13

Les mouvements et les vitesses

Avant-propos

La notion de vitesse est essentielle en mécanique. Elle se précise à travers deux étapes importantes de sa construction : son évaluation numérique et sa caractérisation géométrique. Or, dès qu'un mouvement se révèle être un peu complexe, ces deux aspects se retrouvent presque inextricablement liés, et là où en mathématiques on étudie au départ deux notions distinctes : la dérivée et le vecteur, en physique on ne considère plus qu'un seul objet : la vitesse.

À la croisée des deux disciplines, une image mentale commune peut se dégager de l'étude de photographies stroboscopiques du mouvement de projectiles. Elle est subordonnée à un principe général de discrétisation : les éclairs successifs d'un stroboscope figent des positions très rapprochées du projectile, et invitent à décomposer son mouvement en une succession très dense de mouvements simples, quasi rectilignes et uniformes, mais dont la direction et l'intensité de la vitesse changent tout le temps.

C'est à partir de cette image discrète que nous proposons ici de construire progressivement la notion de vitesse.

En bref, ce chapitre vise à

- détailler pourquoi et comment la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme peut être considérée comme un prototype de grandeur vectorielle en physique,
- définir la vitesse instantanée d'un mobile comme vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme « idéal »,
- mettre en évidence l'efficacité de ce double point de vue :

  grandeur vectorielle/mouvement rectiligne idéal

  à travers l'étude du mouvement circulaire uniforme.

En plus des photographies stroboscopiques – et des expériences de pensée, chères aux physiciens – le recours aux fonctions d'un tableur permet de proposer des modèles et de simuler des situations. En outre, dans le cas du mouvement circulaire uniforme, la définition même de ce genre de mouvement permet d'en *construire a priori des stroboscopies* à l'aide d'un tableur !

1 Marcher ou nager, c'est la même chose ?

De quoi s'agit-il ?

Décrire un mouvement rectiligne uniforme (inaccessible à des mesures directes) à partir des caractéristiques d'autres mouvements rectilignes uniformes (accessibles à de telles mesures).

Enjeux

La caractérisation vectorielle de la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme. Une interprétation cinématique des équations paramétriques d'une droite.

Sur les vitesses situées dans le cadre général du calcul vectoriel, voir la section 8.3 du chapitre 16.

De quoi a-t-on besoin ?

Un tableur (EXCEL, par exemple).

Prérequis

Les éléments du calcul vectoriel dans le plan, par exemple en termes de changements de position (voir le chapitre 8). La notion de mouvement rectiligne uniforme, en particulier de vitesse d'un tel mouvement, conçue dans un premier temps comme vitesse moyenne.

1.1 La décomposition d'un mouvement rectiligne

Comment s'y prendre ?

La situation suivante est simple, et très classique[1].

> Question 1.
> Lors d'un entraînement de triathlon, un athlète doit traverser à la nage une rivière large de 200 m et animée d'un fort courant. Il part du pied A d'un pont qui traverse cette rivière (cf. la figure 1 ci-dessous) et s'efforce de toujours nager droit devant lui, perpendiculairement à la berge, mais – bien sûr ! – le courant le déporte. Yves et Xavier sont eux aussi au pied A du pont, et observent le nageur prêt à s'élancer. Comment devraient-ils s'organiser (aussi simplement que possible) pour estimer la vitesse du nageur pendant sa traversée ?

Une manière simple de s'organiser

Voici une méthode qui suppose qu'Yves et Xavier disposent tout au plus d'une montre ou d'un chronomètre, et savent marcher… intelligemment.

Xavier emprunte le sentier le long de la berge et marche en restant toujours à hauteur du nageur ; en allongeant le pas, il fait des enjambées d'un mètre (en moyenne) et note la distance parcourue pour chaque minute écoulée. Yves fait de même sur le pont, et en s'efforçant lui aussi de rester toujours à hauteur du nageur. Tout cela revient donc à situer la position du nageur de minute en minute, dans un repère orthonormé « naturel ».

[1] Pour des variantes et des prolongements, on se reportera par exemple à E. Hecht [1999] : p. 51-59, A. Meessen [1984] : problème 5 à la p. 122, Physical Science Study Committee [1970] : p. 86-87 ou FESeC [1997] : p. V9 à V11, … sans oublier Formes et mouvements, CREM [2001a] : p. 274-275.

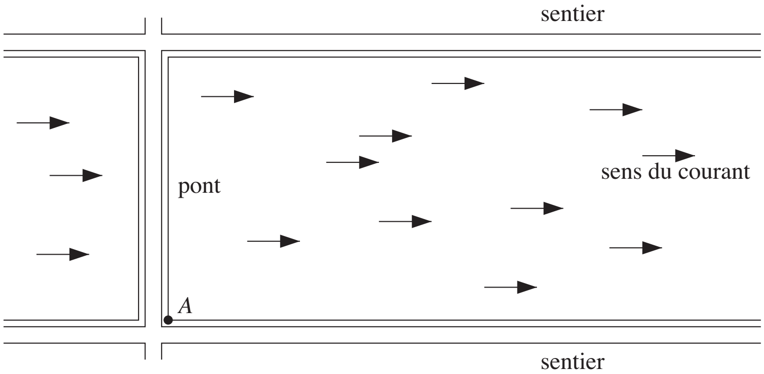

Fig. 1 : Le décor.

Il est relativement raisonnable de faire ici une *hypothèse d'uniformité* concernant les déplacements de Xavier et d'Yves. Pour fixer les idées, supposons donc que Xavier parcourt ainsi d'une démarche régulière 40 mètres par minute, tandis qu'Yves traverse pareillement le pont d'un pas égal en 10 minutes, c'est-à-dire à raison de 20 mètres par minute.

Les élèves peuvent facilement simuler cette situation à l'aide d'un tableur, et représenter ainsi les positions respectives de Xavier, d'Yves et du nageur toutes les minutes.

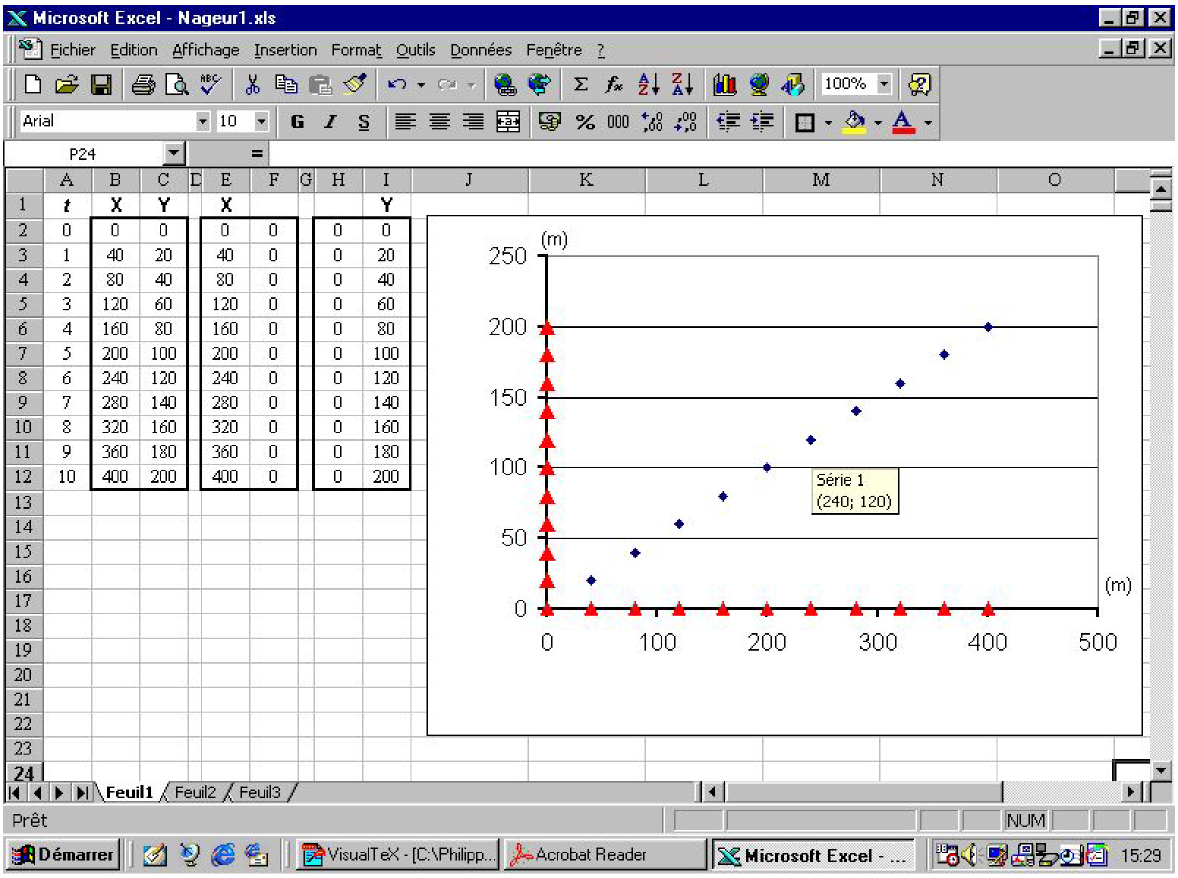

Fig. 2 : Les positions de Xavier, Yves et du nageur, toutes les minutes.

