

### Les conséquences de l'hypothèse de décomposition

Comment caractériser la vitesse du mouvement rectiligne uniforme du point  $G_z$  ?

Cette vitesse étant constante, on peut l'identifier avec celle de la goutte d'eau au moment exact où elle sort du tuyau d'arrosage au point  $A$ . Pour mettre en évidence cette caractéristique dans les notations, on convient de noter  $\overrightarrow{v_{init}}$  cette vitesse « initiale » puisqu'il s'agit de la vitesse de la goutte d'eau à l'instant initial d'observation.

Précisons ensuite que la *caractérisation* de la grandeur vectorielle  $\overrightarrow{\varepsilon_{tir}}$  doit être modifiée : elle a toujours comme point d'application le point  $A$ , mais sa direction a changé – c'est maintenant celle de l'axe des  $z$  dans la figure 34, c'est-à-dire celle suivant laquelle le tuyau d'arrosage projette toutes les gouttes d'eau – le sens quant à lui reste le sens « positif » de parcours de cet axe, et la mesure reste l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre.

Avec ces modifications, on montre comme précédemment que le mouvement d'une goutte d'eau est décrit par l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{tir}} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon_{vert}}$$

D'une certaine manière, cette équation décrit les variations avec le temps d'un parallélogramme « magique » (cf. la figure 34 ci-dessous). Comme dans la question 7, on pourrait en déduire la vitesse du point  $G(t)$  à n'importe quel instant de son mouvement, etc.

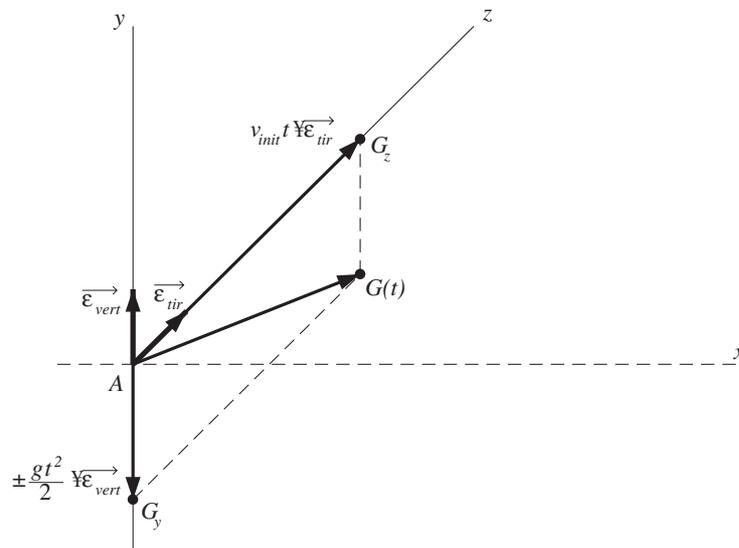


Fig. 34 : Un parallélogramme magique décrit le mouvement.

Il est encore intéressant d'observer que l'équation vectorielle que l'on vient d'obtenir a la même *forme* que celle issue de l'étude de la chronophotographie, alors que la situation physique est *a priori* différente.

En réalité, tout a été fait pour obtenir cette identité de forme troublante : l'hypothèse de décomposition, et surtout la manière dont le calcul des

grandeurs vectorielles règle les questions de directions ont été des *deus ex machina*. Et cette identité de forme redevient très naturelle dès qu'on s'aperçoit que toute la différence entre les deux situations physiques est prise en compte par l'interprétation géométrique différente qu'on réserve à la grandeur vectorielle de référence  $\vec{\varepsilon}_{tir}$ .

### 3.2 La forme du jet d'eau

Comment s'y prendre ?

La question suivante n'a rien pour surprendre !

Question 10.

Quelle est finalement la trajectoire d'une goutte d'eau – ou la forme du jet d'eau – si le tuyau d'arrosage est dirigé suivant un angle de  $45^\circ$  avec l'horizontale ?

Et s'il s'agit d'un angle  $\theta$  quelconque ?

... Et tout le travail est quasiment fait, il ne s'agit plus que de mise en forme !

#### Un changement de références

Si on veut travailler avec les coordonnées ordinaires du point  $G(t)$ , c'est-à-dire celles prises suivant les axes des  $x$  et des  $y$  de la figure 32 ou 34, il est intéressant d'introduire deux nouvelles grandeurs vectorielles de références qui soient appropriées à ce (nouveau) choix d'axes. On définit donc

$\vec{\varepsilon}_x$  : c'est le changement de position qui sert de référence pour tout mouvement suivant la direction horizontale ; il a comme point d'application le point  $A$ , comme direction celle de l'axe des  $x$ , comme sens le sens positif de parcours de cet axe, et comme mesure l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre,

$\vec{\varepsilon}_y$  : c'est le changement de position qui sert de référence pour tout mouvement suivant la direction verticale ; il a encore comme point d'application le point  $A$ , comme direction celle de l'axe des  $y$ , comme sens le sens positif de cet axe, et toujours comme mesure l'unité de longueur (le mètre) ; évidemment  $\vec{\varepsilon}_{vert} = \vec{\varepsilon}_y$ .

D'autre part, un peu de trigonométrie (en s'aidant de la figure 35) permet de relier entre elles les grandeurs vectorielles  $\vec{\varepsilon}_{tir}$ ,  $\vec{\varepsilon}_x$  et  $\vec{\varepsilon}_y$ .

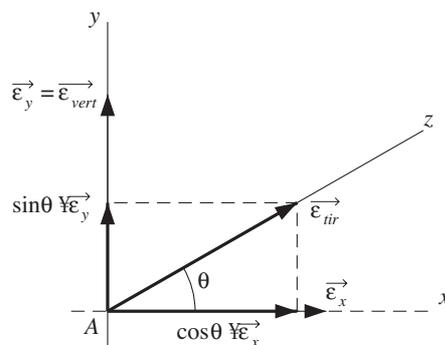


Fig. 35 : De nouvelles grandeurs vectorielles de référence.

$$\vec{\varepsilon}_{tir} = \cos \theta \cdot \vec{\varepsilon}_x + \sin \theta \cdot \vec{\varepsilon}_y.$$

