal – le changement de position \overrightarrow{AG} comme combinaison vectorielle des changements de position $\overrightarrow{AG_z}$ et $\overrightarrow{AG_y}$,

$$\overrightarrow{AG}(t) = \overrightarrow{AG_z}(t) + \overrightarrow{AG_y}(t).$$

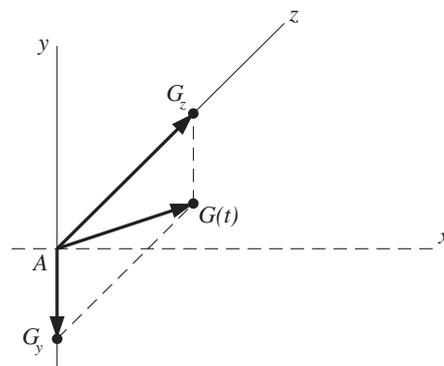


Fig. 32 : Le changement de position de la goutte d'eau se décompose suivant la verticale et la direction de tir.

Une hypothèse qui découle (!) de l'expérience du jet d'eau

On est alors amené assez naturellement à faire une *hypothèse de décomposition* : *chacun* de ces deux mouvements a les *mêmes caractéristiques* que le mouvement correspondant dans le cas de la direction de tir horizontale. Plus précisément, on suppose donc que

- le mouvement du point G_z est un mouvement rectiligne uniforme suivant la direction du tir,
- le mouvement du point G_y est un mouvement de chute libre le long de la verticale passant par le point A .

Il y a au moins deux manières de justifier cette hypothèse. La première consiste à faire une nouvelle expérience de stroboscopie, avec une direction initiale de tir qui ne soit plus horizontale : cf. la figure 22, ou la figure 33 ci-après (extraite de A. Meessen [1984]).

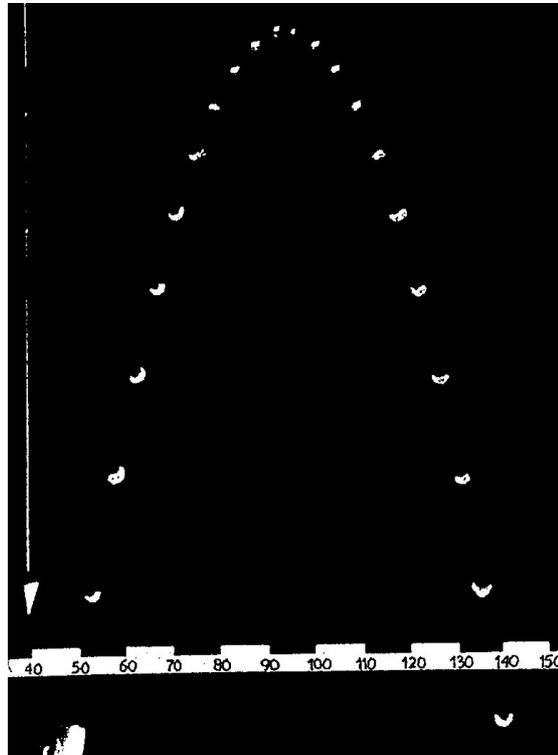


Fig. 33 : Une nouvelle expérience de stroboscopie.

Un traitement analogue¹⁷ à celui de la question 6 permet alors de vérifier que le mouvement des points G_y et G_z est exactement celui qui est impliqué par l'hypothèse de décomposition.

Une deuxième méthode consiste à faire appel à la notion de *force* de pesanteur et au principe d'inertie¹⁸. Pour mémoire, ce principe affirme que « *tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.* » Comme la force de pesanteur est la seule¹⁹ force qui s'applique à la goutte d'eau, c'est elle qui se retrouve responsable de la forme curviligne de la trajectoire. De manière équivalente, si la force de pesanteur n'existait pas, le mouvement de la goutte d'eau serait rectiligne uniforme, suivant la direction initiale de mouvement, c'est-à-dire l'axe des z .

¹⁷ Sur le cliché, les dimensions sont fournies en *cm*, et l'intervalle de temps entre deux éclairs consécutifs est de 0,059 s.

¹⁸ Pourvu évidemment que les élèves le connaissent. Les raisonnements en termes de chronophotographies sont entièrement cinématiques, et donc indépendants du principe d'inertie!

¹⁹ Comme souvent, on néglige la résistance de l'air, et les effets hydrodynamiques propres au jet d'eau lui-même.

Les conséquences de l'hypothèse de décomposition

Comment caractériser la vitesse du mouvement rectiligne uniforme du point G_z ?

Cette vitesse étant constante, on peut l'identifier avec celle de la goutte d'eau au moment exact où elle sort du tuyau d'arrosage au point A . Pour mettre en évidence cette caractéristique dans les notations, on convient de noter $\overrightarrow{v_{init}}$ cette vitesse « initiale » puisqu'il s'agit de la vitesse de la goutte d'eau à l'instant initial d'observation.

Précisons ensuite que la *caractérisation* de la grandeur vectorielle $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$ doit être modifiée : elle a toujours comme point d'application le point A , mais sa direction a changé – c'est maintenant celle de l'axe des z dans la figure 34, c'est-à-dire celle suivant laquelle le tuyau d'arrosage projette toutes les gouttes d'eau – le sens quant à lui reste le sens « positif » de parcours de cet axe, et la mesure reste l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre.

Avec ces modifications, on montre comme précédemment que le mouvement d'une goutte d'eau est décrit par l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$$

D'une certaine manière, cette équation décrit les variations avec le temps d'un parallélogramme « magique » (cf. la figure 34 ci-dessous). Comme dans la question 7, on pourrait en déduire la vitesse du point $G(t)$ à n'importe quel instant de son mouvement, etc.

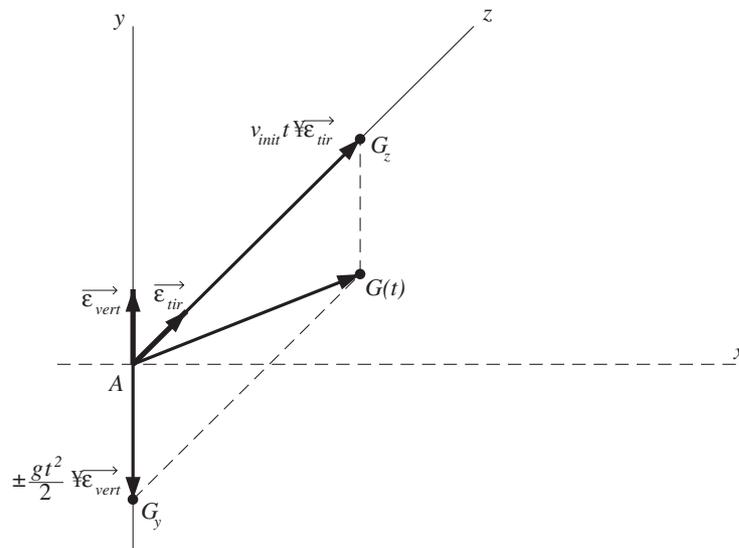


Fig. 34 : Un parallélogramme magique décrit le mouvement.

Il est encore intéressant d'observer que l'équation vectorielle que l'on vient d'obtenir a la même *forme* que celle issue de l'étude de la chronophotographie, alors que la situation physique est *a priori* différente.

En réalité, tout a été fait pour obtenir cette identité de forme troublante : l'hypothèse de décomposition, et surtout la manière dont le calcul des

grandeurs vectorielles règle les questions de directions ont été des *deus ex machina*. Et cette identité de forme redevient très naturelle dès qu'on s'aperçoit que toute la différence entre les deux situations physiques est prise en compte par l'interprétation géométrique différente qu'on réserve à la grandeur vectorielle de référence $\vec{\varepsilon}_{tir}$.

3.2 La forme du jet d'eau

Comment s'y prendre ?

La question suivante n'a rien pour surprendre !

Question 10.

Quelle est finalement la trajectoire d'une goutte d'eau – ou la forme du jet d'eau – si le tuyau d'arrosage est dirigé suivant un angle de 45° avec l'horizontale ?

Et s'il s'agit d'un angle θ quelconque ?

... Et tout le travail est quasiment fait, il ne s'agit plus que de mise en forme !

Un changement de références

Si on veut travailler avec les coordonnées ordinaires du point $G(t)$, c'est-à-dire celles prises suivant les axes des x et des y de la figure 32 ou 34, il est intéressant d'introduire deux nouvelles grandeurs vectorielles de références qui soient appropriées à ce (nouveau) choix d'axes. On définit donc

$\vec{\varepsilon}_x$: c'est le changement de position qui sert de référence pour tout mouvement suivant la direction horizontale ; il a comme point d'application le point A , comme direction celle de l'axe des x , comme sens le sens positif de parcours de cet axe, et comme mesure l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre,

$\vec{\varepsilon}_y$: c'est le changement de position qui sert de référence pour tout mouvement suivant la direction verticale ; il a encore comme point d'application le point A , comme direction celle de l'axe des y , comme sens le sens positif de cet axe, et toujours comme mesure l'unité de longueur (le mètre) ; évidemment $\vec{\varepsilon}_{vert} = \vec{\varepsilon}_y$.