Par subdivisions successives, ils peuvent ensuite faire apparaître les positions des trois protagonistes de la question de manière presque continue.

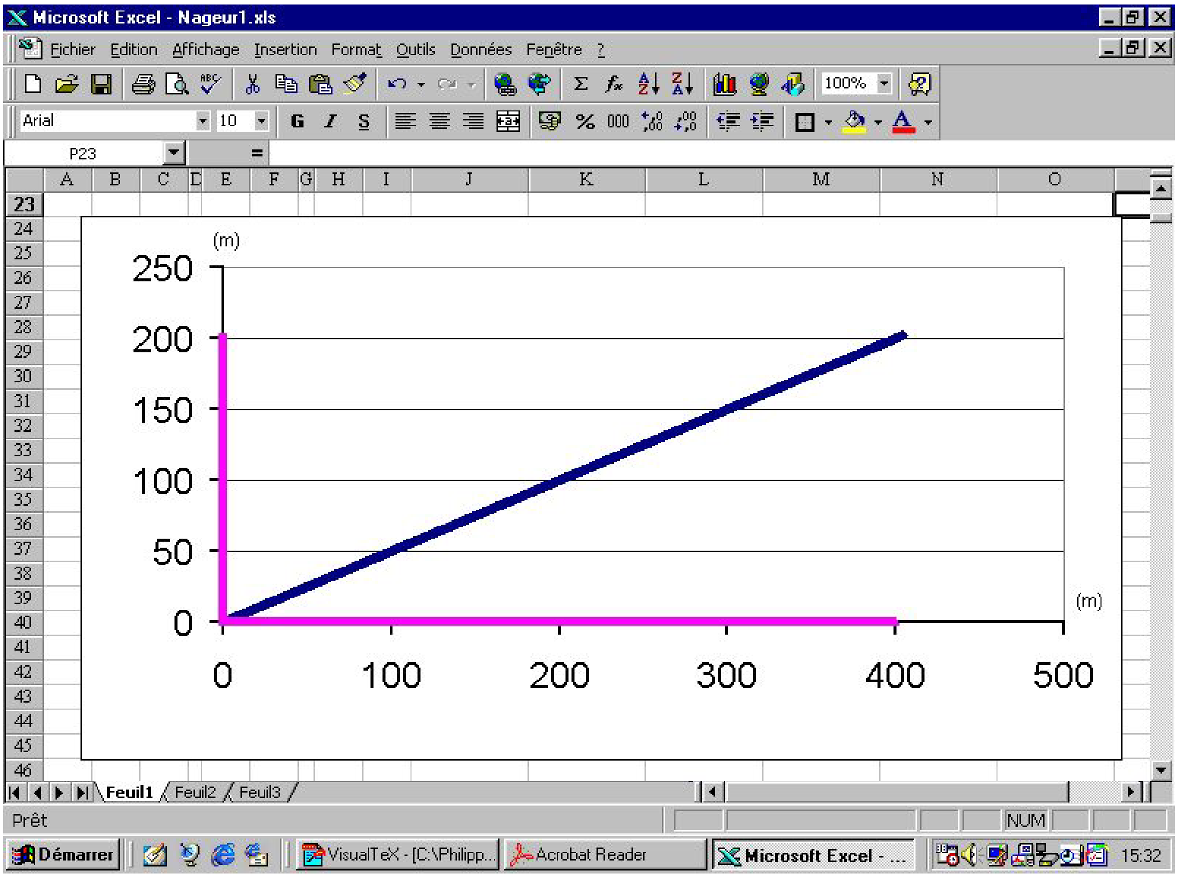

Fig. 3 : Les positions de Xavier, Yves et du nageur, toutes les 0,01 s.

Yves atteint ainsi l'autre rive en même temps que le nageur ; celui-ci a donc, lui aussi, mis 10 minutes pour traverser la rivière. Quelles sont les autres caractéristiques de son mouvement ?

Le déplacement du nageur est rectiligne

Décrire le déplacement du nageur revient à exprimer sa position en fonction de celles d'Yves et de Xavier. Or, nous avons supposé que le déplacement de chacun des deux observateurs est rectiligne et uniforme. La position de Xavier – comptée en mètres à partir du point A – s'exprime donc par l'équation

$$x = 40t,$$

où t est la durée de marche, comptée en minutes ; et pareillement pour Yves

$$y = 20t.$$

La position du nageur est ainsi déterminée à tout instant grâce aux deux équations

$$\begin{cases} x = 40t, \\ y = 20t, \end{cases}$$

qui méritent dès lors d'être appelées les *équations du mouvement.*

Occupons-nous de la trajectoire du nageur, c'est-à-dire de l'ensemble de toutes ses positions. C'est une figure géométrique indépendante du temps. Elle s'obtient donc en « chassant » le temps t hors des deux équations du mouvement. La première équation donne $t = \frac{x}{40}$, ce qui permet d'écrire la deuxième, à savoir

$$y = 20 \cdot \frac{x}{40} = \frac{1}{2}x.$$

C'est l'équation d'une droite[2]. Le nageur suit donc une trajectoire rectiligne dont le point de départ est l'origine A du repère « naturel ».

Le mouvement du nageur est uniforme

Rappelons qu'un mouvement est qualifié d'uniforme si une même durée d'observation correspond toujours à un même espace parcouru, indépendamment de l'instant où débute l'observation.

Le mouvement du nageur détermine celui de Xavier et d'Yves, et chacun de ces mouvements est rectiligne. Montrons alors que le déplacement du nageur est uniforme si et seulement si celui de Xavier et d'Yves le sont aussi.

Supposons d'abord que les mouvements de Xavier et d'Yves sont uniformes. Situons leurs positions à deux instants d'observation (différents) : soient X_1, X_2 et Y_1, Y_2. Les mouvements étant uniformes, si la durée d'observation est la même, les distances parcourues par chacun doivent donc être identiques (cf. figure 4). On a

$$\left|X_1X_1'\right| = \left|X_2X_2'\right|,$$

$$\left|Y_1Y_1'\right| = \left|Y_2Y_2'\right|,$$

où X_1', X_2' et Y_1', Y_2' désignent les positions atteintes à la fin de l'observation.

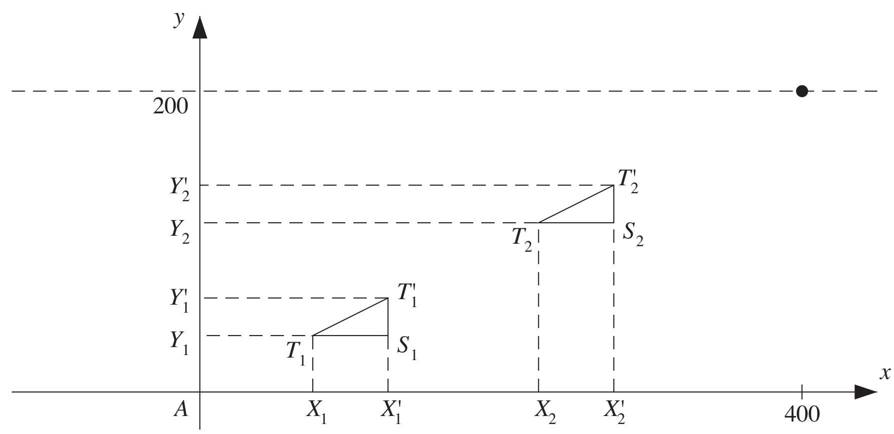

Fig. 4 : L'uniformité en termes de triangles isométriques.

[2] Le contexte est différent, mais les idées mises en œuvre ici sont exactement celles des chapitres 5 et 6.

Mais alors les triangles (rectangles) $T_1S_1T_1'$ et $T_2S_2T_2'$ sont isométriques : pendant cette durée d'observation, les distances $|T_1T_1'|$ et $|T_2T_2'|$ parcourues par le nageur sont donc bien identiques.