L'équation vectorielle  $\vec{AG}(t) = v_{init}t \cdot \vec{\varepsilon}_{tir} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \vec{\varepsilon}_{vert}$  obtenue à la fin de la question précédente devient alors

$$\vec{AG}(t) = v_{init}t (\cos \theta \cdot \vec{\varepsilon}_x + \sin \theta \cdot \vec{\varepsilon}_y) + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \vec{\varepsilon}_y,$$

c'est-à-dire, en regroupant les termes suivant les deux grandeurs vectorielles de référence qui ont été associées aux coordonnées, il vient

$$\vec{AG}(t) = v_{init}t \cos \theta \cdot \vec{\varepsilon}_x + \left(v_{init}t \sin \theta - \frac{gt^2}{2}\right) \cdot \vec{\varepsilon}_y.$$

### La trajectoire, enfin...

Bien sûr, on peut aussi écrire le résultat précédent directement en termes de coordonnées

$$\begin{cases} x = v_{init}t \cos \theta, \\ y = v_{init}t \sin \theta - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Pour tirer alors de ces deux équations la trajectoire du mouvement, il suffit de tout immobiliser, c'est-à-dire de « chasser le temps », cela donne l'équation de la trajectoire

$$y = -\frac{g}{2v_{init}^2 \cos^2 \theta} \cdot x^2 + \operatorname{tg} \theta \cdot x.$$

Comme dans le cas du tir horizontal, c'est l'équation d'une parabole. Elle passe par le point  $A$  de coordonnées  $(0; 0)$ , ce qui n'a évidemment rien d'étonnant !

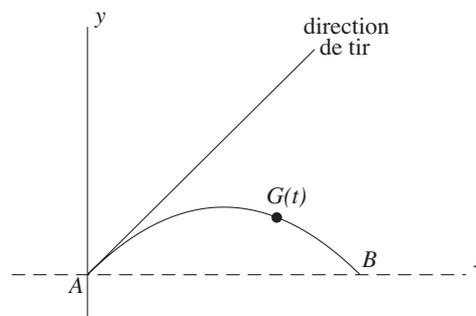


Fig. 36 : La forme du jet d'eau.

Le matériel utilisé dans l'expérience du jet d'eau articulé permet de relever très facilement les coordonnées de plusieurs points de la courbe formée par le jet d'eau, et de confirmer<sup>20</sup>, si on le souhaite, son caractère parabolique<sup>21</sup>.

<sup>20</sup> Dans les limites de précision que l'expérience permet d'atteindre...

<sup>21</sup> Ce genre de mesure peut fournir aussi une estimation – indirecte, mais relativement précise – de la vitesse  $v_{init}$  du jet d'eau à la sortie du tuyau. Si, avec les notations de la figure 36,  $p = |AB|$  est la « portée » du jet d'eau, exprimée en  $m$ , on obtient après un petit calcul

$$v_{init} = \sqrt{\frac{gp}{\sin 2\theta}}.$$

En particulier, si  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , on trouve  $v_{init} \approx 3\sqrt{p}$ .

Pour  $\theta = 0$ , on retrouve la parabole de sommet  $A$  déjà étudiée précédemment<sup>22</sup>. Pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , l'équation de la trajectoire se simplifie sensiblement de cette manière,

$$y = -\frac{g}{v_{init}^2} \cdot x^2 + x.$$

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , on retrouve la situation de l'arroseur arrosé. L'équation de la trajectoire n'est alors plus d'aucun secours (*sic*!), mais l'équation vectorielle est quant à elle tout à fait parlante (*resic*!)

$$\overrightarrow{AG}(t) = \left( v_{init}t - \frac{gt^2}{2} \right) \cdot \vec{\varepsilon}_y,$$

ou, si l'on préfère

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = v_{init}t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

### 3.3 Le problème du poisson-archer

*De quoi s'agit-il ?*

Déterminer les caractéristiques de rencontre (position, instant...) de deux projectiles partant en même temps d'endroits différents.

*Enjeux*

Une illustration des propriétés communes de deux mouvements de projectiles.

Une interprétation cinématique des points d'intersection d'une droite et d'une parabole.

*Comment s'y prendre ?*

La question suivante est l'occasion de rassembler et de prolonger les résultats obtenus lors de l'étude du jet d'eau et de la chronophotographie, et d'y ajouter une pincée de biologie (cruelle!) Elle est inspirée de H. Benson [1993], exemple 4.4, p. 61-62.



Fig. 37

<sup>22</sup> Dans le cas particulier où de plus  $v_{init} = 0$ , il n'est évidemment plus possible de chasser le temps de l'équation vectorielle du mouvement.

## Question 11.

Dans la figure 37, un insecte est posé sur une brindille à une certaine hauteur au-dessus de la surface de l'eau. Un poisson-archer projette une goutte d'eau directement sur l'insecte, afin de l'étourdir et d'arriver ainsi à le gober. Au moment exact où la goutte est projetée, l'insecte voit venir le danger et se laisse tomber pour y échapper.

La goutte d'eau peut-elle atteindre l'insecte ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ? Si non, pourquoi ?

Le problème revient à décrire le mouvement d'une goutte d'eau projetée par le poisson-archer, et à mettre ce mouvement en correspondance avec le mouvement vertical de chute libre de l'insecte. Le poisson-archer projette la goutte d'eau dans une direction qui n'est manifestement pas horizontale.

On peut reprendre *mutatis mutandis* les notations déjà utilisées dans les questions précédentes. Le point  $A$  est le point de sortie de la goutte d'eau ou, de manière plus explicite, le bord de la gueule<sup>23</sup> de notre prédateur aquatique. On note

- $G(t)$  la position de la goutte d'eau,
- $I(t)$  la position de l'insecte

à un instant d'observation  $t$  quelconque, en convenant encore d'abrégier  $G(t)$  en  $G$  et  $I(t)$  en  $I$  lorsqu'il n'en résulte aucune ambiguïté. On a en particulier  $G(0) = A$ , tandis que  $I(0)$  désigne la position de l'insecte au tout début du drame, là-haut sur sa brindille. Et nous savons déjà tout ce qu'il faut savoir du mouvement de la goutte d'eau meurtrière.