D'autre part, un peu de trigonométrie (en s'aidant de la figure 35) permet de relier entre elles les grandeurs vectorielles $\vec{\varepsilon}_{tir}$, $\vec{\varepsilon}_x$ et $\vec{\varepsilon}_y$.

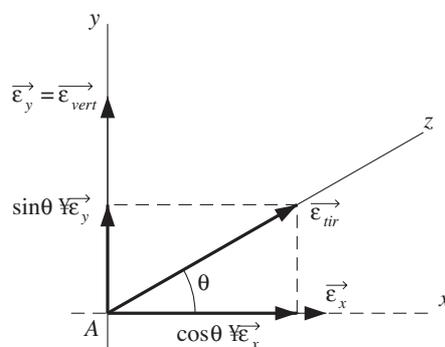


Fig. 35 : De nouvelles grandeurs vectorielles de référence.

$$\vec{\varepsilon}_{tir} = \cos \theta \cdot \vec{\varepsilon}_x + \sin \theta \cdot \vec{\varepsilon}_y.$$

L'équation vectorielle $\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t \cdot \vec{\varepsilon}_{tir} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \vec{\varepsilon}_{vert}$ obtenue à la fin de la question précédente devient alors

$$\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t (\cos \theta \cdot \vec{\varepsilon}_x + \sin \theta \cdot \vec{\varepsilon}_y) + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \vec{\varepsilon}_y,$$

c'est-à-dire, en regroupant les termes suivant les deux grandeurs vectorielles de référence qui ont été associées aux coordonnées, il vient

$$\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t \cos \theta \cdot \vec{\varepsilon}_x + \left(v_{init}t \sin \theta - \frac{gt^2}{2}\right) \cdot \vec{\varepsilon}_y.$$

La trajectoire, enfin...

Bien sûr, on peut aussi écrire le résultat précédent directement en termes de coordonnées

$$\begin{cases} x = v_{init}t \cos \theta, \\ y = v_{init}t \sin \theta - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Pour tirer alors de ces deux équations la trajectoire du mouvement, il suffit de tout immobiliser, c'est-à-dire de « chasser le temps », cela donne l'équation de la trajectoire

$$y = -\frac{g}{2v_{init}^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2 + \operatorname{tg} \theta \cdot x.$$

Comme dans le cas du tir horizontal, c'est l'équation d'une parabole. Elle passe par le point A de coordonnées $(0; 0)$, ce qui n'a évidemment rien d'étonnant !

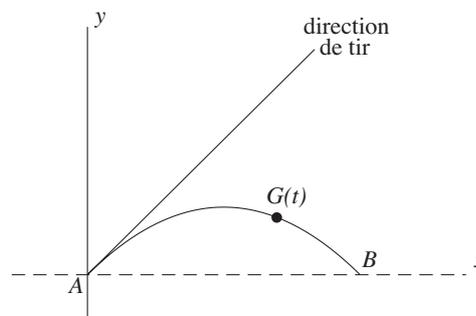


Fig. 36 : La forme du jet d'eau.

Le matériel utilisé dans l'expérience du jet d'eau articulé permet de relever très facilement les coordonnées de plusieurs points de la courbe formée par le jet d'eau, et de confirmer²⁰, si on le souhaite, son caractère parabolique²¹.

²⁰ Dans les limites de précision que l'expérience permet d'atteindre...

²¹ Ce genre de mesure peut fournir aussi une estimation – indirecte, mais relativement précise – de la vitesse v_{init} du jet d'eau à la sortie du tuyau. Si, avec les notations de la figure 36, $p = |AB|$ est la « portée » du jet d'eau, exprimée en m , on obtient après un petit calcul

$$v_{init} = \sqrt{\frac{gp}{\sin 2\theta}}.$$

En particulier, si $\theta = \frac{\pi}{4}$, on trouve $v_{init} \approx 3\sqrt{p}$.

Pour $\theta = 0$, on retrouve la parabole de sommet A déjà étudiée précédemment²². Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, l'équation de la trajectoire se simplifie sensiblement de cette manière,

$$y = -\frac{g}{v_{init}^2} \cdot x^2 + x.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la situation de l'arroseur arrosé. L'équation de la trajectoire n'est alors plus d'aucun secours (*sic!*), mais l'équation vectorielle est quant à elle tout à fait parlante (*resic!*)

$$\overrightarrow{AG}(t) = \left(v_{init}t - \frac{gt^2}{2} \right) \cdot \vec{\varepsilon}_y,$$

ou, si l'on préfère

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = v_{init}t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

3.3 Le problème du poisson-archer

De quoi s'agit-il ?

Déterminer les caractéristiques de rencontre (position, instant...) de deux projectiles partant en même temps d'endroits différents.

Enjeux

Une illustration des propriétés communes de deux mouvements de projectiles.

Une interprétation cinématique des points d'intersection d'une droite et d'une parabole.

Comment s'y prendre ?

La question suivante est l'occasion de rassembler et de prolonger les résultats obtenus lors de l'étude du jet d'eau et de la chronophotographie, et d'y ajouter une pincée de biologie (cruelle!) Elle est inspirée de H. Benson [1993], exemple 4.4, p. 61-62.



Fig. 37

²² Dans le cas particulier où de plus $v_{init} = 0$, il n'est évidemment plus possible de chasser le temps de l'équation vectorielle du mouvement.

Question 11.

Dans la figure 37, un insecte est posé sur une brindille à une certaine hauteur au-dessus de la surface de l'eau. Un poisson-archer projette une goutte d'eau directement sur l'insecte, afin de l'étourdir et d'arriver ainsi à le gober. Au moment exact où la goutte est projetée, l'insecte voit venir le danger et se laisse tomber pour y échapper.

La goutte d'eau peut-elle atteindre l'insecte ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ? Si non, pourquoi ?

Le problème revient à décrire le mouvement d'une goutte d'eau projetée par le poisson-archer, et à mettre ce mouvement en correspondance avec le mouvement vertical de chute libre de l'insecte. Le poisson-archer projette la goutte d'eau dans une direction qui n'est manifestement pas horizontale.

On peut reprendre *mutatis mutandis* les notations déjà utilisées dans les questions précédentes. Le point A est le point de sortie de la goutte d'eau ou, de manière plus explicite, le bord de la gueule²³ de notre prédateur aquatique. On note

- $G(t)$ la position de la goutte d'eau,
- $I(t)$ la position de l'insecte

à un instant d'observation t quelconque, en convenant encore d'abrégier $G(t)$ en G et $I(t)$ en I lorsqu'il n'en résulte aucune ambiguïté. On a en particulier $G(0) = A$, tandis que $I(0)$ désigne la position de l'insecte au tout début du drame, là-haut sur sa brindille. Et nous savons déjà tout ce qu'il faut savoir du mouvement de la goutte d'eau meurtrière.

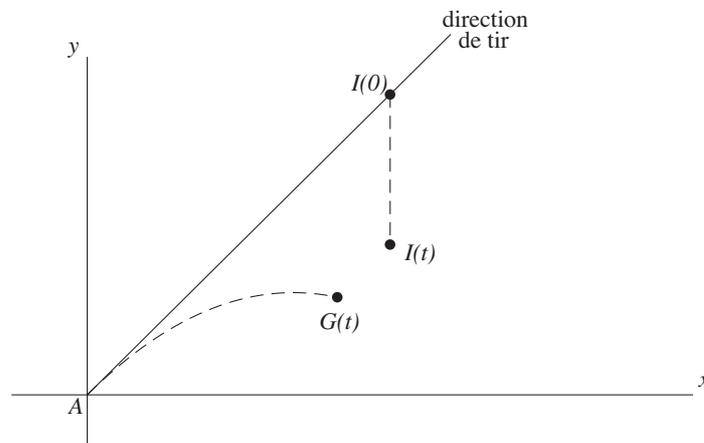


Fig. 38 : Le cadre du drame.

Le mouvement de l'insecte

L'insecte se laisse donc tomber suivant un mouvement *rectiligne* de chute libre *à partir du point* $I(0)$. Quel que soit l'instant d'observation t , le chan-

²³ Au moment du tir, on suppose que le bord de la gueule du poisson-archer affleure la surface de l'eau.

gement de position se décompose sous la forme

$$\overrightarrow{AI}(t) = \overrightarrow{AI}(0) + \overrightarrow{AI}_y(t),$$

avec les notations de la figure 39. Comme ce mouvement reste parallèle à l'axe des y , une de ces composantes – celle suivant la direction de tir – est donc constante, c'est-à-dire indépendante du temps.