La réciproque s'établit d'une manière analogue, c'est-à-dire à l'aide d'une isométrie de triangles rectangles. Supposons que le mouvement du nageur est rectiligne uniforme. La trajectoire du nageur étant rectiligne, les angles $\widehat{T_1}$ et $\widehat{T_2}$ des triangles rectangles $T_1S_1T_1'$ et $T_2S_2T_2'$ sont égaux, et le mouvement du nageur étant uniforme, les distances $|T_1T_1'|$ et $|T_2T_2'|$ sont égales. Les triangles rectangles $T_1S_1T_1'$ et $T_2S_2T_2'$ sont donc isométriques, d'où on déduit immédiatement que les distances parcourues par Xavier (resp. Yves) pendant les durées d'observation sont identiques.

Une estimation de la vitesse du nageur

Le déplacement du nageur étant rectiligne et uniforme, sa vitesse est constante, et peut se calculer dès qu'on connaît la distance parcourue pendant un intervalle de temps. Or, la distance parcourue pendant les 10 minutes que dure la traversée s'obtient grâce au théorème de Pythagore (cf. figure 5) :

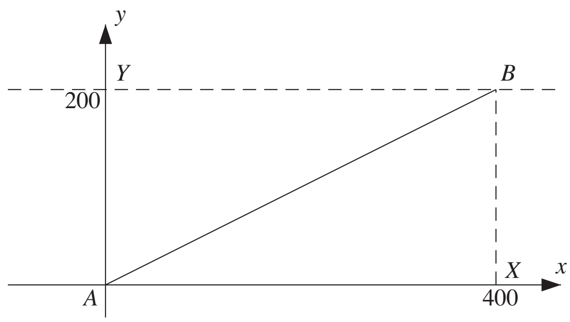

Fig. 5 : L'espace parcouru par le nageur.

$$|AB| = \sqrt{|AX|^2 + |AY|^2} = \sqrt{400^2 + 200^2} = 200\sqrt{5} = 447,21\ldots \quad \text{(m)}$$

La vitesse du nageur est donc approximativement de 45 mètres par minute (c'est-à-dire $0,75$ m/s ou $2,7$ km/h).

1.2 La vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme

Comment s'y prendre ?

Aussi satisfaisantes qu'elles soient, les réponses apportées à la question 1 méritent d'être approfondies. C'est ce que la question suivante se propose de faire. Son caractère plus théorique explique que sa résolution n'est pas nécessairement laissée à la seule initiative des élèves. L'enseignant veillera néanmoins à ce que les caractéristiques essentielles de la vitesse en tant que *grandeur vectorielle* – puisque c'est de cela qu'il s'agit ici – soient clairement mises en évidence pour tous les élèves.

Question 2.
Quelles sont les relations qui lient les trois vitesses, celle de Xavier, celle d'Yves et celle du nageur, et plus précisément, comment exprimer ces relations en termes mathématiques (direction, sens des mouvements) et en termes physiques (mobiles concernés, grandeurs associées aux mouvements) ?

Un bilan des observations

On vient de montrer que le mouvement du nageur est rectiligne et uniforme si et seulement si celui d'Yves et Xavier le sont et que la vitesse du nageur peut être évaluée en conséquence, à partir des vitesses respectives d'Yves et de Xavier.

Ceci remis en mémoire, les déplacements et donc les vitesses d'Yves, de Xavier et du nageur ont néanmoins des caractéristiques physiques assez différentes. Précisons ces différences.

- Chacun des déplacements considérés concerne des personnes différentes, et dans notre représentation, ce sont bien des *points* différents qui bougent.
- D'autre part, les *droites* suivant lesquelles les mouvements rectilignes uniformes se manifestent sont complètement distinctes pour chacun des trois protagonistes.
- Enfin, ni Yves ni Xavier n'exercent d'effet physique contraignant sur le nageur, ils ne lui communiquent pas l'énergie nécessaire à son effort et ils ne sont donc en rien la cause de son mouvement.

Et néanmoins, comme on l'a vu par exemple en écrivant l'équation de la trajectoire du nageur, les trois mouvements ne sont pas indépendants. Les déplacements de Xavier et d'Yves permettent même de reconstituer complètement le mouvement du nageur.

Comment relier le mouvement de Xavier ou d'Yves, avec ce que le nageur ressent ?

On peut introduire dans le raisonnement des mouvements et donc des vitesses dont les effets physiques sont directement perceptibles par le nageur.

- Si le nageur est en eau calme (un étang ou un lac par exemple), l'absence de courant lui permet de nager effectivement droit devant lui sans être déporté. Cette vitesse existe aussi pour notre triathlète pris dans le courant d'eau : c'est celle qu'il acquiert par l'exercice de sa (seule) force musculaire. C'est aussi celle qu'il s'efforce de diriger toujours perpendiculairement à la rive. Comme il essaie de se diriger ainsi indépendamment du courant, on appelle cette vitesse : la *vitesse du nageur par rapport au courant*, ou *par rapport à l'eau.*
- Si le nageur se laisse dériver sous l'effet du courant sans nager[3], son déplacement, comme sa vitesse, est parallèle à la rive. La vitesse

[3] ... Mais sans oublier de rester à la surface de l'eau...

correspondante n'est alors en fait que la vitesse du courant, ou si on veut être précis : la *vitesse du courant par rapport à la rive*.

Résumons-nous : nous disposons maintenant de cinq vitesses au lieu de trois pour analyser le mouvement du nageur ! Mais comme trois d'entre elles possèdent des effets physiques ressentis directement par le nageur, il y a peut-être du sens à décrire la manière dont ces effets sont reliés les uns aux autres.

Comment combiner des grandeurs caractérisées aussi bien par leur direction que par leur intensité ?

Chacune des vitesses rencontrées jusqu'à maintenant est associée à un mouvement rectiligne uniforme et est entièrement déterminée par quatre caractéristiques :

- le point en mouvement, ou *point d'application* de la vitesse,
- la *direction* de la vitesse, c'est-à-dire la droite suivant laquelle le mouvement rectiligne se produit,
- le *sens* de la vitesse, qui est un des deux sens[4] de parcours sur la droite en question,
- l'*intensité* de la vitesse, c'est-à-dire la mesure de l'espace parcouru par unité de temps.

Les résultats obtenus dans la question 1 suggèrent alors une manière de combiner des grandeurs physiques ayant autant de caractéristiques géométriques diverses. La vitesse du nageur par rapport au courant et la vitesse du courant par rapport à la rive sont en effet deux grandeurs physiques du type que l'on vient de définir. Elles concernent directement notre nageur. Il y a donc du sens à envisager leur effet simultané, qui se manifeste dans le mouvement résultant du nageur. De plus, les caractéristiques de ce mouvement résultant sont déterminées à partir d'un rectangle naturellement associé à la situation :

- ce mouvement résultant est lui aussi rectiligne, et on sait déterminer sa direction, c'est celle de la diagonale d'un rectangle dont les côtés sont proportionnels à chacune des vitesses primitives ;
- il est de plus lui aussi uniforme, de telle sorte qu'on sait aussi mesurer l'intensité de la vitesse correspondante : elle est équivalente à la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les côtés sont équivalents à chacune des mesures des vitesses primitives.

Pour faire bref, une grandeur physique possédant les quatre caractéristiques géométriques décrites plus haut, et obéissant à cette règle de combinaison « en rectangle » sera appelée une *grandeur vectorielle*, afin de mettre en évidence les traits communs de ce type de grandeur avec la notion de vecteur.

On représente alors par $\overrightarrow{v}_{nageur/rive}$ la vitesse du nageur par rapport à la rive, considérée comme grandeur vectorielle ; on note pareillement

[4] Le sens du courant est distinct de sa direction, du moins dans le langage mathématique...

$\overrightarrow{v}_{courant/rive}$ la vitesse du courant par rapport à la rive, et $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}$ la vitesse du nageur par rapport au courant. La résultante[5] des deux vitesses $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}$ et $\overrightarrow{v}_{courant/rive}$ donne donc naissance à la vitesse $\overrightarrow{v}_{nageur/rive}$ du nageur :

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \overrightarrow{v}_{nageur/courant} + \overrightarrow{v}_{courant/rive}.$$

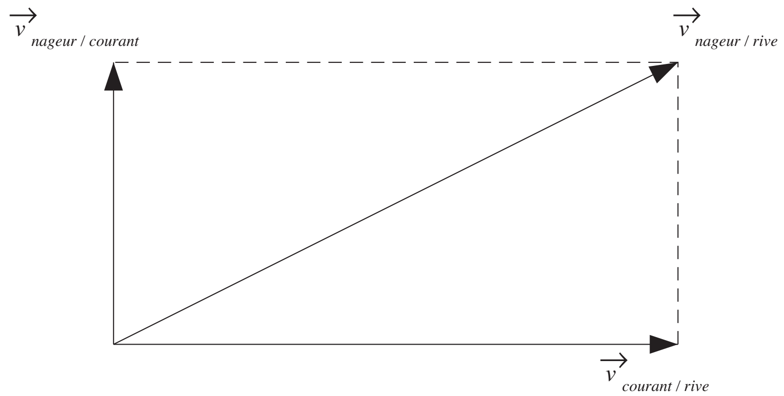

Fig. 6 : La combinaison des vitesses se visualise ici à l'aide d'un rectangle.

