

### 2.3 La conjugaison de deux mouvements

*Comment s'y prendre ?*

Une manière efficace d'étudier des mouvements (relativement) complexes consiste – pourvu que le mouvement s'y prête! – à en tirer une photographie en pose dans une chambre noire éclairée uniquement par un stroboscope. On appelle cela une photographie stroboscopique ou une chronophotographie; pour disposer d'un peu plus de détails techniques à ce sujet, on peut se reporter à A. Meessen [1984] : compléments, p. 18 à 22. Des résultats analogues peuvent aussi s'obtenir à l'aide d'un appareil photographique numérique (à partir d'une fréquence de prises de vues de 10 images/seconde) ou d'une caméra vidéo, utilisée en plan fixe. Dans ce dernier cas, il suffit lors de la reproduction sur magnéto, de reporter les positions successives du mobile sur une feuille transparente.

La figure 19 est une chronophotographie du mouvement de deux balles :

- l'une, commence à tomber au point  $A$  (cf. la figure 20), verticalement, suivant un mouvement de chute libre, exactement à l'instant où
- l'autre, lancée initialement sur un plan horizontal, quitte ce plan à partir de ce même point  $A$ .

Un système de déclenchement simultané (visible dans le coin supérieur gauche de la figure) permet de synchroniser le départ des deux balles au point  $A$ . La fréquence des éclairs est de  $1/30$  s, et la distance entre deux horizontales égale 15,24 cm (extrait de Physical Science Study Committee [1970]).

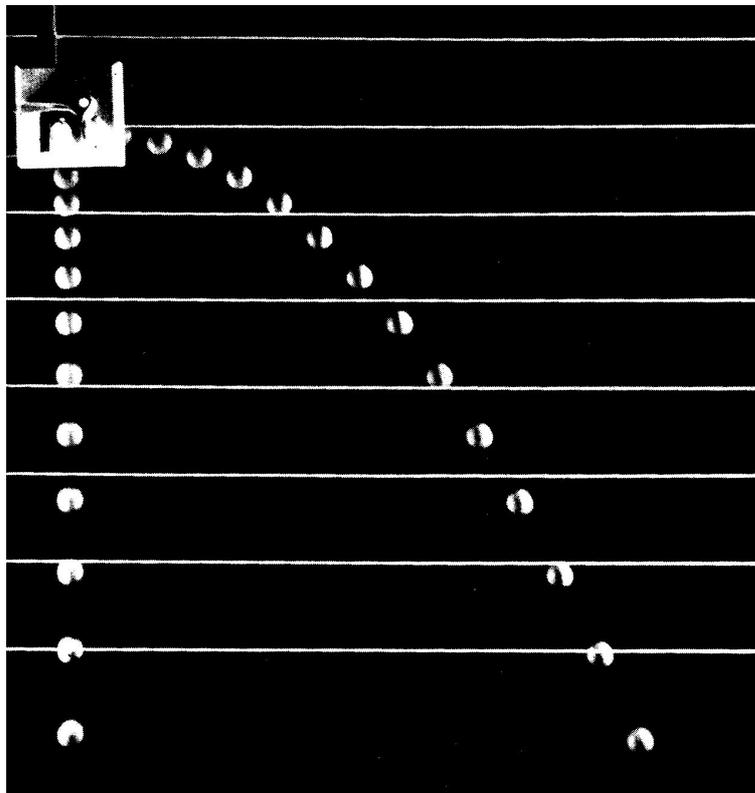


Fig. 19 : Une chronophotographie du mouvement de deux balles.

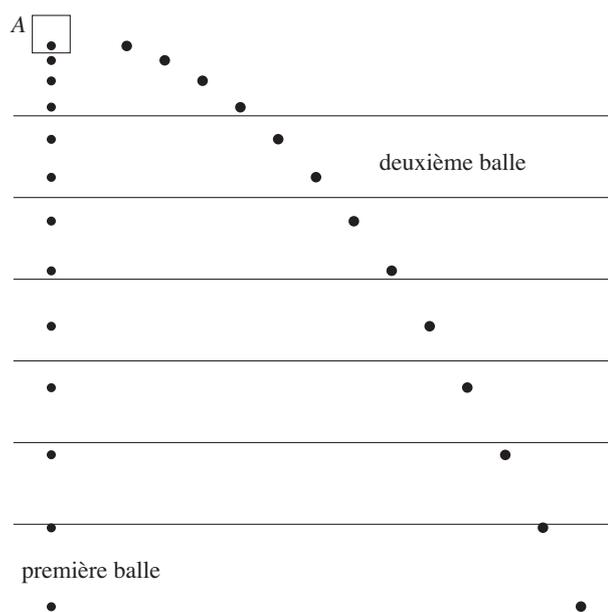


Fig. 20 : Le point A et le mouvement des deux balles.

Quelle relation y a-t-il entre le jet d'eau – orienté horizontalement – et une chronophotographie comme celle ci-dessus ? Le jet d'eau est évidemment un ensemble de gouttes, et on peut faire l'hypothèse (très raisonnable) que la forme du jet d'eau est celle de la trajectoire de n'importe laquelle de ses gouttes. En d'autres termes, le jet d'eau fige l'histoire (physique) du mouvement de n'importe quelle goutte, il immobilise toute la trajectoire en continu d'une goutte. On pourrait parler du « modèle corpusculaire » du jet d'eau. La chronophotographie de la figure 19 est donc un outil idéal pour étudier la forme du jet d'eau, puisqu'elle fige, elle aussi, l'écoulement du temps, et nous dévoile ainsi beaucoup de propriétés des mouvements qui, sans cela, échapperaient à l'œil.

Question 6.

Quelles sont les équations du mouvement de chacune de ces deux balles ?  
Quelles sont les équations de leur trajectoire ?

### *La première balle est animée d'un mouvement de chute libre*

La première balle tombe suivant une trajectoire verticale qui ne peut être qu'un mouvement de chute libre.

Si on veut s'en convaincre, il suffit de comparer les espaces parcourus sur la photographie avec ceux prédits par la loi de chute libre. Avant cela, il faut fixer un repère commun<sup>10</sup> pour le mouvement des deux balles (il est tracé sur la figure 21).

<sup>10</sup> ... et observer en fait un léger décalage entre la position initiale de la première balle et celle de la deuxième balle. Cela ne porte pas à conséquence pour la très grande majorité des calculs numériques qui suivent.