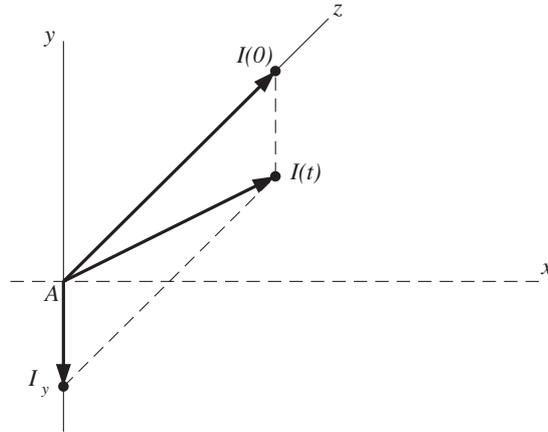


Fig. 39 : Le changement de position pour le mouvement de chute libre de l'insecte.

Notons, suivant la figure 40

- d , la distance horizontale (mesurée en mètres, comme il se doit) qui sépare l'insecte du poisson-archer,
- θ , l'angle de tir mesuré par rapport à l'horizontale, qui est aussi l'angle sous lequel l'insecte est vu par le poisson-archer.

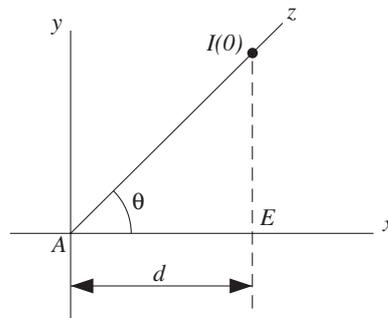


Fig. 40 : Deux paramètres permettent de déterminer la position de l'insecte.

Le triangle rectangle $AEI(0)$ livre immédiatement la relation

$$|AI(0)| = \frac{d}{\cos \theta}.$$

On en déduit – comme précédemment – l'équation vectorielle du mouvement de l'insecte

$$\overrightarrow{AI}(t) = \frac{d}{\cos \theta} \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{tir} + \left(-\frac{gt^2}{2} \right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{vert}.$$

L'issue du drame

Est-il possible que la goutte d'eau frappe l'insecte? En d'autres mots, existe-t-il un instant t pour lequel la goutte d'eau et l'insecte se trouvent exactement au même endroit, c'est-à-dire pour lequel $\overrightarrow{AI}(t) = \overrightarrow{AG}(t)$?

Pour bien voir ce qui se passe, il est intéressant d'introduire – après le rectangle magique – le « parallélogramme de la mort » : il est défini (cf. la figure 41) à partir du segment $|G(t)I(t)|$, qui décrit toute l'évolution du drame, puisqu'il est de longueur nulle lorsque la goutte d'eau frappe sa cible.

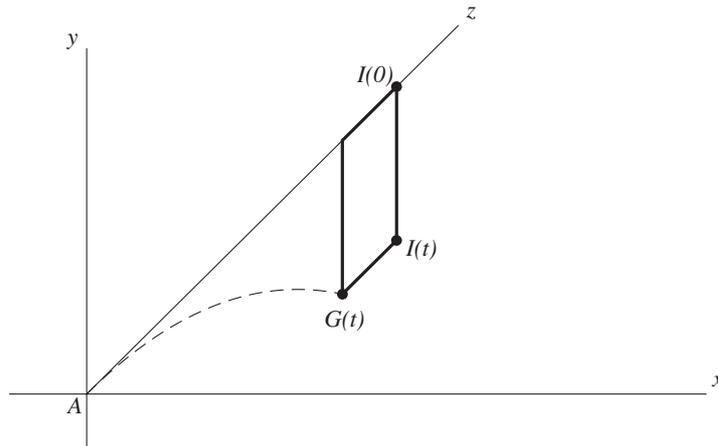


Fig. 41 : Le parallélogramme de la mort!

Or, le parallélogramme $AC(t)J(t)I(t)$ montre que $\overrightarrow{G(t)I(t)} = \overrightarrow{AI(t)} + (-\overrightarrow{AG(t)})$ (cf. la figure 42).

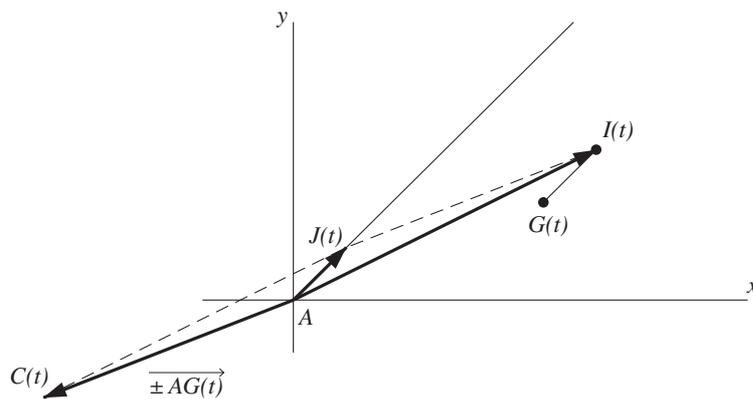


Fig. 42 : Deux grandeurs vectorielles équivalentes.

À partir de l'équation vectorielle du mouvement de la goutte d'eau,

$$\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{tir} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{vert},$$

et de celle de l'insecte,

$$\overrightarrow{AI}(t) = \frac{d}{\cos \theta} \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{tir} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{vert},$$

on peut alors calculer vectoriellement la caractéristique fatale du « parallélogramme de la mort », à savoir

$$\overrightarrow{G(t)I(t)} = \overrightarrow{AJ(t)} = \overrightarrow{AI(t)} + (-\overrightarrow{AG(t)}) = \left(\frac{d}{\cos \theta} - v_{init}t\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{tir}.$$

Si la rencontre meurtrière de la goutte d'eau et de l'insecte a bien lieu, cet instant fatal est donc déterminé par la condition

$$\overrightarrow{G(t)I(t)} = \overrightarrow{0},$$

et vaut

$$t_{mort} = \frac{d}{v_{init} \cos \theta}.$$

Et donc, ça ne rate jamais ? Quels que soient l'angle de tir²⁴, la vitesse d'expulsion de la goutte d'eau et la distance horizontale qui sépare le poisson-archer de sa cible, l'issue est inéluctable : le poisson-archer fait mouche ? Voire. . . Rien dans ce qui précède n'a pris en compte que le mouvement de chute libre de l'insecte s'arrête dès que celui-ci touche la surface de l'eau au point E (cf. la figure 40). La goutte d'eau n'atteint donc l'insecte *avant* que celui-ci ne touche l'eau que si

$$|I(0)E| > \frac{gt_{mort}^2}{2}.$$

Comme on sait que $t_{mort} = \frac{d}{v_{init} \cos \theta}$ et que $|I(0)E| = d \operatorname{tg} \theta$, un peu de calcul livre alors la « condition d'impact »

$$v_{init}^2 > \frac{gd}{\sin 2\theta}.$$

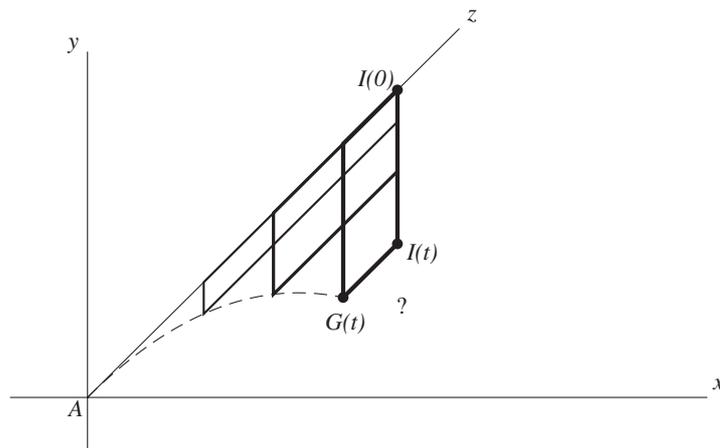


Fig. 43 : L'évolution inéluctable du parallélogramme de la mort.

²⁴ Pourvu qu'il reste (strictement) compris entre 0° et 90° , mais le poisson-archer n'est pas bigleux au point de l'ignorer !

On peut mener un raisonnement analogue, et plus géométrique, à l'aide du « parallélogramme de la mort ». En effet, en se limitant aux composantes verticales de leurs mouvements, l'insecte et la goutte d'eau doivent se rencontrer s'ils « partent » en même temps. La forme dégénérée du parallélogramme de la mort – c'est-à-dire celle pour laquelle la longueur du segment $|G(t)I(t)|$ est nulle – correspond à la condition d'impact, pourvu que cette forme dégénérée se réalise *au-dessus* de l'eau, etc.