L'opération de combinaison ou d'addition vectorielle met ainsi bien en jeu les *quatre* caractéristiques des grandeurs concernées : le point d'application (commun), la direction, le sens et la mesure ou intensité.

. . . Mais on n'a pas encore répondu à la question !

Au travers de la notion de grandeur vectorielle, la relation

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \overrightarrow{v}_{nageur/courant} + \overrightarrow{v}_{courant/rive}$$

est maintenant revêtue d'une signification tant mathématique que physique. Mais cette relation n'est pas celle qui a été mise en scène dans la question 1, et qui serait plutôt du type

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \overrightarrow{v}_{Yves} + \overrightarrow{v}_{Xavier},$$

où $\overrightarrow{v}_{Xavier}$ et $\overrightarrow{v}_{Yves}$ désignent les vitesses de Xavier et d'Yves. Comme il est important ici de préciser les points d'application des vitesses en question, il vaudrait même mieux écrire :

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive}(T_1) = \overrightarrow{v}_{Yves}(Y_1) + \overrightarrow{v}_{Xavier}(X_1),$$

où Y_1 et X_1 sont les positions respectives de Yves et de Xavier lorsque le nageur est observé en T_1 dans la rivière (cf. figure 7). Mais que signifie une telle écriture, mathématiquement correcte, au point de vue physique ?

[5] Ou combinaison, ou encore somme vectorielle. . .

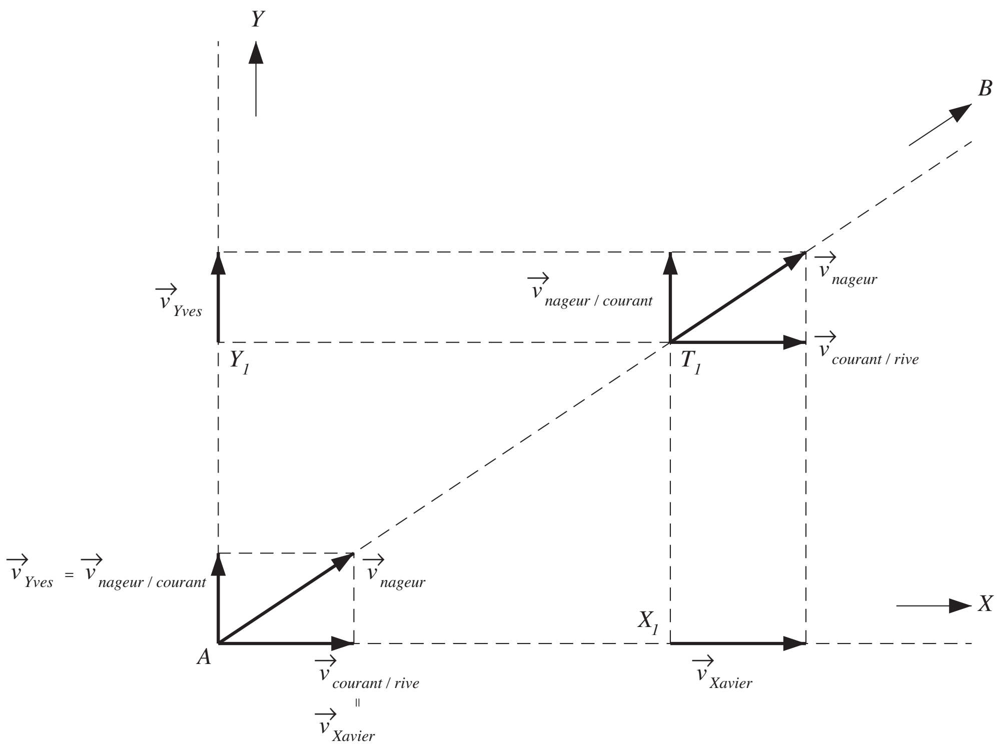

Fig. 7 : Des grandeurs a priori différentes traduisent des effets équivalents.

La réponse vient en deux étapes. Au moment initial, c'est-à-dire lorsque Xavier, Yves et le nageur entament leurs mouvements respectifs au pied A du pont, on a

$$\vec{v}_{nageur/rive}(A) = \vec{v}_{nageur/courant}(A) + \vec{v}_{courant/rive}(A),$$

et donc aussi

$$\vec{v}_{nageur/rive}(A) = \vec{v}_{Yves}(A) + \vec{v}_{Xavier}(A), \tag{1}$$

puisqu'au point A, on a des égalités de vitesses

$$\vec{v}_{nageur/courant}(A) = \vec{v}_{Yves}(A) \quad \text{et} \quad \vec{v}_{courant/rive}(A) = \vec{v}_{Xavier}(A).$$

D'autre part, le mouvement d'Yves est rectiligne et uniforme, de telle sorte qu'il y a un sens physique à écrire

$$\vec{v}_{Yves}(A) = \vec{v}_{Yves}(Y_1), \tag{2}$$

puisque cela signifie que, lors d'un déplacement le long de sa propre trajectoire rectiligne, Yves ne voit pas changer sa vitesse. On donne ainsi une signification physique à ce que cette vitesse-là ne soit pas liée à son point d'application : c'est une caractéristique fondamentale du mouvement sous-jacent ! Pour la même raison, on a aussi

$$\vec{v}_{Xavier}(A) = \vec{v}_{Xavier}(X_1), \tag{3}$$

et

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive}(A) = \overrightarrow{v}_{nageur/rive}(T_1). \tag{4}$$

La relation (1) devient ainsi, suite à (2), (3) et (4),

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive}(T_1) = \overrightarrow{v}_{Yves}(Y_1) + \overrightarrow{v}_{Xavier}(X_1),$$

qui est bien la relation en jeu dans la question 1. En termes de grandeur vectorielle, cette relation s'interprète donc maintenant comme une manière d'exprimer globalement — c'est-à-dire indépendamment du point d'application — la composition de mouvements rectilignes uniformes.

Et si on veut vraiment aller au fond des choses...

Une question en appelle une autre. Quelles sont en général les conditions physiques qui autorisent certaines vitesses à se libérer de leur point d'application ? Par exemple, quelle est la signification physique des égalités mathématiques

$$\overrightarrow{v}_{Yves}(Y_1) = \overrightarrow{v}_{nageur/courant}(T_1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_{Xavier}(X_1) = \overrightarrow{v}_{courant/rive}(T_1) \ ?$$

À nouveau, il vaut mieux décomposer le raisonnement en deux étapes. D'abord, une égalité telle que

$$\overrightarrow{v}_{Yves}(Y_1) = \overrightarrow{v}_{nageur/courant}(Y_1)$$

exprime que deux grandeurs vectorielles ont la même manifestation physique au même point. Mais l'égalité qui vient ensuite à l'esprit, à savoir

$$\overrightarrow{v}_{nageur/courant}(Y_1) = \overrightarrow{v}_{nageur/courant}(T_1),$$

se révèle avoir un statut assez nouveau ! En effet, le point d'application de cette vitesse se déplace le long d'une trajectoire rectiligne qui n'est pas du tout celle du mouvement sous-jacent, c'est-à-dire du nageur (cf. la figure 7), et ce n'est donc pas le caractère uniforme du mouvement du nageur qui peut rendre compte à lui seul de l'égalité en question. Comment interpréter néanmoins cette égalité en termes de mouvements rectilignes uniformes ?

Cette interprétation prend en compte l'hypothèse suivante : quel que soit l'endroit de la rivière où il se trouve, le nageur déploie pour se déplacer (en restant perpendiculaire au courant) une énergie qui est toujours la même[6]. De manière presque équivalente, s'il n'y a pas de courant, et si plusieurs nageurs de même force que notre triathlète partent en même temps de la rive en nageant droit devant eux, ils progresseront en restant toujours à même hauteur ; une telle circonstance s'observe d'ailleurs assez souvent dans les premiers instants d'une course de vitesse en natation. Et la conclusion est analogue si on imagine que ces nageurs partent de la ligne Y_1T_1.