La loi de la chute libre s'écrit alors  $y = -\frac{gt^2}{2}$ , où  $g = 9,81\text{m/s}^2$ ,  $y$  est mesuré en mètres et le temps  $t$  est compté en secondes à partir de l'instant (initial) où la première balle passe par le point  $A$ .

La comparaison s'effectue simplement à partir d'un tableau reprenant les positions en fonction du temps écoulé.

$t$	(en multiples de 1/30 s)	1	2	3	4	5	6	...
$-y$	(observé, en mètres)	?	0,03	0,05	0,09	0,14	0,19	...
$-y$	(calculé, en mètres)	0,005	0,02	0,05	0,09	0,14	0,20	...

...	7	8	9	10	11	12	13	14
...	0,27	0,34	0,44	0,54	0,65	0,79	0,92	1,07
...	0,27	0,35	0,44	0,56	0,66	0,78	0,92	1,07

Les résultats concernant les positions calculées sont arrondis avec la même borne d'erreur absolue que celle qu'il semblait raisonnable d'attribuer à la chronophotographie, c'est-à-dire 1 cm.

**La projection verticale du mouvement de la deuxième balle coïncide avec le mouvement de la première balle.**

C'est la conclusion la plus manifeste de cette chronophotographie! Elle implique immédiatement que la deuxième équation du mouvement de la deuxième balle s'écrit (aussi)  $y = -\frac{gt^2}{2}$ .

**La projection horizontale du mouvement de la deuxième balle est un mouvement (rectiligne) uniforme.**

La construction de cette projection n'offre aucune difficulté (cf. la figure 21).

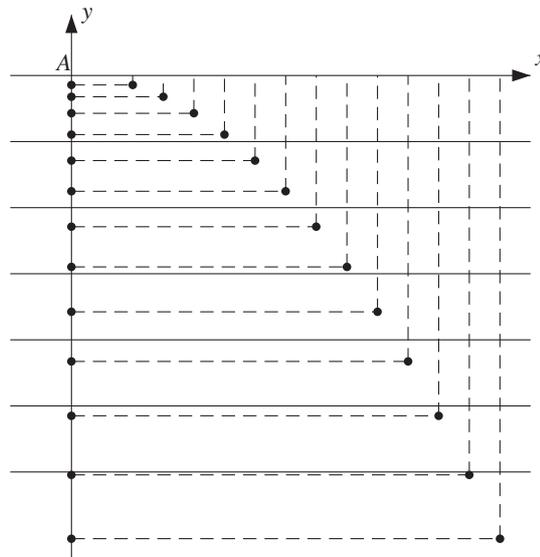


Fig. 21 : Les projections verticales et horizontales des positions de la deuxième balle.

Un tableau des positions observées met bien en évidence le caractère uniforme du mouvement.

$t$	(en multiples de $1/30$ s)	1	2	3	4	5	6	...
$x$	(observé, en mètres)	?	0,15	0,22	0,29	0,36	0,43	...

...	7	8	9	10	11	12	13	14
...	0,50	0,56	0,63	0,70	0,77	0,84	0,91	0,97

La vitesse de ce mouvement (rectiligne) uniforme vaut donc (approximativement<sup>11</sup>)

$$\frac{0,07}{\frac{1}{30}} = 2,1(\text{m/s}).$$

Dès lors, la première équation du mouvement s'écrit  $x = 2,1t$ .

**La trajectoire de la deuxième balle est parabolique.**

On vient d'obtenir les deux équations du mouvement de la deuxième balle :

$$\begin{cases} x = 2,1t, \\ y = -\frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

En isolant le temps  $t$  dans la première équation, on obtient  $t = \frac{x}{2,1}$ , d'où

$$y = -\frac{g}{2} \left( \frac{x}{2,1} \right)^2 = -1,1122 \dots x^2,$$

puisque  $g = 9,81\text{m/s}^2$ . C'est l'équation d'une parabole passant par le point  $A$ .

## 2.4 La vitesse de la deuxième balle

*Comment s'y prendre ?*

Ainsi, et comme dans le cas de la trajectoire du nageur, la trajectoire de la balle n'est pas trop difficile à déterminer. Mais dans le cas du nageur, c'est surtout la *vitesse* et ses caractéristiques qui ont été l'objet de la réflexion.

Comme pour la question 2, le caractère plus théorique des deux questions suivantes explique que leur résolution ne soit pas nécessairement laissée à la seule initiative des élèves, et l'enseignant veillera encore à ce que les étapes essentielles des raisonnements soient bien rencontrées par tous les élèves.

Question 7.

Comment définir la vitesse de la balle qui suit la trajectoire parabolique de la figure 19, à chaque instant où l'éclair du stroboscope « l'immobilise » ?

<sup>11</sup> Les erreurs résultent du défaut de synchronisation entre les départs des deux balles, déjà relevé plus haut.

*Il faut une nouvelle définition de vitesse...*

Jusqu'ici la notion de vitesse a toujours été associée à un mouvement rectiligne, même si on a déjà pu relever des différences significatives, suivant qu'on parlait de la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme, ou des vitesses moyenne ou instantanée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Or, dans le cas du mouvement parabolique, la trajectoire n'a plus rien de rectiligne ! Alors, que faire ?

Evidemment, l'intuition nous souffle qu'il y a encore un sens à parler de vitesse, même pour un mouvement qui n'est pas rectiligne. Il s'agit donc de passer d'une sensation de vitesse pour un mouvement curviligne à une *définition* de vitesse.

Or, dans un mouvement curviligne, l'intuition de vitesse peut assez naturellement être associée à l'idée de direction, sous une forme très visuelle et intuitive elle aussi. Par exemple, la chronophotographie d'une balle qui rebondit (cf. la figure 22 ci-après, extraite de Physical Science Study Committee [1970]) suggère qu'à chaque rebond, la vitesse change de direction.