Malheureusement, la nature est impitoyable ! Même si l'insecte arrive à toucher l'eau, son compte est bon : le poisson-archer est alors dans son élément et, après deux petits coups de nageoire, plus rien ne l'empêche de happer l'innocente victime. Versons une larme...

Regardons enfin sur quelques exemples numériques, comment le destin frappe. Supposons pour fixer les idées que $\theta = 45^\circ$ et $d = 5 \cdot 10^{-2}$ m ou 5 cm, ce qui correspond approximativement à ce qu'illustre la figure 37.

- Si, par exemple, $v_{init} = 1$ m/s,
 - alors on obtient $t_{mort} = 7,07 \dots 10^{-2}$ s, c'est-à-dire un peu moins d'un dixième de seconde,
 - et $|I(0)I(t_{mort})| = 2,45 \dots 10^{-2}$ m, c'est-à-dire environ la moitié de la distance qui sépare initialement l'insecte de la surface de l'eau.
- Autre exemple, si $v_{init} = 2$ m/s,
 - alors $t_{mort} = 3,53 \dots 10^{-2}$ s, c'est-à-dire un peu moins d'un trentième de seconde,
 - et $|I(0)I(t_{mort})| = 0,6125 \dots 10^{-2}$ m, c'est-à-dire un peu plus d'un dixième de la distance qui sépare initialement l'insecte de la surface de l'eau.

De manière générale (mais toujours en supposant que $\theta = 45^\circ$), on peut établir la formule

$$|I(0)I(t_{mort})| = \frac{gd^2}{v_{init}^2},$$

qui précise comment le peu d'espace qu'arrive encore à parcourir l'insecte avant le choc fatal dépend de la vitesse initiale de la goutte d'eau.

4 Lent ou rapide ?

Cette section illustre la portée du point de vue vectoriel sur la vitesse, en montrant comment une astuce (toute vectorielle) permet de définir et de déterminer immédiatement l'*accélération* d'un mobile animé d'un mouvement circulaire uniforme.

De quoi s'agit-il ?

Comparer les vitesses de différents mobiles animés d'un mouvement circulaire uniforme, au départ de simulations de ce type de mouvement.

Enjeux

La caractérisation vectorielle de la vitesse (linéaire) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme. La notion d'hodographe du mouvement de ce point. La définition et la caractérisation vectorielle de l'accélération (linéaire) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme

De quoi a-t-on besoin ?

Quelques données astronomiques (reprises plus bas) concernant le mouvement de rotation de la terre autour du soleil.

Un tableur (EXCEL, par exemple).

Prérequis

Les résultats élémentaires concernant

- la longueur de la circonférence : dépendance du rayon, approximation par des polygones réguliers inscrits ;
- la mesure des angles en radians ;
- l'aire d'un disque, d'un secteur circulaire.

Le cercle trigonométrique, la trigonométrie des angles orientés, les équations paramétriques d'un cercle (sous forme trigonométrique).

4.1 Vitesse angulaire et vitesse linéaire

Comment s'y prendre ?

En général, on dit qu'un mobile ponctuel est animé d'un mouvement circulaire lorsque sa trajectoire est un cercle.

Ceci dit, il faut certainement commencer par demander aux élèves de faire une liste d'exemples de mouvements circulaires. Les objets tournants sont tellement fréquents que ces exemples ne manquent pas, pourvu bien sûr qu'on se concentre sur un point bien défini de l'objet en mouvement : une essoreuse à salade, beaucoup d'objets électro-ménagers (centrifugeuse, ...) ou de bricolage (foreuse, scie circulaire, ...), une platine de tourne-disque²⁵, le virage d'une voiture dans un rond-point, certaines figures en skate-board, un looping sur une montagne russe, le lancer du marteau, etc.

Question 12.

Parmi tous ces mouvements circulaires, lesquels mériteraient-ils d'être qualifiés d'uniformes ?

Une définition...

Les exemples ci-dessus et le modèle de la définition du mouvement *rectiligne* uniforme permettent assez vite de dégager une définition en termes d'angles ou d'arcs parcourus, telle que : un mouvement circulaire est uniforme lorsque les angles – ou les arcs – décrits par le point mobile sont entre eux comme les intervalles de temps nécessaires à les parcourir ; ou encore : lorsque des arcs égaux sont parcourus en des temps égaux.

²⁵ Si, si ! Cet objet antédiluvien est encore très utilisé : par les disc-jockeys dans les dancings par exemple.

Le retour sur les exemples précédents permet alors de nuancer la définition proposée au début : en fait, un mobile est animé d'un mouvement circulaire lorsque sa trajectoire est un cercle ou un arc de cercle, comme dans le cas du virage en voiture. Dans le cas d'une trajectoire qui n'est pas un cercle complet, le mouvement est souvent *non* uniforme : certaines figures de skate-board et plus généralement les mouvements de type pendulaire sont de ce type.

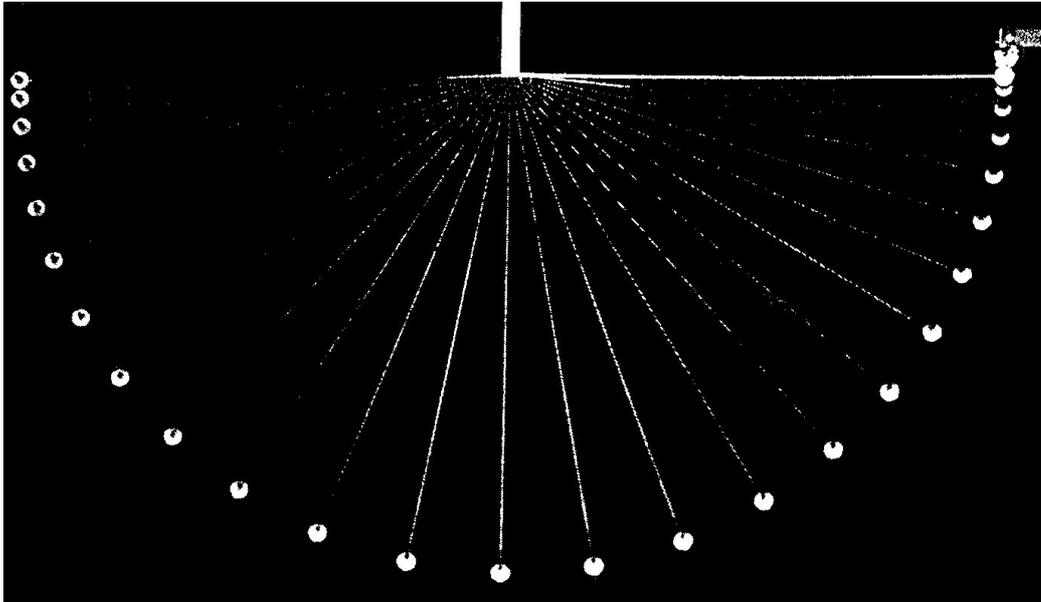


Fig. 44 : Le mouvement pendulaire est circulaire et non uniforme.

... et quelques caractéristiques

Ces observations élémentaires permettent de caractériser un mouvement circulaire uniforme à partir de deux grandeurs, toutes deux scalaires : le rayon R de la trajectoire, et l'angle w parcouru par unité de temps²⁶ (et mesuré en radians par seconde).

Question 13.

Des deux mouvements de rotation suivants, lequel est le plus lent et lequel est le plus rapide : le mouvement de la terre autour du soleil ou le mouvement d'une dent de scie circulaire (électrique) ?

Assez souvent, le mouvement d'une dent de scie circulaire est ressenti par les élèves comme le plus rapide. Et c'est... vrai, mais d'une manière qui mérite d'être découverte progressivement.

²⁶ Au lieu de cet angle, on considère souvent la *fréquence* ν du mouvement, c'est-à-dire le nombre de tours parcourus par unité de temps ; lorsque le temps est mesuré en secondes, la fréquence est mesurée en Hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). Si on note T la période du mouvement, c'est-à-dire le temps nécessaire à parcourir un tour complet, les diverses relations : $w \cdot T = 2\pi$, $\nu = \frac{1}{T}$ et $2\pi \cdot \nu = w$ sont parfois utiles.

La vitesse angulaire

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'angle w parcouru par unité de temps est appelé la vitesse angulaire. Si on considère, de manière assez naturelle, que le mouvement d'une dent d'une scie circulaire est effectivement un mouvement circulaire uniforme, et si pour fixer les idées, on suppose que la scie tourne à 1500 tours/minute, on obtient

$$w_{scie} = \frac{1500 \times 2\pi}{60} = 157,079 \dots \text{ (rad/s)}.$$

On peut légitimement considérer que c'est un mouvement circulaire (très) rapide.