[6] Cela sous-entend, par exemple, qu'il n'y a pas un endroit dans la rivière où la température de l'eau est anormalement froide, et où un engourdissement ou des crampes peuvent ralentir le nageur ; ce genre d'effet est évoqué dans la question 4 plus loin.

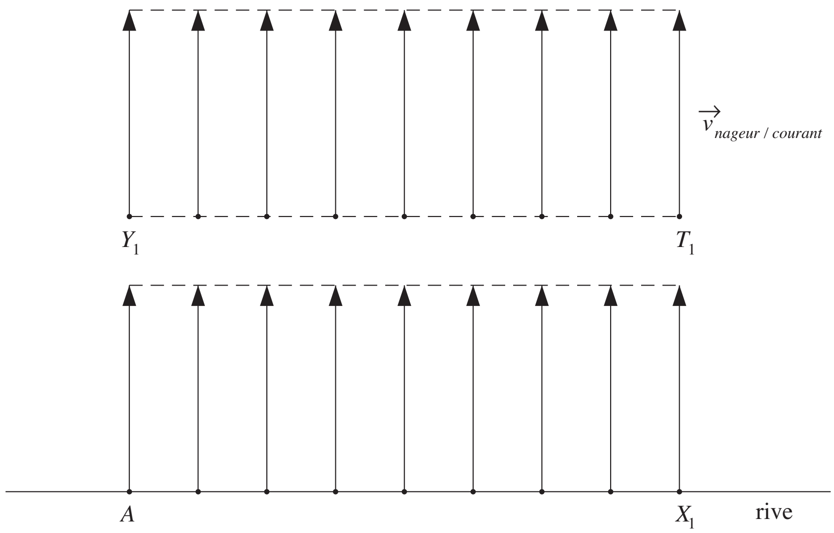

Fig. 8 : Le transport parallèle de la vitesse du nageur par rapport au courant.

C'est au sens de telles expériences de pensée que l'égalité

$$\overrightarrow{v}_{nageur/courant}(Y_1) = \overrightarrow{v}_{nageur/courant}(T_1)$$

prend alors une double signification physique, à savoir :

- il existe un mouvement rectiligne uniforme qui part du point Y_1 pour arriver en T_1,
- et le long de la trajectoire de ce mouvement, une famille continue de mouvements rectilignes uniformes permet de relier $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}(Y_1)$ à $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}(T_1)$.

En bref, deux mouvements rectilignes uniformes peuvent être considérés comme équivalents dès qu'il y a moyen de les « transporter par parallélisme » l'un sur l'autre de manière continue.

Une description analogue s'applique aux deux égalités

$$\overrightarrow{v}_{Xavier}(X_1) = \overrightarrow{v}_{courant/rive}(X_1) = \overrightarrow{v}_{courant/rive}(T_1),$$

et correspond d'ailleurs à l'idée d'un courant constant en tout point de la rivière, c'est-à-dire un courant dont la mesure de l'effet donne toujours le même résultat, quel que soit l'endroit de la rivière où cette mesure est réalisée.

1.3 Du rectangle au parallélogramme

Comment s'y prendre ?

Revenons-en à notre triathlète, et remarquons d'abord qu'il y a un moyen bien simple pour aider le nageur à se déplacer perpendiculairement à la direction du courant. Il suffit qu'il nage en restant face à un troisième larron – appelons-le Jacques – qui se déplace sur l'autre rive, en restant toujours à la même hauteur que Xavier (cf. la figure 9).

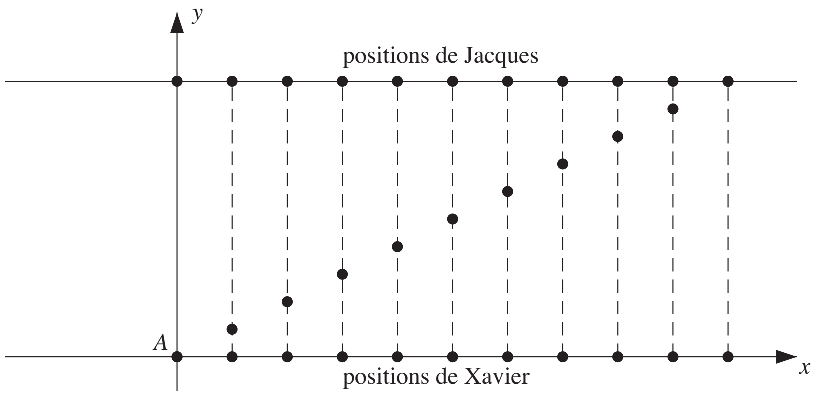

Fig. 9 : Le nageur se dirige en restant en face de Jacques.

> Question 3.
> Que se passe-t-il alors si Jacques, au lieu de partir du point Y, à l'extrémité du pont sur l'autre rive, entame son mouvement par exemple 120 mètres avant ce point ? Que faut-il changer dans la résolution de la question 1 ?
> Pour que cette nouvelle situation reste comparable à celle qui précède, on suppose encore que la vitesse de Jacques reste la même que celle de Xavier, que le nageur s'efforce de garder toujours Jacques en point de mire et qu'il essaie de maintenir sa vitesse (dans la direction qu'il vise) à 20 mètres par minute.

Il n'y a pas grand-chose à changer !

En fait, on peut reproduire textuellement tout le raisonnement développé dans la réponse à la question 1 ainsi que la formulation vectorielle qui en a été présentée dans la réponse à la question 2. Car ce qui importe, c'est qu'on combine encore deux mouvements rectilignes uniformes : le fait que leurs directions ne soient plus orthogonales ne change rien à l'affaire. Le mouvement résultant du nageur est donc encore rectiligne et uniforme : le parallélogramme remplace le rectangle (cf. la figure 10).

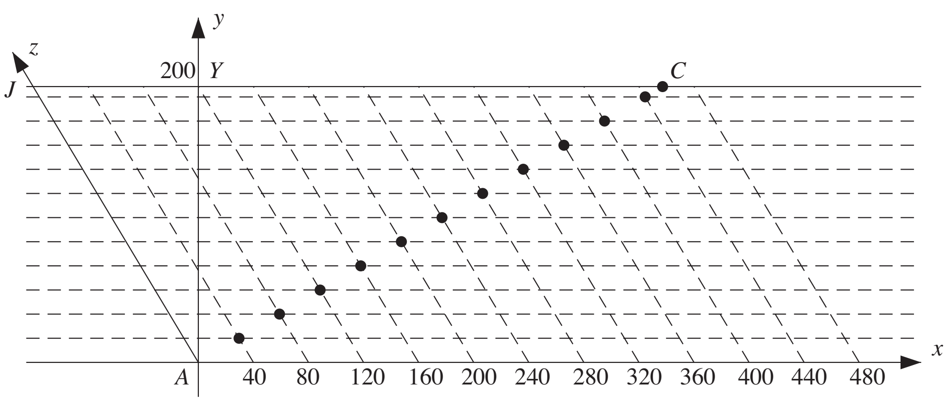

Fig. 10 : La trajectoire du nageur est déterminée par des parallélogrammes.

L'écriture vectorielle permet de manifester cette permanence du raisonnement. En effet,

$$\overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \overrightarrow{v}_{nageur/courant} + \overrightarrow{v}_{courant/rive},$$

pourvu qu'on identifie correctement la direction des différents vecteurs $\overrightarrow{v}_{nageur/rive}$, $\overrightarrow{v}_{nageur/courant}$ et $\overrightarrow{v}_{courant/rive}$, puisque c'est uniquement en terme de directions que les changements par rapport à la question 1 se produisent.

Le calcul de la vitesse du nageur

Le calcul de la vitesse réelle du nageur dans la nouvelle situation peut encore s'obtenir par analogie avec le cas « rectangulaire ». D'abord, dans un repère adapté (cf. la figure 10), les deux équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} x = 40t, \\ z = 20t, \end{cases}$$

où t est toujours la durée du déplacement compté en minutes. Ensuite, le calcul du temps nécessaire à la traversée résulte de l'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AJY (cf. la figure 11) : la relation

$$200^2 + 120^2 = (20t)^2$$

implique en effet : $t = \sqrt{136} = 11,66\ldots$ (en minutes).

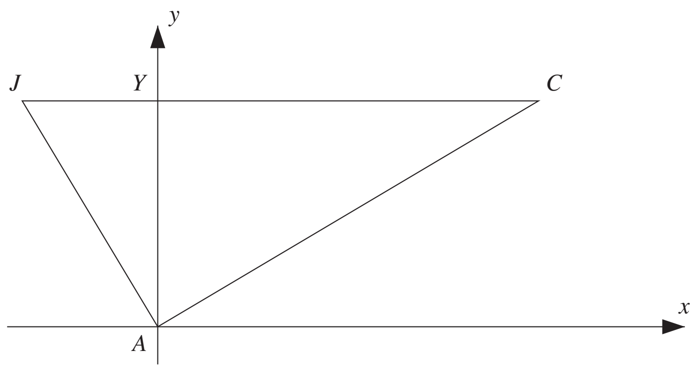

Fig. 11 : Le théorème de Pythagore permet d'évaluer la vitesse.