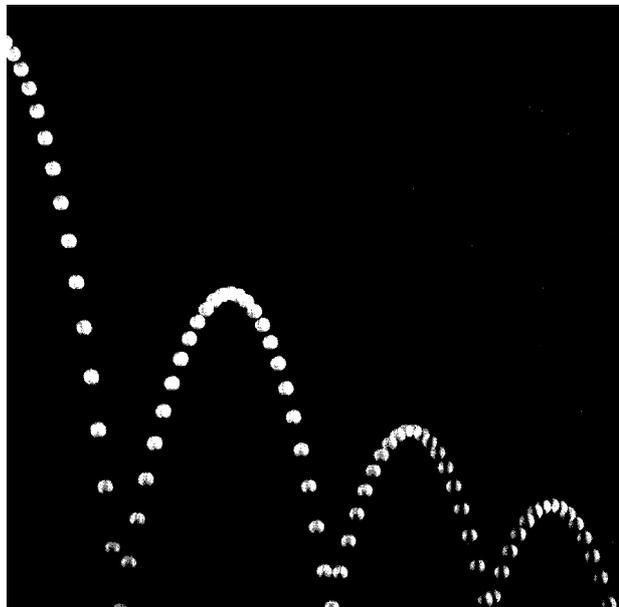


Fig. 22 : Quelle est la direction de la vitesse au rebond ?

Nous savons que la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme est une grandeur vectorielle, et que ce statut de grandeur vectorielle est indissociable<sup>12</sup> de l'idée de direction. Une première hypothèse de travail consiste donc à vouloir définir la vitesse pour un mouvement curviligne comme une grandeur vectorielle.

Dès lors, on doit commencer par se choisir un point d'application de cette grandeur à définir. Pour fixer les idées, ce sera le point  $P$  correspondant ici à la position de la balle à l'instant d'observation  $t = \frac{5}{30}$  s.

<sup>12</sup> Il s'agit de grandeurs physiques ! Les vecteurs du mathématicien sont moins contraignants.

***Il y beaucoup de vitesses possibles pour le point P.***

Une chronophotographie ne fige que certaines positions de la balle. Une première approximation de la réalité consiste alors à ne retenir que ces positions-là, à réduire donc le mouvement réel à la succession de mouvements (aussi simples que possible) qui font passer d'une position à la suivante. C'est ce qu'on appelle « discrétiser le mouvement ».

Mais le mouvement le plus simple possible qui fait passer du point  $P$  au point suivant  $P_1$  est le mouvement rectiligne uniforme correspondant. À ce mouvement est associée une vitesse qui est une grandeur vectorielle ; on la note  $\vec{v}_{r.u.}(P)$ , ou  $\vec{v}_{r.u.}$  si la mention du point  $P$  n'est pas essentielle. La figure 23 représente la direction de cette vitesse.

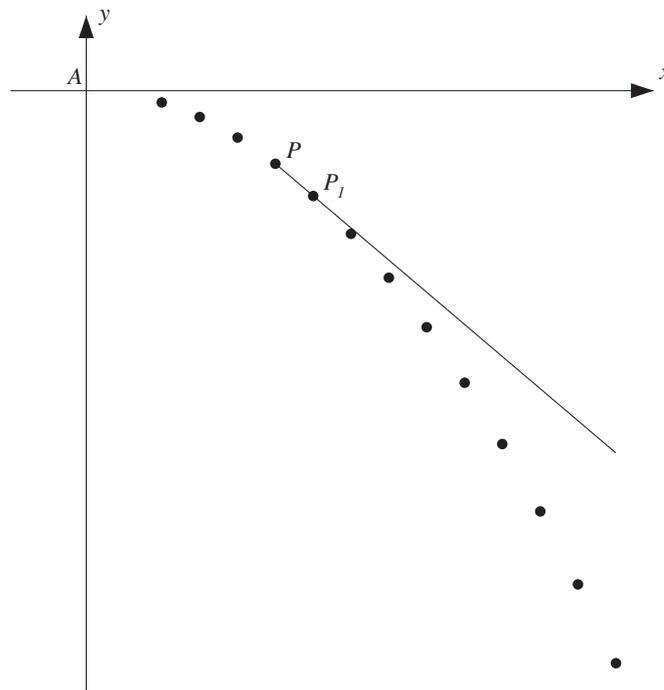


Fig. 23 : La direction de la vitesse du mouvement discrétisé.

Et comme la chronophotographie qui nous occupe a été réalisée avec une fréquence d'éclair de  $\frac{1}{30}$  s, on peut aussi calculer la mesure de cette vitesse (notée alors  $v_{r.u.}$ , sans la flèche) grâce aux positions déjà relevées,

$t$	(en multiples de $1/30$ s)	...	5	6	...
$x$	(observé, en mètres)	...	0,36	0,43	...
$-y$	(calculé, en mètres)	...	0,14	0,19	...

et à l'éternel théorème de Pythagore (cf. la figure 24)

$$v_{r.u.} = \frac{\sqrt{(0,05)^2 + (0,07)^2}}{\frac{1}{30}} = 2,58 \dots \text{ (m/s)}.$$

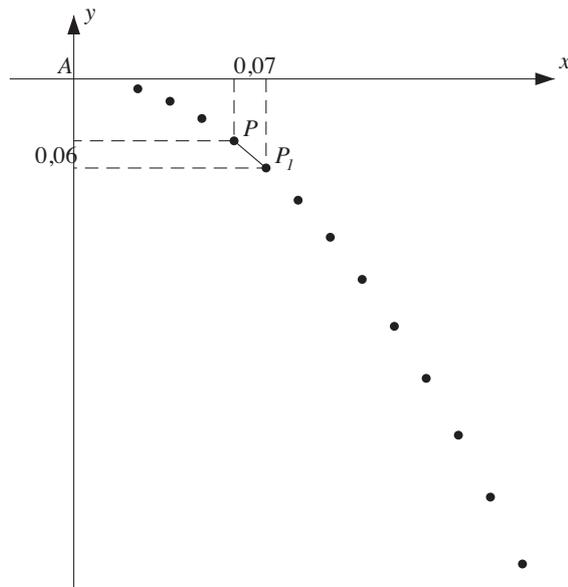


Fig. 24 : La mesure de la vitesse du mouvement discrétisé.

Mais cette vitesse est entièrement tributaire du choix de la fréquence d'éclairs du stroboscope. Par exemple, si la discrétisation est réalisée à la fréquence de  $\frac{1}{10}$  s, la direction de la vitesse au point  $P$  est différente, comme le montre la figure 25.