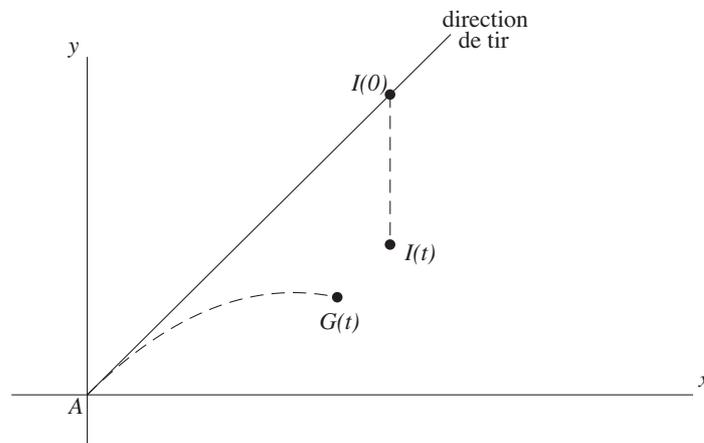


Fig. 38 : Le cadre du drame.

### Le mouvement de l'insecte

L'insecte se laisse donc tomber suivant un mouvement *rectiligne* de chute libre à partir du point  $I(0)$ . Quel que soit l'instant d'observation  $t$ , le chan-

<sup>23</sup> Au moment du tir, on suppose que le bord de la gueule du poisson-archer affleure la surface de l'eau.

gement de position se décompose sous la forme

$$\overrightarrow{AI}(t) = \overrightarrow{AI}(0) + \overrightarrow{AI}_y(t),$$

avec les notations de la figure 39. Comme ce mouvement reste parallèle à l'axe des  $y$ , une de ces composantes – celle suivant la direction de tir – est donc constante, c'est-à-dire indépendante du temps.

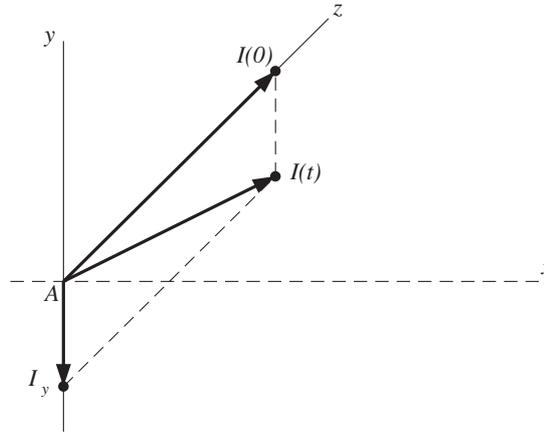


Fig. 39 : Le changement de position pour le mouvement de chute libre de l'insecte.

Notons, suivant la figure 40

- $d$ , la distance horizontale (mesurée en mètres, comme il se doit) qui sépare l'insecte du poisson-archer,
- $\theta$ , l'angle de tir mesuré par rapport à l'horizontale, qui est aussi l'angle sous lequel l'insecte est vu par le poisson-archer.

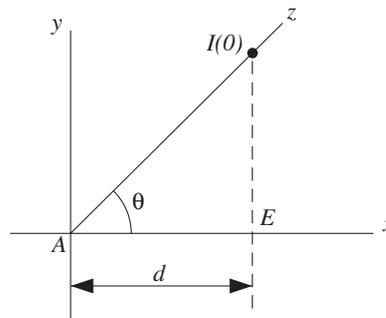


Fig. 40 : Deux paramètres permettent de déterminer la position de l'insecte.

Le triangle rectangle  $AEI(0)$  livre immédiatement la relation

$$|AI(0)| = \frac{d}{\cos \theta}.$$

On en déduit – comme précédemment – l'équation vectorielle du mouvement de l'insecte

$$\overrightarrow{AI}(t) = \frac{d}{\cos \theta} \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{tir} + \left( -\frac{gt^2}{2} \right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{vert}.$$

*L'issue du drame*

Est-il possible que la goutte d'eau frappe l'insecte? En d'autres mots, existe-t-il un instant  $t$  pour lequel la goutte d'eau et l'insecte se trouvent exactement au même endroit, c'est-à-dire pour lequel  $\overrightarrow{AI}(t) = \overrightarrow{AG}(t)$ ?

Pour bien voir ce qui se passe, il est intéressant d'introduire – après le rectangle magique – le « parallélogramme de la mort » : il est défini (cf. la figure 41) à partir du segment  $|G(t)I(t)|$ , qui décrit toute l'évolution du drame, puisqu'il est de longueur nulle lorsque la goutte d'eau frappe sa cible.

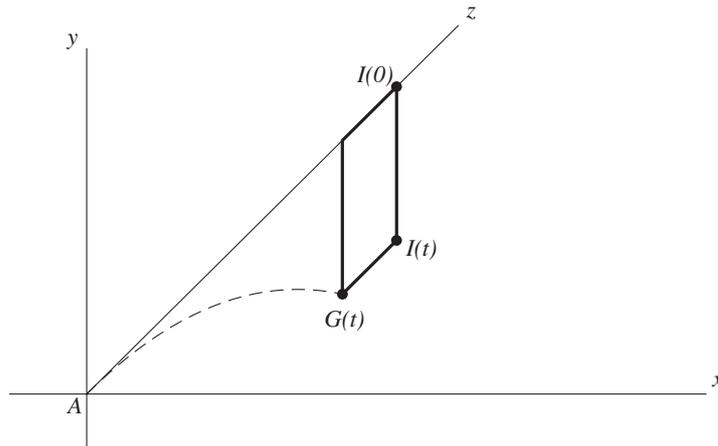


Fig. 41 : Le parallélogramme de la mort!

Or, le parallélogramme  $AC(t)J(t)I(t)$  montre que  $\overrightarrow{G(t)I(t)} = \overrightarrow{AI(t)} + (-\overrightarrow{AG(t)})$  (cf. la figure 42).

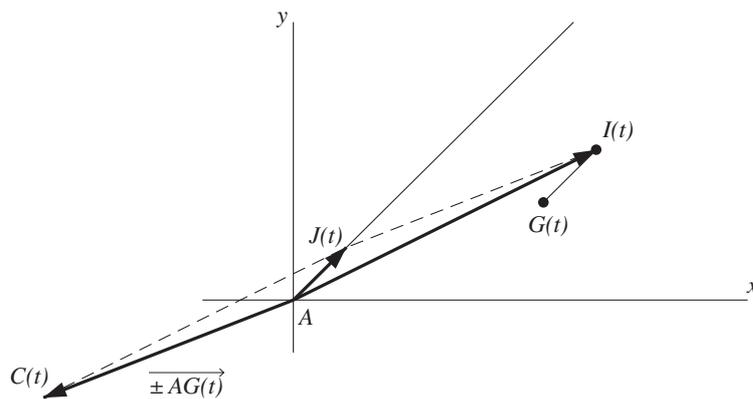


Fig. 42 : Deux grandeurs vectorielles équivalentes.