On en déduit $|YC| = 40 \cdot (11,66\ldots - 3) = 346,47\ldots$ (m). Le théorème de Pythagore, employé cette fois-ci dans le triangle AYC permet alors d'évaluer

$$|AC| = 400,05\ldots \text{ (m)}.$$

Et finalement, la vitesse du nageur vaut

$$\text{mesure de } \overrightarrow{v}_{nageur/rive} = \frac{400,05\ldots}{11,66\ldots} = 34,30\ldots \text{ (m/min)}.$$

Ce résultat n'a rien de bien étonnant : le nageur a mis plus de temps qu'auparavant pour parcourir une plus petite distance !

1.4 Synthèse : la notion de grandeur vectorielle

Beaucoup de grandeurs utilisées en physique proviennent d'une description géométrique des phénomènes qu'on souhaite étudier, cette description incluant presque toujours le mode de calcul de ces grandeurs. Les vitesses des mouvements rectilignes uniformes fournissent peut-être l'exemple le plus simple de grandeurs susceptibles d'une telle description géométrique. A ce titre, elles servent de modèles à ce qu'on appelle ici une *grandeur vectorielle*. On se limite dans la suite aux premières considérations relevant de la mécanique du point matériel.

La définition de grandeur vectorielle

Lorsqu'on étudie le mouvement d'un point matériel dans le plan ou dans l'espace, la première chose à délimiter est l'ensemble des positions que ce point peut occuper durant son mouvement. Il s'agit souvent d'une région plus ou moins bien définie du plan ou de l'espace, sans qu'on exige *a priori* de se restreindre ainsi à la seule trajectoire. De plus, la partie en question n'est pas nécessairement rectiligne ou plane : le mouvement pendulaire ou le mouvement à la surface de la terre en sont deux illustrations. Cette partie de l'espace dans laquelle se déroule le mouvement du point matériel s'appelle l'*espace de configuration* de ce point ; on est supposé assez naturellement y disposer d'un procédé de calcul de la distance séparant deux points quelconques.

Une grandeur physique d'une espèce donnée est qualifiée de *grandeur vectorielle* si elle possède les trois séries de propriétés suivantes.

- D'abord, des *propriétés de représentation géométrique* : au sens où il existe une représentation géométrique de cette grandeur qui possède
  - une origine ou point d'application, pris dans l'espace de configuration,
  - une direction,
  - un sens,
  - une intensité évaluée par rapport à une unité de mesure associée à l'espèce de grandeur en question (par exemple le mètre par seconde, s'il s'agit d'une vitesse).

  Une telle représentation géométrique est souvent figurée par un segment orienté dans un plan ou un espace, qui est de par sa nature même, distinct de l'espace de configuration. Ce segment est attaché à son point d'application, qui est le seul point commun à ces deux mondes différents : l'espace de configuration et l'espace de représentation de la grandeur en question. Des échelles appropriées (par exemple une échelle pour les longueurs et une échelle pour les vitesses) permettent de faire coexister dans un même dessin des grandeurs vectorielles de nature différente.
- Ensuite, des *propriétés de composition* : l'ensemble de ces représentations géométriques attachées à un même point obéit aux règles du calcul des vecteurs liés à ce point. Plus précisément, l'ensemble de toutes les grandeurs de cette espèce attachées à un même point

est muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien, la structure euclidienne reflétant le choix de l'unité de mesure de la grandeur en question.

- Enfin, des *propriétés de comparaison* : l'ensemble de toutes les grandeurs de cette espèce attachées à un même point peut être transporté par parallélisme en un autre point de l'espace de configuration, et être ainsi comparé à l'ensemble des grandeurs de même espèce attachées à ce dernier point.

  De manière un peu plus concrète, les *propriétés de composition* attribuées à ces grandeurs signifient que

  - lorsqu'une telle grandeur est multipliée par n'importe quel nombre (réel, et différent de 0), il en résulte une grandeur de même espèce, dont la représentation géométrique garde le même point d'application, conserve sa direction, ne modifie son sens que si le signe du nombre est négatif, et voit son intensité multipliée par la valeur absolue du nombre considéré (cf. la figure 12) ;

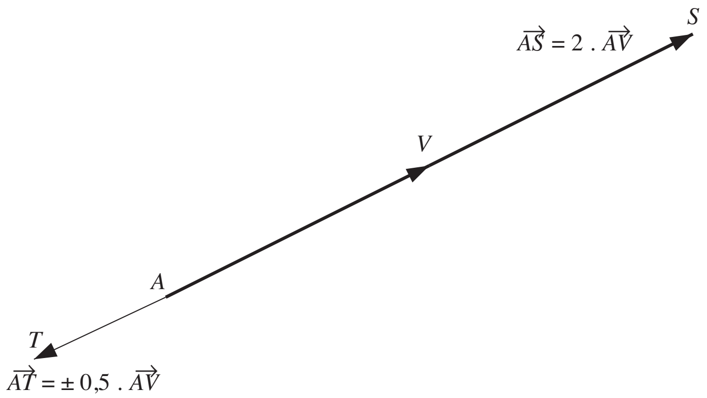

Fig. 12 : La représentation géométrique de multiples d'une grandeur vectorielle.

  - dès que deux d'entre elles ont leurs représentations géométriques qui possèdent le même point d'application, ces grandeurs peuvent être composées ou combinées pour redonner une grandeur de même espèce, et la représentation géométrique du résultat se réalise suivant la « règle du parallélogramme » (cf. la figure 13).

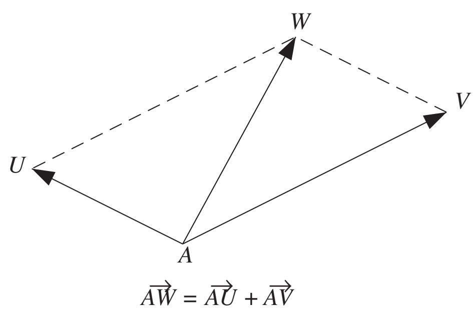

Fig. 13 : La composition de grandeurs vectorielles se représente grâce à la règle du parallélogramme.

Ces deux définitions suffisent pour établir que les représentations géométriques des grandeurs en question obéissent aux règles usuelles (associativité, commutativité, distributivités, ...) du calcul des vecteurs attachés, ou liés, à un point donné de l'espace de configuration.

La raison d'être des *propriétés de comparaison* peut paraître anodine ou détournée, mais elle est pourtant fondamentale ! Ces propriétés décrivent en termes géométriques un protocole de comparaison des grandeurs attachées à des points différents de l'espace de configuration, et qui n'est pas limité à la seule intensité de ces grandeurs. C'est en particulier ce protocole qui permet de définir l'égalité de grandeurs vectorielles de même espèce attachées à des points distincts.

Un exemple fondamental de grandeur vectorielle

Les questions 2 et 3 ont montré en effet que la vitesse d'un point animé d'un mouvement rectiligne uniforme se comporte en chaque point de l'espace de configuration comme un vecteur attaché à ce point. Lorsqu'on travaille en des points distincts de l'espace de configuration, ces mêmes questions ont mis en évidence un critère d'égalité. Pour mémoire, ce critère peut s'énoncer comme suit :

> si $\overrightarrow{v}(P)$ et $\overrightarrow{w}(Q)$ sont des vitesses attachées respectivement aux points P et Q, alors $\overrightarrow{v}(P) = \overrightarrow{w}(Q)$ si et seulement si, en notant P' et Q' les positions respectivement atteintes par P et Q après les mêmes durées de parcours : le quadrilatère $PP'Q'Q$ (situé entièrement dans l'espace de configuration) est un parallélogramme.

Plus concrètement peut-être, deux telles vitesses sont égales en tant que grandeurs vectorielles si et seulement si les trajectoires des points mobiles correspondants sont parallèles et parcourues dans le même sens, et si les intensités des vitesses correspondantes sont égales. C'est ce qui semble traduire au mieux l'idée intuitive d'égalité de ces grandeurs lorsque l'espace de configuration est l'espace usuel[7].