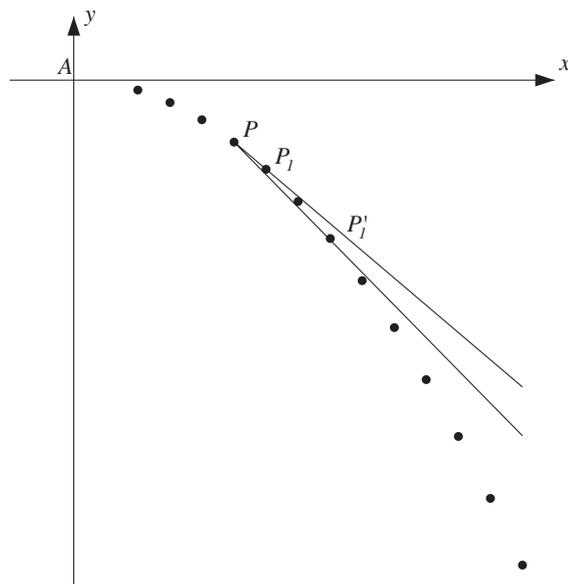


Fig. 25 : La direction de la vitesse dépend de la discrétisation choisie.

La mesure de cette vitesse est également différente. Les données correspondantes

$t$	(en multiples de $1/30$ s)	...	5	8	...
$x$	(observé, en mètres)	...	0,36	0,56	...
$-y$	(calculé, en mètres)	...	0,14	0,34	...

permettent d'obtenir

$$v_{r.u.} = \frac{\sqrt{(0,2)^2 + (0,2)^2}}{\frac{1}{10}} = 2,82 \dots \text{ (m/s)}.$$

Résumons-nous ! En discrétisant le mouvement, il est possible – au départ d'un point  $P$  fixé – de l'approximer (localement) par un mouvement rectiligne uniforme, et donc d'y associer une vitesse en tant que grandeur vectorielle. Le problème est qu'il y a beaucoup de discrétisations possibles, donc beaucoup de mouvements rectilignes uniformes possibles, et donc beaucoup de vitesses possibles pour le même point  $P$ . Et qu'à part ce point d'application  $P$  commun, toutes ces vitesses ont des directions et des mesures différentes.

### Une définition idéale

La fréquence des éclairs du stroboscope ne permet pas d'aller voir le mouvement de la balle d'assez près, c'est-à-dire sans discontinuité entre les positions successives. Mais heureusement, les élèves en savent maintenant assez pour passer de l'expérimentation à la simulation !

D'abord, ils peuvent facilement reproduire à l'aide du tableur les positions de la balle au  $\frac{1}{30}$  s, en accord avec les résultats de la chronophotographie, et les équations du mouvement qui en ont été déduites.

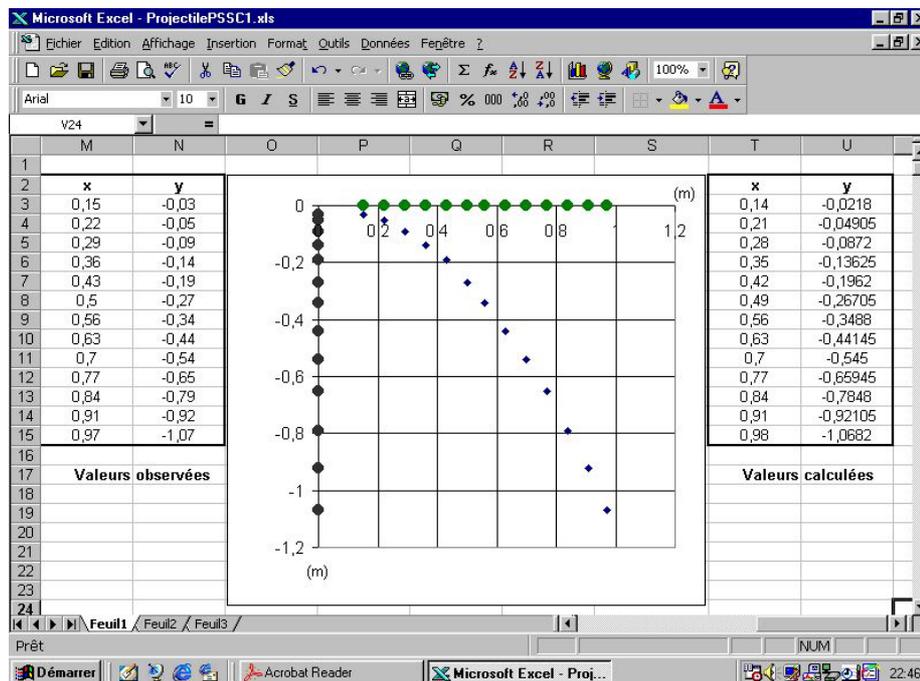


Fig. 26 : Les positions des deux balles (et de la projection horizontale), au trentième de secondes.

À partir des équations du mouvement, et en travaillant sur des intervalles de temps suffisamment brefs, ils peuvent ensuite faire apparaître la trajectoire parabolique de la deuxième balle, apparemment sans discontinuité.

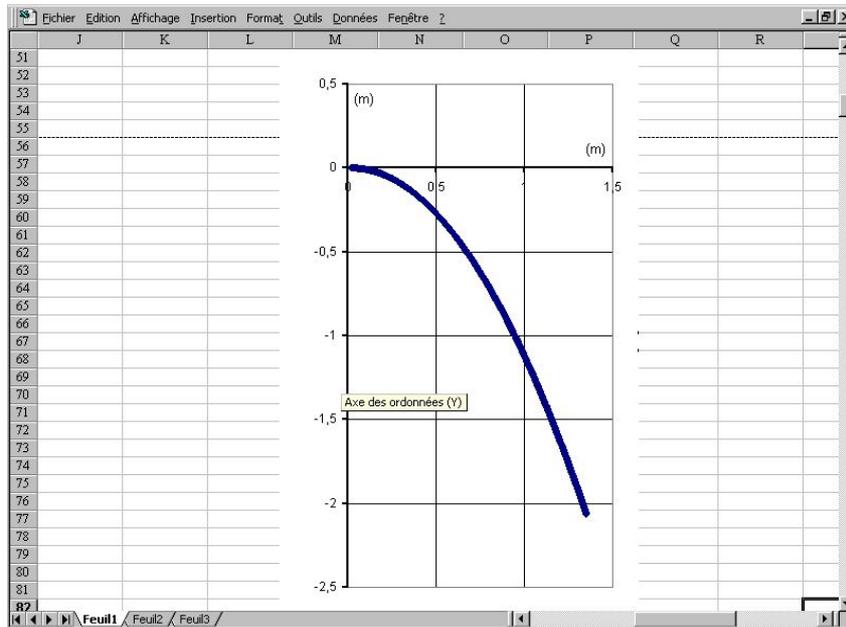


Fig. 27 : La trajectoire de la deuxième balle, au millième de secondes.