À partir de l'équation vectorielle du mouvement de la goutte d'eau,

$$\overrightarrow{AG}(t) = v_{init}t \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{tir} + \left(-\frac{gt^2}{2}\right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{vert},$$

et de celle de l'insecte,

$$\overrightarrow{AI}(t) = \frac{d}{\cos \theta} \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{tir} + \left( -\frac{gt^2}{2} \right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{vert},$$

on peut alors calculer vectoriellement la caractéristique fatale du « parallélogramme de la mort », à savoir

$$\overrightarrow{G(t)I(t)} = \overrightarrow{AJ(t)} = \overrightarrow{AI(t)} + \left( -\overrightarrow{AG(t)} \right) = \left( \frac{d}{\cos \theta} - v_{init}t \right) \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_{tir}.$$

Si la rencontre meurtrière de la goutte d'eau et de l'insecte a bien lieu, cet instant fatal est donc déterminé par la condition

$$\overrightarrow{G(t)I(t)} = \overrightarrow{0},$$

et vaut

$$t_{mort} = \frac{d}{v_{init} \cos \theta}.$$

Et donc, ça ne rate jamais ? Quels que soient l'angle de tir<sup>24</sup>, la vitesse d'expulsion de la goutte d'eau et la distance horizontale qui sépare le poisson-archer de sa cible, l'issue est inéluctable : le poisson-archer fait mouche ? Voire. . . Rien dans ce qui précède n'a pris en compte que le mouvement de chute libre de l'insecte s'arrête dès que celui-ci touche la surface de l'eau au point  $E$  (cf. la figure 40). La goutte d'eau n'atteint donc l'insecte *avant* que celui-ci ne touche l'eau que si

$$|I(0)E| > \frac{gt_{mort}^2}{2}.$$

Comme on sait que  $t_{mort} = \frac{d}{v_{init} \cos \theta}$  et que  $|I(0)E| = d \operatorname{tg} \theta$ , un peu de calcul livre alors la « condition d'impact »

$$v_{init}^2 > \frac{gd}{\sin 2\theta}.$$

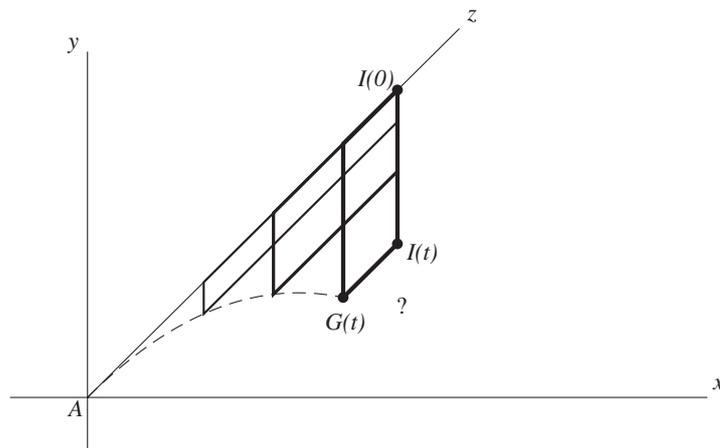


Fig. 43 : L'évolution inéluctable du parallélogramme de la mort.

<sup>24</sup> Pourvu qu'il reste (strictement) compris entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , mais le poisson-archer n'est pas bigleux au point de l'ignorer !

On peut mener un raisonnement analogue, et plus géométrique, à l'aide du « parallélogramme de la mort ». En effet, en se limitant aux composantes verticales de leurs mouvements, l'insecte et la goutte d'eau doivent se rencontrer s'ils « partent » en même temps. La forme dégénérée du parallélogramme de la mort – c'est-à-dire celle pour laquelle la longueur du segment  $|G(t)I(t)|$  est nulle – correspond à la condition d'impact, pourvu que cette forme dégénérée se réalise *au-dessus* de l'eau, etc.

Malheureusement, la nature est impitoyable ! Même si l'insecte arrive à toucher l'eau, son compte est bon : le poisson-archer est alors dans son élément et, après deux petits coups de nageoire, plus rien ne l'empêche de happer l'innocente victime. Versons une larme...

Regardons enfin sur quelques exemples numériques, comment le destin frappe. Supposons pour fixer les idées que  $\theta = 45^\circ$  et  $d = 5 \cdot 10^{-2}$  m ou 5 cm, ce qui correspond approximativement à ce qu'illustre la figure 37.

- Si, par exemple,  $v_{init} = 1$  m/s,
  - alors on obtient  $t_{mort} = 7,07 \dots 10^{-2}$  s, c'est-à-dire un peu moins d'un dixième de seconde,
  - et  $|I(0)I(t_{mort})| = 2,45 \dots 10^{-2}$  m, c'est-à-dire environ la moitié de la distance qui sépare initialement l'insecte de la surface de l'eau.
- Autre exemple, si  $v_{init} = 2$  m/s,
  - alors  $t_{mort} = 3,53 \dots 10^{-2}$  s, c'est-à-dire un peu moins d'un trentième de seconde,
  - et  $|I(0)I(t_{mort})| = 0,6125 \dots 10^{-2}$  m, c'est-à-dire un peu plus d'un dixième de la distance qui sépare initialement l'insecte de la surface de l'eau.

De manière générale (mais toujours en supposant que  $\theta = 45^\circ$ ), on peut établir la formule

$$|I(0)I(t_{mort})| = \frac{gd^2}{v_{init}^2},$$

qui précise comment le peu d'espace qu'arrive encore à parcourir l'insecte avant le choc fatal dépend de la vitesse initiale de la goutte d'eau.

## 4 Lent ou rapide ?

Cette section illustre la portée du point de vue vectoriel sur la vitesse, en montrant comment une astuce (toute vectorielle) permet de définir et de déterminer immédiatement l'*accélération* d'un mobile animé d'un mouvement circulaire uniforme.

*De quoi s'agit-il ?*

Comparer les vitesses de différents mobiles animés d'un mouvement circulaire uniforme, au départ de simulations de ce type de mouvement.