D'autres exemples de grandeurs vectorielles

À toute position d'un point (mobile) à un instant donné dans un repère fixé, on peut associer le vecteur-position de ce point, dont l'origine est l'origine du repère et l'extrémité la position du point mobile à l'instant considéré. Ainsi, dans le cas de la situation étudiée dans la question 1, si on note $N(t)$ la position du nageur à l'instant t, on peut écrire les équations

[7] Quand on commence à étudier les premiers rudiments de la mécanique dans l'enseignement secondaire, on se place presque toujours dans l'espace de configuration le plus commode possible, qui est le plan – ou l'espace – affine euclidien. On y dispose d'un « parallélisme absolu », qui permet souvent de considérer comme allant de soi les propriétés de comparaison des grandeurs vectorielles.

Il faut néanmoins essayer de garder présent à l'esprit que la représentation sur une même figure des positions et des vitesses n'est pas naturelle, au sens où il s'agit en effet de grandeurs de nature différente. Les sections suivantes permettront de préciser cette remarque. Par exemple, les propriétés du mouvement *circulaire* uniforme montrent que, dans le cas d'un mouvement à la surface de la terre, la vitesse est toujours située *dans le plan tangent* à la sphère terrestre, et n'a donc *que* son origine en commun avec celle-ci !

du mouvement

$$\begin{cases} x = 40t, \\ y = 20t, \end{cases}$$

comme une égalité entre grandeurs vectorielles

$$\overrightarrow{AN}(t) = t \cdot \overrightarrow{AN},$$

où $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$ est le vecteur-position du nageur après une minute d'effort. Un déplacement – ou changement de position – est alors une différence (vectorielle) entre deux vecteurs-position, etc ; on retrouve ainsi, à quelques nuances de langage près, la géométrie du plan ou de l'espace affine.

Les questions 7 et 15 ci-après construiront la vitesse (instantanée) comme grandeur vectorielle dans le cas de deux types de mouvement curviligne : le mouvement du projectile (lancé horizontalement), et le mouvement circulaire uniforme.

Les forces constituent un autre exemple de grandeur vectorielle (voir le chapitre 12).

La quantité de mouvement, le champ électrique, le champ magnétique, ... constituent encore d'autres exemples de grandeurs vectorielles qu'on rencontre en physique.

Par contre, la température, la charge électrique, ... sont des exemples de grandeurs physiques qui *ne* sont *pas* vectorielles, mais scalaires.

2 Comment immobiliser le temps ?

De quoi s'agit-il ?

Décrire quantitativement le mouvement d'un projectile à partir des caractéristiques de deux mouvements rectilignes bien choisis. Montrer pourquoi la vitesse instantanée *doit* être une grandeur vectorielle.

Enjeux

La caractérisation vectorielle de la vitesse instantanée.

De quoi a-t-on besoin ?

Un montage appelé « le jet d'eau articulé » décrit dans les figures 15 et 16 ci-dessous, ainsi que dans le texte qui accompagne ces figures.

Deux photographies stroboscopiques, ou chronophotographies, (cf. les figures 19 et 22 dans la suite, en annexe aux pages 496 et 497).

Un tableur (EXCEL, par exemple).

Prérequis

Les notions et lois fondamentales concernant la chute libre[8], plus précisément :

- l'accélération de la pesanteur g est constante et vaut $9,81$ m/s^2,
- la vitesse est une fonction linéaire du temps : $v = gt$,
- et l'espace parcouru est décrit par la formule $e = \frac{gt^2}{2}$.

[8] Il serait possible de ne pas en faire des prérequis, et de les découvrir ici : les photographies étudiées dans la suite permettant en effet d'établir ces lois. Mais cela nous éloignerait de notre but...

2.1 Le nageur se fatigue.

Comment s'y prendre ?

Tout ce qui a précédé supposait que notre triathlète nageait avec une vigueur anormalement constante.

> Question 4.
> Comment peut-on se rendre compte que le nageur se fatigue ?

Ce qui ne change pas, et ce qui change

Comme la vitesse du courant est exactement celle de Xavier, celui-ci n'a aucun moyen de se rendre compte que le nageur est en train de se fatiguer.

Par contre, Yves, qui n'est concerné que par la partie transversale du mouvement du nageur, en perçoit toutes les variations. Si le nageur progresse avec moins de vigueur, Yves avancera moins vite, et s'il doit s'immobiliser pour rester à hauteur du nageur, c'est que celui-ci, fatigué, s'est laissé emporter par le courant.

Une simulation vaut mieux qu'un long discours...

En voici une, mais beaucoup d'autres sont envisageables.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	(en minutes)
$x(t)$	0	80	160	240	320	400	480	560	640	720	800	(en mètres)
$y(t)$	0	38	72	102	128	150	168	182	192	198	200	(en mètres)

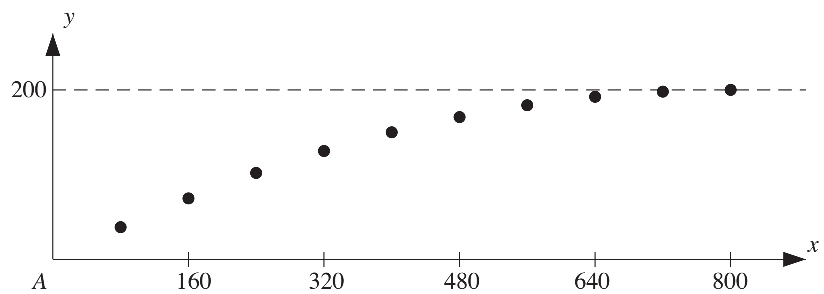

Fig. 14 : L'effet de la fatigue.

Au vu de tout ce qui a été mis en évidence précédemment, une question se pose presque tout de suite : comment parler de la vitesse du nageur dans une telle situation ? Son déplacement n'est manifestement plus rectiligne, ni uniforme[9] !

2.2 Le jet d'eau articulé

Comment s'y prendre ?

Lorsqu'on arrose une pelouse avec un tuyau d'arrosage, quelle est la forme du jet d'eau ?

[9] Sauf bien sûr dans le cas où le nageur se laisse emporter par le courant. Mais un triathlète qui se respecte ne se laisse jamais entraîner de la sorte...

Si on arrose à la verticale, le jet d'eau fournit une description de l'arroseur… arrosé. Si on n'arrose pas à la verticale mais, par exemple, suivant un angle de 30° avec l'horizontale, le jet d'eau emprunte une trajectoire qui n'est pas rectiligne, mais bien incurvée vers le sol.

En effet, aussi puissant que soit le jet d'eau et même si la direction initiale du jet est bien rectiligne, l'eau retombe de toute façon sur la pelouse : la trajectoire ne peut donc pas être une droite. Par ailleurs, on observe que la portée de l'arrosage varie avec l'angle initial du jet, et la pression d'eau à la sortie.

Voici un procédé expérimental qui permet de mieux observer et de commencer à décrire la forme du jet d'eau. On se procure une longue latte en bois, bien rigide, d'environ 2 m de long. L'extrémité du tuyau d'arrosage est fixée sur 50 cm à une des faces de cette latte ; il peut se révéler utile d'insérer entre la latte et le tuyau une fine tranche d'isomo (ou polystyrène expansé) afin d'empêcher que le jet d'eau ne mouille trop la latte. À partir de la sortie du tuyau, on fixe des petits clous dans l'autre face de la latte, à des intervalles réguliers (de 30 cm par exemple). On y suspend des lattes, marquées de 10 cm en 10 cm, de telle sorte qu'elles puissent pivoter autour de leur point d'attache (cf. la figure 15).

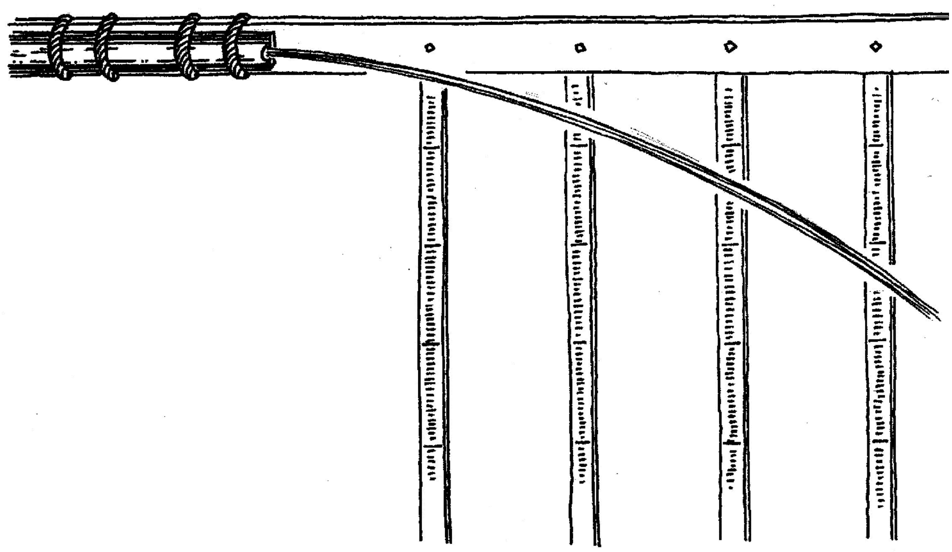

Fig. 15 : Le jet d'eau articulé.