Plus l'intervalle de temps est petit (c'est-à-dire plus la fréquence des éclairs du stroboscope est grande), et plus la trajectoire discrétisée se révélera proche de la trajectoire réelle. Mais cette trajectoire quasi continue n'est pas pour autant la trajectoire complète. Pour s'en rendre compte, il suffit de « zoomer », par exemple autour du point  $P$  atteint après  $\frac{5}{30}$  s ; on obtient alors la figure suivante.

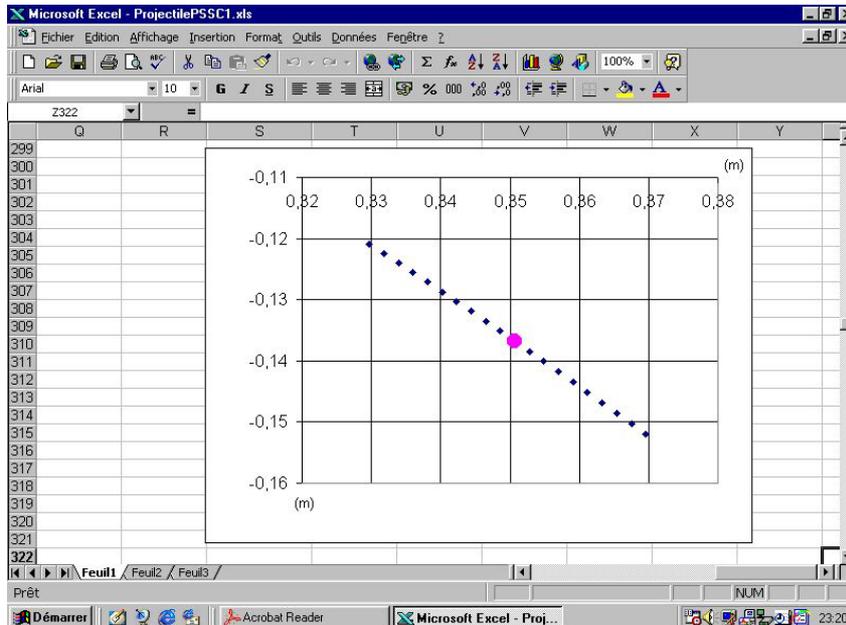


Fig. 28 : La trajectoire de la balle au voisinage du point  $P$ , au millième de secondes.

Cette image est tout à fait surprenante : la trajectoire de la balle se révèle extrêmement proche de celle d'un mouvement rectiligne uniforme ! Passé l'effet de surprise, cette image donne lieu à quelques observations et conséquences importantes.

D'abord, elle confirme encore un peu plus la représentation de la trajectoire parabolique comme une succession suffisamment resserrée de trajectoires de mouvements rectilignes uniformes. Visuellement, la direction et la grandeur de la vitesse en des points successifs ne paraissent même pas être différentes. Mais bien sûr, la trajectoire globale nous rappelle que cette apparence est trompeuse : il n'y a rien de rectiligne, ni d'uniforme dans ce mouvement.

D'autre part, deux positions successives sont tellement resserrées qu'il n'y a rien de bien audacieux à supposer qu'entre ces deux positions le mouvement est quasiment rectiligne et uniforme. On ne voit d'ailleurs pas très bien ce qu'on pourrait proposer d'autre : c'est en effet le seul *modèle* de mouvement dont on dispose.

De plus, le tableur permet de calculer l'intensité de la vitesse en question, à des instants successifs, avec une bien meilleure précision qu'auparavant. Ainsi, au départ de la simulation au millième de secondes, on obtient

$t$ (en s)	$x = 2,1t$ (en m)	$y = -\frac{gt^2}{2}$ (en m)	$v_{r.u.x}(t)$ (en m/s)	$v_{r.u.y}(t)$ (en m/s)
0,165	0,3465	-0,13353863	2,1	-1,623555
0,166	0,3486	-0,13516218	2,1	-1,633365
0,167	0,3507	-0,13679555	2,1	-1,643175
0,168	0,3528	-0,13843872	...	...

où

$$v_{r.u.x}(t) = \frac{x(t + 0,001) - x(t)}{0,001},$$

et

$$v_{r.u.y}(t) = \frac{y(t + 0,001) - y(t)}{0,001}.$$

On en tire que

$$v_{r.u.}(0.166) = \sqrt{(2,1)^2 + (-1,633365)^2} = 2,6604 \dots \text{ m/s},$$

$$v_{r.u.}(0.167) = \sqrt{(2,1)^2 + (-1,643175)^2} = 2,6664 \dots \text{ m/s}.$$

De manière générale, ce mode d'approche permet donc d'assimiler la trajectoire parabolique à une succession suffisamment resserrée de trajectoires de mouvements rectilignes uniformes, dont la direction et la grandeur de la vitesse changent continûment.

Ainsi, on peut proposer de définir la vitesse du point  $P$  comme celle de ce morceau de mouvement rectiligne uniforme (au départ de  $P$ ) obtenu à partir de « la meilleure simulation possible » ou de « la meilleure chro-

nophotographie possible »<sup>13</sup>. L'origine photographique de cette définition aide peut-être à mettre en évidence pourquoi on parle alors aussi de vitesse instantanée<sup>14</sup>; on la note  $\overrightarrow{v_{inst.}}(P)$  ou tout simplement  $\overrightarrow{v}(P)$ .

Mais n'y a-t-il pas moyen d'être un peu plus précis quant aux caractéristiques de direction et de mesure de cette vitesse idéale ?

### *Le rectangle magique*

Puisque la vitesse du point  $P$  se définit à partir d'un mouvement rectiligne idéal, elle peut être décomposée, comme dans le cas du nageur. Si pour abrégé on ne note pas les points d'application, on peut donc écrire

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y},$$

où  $\overrightarrow{v_x}$  est la vitesse du point  $P_x$  dans son mouvement rectiligne obtenu par projection du mouvement du point  $P$  sur l'axe des  $x$ , et pareillement pour  $\overrightarrow{v_y}$ , comme les représente la figure 29.