*Enjeux*

La caractérisation vectorielle de la vitesse (linéaire) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme. La notion d'hodographe du mouvement de ce point. La définition et la caractérisation vectorielle de l'accélération (linéaire) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme

*De quoi a-t-on besoin ?*

Quelques données astronomiques (reprises plus bas) concernant le mouvement de rotation de la terre autour du soleil.

Un tableur (EXCEL, par exemple).

### **Prérequis**

Les résultats élémentaires concernant

- la longueur de la circonférence : dépendance du rayon, approximation par des polygones réguliers inscrits ;
- la mesure des angles en radians ;
- l'aire d'un disque, d'un secteur circulaire.

Le cercle trigonométrique, la trigonométrie des angles orientés, les équations paramétriques d'un cercle (sous forme trigonométrique).

## 4.1 Vitesse angulaire et vitesse linéaire

*Comment s'y prendre ?*

En général, on dit qu'un mobile ponctuel est animé d'un mouvement circulaire lorsque sa trajectoire est un cercle.

Ceci dit, il faut certainement commencer par demander aux élèves de faire une liste d'exemples de mouvements circulaires. Les objets tournants sont tellement fréquents que ces exemples ne manquent pas, pourvu bien sûr qu'on se concentre sur un point bien défini de l'objet en mouvement : une essoreuse à salade, beaucoup d'objets électro-ménagers (centrifugeuse, ...) ou de bricolage (foreuse, scie circulaire, ...), une platine de tourne-disque<sup>25</sup>, le virage d'une voiture dans un rond-point, certaines figures en skate-board, un looping sur une montagne russe, le lancer du marteau, etc.

Question 12.

Parmi tous ces mouvements circulaires, lesquels mériteraient-ils d'être qualifiés d'uniformes ?

### **Une définition...**

Les exemples ci-dessus et le modèle de la définition du mouvement *rectiligne* uniforme permettent assez vite de dégager une définition en termes d'angles ou d'arcs parcourus, telle que : un mouvement circulaire est uniforme lorsque les angles – ou les arcs – décrits par le point mobile sont entre eux comme les intervalles de temps nécessaires à les parcourir ; ou encore : lorsque des arcs égaux sont parcourus en des temps égaux.

<sup>25</sup> Si, si ! Cet objet antédiluvien est encore très utilisé : par les disc-jockeys dans les dancings par exemple.

Le retour sur les exemples précédents permet alors de nuancer la définition proposée au début : en fait, un mobile est animé d'un mouvement circulaire lorsque sa trajectoire est un cercle ou un arc de cercle, comme dans le cas du virage en voiture. Dans le cas d'une trajectoire qui n'est pas un cercle complet, le mouvement est souvent *non* uniforme : certaines figures de skate-board et plus généralement les mouvements de type pendulaire sont de ce type.

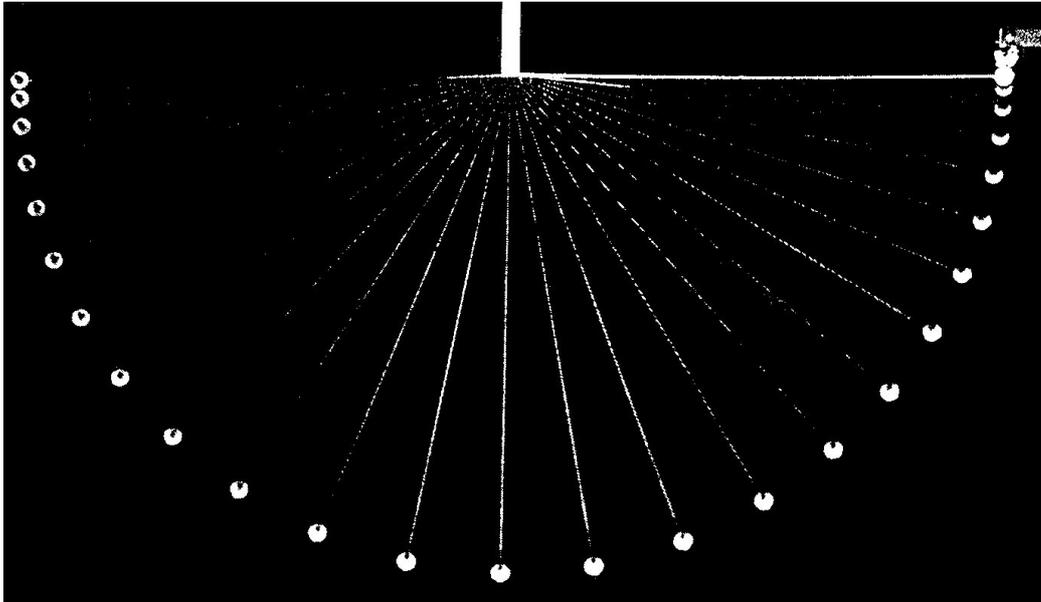


Fig. 44 : Le mouvement pendulaire est circulaire et non uniforme.

### ... et quelques caractéristiques

Ces observations élémentaires permettent de caractériser un mouvement circulaire uniforme à partir de deux grandeurs, toutes deux scalaires : le rayon  $R$  de la trajectoire, et l'angle  $w$  parcouru par unité de temps<sup>26</sup> (et mesuré en radians par seconde).

#### Question 13.

Des deux mouvements de rotation suivants, lequel est le plus lent et lequel est le plus rapide : le mouvement de la terre autour du soleil ou le mouvement d'une dent de scie circulaire (électrique) ?

Assez souvent, le mouvement d'une dent de scie circulaire est ressenti par les élèves comme le plus rapide. Et c'est... vrai, mais d'une manière qui mérite d'être découverte progressivement.

<sup>26</sup> Au lieu de cet angle, on considère souvent la *fréquence*  $\nu$  du mouvement, c'est-à-dire le nombre de tours parcourus par unité de temps ; lorsque le temps est mesuré en secondes, la fréquence est mesurée en Hertz ( $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ ). Si on note  $T$  la période du mouvement, c'est-à-dire le temps nécessaire à parcourir un tour complet, les diverses relations :  $w \cdot T = 2\pi$ ,  $\nu = \frac{1}{T}$  et  $2\pi \cdot \nu = w$  sont parfois utiles.