Le mouvement de la terre autour du soleil

Le mouvement de la terre autour du soleil est-il un mouvement circulaire, et si oui, est-il uniforme ?

Cela demande d'abord une petite recherche de la part des élèves quant aux propriétés du mouvement des planètes. Il n'est pas bien difficile d'obtenir dans des encyclopédies, ou sur Internet, les informations suivantes qui suivent.

- Chaque planète se meut sur une orbite elliptique²⁷ dont le soleil est un des foyers (première loi de Kepler).
- Le rayon reliant le soleil à la planète balaye des aires égales en des temps égaux (deuxième loi de Kepler).
- L'excentricité²⁸ de l'orbite de la terre autour du soleil est égale à 0,017.

La très faible excentricité de l'orbite de la terre autour du soleil signifie que les deux foyers sont quasiment confondus, et qu'il est donc tout à fait raisonnable de supposer que l'orbite en question est circulaire, avec le soleil au centre. Dès que cette hypothèse est faite, la deuxième loi de Kepler implique alors que le mouvement est uniforme, puisque l'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à l'angle au centre qui le définit. On calcule alors sans difficulté la vitesse angulaire du mouvement de la terre autour du soleil

$$w_{terre/soleil} = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = 1,9923 \dots 10^{-7} \text{ (rad/s)}.$$

Par comparaison avec le cas de la scie, il s'agit ici d'un mouvement circulaire uniforme dont la vitesse angulaire est dérisoire.

Ainsi, pour les deux mouvements circulaires uniformes considérés dans la question, la vitesse angulaire de l'un est très importante, alors que celle

²⁷ Une ellipse peut être définie comme une courbe allongée, apparentée au cercle, qui s'obtient en coupant un cône circulaire droit par un plan sécant à toutes ses génératrices. On peut établir que la somme des distances d'un point quelconque d'une ellipse à deux points fixes – appelés foyers – est constante, et égale à la plus grande corde, ou grand axe, de l'ellipse. Cette propriété permet de tracer facilement des ellipses suivant le procédé dit « du jardinier ».

²⁸ L'excentricité d'une ellipse est, par définition, le rapport entre la distance des foyers et la longueur du grand axe.

de l'autre semble dérisoire. Mais la vitesse angulaire mise ainsi en scène ne semble pas être de la même nature que la vitesse du nageur ou de la balle dans les situations précédentes : elle ne semble pas attachée matériellement au point mobile et ne possède pas les particularités d'une grandeur vectorielle...

Question 14.

À quelle vitesse (instantanée) la terre se déplace-t-elle autour du soleil ?

Quelques stroboscopies... virtuelles

La définition même de mouvement circulaire uniforme permet immédiatement de simuler le résultat d'une expérience de stroboscopie pour ce genre de mouvement, au départ de la description trigonométrique du cercle. Si le mouvement considéré est de rayon R et de vitesse angulaire w , alors l'angle parcouru après t unités de temps égale wt , et la position²⁹ du point mobile à l'instant t est donc décrite par ses équations paramétriques, ou équations du mouvement :

$$\begin{cases} x = x(t) = R \cos wt, \\ y = y(t) = R \sin wt. \end{cases}$$

Suivant les dimensions en jeu dans le problème, la simulation mène à bien choisir les unités à utiliser. Par exemple, dans le mouvement de la terre autour du soleil, la distance moyenne terre/soleil étant de l'ordre de $149 \cdot 10^6$ km, il sera préférable de prendre comme unité de longueur le million de kilomètres. Dans ce cas, si une première simulation est réalisée mois par mois, on posera

$$w_{\text{mois}} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} = 0,5235 \dots \text{ (rad/mois)}$$

et les positions de la terre seront les 12 sommets d'un dodécagone régulier. Chaque nouvelle simulation peut alors amener les élèves à devoir adapter leurs unités ; par exemple, pour une simulation au jour près,

$$w_{\text{jour}} = \frac{2\pi}{365} = 0,01721 \dots \text{ (rad/jours)}$$

ou à l'heure près,

$$w_{\text{heure}} = \frac{2\pi}{365 \times 24} = 0,0007172 \dots \text{ (rad/heures)}.$$

Pour une simulation au jour près, les positions correspondantes de la terre dessinent un cercle presque continu (le point représenté en gras dans la figure ci-dessous est la position de la terre au 46^{ème} jour de l'année).

²⁹ Le repère dans lequel le mouvement est étudié est conforme à la représentation trigonométrique ou cartésienne usuelle ; dans le cas particulier du mouvement de la terre autour du soleil, on ne tient donc pas compte ici d'éventuelles conventions utilisées en astronomie.

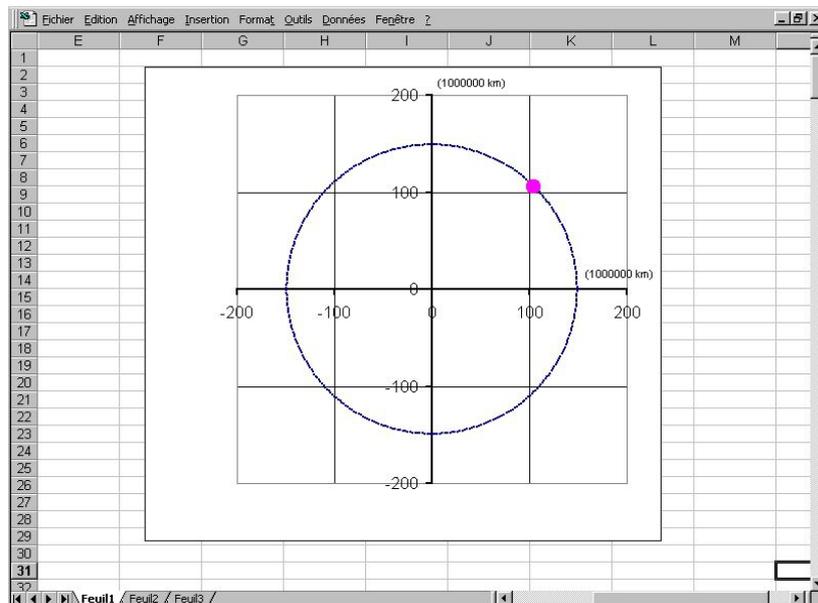


Fig. 45 : La trajectoire de la terre autour du soleil, sur 365 jours.

Cette continuité n'est qu'apparente, comme le montre un agrandissement de la figure, centré sur ce 46^{ème} jour (cf. la partie gauche de la figure 46). Le caractère curviligne de la trajectoire reste encore assez bien marqué. Mais si on réalise une simulation à l'heure près, toujours centrée au même point, ce caractère curviligne n'est plus perceptible (cf. la partie droite de la figure 46) : c'est bien un mouvement *rectiligne* et uniforme qui commence à apparaître !

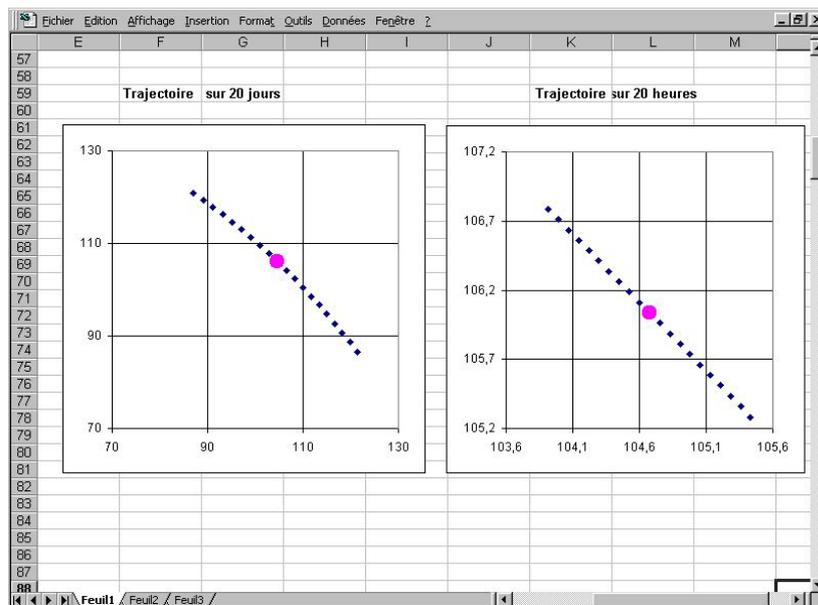


Fig. 46 : La trajectoire de la terre autour du soleil, sur 20 jours, et sur 20 heures.