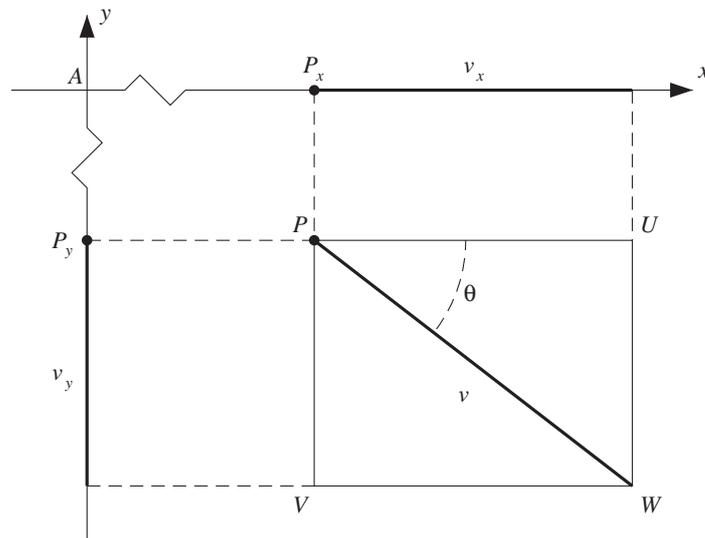


Fig. 29 : Le rectangle magique.

Or, il s'agit à chaque fois de mouvements idéaux, c'est-à-dire des mouvements observés sur « la meilleure chronophotographie – ou simulation – possible », et nous savons que

- le mouvement rectiligne horizontal (c'est-à-dire le long de l'axe des  $x$ ) est un mouvement rectiligne *uniforme*,
- le mouvement rectiligne vertical (c'est-à-dire le long de l'axe des  $y$ ) est un mouvement *de chute libre*.

<sup>13</sup> En d'autres termes, la vitesse ainsi définie est une notion « idéale » que les chronophotographies et les simulations permettent d'approcher. Une telle approximation peut toujours être améliorée, pourvu que les appareils de mesure (stroboscope, appareils photographiques) ou les outils de calcul le permettent.

<sup>14</sup> Comme on le rappelle plus bas, cette appellation concorde avec celle déjà utilisée dans l'étude de la chute libre.

Cela nous permet d'identifier  $\vec{v}_x$  et  $\vec{v}_y$  à des grandeurs vectorielles bien déterminées,

- pour ce qui concerne le point d'application, la direction et le sens, tout est clair,
- et pour ce qui concerne la mesure de chacune de ces vitesses :
  - la valeur  $v_x$  étant *a priori* la mesure de la vitesse (instantanée) du point  $P_x$  animé d'un mouvement *uniforme*, elle est identique à la vitesse « ordinaire » de ce point et comme cette dernière a déjà été calculée plus haut, on a :  $v_x = 2,1$  (m/s) ;
  - la valeur  $v_y$  étant *a priori* la mesure de la vitesse (instantanée) du point  $P_y$  animé d'un mouvement *de chute libre*, on sait qu'il s'agit d'une fonction linéaire du temps et qu'elle vaut à l'instant considéré :  $v_y = g \cdot \frac{5}{30} = 1,635 \dots$  (m/s).

Dès lors, si on note  $\theta$  l'angle que forme la vitesse  $\vec{v}$  avec l'horizontale passant par le point  $P$  (cf. encore la figure 29), on calcule

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{|UW|}{|PU|} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g \cdot \frac{5}{30}}{2,1} = 0,7785 \dots,$$

d'où  $\theta \approx 38^\circ$ , et

$$\begin{aligned} v\left(\frac{5}{30}\right) &= v(0,166\dots) = |PW| = \sqrt{|PU|^2 + |UW|^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(2,1)^2 + \left(g \cdot \frac{5}{30}\right)^2} = 2,6614\dots \text{ (m/s)}. \end{aligned}$$

Pour mémoire, le calcul réalisé plus haut directement sur la chronophotographie avait fourni  $v_{r.u.} = 2,58\dots$  (m/s) ; par ailleurs, on peut aussi calculer :  $v(0,166) = 2,6574\dots$  (m/s) et  $v(0,167) = 2,6634\dots$  (m/s), et comparer ces résultats avec  $v_{r.u.}(0.166) = 2,6604\dots$  (m/s) et  $v_{r.u.}(0.167) = 2,6664\dots$  (m/s).

Ces deux résultats achèvent de déterminer toutes les caractéristiques de la vitesse au point  $P$ , considérée comme grandeur vectorielle idéale ou alors – plus précisément ? – comme *vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme idéal*<sup>15</sup>.

## 2.5 La formulation vectorielle de l'équation du mouvement de la deuxième balle

*Comment s'y prendre ?*

Arrêtons-nous encore un instant sur les équations du mouvement de la balle, telles que la question 6 nous les a fait découvrir.

Question 8.  
Comment reformuler en termes de grandeurs vectorielles les équations du mouvement obtenues lors de l'analyse de la chronophotographie ?

<sup>15</sup> Ce mouvement rectiligne uniforme idéal est tangent à la trajectoire de la balle au point  $P$ , mais c'est là une autre histoire...

Comme il n'y a plus de raison pour fixer *a priori* l'instant d'observation, on va reprendre l'analyse de la chronophotographie (cf. la figure 19) pour un instant d'observation  $t$  quelconque. On note alors  $P(t)$  la position de la balle à un tel instant, et on convient d'abrégier  $P(t)$  en  $P$  lorsqu'il n'en résulte aucune ambiguïté.

**Une décomposition du mouvement héritée du rectangle magique**

Puisque la décomposition de la vitesse a déjà permis de résoudre la question précédente, on va pareillement décomposer le mouvement du point  $P$  suivant les deux directions associées à ce mouvement,

- l'horizontale, qui est la direction initiale du mouvement,
- et la verticale, qui est la direction d'un mouvement ordinaire<sup>16</sup> de chute libre.

Avec les notations de la figure 30 ci-après, le mouvement horizontal à considérer est donc celui de la projection  $P_x$  du point  $P$  sur l'axe des  $x$ ; c'est un mouvement (rectiligne) uniforme. Comme on a (déjà) noté  $v_x$  la mesure (constante) de la vitesse de ce point, on a

$$|AP_x(t)| = v_x t.$$

Le mouvement vertical est celui de la projection  $P_y$  du point  $P$  sur l'axe des  $y$ ; c'est un mouvement (rectiligne) de chute libre. La loi fondamentale de la chute libre permet d'écrire

$$|AP_y(t)| = \frac{gt^2}{2}.$$

Considérons alors le *changement de position* qui amène le point  $A$  sur le point  $P$ , et associons-y la grandeur vectorielle définie comme suit,

- son point d'application est le point  $A$ ,
- sa direction est celle de la droite passant par les deux points  $A$  et  $P$ ,
- son sens est celui qui mène de  $A$  à  $P$  sur cette droite,
- sa mesure est celle de la distance, prise en mètres, qui sépare les deux points en question.