**La vitesse angulaire**

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'angle  $w$  parcouru par unité de temps est appelé la vitesse angulaire. Si on considère, de manière assez naturelle, que le mouvement d'une dent d'une scie circulaire est effectivement un mouvement circulaire uniforme, et si pour fixer les idées, on suppose que la scie tourne à 1500 tours/minute, on obtient

$$w_{scie} = \frac{1500 \times 2\pi}{60} = 157,079 \dots \text{ (rad/s)}.$$

On peut légitimement considérer que c'est un mouvement circulaire (très) rapide.

**Le mouvement de la terre autour du soleil**

Le mouvement de la terre autour du soleil est-il un mouvement circulaire, et si oui, est-il uniforme ?

Cela demande d'abord une petite recherche de la part des élèves quant aux propriétés du mouvement des planètes. Il n'est pas bien difficile d'obtenir dans des encyclopédies, ou sur Internet, les informations suivantes qui suivent.

- Chaque planète se meut sur une orbite elliptique<sup>27</sup> dont le soleil est un des foyers (première loi de Kepler).
- Le rayon reliant le soleil à la planète balaye des aires égales en des temps égaux (deuxième loi de Kepler).
- L'excentricité<sup>28</sup> de l'orbite de la terre autour du soleil est égale à 0,017.

La très faible excentricité de l'orbite de la terre autour du soleil signifie que les deux foyers sont quasiment confondus, et qu'il est donc tout à fait raisonnable de supposer que l'orbite en question est circulaire, avec le soleil au centre. Dès que cette hypothèse est faite, la deuxième loi de Kepler implique alors que le mouvement est uniforme, puisque l'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à l'angle au centre qui le définit. On calcule alors sans difficulté la vitesse angulaire du mouvement de la terre autour du soleil

$$w_{terre/soleil} = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = 1,9923 \dots 10^{-7} \text{ (rad/s)}.$$

Par comparaison avec le cas de la scie, il s'agit ici d'un mouvement circulaire uniforme dont la vitesse angulaire est dérisoire.

Ainsi, pour les deux mouvements circulaires uniformes considérés dans la question, la vitesse angulaire de l'un est très importante, alors que celle

<sup>27</sup> Une ellipse peut être définie comme une courbe allongée, apparentée au cercle, qui s'obtient en coupant un cône circulaire droit par un plan sécant à toutes ses génératrices. On peut établir que la somme des distances d'un point quelconque d'une ellipse à deux points fixes – appelés foyers – est constante, et égale à la plus grande corde, ou grand axe, de l'ellipse. Cette propriété permet de tracer facilement des ellipses suivant le procédé dit « du jardinier ».

<sup>28</sup> L'excentricité d'une ellipse est, par définition, le rapport entre la distance des foyers et la longueur du grand axe.

de l'autre semble dérisoire. Mais la vitesse angulaire mise ainsi en scène ne semble pas être de la même nature que la vitesse du nageur ou de la balle dans les situations précédentes : elle ne semble pas attachée matériellement au point mobile et ne possède pas les particularités d'une grandeur vectorielle...

Question 14.

À quelle vitesse (instantanée) la terre se déplace-t-elle autour du soleil ?

### *Quelques stroboscopies... virtuelles*

La définition même de mouvement circulaire uniforme permet immédiatement de simuler le résultat d'une expérience de stroboscopie pour ce genre de mouvement, au départ de la description trigonométrique du cercle. Si le mouvement considéré est de rayon  $R$  et de vitesse angulaire  $w$ , alors l'angle parcouru après  $t$  unités de temps égale  $wt$ , et la position<sup>29</sup> du point mobile à l'instant  $t$  est donc décrite par ses équations paramétriques, ou équations du mouvement :

$$\begin{cases} x = x(t) = R \cos wt, \\ y = y(t) = R \sin wt. \end{cases}$$

Suivant les dimensions en jeu dans le problème, la simulation mène à bien choisir les unités à utiliser. Par exemple, dans le mouvement de la terre autour du soleil, la distance moyenne terre/soleil étant de l'ordre de  $149 \cdot 10^6$  km, il sera préférable de prendre comme unité de longueur le million de kilomètres. Dans ce cas, si une première simulation est réalisée mois par mois, on posera

$$w_{\text{mois}} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} = 0,5235 \dots \text{ (rad/mois)}$$

et les positions de la terre seront les 12 sommets d'un dodécagone régulier. Chaque nouvelle simulation peut alors amener les élèves à devoir adapter leurs unités ; par exemple, pour une simulation au jour près,

$$w_{\text{jour}} = \frac{2\pi}{365} = 0,01721 \dots \text{ (rad/jours)}$$

ou à l'heure près,

$$w_{\text{heure}} = \frac{2\pi}{365 \times 24} = 0,0007172 \dots \text{ (rad/heures)}.$$

Pour une simulation au jour près, les positions correspondantes de la terre dessinent un cercle presque continu (le point représenté en gras dans la figure ci-dessous est la position de la terre au 46<sup>ème</sup> jour de l'année).

<sup>29</sup> Le repère dans lequel le mouvement est étudié est conforme à la représentation trigonométrique ou cartésienne usuelle ; dans le cas particulier du mouvement de la terre autour du soleil, on ne tient donc pas compte ici d'éventuelles conventions utilisées en astronomie.

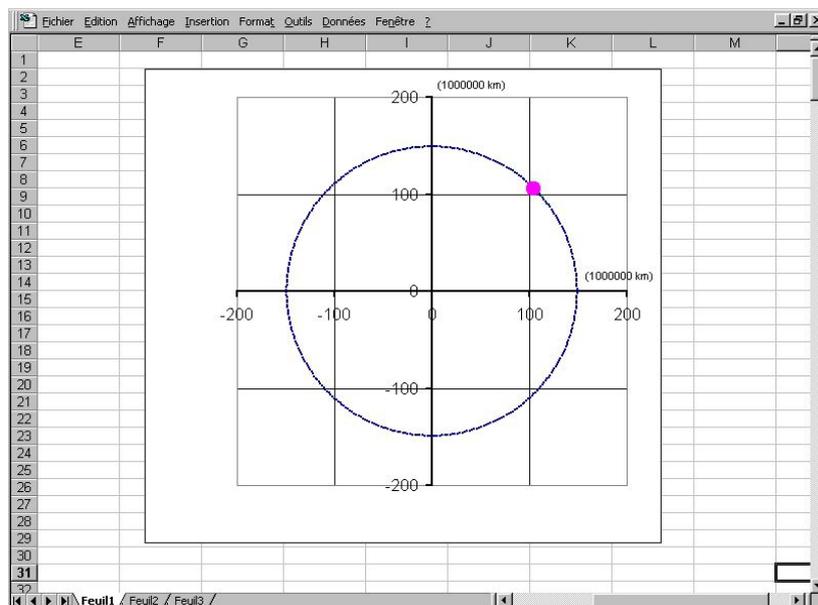


Fig. 45 : La trajectoire de la terre autour du soleil, sur 365 jours.