On peut ainsi reproduire (à l'échelle) la forme du jet d'eau avec une plus ou moins bonne précision. On trouve dans certains laboratoires de physique de l'enseignement secondaire des appareillages de ce type, produits par des firmes spécialisées (un exemple est visible sur la figure 16 ci-dessous), et qui permettent de réaliser des mesures de meilleure qualité.

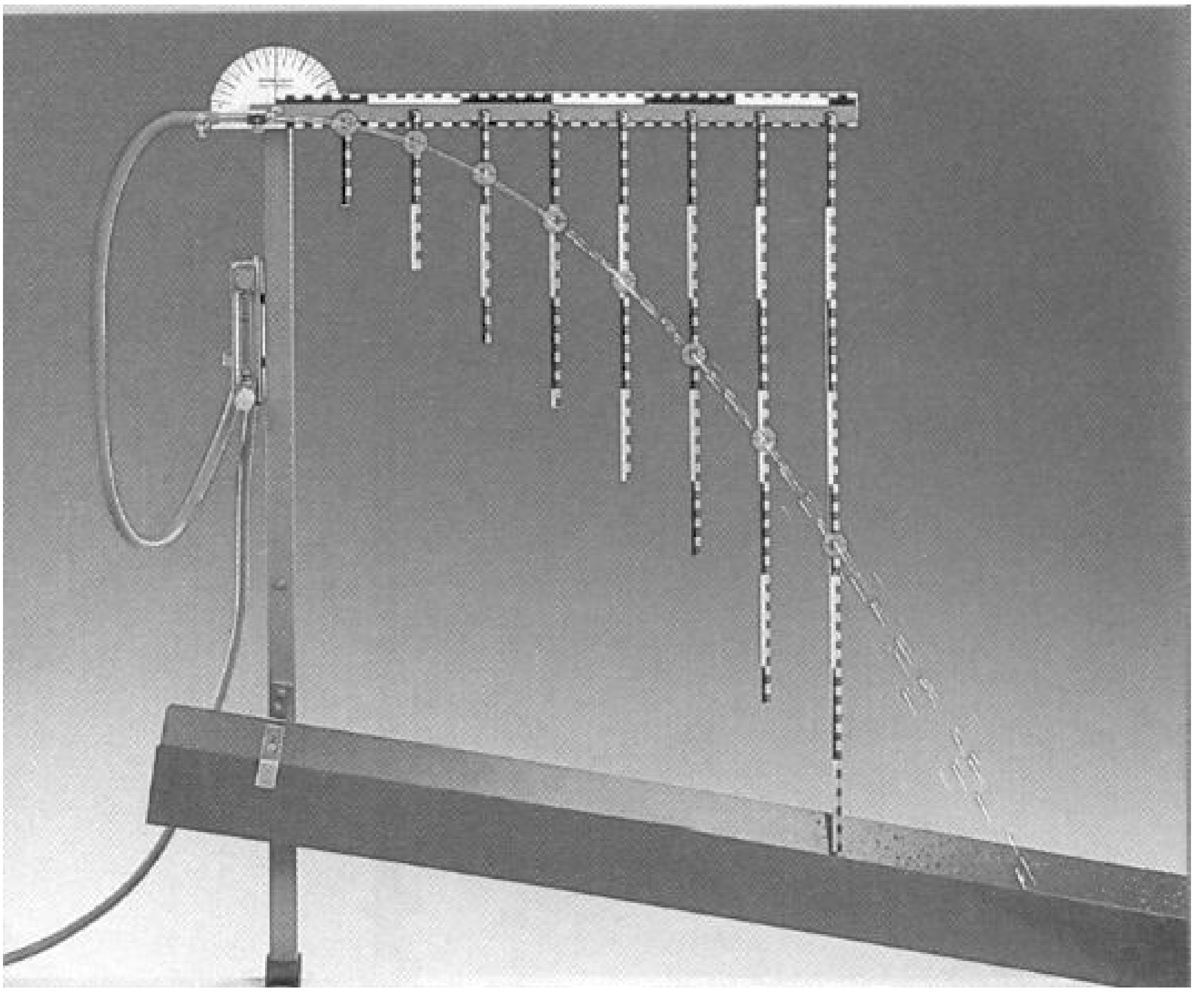

Fig. 16 : Un jet d'eau mieux articulé

> Question 5.
> Qu'observe-t-on lorsqu'on redresse cet appareillage (le tuyau et le système formé du bâton et des lattes graduées, solidairement), en visant à 30° avec l'horizontale par exemple ?
> Quelle(s) conclusion(s) peut-on en tirer ?

Une observation étonnante, et ce qui s'en déduit

Dès qu'on redresse le jet d'eau, on observe que les écarts verticaux de la trajectoire par rapport à la direction initiale du jet ne changent pas ou, plus simplement, que redresser le jet d'eau n'a aucune influence sur sa déviation.

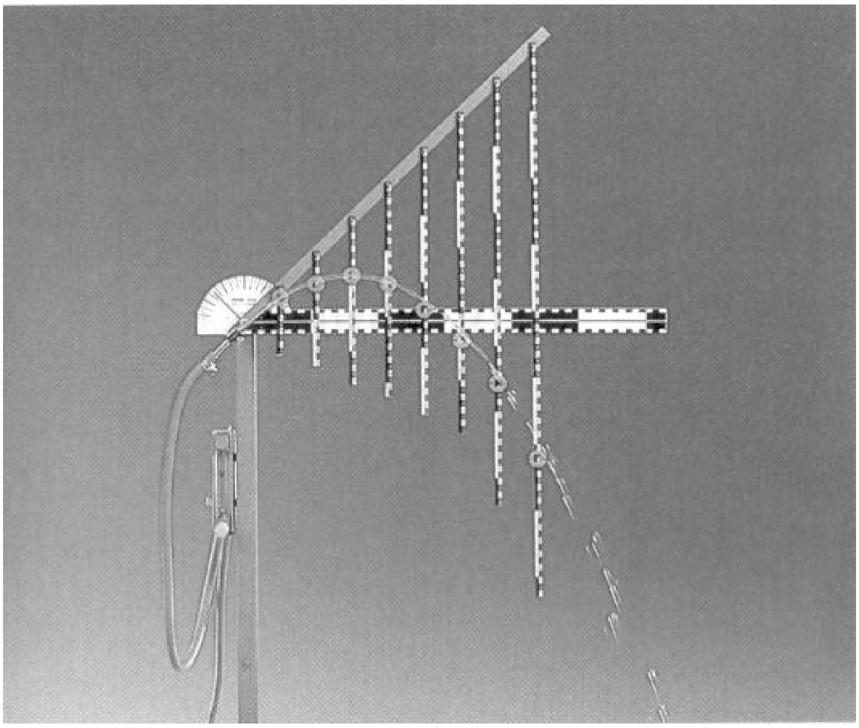

Fig. 17 : La déviation verticale du jet d'eau ne change pas.

En termes plus géométriques, et avec la représentation et les notations de la figure 18 : tant que $|AM| = |AM'|$, on a $|MT| = |M'T'|$.

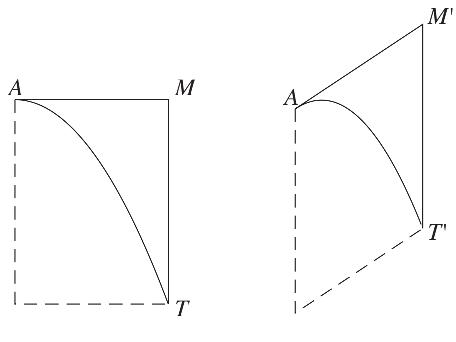

Fig. 18 : Les rectangles deviennent des parallélogrammes.

Il s'ensuit que comprendre la trajectoire du jet d'eau lorsque sa direction initiale est horizontale permet ensuite de comprendre la trajectoire lorsque la direction initiale est quelconque.

Par ailleurs, comme la direction initiale du jet d'eau semble n'avoir aucune influence sur la déviation verticale, on peut suspecter que la cause du caractère curviligne de la trajectoire est « quelque chose » dont l'effet est relativement universel. Malheureusement, si on peut conjecturer que la pesanteur est ce « quelque chose », l'expérience du jet d'eau articulé ne permet pas de s'en convaincre...