Comme on l'a mis en évidence dans la section précédente, la vitesse du mouvement rectiligne idéal sous-jacent à une telle simulation est une grandeur vectorielle de même nature que la vitesse du nageur, ou de la balle lancée horizontalement, et associée au déplacement réellement effectué par le mobile.

Une approximation de la vitesse (instantanée)

Le tableau de valeurs qui a servi à représenter la trajectoire de la terre autour du soleil à l'heure près, contient tout ce qu'il faut pour calculer la mesure ou l'intensité de la vitesse de ce mouvement rectiligne presque uniforme. Par exemple, puisque le 46^{ème} jour correspond à la $46 \times 24 = 1\,104$ ^{ème} heure d'observation, le tableau

t (en h)	$x(t)$ (en 10^6 km)	$y(t)$ (en 10^6 km)
1 104	104,676594	106,036837
1 105	104,600511	106,11189

permet de calculer l'intensité de la vitesse du mouvement rectiligne correspondant. On a

$$\begin{aligned} v_{r.u.}(1\,104) &= \sqrt{(-0,076083)^2 + (0,075053)^2} \\ &= 0,10687153 \dots (10^6 \text{ km/h}) = 106\,871,53 \dots (\text{km/h}). \end{aligned}$$

C'est une vitesse extraordinaire ! Y a-t-il (néanmoins) moyen d'être encore plus précis ?

Question 15.

Quelles sont les caractéristiques géométriques, ou vectorielles, de la vitesse (instantanée) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme ?

La symétrie du cercle à l'œuvre

On devine assez vite que, si un point mobile est animé d'un mouvement circulaire *uniforme*, alors sa vitesse en n'importe quel point de la trajectoire doit toujours d'une certaine manière « être la même ». Plus précisément, cela signifie que si le sens, la direction et l'intensité du vecteur vitesse sont déterminés en un (seul) point de la trajectoire, ils sont alors déterminés en n'importe quel autre point de celle-ci : une rotation appropriée fait l'affaire. En effet, n'importe quelle chronophotographie d'un point est toujours équivalente à une chronophotographie d'un autre point (réalisée à la même fréquence d'éclairs) par une rotation qui amène l'un sur l'autre.

Pour déterminer les caractéristiques géométriques, ou vectorielles, de la vitesse (instantanée) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme, il suffit donc de le faire en un seul point de sa trajectoire !

De plus, le calcul de la fin de la question précédente a montré qu'une vitesse très importante n'est pas pour autant très facile à visualiser. Comme de

plus tous les cercles sont homothétiques, revenons-en un moment au bon vieux cercle trigonométrique.

Une limite visuelle

On peut encore faire découvrir la plupart des caractéristiques géométriques de la vitesse en tant que grandeur vectorielle, à l'aide d'une simulation.

Pour fixer les idées, on considère un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = 1$ et de vitesse angulaire $\omega = \pi$ (rad/s). La position à un instant t est donc décrite par les équations du mouvement

$$\begin{cases} x(t) = \cos \pi t, \\ y(t) = \sin \pi t. \end{cases}$$

Un tableur tel que EXCEL permet de faire varier très simplement un paramètre à l'aide d'une « barre de défilement », et de visualiser directement le résultat sur une figure associée à l'ensemble des données. Dans les figures ci-dessous, on a fait varier le temps t , en l'écrivant sous la forme $t = \frac{1}{n}$, où n est une valeur entière attachée à la barre de défilement, et variant de 1 à 1000. L'extrémité du vecteur décrivant la vitesse du mouvement rectiligne uniforme correspondant est donné par

$$\begin{cases} v_{r.u.x}(0) = x(0) + \frac{x(t)-x(0)}{t} = x(0) + \left(x\left(\frac{1}{n}\right) - x(0)\right) \cdot n, \\ v_{r.u.y}(0) = y(0) + \frac{y(t)-y(0)}{t} = y(0) + \left(y\left(\frac{1}{n}\right) - y(0)\right) \cdot n. \end{cases}$$

Dans la figure ci-dessous, $n = 3$ dans la cellule C20.

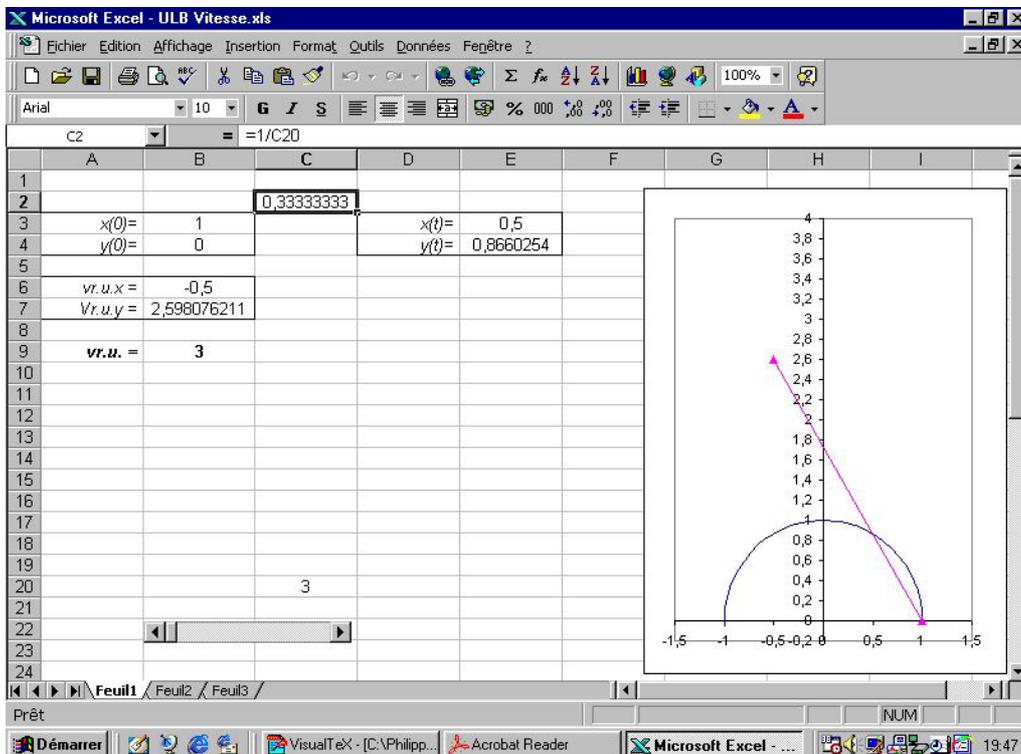


Fig. 47 : Le début du calcul de la vitesse comme grandeur vectorielle.

Et dans la suivante, $n = 1000$ dans la cellule C20.

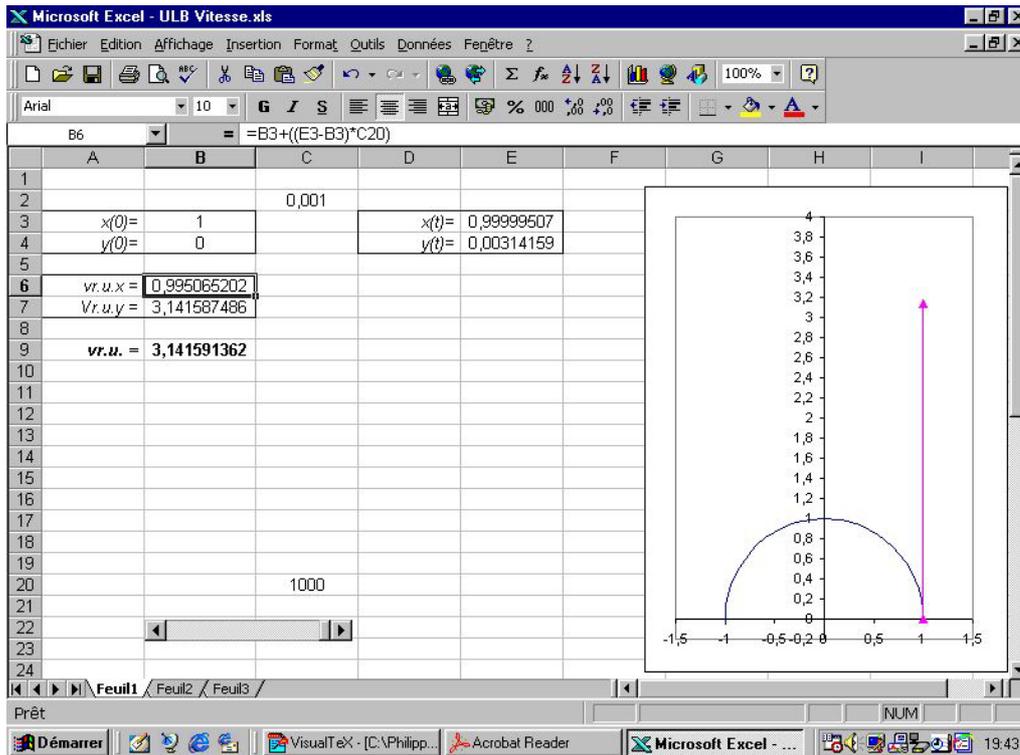


Fig. 48 : La vitesse, à moins d'un millième de seconde.