On note  $\overrightarrow{AP}$  ce changement de position. On peut définir pareillement les changements de position  $\overrightarrow{AP_x}$  et  $\overrightarrow{AP_y}$ , et on a (cf. la figure 30)

$$\overrightarrow{AP}(t) = \overrightarrow{AP_x}(t) + \overrightarrow{AP_y}(t).$$

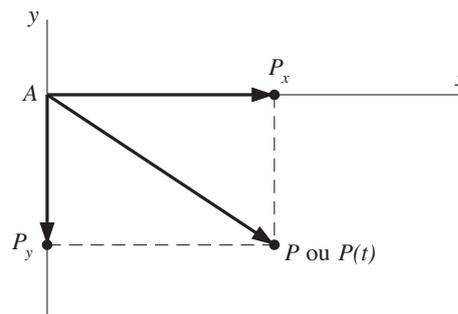


Fig. 30 : Le changement de position est une grandeur vectorielle qui se décompose.

<sup>16</sup> C'est-à-dire sans autre mouvement qui s'y ajoute.

**Une décomposition qui se décompose encore...**

On peut mieux exprimer l'information fournie par l'expression précédente en mettant en valeur les mesures des changements de position calculées plus haut :  $|AP_x(t)| = v_x t$  et  $|AP_y(t)| = \frac{gt^2}{2}$ . Pour cela, on introduit deux nouvelles grandeurs vectorielles :

- le vecteur  $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$  est un changement de position qui sert de *référence* pour tout mouvement suivant la direction initiale du tir de la balle ; il a comme point d'application le point  $A$ , comme direction celle de l'axe des  $x$ , comme sens le sens positif de parcours de cet axe, et comme mesure l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre,
- le vecteur  $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$  est un changement de position qui sert de *référence* pour tout mouvement suivant la direction verticale ; il a encore comme point d'application le point  $A$ , comme direction celle de l'axe des  $y$ , comme sens le sens positif de cet axe, et toujours comme mesure l'unité de longueur (le mètre).

On fait alors apparaître les différentes caractéristiques de la grandeur vectorielle  $\overrightarrow{AP_x}(t)$  en l'écrivant sous la forme

$$\overrightarrow{AP_x}(t) = v_x t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}}.$$

Cette écriture concentre en effet toute l'information de mesure dans le facteur  $v_x t$  et toute l'information de direction dans le terme  $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$ . Pareillement, l'écriture

$$\overrightarrow{AP_y}(t) = \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$$

distingue l'information de mesure dans le terme  $\frac{gt^2}{2}$ , celle de direction dans le terme  $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$  et précise avec le signe « - » que le sens de  $\overrightarrow{AP_y}(t)$  et le sens de  $\overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$  sont opposés.

Lorsqu'on écrit finalement l'équation  $\overrightarrow{AP}(t) = \overrightarrow{AP_x}(t) + \overrightarrow{AP_y}(t)$  en précisant toutes les caractéristiques des grandeurs vectorielles  $\overrightarrow{AP_x}(t)$  et  $\overrightarrow{AP_y}(t)$ , on obtient (cf. la figure 31)

$$\overrightarrow{AP}(t) = v_x t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}.$$

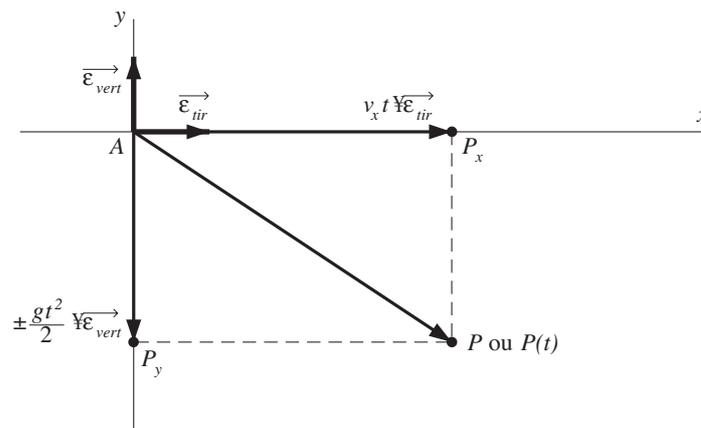


Fig. 31 : L'équation vectorielle du mouvement de la balle se visualise à l'aide d'un rectangle.

La position de la balle est ainsi complètement décrite à n'importe quel instant en termes de grandeurs vectorielles de référence. L'équation obtenue mérite bien d'être appelée *l'équation vectorielle du mouvement*. Pour mémoire, on a obtenu comme équations du mouvement dans le problème du nageur (cf. la question 1 et la synthèse de la section 1)

$$\overrightarrow{AN}(t) = t \cdot \overrightarrow{AN},$$

où  $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$  est le vecteur-position du nageur après une minute d'effort. Ces équations s'écrivent aussi

$$\overrightarrow{AN}(t) = 40t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{Xavier}} + 20t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{Yves}},$$

où  $\overrightarrow{\varepsilon_{Xavier}}$  (respectivement  $\overrightarrow{\varepsilon_{Yves}}$ ) est le changement de position qui sert de référence pour tout mouvement le long de la berge (respectivement le long du pont), en parfaite analogie avec les équations vectorielles du mouvement du projectile.

### 3 Le tir oblique

*De quoi s'agit-il ?*

Décrire de manière quantitative la forme d'un jet d'eau.

*Enjeux*

L'équation vectorielle générale du mouvement d'un projectile.

*De quoi a-t-on besoin ?*

Une chronophotographie (cf. la figure 33, en annexe à la page 498).

#### 3.1 Retour au jet d'eau articulé

*Comment s'y prendre ?*

Revenons-en à l'étude du jet d'eau.