Cette continuité n'est qu'apparente, comme le montre un agrandissement de la figure, centré sur ce 46<sup>ème</sup> jour (cf. la partie gauche de la figure 46). Le caractère curviligne de la trajectoire reste encore assez bien marqué. Mais si on réalise une simulation à l'heure près, toujours centrée au même point, ce caractère curviligne n'est plus perceptible (cf. la partie droite de la figure 46) : c'est bien un mouvement *rectiligne* et uniforme qui commence à apparaître !

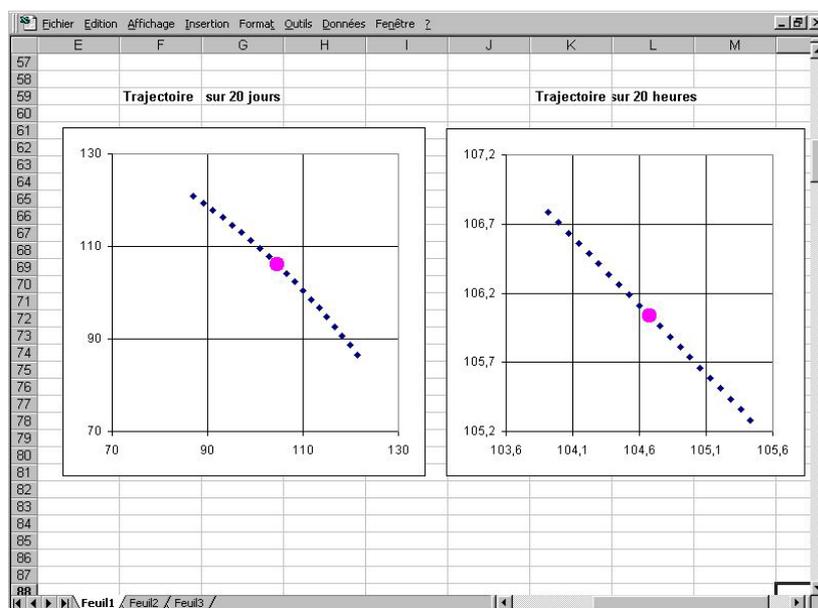


Fig. 46 : La trajectoire de la terre autour du soleil, sur 20 jours, et sur 20 heures.

Comme on l'a mis en évidence dans la section précédente, la vitesse du mouvement rectiligne idéal sous-jacent à une telle simulation est une grandeur vectorielle de même nature que la vitesse du nageur, ou de la balle lancée horizontalement, et associée au déplacement réellement effectué par le mobile.

### *Une approximation de la vitesse (instantanée)*

Le tableau de valeurs qui a servi à représenter la trajectoire de la terre autour du soleil à l'heure près, contient tout ce qu'il faut pour calculer la mesure ou l'intensité de la vitesse de ce mouvement rectiligne presque uniforme. Par exemple, puisque le 46<sup>ème</sup> jour correspond à la  $46 \times 24 = 1104$ <sup>ème</sup> heure d'observation, le tableau

$t$ (en h)	$x(t)$ (en $10^6$ km)	$y(t)$ (en $10^6$ km)
1 104	104,676594	106,036837
1 105	104,600511	106,11189

permet de calculer l'intensité de la vitesse du mouvement rectiligne correspondant. On a

$$\begin{aligned} v_{r.u.}(1104) &= \sqrt{(-0,076083)^2 + (0,075053)^2} \\ &= 0,10687153 \dots (10^6 \text{ km/h}) = 106\,871,53 \dots \text{ (km/h)}. \end{aligned}$$

C'est une vitesse extraordinaire ! Y a-t-il (néanmoins) moyen d'être encore plus précis ?

Question 15.

Quelles sont les caractéristiques géométriques, ou vectorielles, de la vitesse (instantanée) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme ?

### *La symétrie du cercle à l'œuvre*

On devine assez vite que, si un point mobile est animé d'un mouvement circulaire *uniforme*, alors sa vitesse en n'importe quel point de la trajectoire doit toujours d'une certaine manière « être la même ». Plus précisément, cela signifie que si le sens, la direction et l'intensité du vecteur vitesse sont déterminés en un (seul) point de la trajectoire, ils sont alors déterminés en n'importe quel autre point de celle-ci : une rotation appropriée fait l'affaire. En effet, n'importe quelle chronophotographie d'un point est toujours équivalente à une chronophotographie d'un autre point (réalisée à la même fréquence d'éclairs) par une rotation qui amène l'un sur l'autre.

Pour déterminer les caractéristiques géométriques, ou vectorielles, de la vitesse (instantanée) d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme, il suffit donc de le faire en un seul point de sa trajectoire !

De plus, le calcul de la fin de la question précédente a montré qu'une vitesse très importante n'est pas pour autant très facile à visualiser. Comme de

plus tous les cercles sont homothétiques, revenons-en un moment au bon vieux cercle trigonométrique.

### Une limite visuelle

On peut encore faire découvrir la plupart des caractéristiques géométriques de la vitesse en tant que grandeur vectorielle, à l'aide d'une simulation.

Pour fixer les idées, on considère un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R = 1$  et de vitesse angulaire  $\omega = \pi$  (rad/s). La position à un instant  $t$  est donc décrite par les équations du mouvement

$$\begin{cases} x(t) = \cos \pi t, \\ y(t) = \sin \pi t. \end{cases}$$

Un tableur tel que EXCEL permet de faire varier très simplement un paramètre à l'aide d'une « barre de défilement », et de visualiser directement le résultat sur une figure associée à l'ensemble des données. Dans les figures ci-dessous, on a fait varier le temps  $t$ , en l'écrivant sous la forme  $t = \frac{1}{n}$ , où  $n$  est une valeur entière attachée à la barre de défilement, et variant de 1 à 1000. L'extrémité du vecteur décrivant la vitesse du mouvement rectiligne uniforme correspondant est donné par

$$\begin{cases} v_{r.u.x}(0) = x(0) + \frac{x(t)-x(0)}{t} = x(0) + \left(x\left(\frac{1}{n}\right) - x(0)\right) \cdot n, \\ v_{r.u.y}(0) = y(0) + \frac{y(t)-y(0)}{t} = y(0) + \left(y\left(\frac{1}{n}\right) - y(0)\right) \cdot n. \end{cases}$$

Dans la figure ci-dessous,  $n = 3$  dans la cellule C20.