On observe déjà que la vitesse est quasiment perpendiculaire à l'horizontale, et que son intensité est très proche de $\pi = 3,141592654\dots$. On peut reprendre ce genre de simulation en faisant varier les paramètres R , w et t . À chaque fois, les résultats sont analogues : plus la discrétisation est fine, et plus le vecteur vitesse se redresse. Et il finit par devenir perpendiculaire au rayon horizontal, tandis que son intensité tend à se rapprocher de Rw .

La vitesse d'un mouvement circulaire uniforme

En fait, toutes ces observations fournissent aussi les idées principales des démonstrations qui restent à faire.

Considérons un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse angulaire w . Représentons

- par $M(t)$ ou M , la position du point mobile à l'instant t ;
- par $M(t + \Delta t)$ ou M' , la position du point mobile à l'instant $t + \Delta t$, Δt est donc l'intervalle de temps nécessaire à parcourir l'arc de cercle MM' ;
- et par $\vec{v}(t)$, la vitesse instantanée du point mobile $M(t)$, considérée comme grandeur vectorielle.

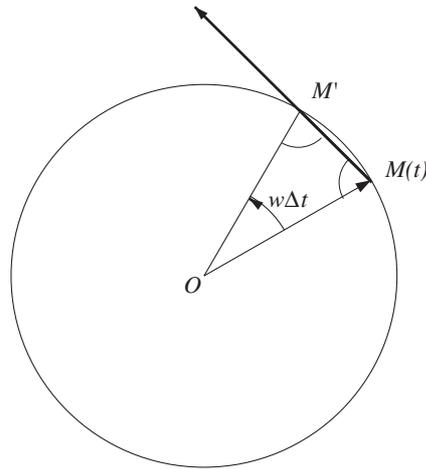


Fig. 49 : Une approximation de la direction de la vitesse instantanée.

L'examen du triangle isocèle OMM' livre la relation

$$\widehat{M} = \frac{\pi - w \cdot \Delta t}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{w \cdot \Delta t}{2},$$

qui montre que l'angle \widehat{M} se rapproche de $\frac{\pi}{2}$ lorsque l'intervalle de temps Δt se rapproche de 0. Cela signifie qu'en termes de leurs représentants géométriques, les vecteurs $\vec{v}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t)$ sont perpendiculaires.

Ainsi, la vitesse d'un mouvement circulaire uniforme est tangente à la trajectoire de ce mouvement. C'est une propriété facile à observer : par exemple, lorsqu'on lance une bille le long du bord d'un cerceau et qu'on relève ce dernier d'un coup, la bille « prend la tangente », de même lorsqu'on présente une lame d'outil à une meule, les étincelles s'échappent tangentiellement, etc.

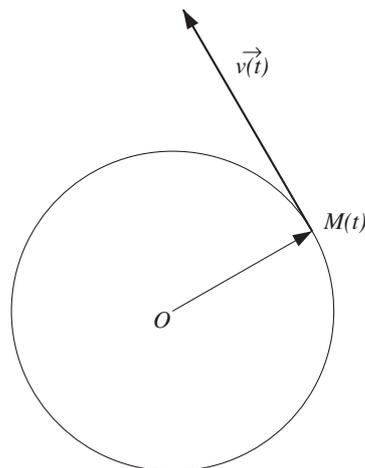


Fig. 50 : La direction de la vitesse instantanée.

Mais il ne faut pas perdre de vue que la justification physique de ce type de comportement fait appel au principe d'inertie, qui est un principe dynamique et qu'on abandonne alors le contexte de la seule cinématique. Par

ailleurs, même lorsque le mouvement circulaire n'est pas uniforme, sa vitesse est encore tangente à la trajectoire du mouvement. Cela résulte d'un raisonnement analogue à celui décrit ci-dessus, pourvu que l'angle parcouru $w(t)$, considéré comme fonction du temps t nécessaire à le parcourir, devienne proche de 0 lorsque ce temps lui-même est proche de 0, ou plus précisément, pourvu que cette angle soit une fonction continue du temps t au voisinage de 0 ; c'est là une hypothèse physiquement très raisonnable !

Un changement de point de vue

Fixons maintenant un repère au centre de la trajectoire circulaire. Nous pouvons alors écrire

$$\overrightarrow{OM}(t) = R(\cos wt \cdot \vec{e}_1 + \sin wt \cdot \vec{e}_2),$$

Effectuons une translation du vecteur $\vec{v}(t)$ au centre de la trajectoire du mouvement circulaire. Cela revient à changer (littéralement) de point de vue sur la vitesse, et mérite donc qu'on l'interprète physiquement, ce qui sera l'objet de la question 16 ci-après. Mais comme cette translation n'a rien d'étonnant en mathématiques, et qu'elle a déjà été utilisée et justifiée physiquement dans l'étude des mouvements du nageur et de la goutte d'eau, elle ne doit pas trop nous inquiéter pour le moment. Ceci dit, le fait que la vitesse soit perpendiculaire au rayon d'extrémité $M(t)$ implique qu'il existe une constante k telle que

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= k \left(\cos \left(wt + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \vec{e}_1 + \sin \left(wt + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \vec{e}_2 \right) \\ &= k \left(-\sin wt \cdot \vec{e}_1 + \cos wt \cdot \vec{e}_2 \right). \end{aligned}$$

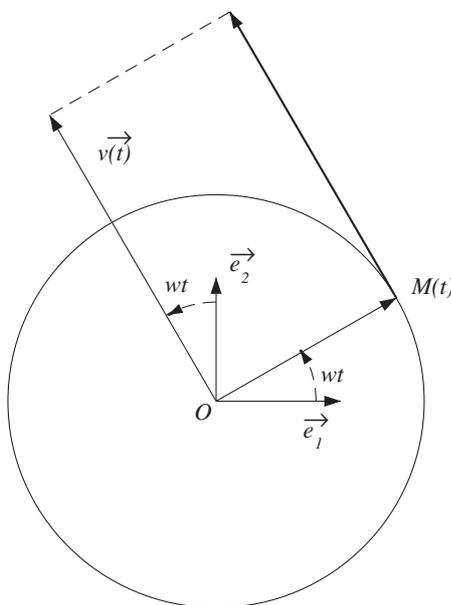


Fig. 51 : La vitesse instantanée, ramenée au centre de la trajectoire.

Par identification des modules dans les deux membres de la dernière égalité, cette constante k ne peut être que l'intensité $v(t)$ de la vitesse instantanée. Mais l'expérience gagnée lors des simulations, ou – plus mathématiquement – la méthode classique de calcul de la longueur de la circonférence (par polygones inscrits) entraîne alors

$$v(t) = \frac{2\pi R}{T},$$

où T est le temps nécessaire à parcourir un tour complet.

Une justification un peu plus détaillée peut être présentée de la manière suivante. Il s'agit de calculer

$$v(t) \text{ ou } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|MM'|}{\Delta t}.$$

Or, la méthode de calcul de la longueur de la circonférence par « bissection » de polygones inscrits établit que, si MM' est la corde qui sous-tend un angle au centre de $\frac{360^\circ}{2^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot |MM'| = 2\pi R.$$

En posant alors $\Delta t = \frac{T}{2^n}$, on calcule

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|MM'|}{\frac{T}{2^n}} = \frac{1}{T} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n |MM'| = \frac{1}{T} \cdot 2\pi R.$$

Comme $2\pi = wT$, on peut aussi écrire

$$v(t) = Rw,$$

ce qui confirme les résultats des simulations. La vitesse instantanée d'un mouvement circulaire uniforme, considérée comme grandeur vectorielle, s'écrit donc finalement

$$\vec{v}(t) = Rw(-\sin wt \cdot \vec{e}_1 + \cos wt \cdot \vec{e}_2).$$

On la qualifie souvent de *vitesse linéaire*, afin de la distinguer de la vitesse angulaire.