Nous savons déjà que la forme du jet d'eau est celle de la trajectoire de n'importe laquelle des gouttes qui le constituent. La question qui nous intéresse maintenant est de décrire le mouvement d'une goutte d'eau dès sa sortie du tuyau d'arrosage, suivant les principes qui ont permis de décrire le mouvement de la balle dans la chronophotographie. Mais cette fois-ci, il s'agit de prendre en compte le fait que le tuyau est dirigé suivant un angle avec l'horizontale qui n'est pas nécessairement nul. Or, la description d'un tir à l'horizontale n'est pas sans rapport avec celle d'un tir dans une direction quelconque. En effet, l'expérience du jet d'eau articulé (cf. la question 5) a livré un résultat assez étonnant : peu importe que la direction de tir soit horizontale ou oblique, lorsque les distances mesurées dans cette direction sont les mêmes, alors les écarts verticaux correspondants sont eux aussi identiques. Tout semble donc être indépendant de la direction... ? Comme les grandeurs vectorielles prennent explicitement en compte les questions de direction, il est assez naturel de se poser la question suivante.

## Question 9.

En termes de grandeurs vectorielles, qu'est-ce qui change – et qu'est-ce qui ne change pas – dans la description du mouvement d'une balle ou d'une goutte d'eau, lorsqu'on passe d'une direction de tir horizontale à une direction de tir oblique ?

Commençons par adapter les notations. Le point  $A$  devient le point de sortie de la goutte d'eau ou, de manière plus explicite, l'orifice du tuyau d'arrosage. On note  $G(t)$  la position de la goutte d'eau à un instant d'observation  $t$  quelconque, et on a donc  $G(0) = A$ . On convient toujours d'abréger  $G(t)$  en  $G$  lorsqu'il n'en résulte aucune ambiguïté.

Comme précédemment, on décompose le mouvement en deux mouvements qui intègrent ce que l'expérience du jet d'eau articulé a mis en évidence. Le mouvement vertical est donc celui de la projection  $G_y$  du point  $G$  sur l'axe des  $y$  *parallèlement à la direction de tir* ; et le mouvement dans la direction de tir – ou mouvement oblique – est alors celui de la projection  $G_z$  du point  $G$  sur l'axe des  $z$  (c'est-à-dire l'axe de la direction initiale du mouvement) *parallèlement à la verticale* (cf. la figure 32). Suivant les résultats obtenus lors de la résolution de la question 3, on peut dès lors écrire – en parfaite analogie avec le cas du tir horizontal – le changement de position  $\overrightarrow{AG}$  comme combinaison vectorielle des changements de position  $\overrightarrow{AG_z}$  et  $\overrightarrow{AG_y}$ ,

$$\overrightarrow{AG}(t) = \overrightarrow{AG_z}(t) + \overrightarrow{AG_y}(t).$$

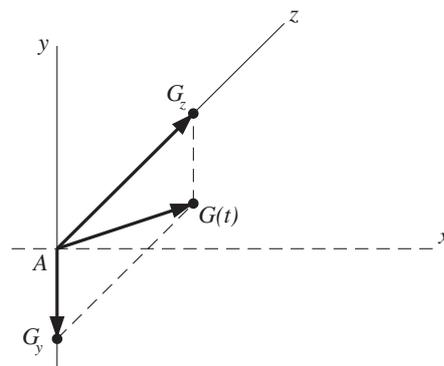


Fig. 32 : Le changement de position de la goutte d'eau se décompose suivant la verticale et la direction de tir.

### Une hypothèse qui découle (!) de l'expérience du jet d'eau

On est alors amené assez naturellement à faire une *hypothèse de décomposition* : *chacun* de ces deux mouvements a les *mêmes caractéristiques* que le mouvement correspondant dans le cas de la direction de tir horizontale. Plus précisément, on suppose donc que

- le mouvement du point  $G_z$  est un mouvement rectiligne uniforme suivant la direction du tir,
- le mouvement du point  $G_y$  est un mouvement de chute libre le long de la verticale passant par le point  $A$ .

Il y a au moins deux manières de justifier cette hypothèse. La première consiste à faire une nouvelle expérience de stroboscopie, avec une direction initiale de tir qui ne soit plus horizontale : cf. la figure 22, ou la figure 33 ci-après (extraite de A. Meessen [1984]).

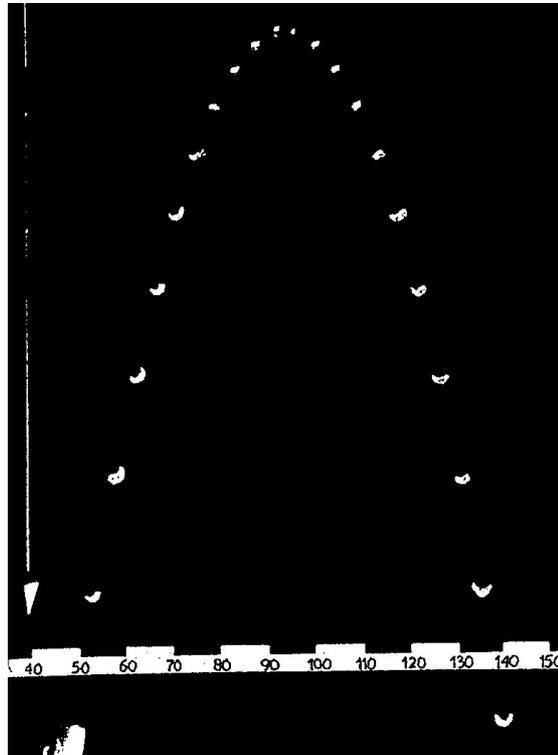


Fig. 33 : Une nouvelle expérience de stroboscopie.

Un traitement analogue<sup>17</sup> à celui de la question 6 permet alors de vérifier que le mouvement des points  $G_y$  et  $G_z$  est exactement celui qui est impliqué par l'hypothèse de décomposition.

Une deuxième méthode consiste à faire appel à la notion de *force* de pesanteur et au principe d'inertie<sup>18</sup>. Pour mémoire, ce principe affirme que « *tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.* » Comme la force de pesanteur est la seule<sup>19</sup> force qui s'applique à la goutte d'eau, c'est elle qui se retrouve responsable de la forme curviligne de la trajectoire. De manière équivalente, si la force de pesanteur n'existait pas, le mouvement de la goutte d'eau serait rectiligne uniforme, suivant la direction initiale de mouvement, c'est-à-dire l'axe des  $z$ .

<sup>17</sup> Sur le cliché, les dimensions sont fournies en *cm*, et l'intervalle de temps entre deux éclairs consécutifs est de 0,059 s.

<sup>18</sup> Pourvu évidemment que les élèves le connaissent. Les raisonnements en termes de chronophotographies sont entièrement cinématiques, et donc indépendants du principe d'inertie!

<sup>19</sup> Comme souvent, on néglige la résistance de l'air, et les effets hydrodynamiques propres au jet d'eau lui-même.