À un niveau plus avancé, on remarquera que le calcul précédent a établi de manière géométrico-physique deux formules de dérivation,

$$(\sin wt)' = w \cos wt,$$

et

$$(\cos wt)' = -w \sin wt.$$

Quelques valeurs numériques à comparer

Revenons-en enfin aux exemples de la question 13, pour achever de quantifier les deux notions de vitesse sous-jacentes. Dans le cas du mouvement de la terre autour du soleil, on a déjà calculé

$$w_{\text{terre/soleil}} = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = 1,9923 \dots 10^{-7} \text{ (rad/s)},$$

et comme on sait que $R = 149 \times 10^9$ (m), on obtient pour l'intensité de la vitesse linéaire

$$v = R\omega = 29686,53 \dots \text{ (m/s)} = 106871,53 \dots \text{ (km/h)}.$$

C'est presque exactement la valeur calculée lors de la simulation à l'heure près! Pour ce qui concerne le mouvement d'une dent de scie circulaire tournant à 1500 tours/minute, on a obtenu

$$\omega_{scie} = \frac{1500 \times 2\pi}{60} = 157,079 \dots \text{ (rad/s)};$$

si on suppose que le rayon de cette scie égale 20 cm, on trouve pour l'intensité de la vitesse linéaire :

$$v = R\omega = 31,415 \dots \text{ (m/s)} = 113,097 \dots \text{ (km/h)}.$$

Lequel de ces deux mobiles est le plus rapide? Cela dépend de la notion de vitesse que l'on sous-entend, mais en termes de déplacement, il n'y a pas de doute : la terre l'emporte, haut la main!

4.2 Le mouvement de la vitesse

Comment s'y prendre ?

Les propriétés géométriques de la vitesse linéaire d'un mouvement circulaire uniforme sont d'une richesse quasiment inépuisable. On va s'en rendre compte en revenant à un point qui restait à éclaircir dans le déroulement de la question précédente.

Question 16.

Lorsqu'on observe du centre de sa trajectoire un point animé d'un mouvement circulaire uniforme, comment voit-on sa vitesse varier ?

Quel est le mouvement de la vitesse ?

Effectuer une translation de la vitesse au centre de la trajectoire d'un mouvement circulaire uniforme a-t-il un sens physique? En fait, oui : cela revient à reconstituer le mouvement là où on l'observe. C'est par exemple ce que réalise (partiellement) un dresseur de chevaux lorsqu'il fait travailler un cheval à la longe autour de lui. Et il est relativement fréquent en astronomie, d'observer du centre de la trajectoire un point animé d'un mouvement assimilé à un mouvement circulaire uniforme, certaines planètes ou une étoile proche par exemple. En fait, on reconstitue ainsi à l'endroit où on réalise les observations, une portion du mouvement rectiligne uniforme idéal de l'objet observé, en effectuant une translation vers le centre de la trajectoire de cette portion de mouvement rectiligne. Dans le cas du dresseur de chevaux, la longe figure bien le rayon (mobile) le long duquel la translation peut s'imaginer.

On obtient ainsi une grandeur vectorielle $\overline{OV}(t)$ physiquement équivalente à la vitesse du point mobile $M(t)$,

$$\overline{v}(t) = \overline{OV}(t).$$

Or, – et c’est là une observation majeure ! – comme le point mobile tourne, le vecteur $\overrightarrow{OV}(t)$ tourne donc lui aussi ! On appelle *hodographe*³⁰ l’ensemble des extrémités $V(t)$ des vitesses, *après translation au centre de la trajectoire*.

La caractérisation géométrique du vecteur vitesse implique immédiatement que l’hodographe d’un mouvement circulaire uniforme est un cercle.

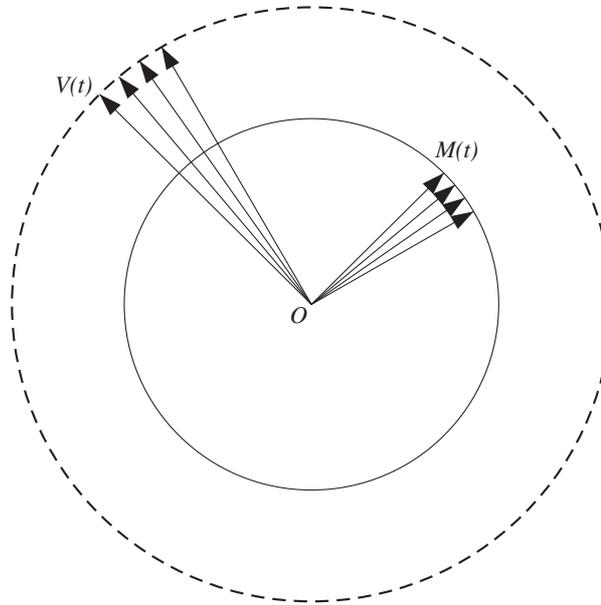


Fig. 52 : Le mouvement de la vitesse, rapporté au centre de la trajectoire.

Plus précisément, si le point mobile $M(t)$ est animé d’un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse angulaire w , le point (imaginaire, et néanmoins) mobile $V(t)$ sera lui aussi animé d’un mouvement circulaire uniforme

- de rayon Rw ,
- de la même vitesse angulaire w ,
- mais en avance (ou déphasé, comme disent les physiciens) de $\frac{\pi}{2}$ radians sur le mouvement du point $M(t)$,

puisque l’on sait que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$, et d’intensité égale à Rw .

L’accélération d’un mouvement circulaire uniforme

Ce qui a si parfaitement fonctionné une première fois suggère bien vite qu’on le répète, même si l’idée peut paraître bizarre : puisque la vitesse d’un mouvement circulaire uniforme peut être considérée comme étant elle-même soumise à un mouvement circulaire uniforme, quelle en est... la vitesse ?

Bien sûr, il n’est pas très facile d’imaginer ce que représente physiquement cette vitesse-là, surtout lorsqu’on se situe au centre de la trajectoire

³⁰ Sous cette forme, la notion semble due à W. R. Hamilton (1805-1865). L’hodographe correspond, en géométrie, à ce qu’on appelle parfois l’*application de Gauss*.

du mouvement circulaire... Par contre, son interprétation dynamique (à un facteur près, en terme de force centripète) est assez immédiate mais échappe encore une fois au contexte cinématique privilégié ici.

En tout cas, si cette « vitesse de la vitesse » semble à première vue incongrue, c'est qu'il faut peut-être d'abord revenir un peu sur la notion d'accélération moyenne, comme mesure de la variation de la vitesse par unité de temps ou mieux encore, sur la notion d'accélération instantanée, qu'on peut effectivement définir comme la vitesse instantanée de la vitesse instantanée. Un retour sur la signification de la constante g dans le mouvement de la goutte d'eau étudié plus haut, peut aussi illustrer ce point de vue.

Ceci rappelé, l'accélération d'un mouvement circulaire uniforme peut donc bien se définir comme la vitesse (appliquée au point mobile) de la vitesse du mouvement. En vertu de tout ce qui précède, c'est une (nouvelle) grandeur vectorielle, caractérisée par :

- son point d'application, c'est-à-dire le point mobile $M(t)$;
- sa direction, qui est celle du rayon $OM(t)$, puisqu'elle doit être perpendiculaire à la direction de la vitesse $\vec{v}(t)$, qui est elle-même perpendiculaire à ce rayon ;
- son sens, opposé à celui de $\overrightarrow{OM}(t)$, puisque l'angle correspondant est déphasé deux fois de $\frac{\pi}{2}$;
- son intensité, encore obtenue comme produit du rayon de la trajectoire, ici égal à Rw par la vitesse angulaire w , et qui vaut donc Rw^2 .

Un exemple rassurant

Pour ne donner qu'un exemple de calcul de cette accélération, considérons le mouvement de la terre autour de son axe de rotation (pôle nord — pôle sud), pour une ville située à 50° de latitude nord, le centre de la terre étant supposé fixe. La vitesse angulaire de rotation vaut

$$w = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,2722 \dots 10^{-5} \text{ (rad/s)}.$$

Comme le rayon moyen de la terre égale $R = 6378$ (km), le rayon de l'orbite circulaire de la ville en question s'obtient par : $r = R \sin 50^\circ = 4885,83 \dots$ (km). On calcule ensuite

$$v = rw = 355,307 \dots \text{ (m/s)} = 1279,1 \dots \text{ (km/h)},$$

$$a = rw^2 = 0,0258 \dots \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

À titre de comparaison, on vérifie facilement que cette accélération, due à la rotation de la terre sur elle-même, est négligeable par rapport à l'accélération de la pesanteur

$$\frac{a}{g} \approx \frac{1}{380}.$$

Vers une autre histoire... ?

Ce dernier résultat permet de donner une explication géométrique – termes d’une généralisation de ce *transport parallèle* mis en évidence dans le problème du nageur – du résultat de la célèbre expérience de L. Foucault sous le dôme du Panthéon en 1851. Ce n’est pas l’endroit ici de détailler cette explication, aussi belle soit-elle, mais on peut savoir qu’elle est due au mathématicien autrichien J. Radon, dont l’article original est reproduit dans F. Klein, *Vorlesungen über Höhere Geometrie*, J. Springer Verlag, Berlin, 1926.

Mais tout cela, c’est déjà une autre histoire...

ANNEXE III

DOCUMENTS À PHOTOCOPIER