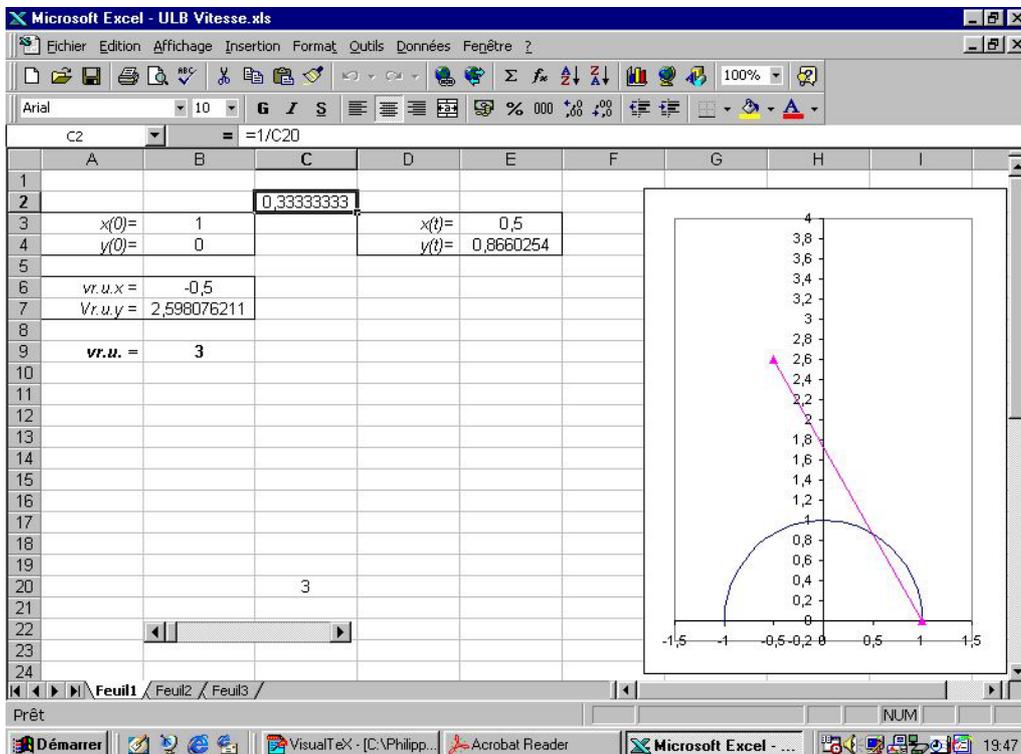


Fig. 47 : Le début du calcul de la vitesse comme grandeur vectorielle.

Et dans la suivante,  $n = 1000$  dans la cellule C20.

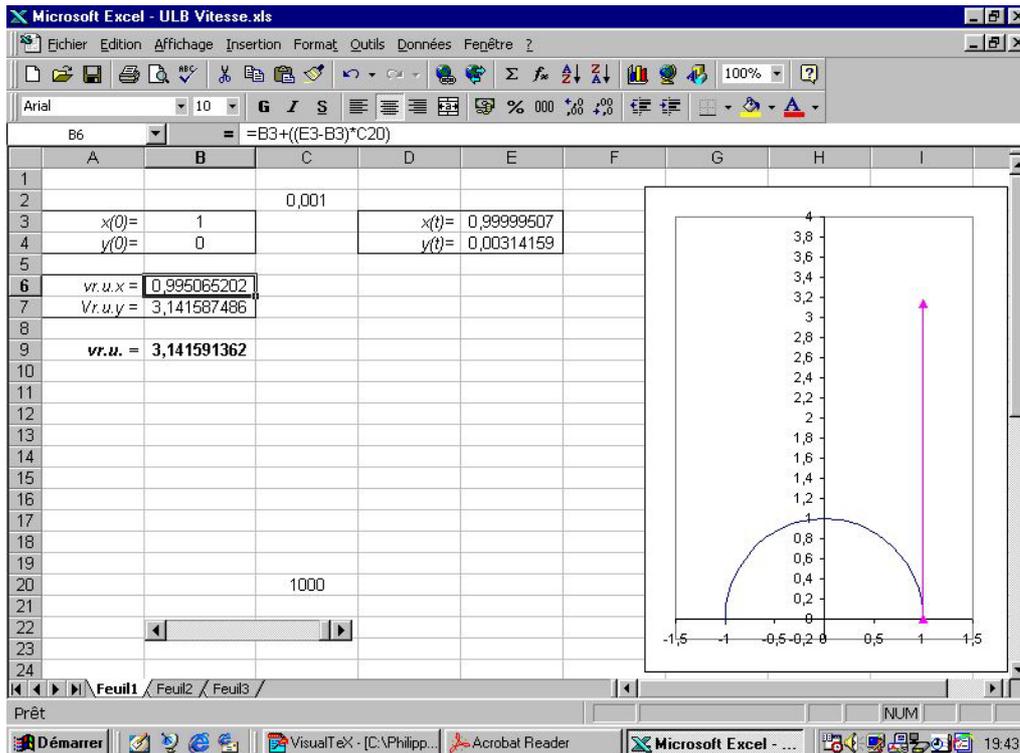


Fig. 48 : La vitesse, à moins d'un millième de seconde.

On observe déjà que la vitesse est quasiment perpendiculaire à l'horizontale, et que son intensité est très proche de  $\pi = 3,141592654\dots$ . On peut reprendre ce genre de simulation en faisant varier les paramètres  $R$ ,  $w$  et  $t$ . À chaque fois, les résultats sont analogues : plus la discrétisation est fine, et plus le vecteur vitesse se redresse. Et il finit par devenir perpendiculaire au rayon horizontal, tandis que son intensité tend à se rapprocher de  $Rw$ .

### La vitesse d'un mouvement circulaire uniforme

En fait, toutes ces observations fournissent aussi les idées principales des démonstrations qui restent à faire.

Considérons un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R$  et de vitesse angulaire  $w$ . Représentons

- par  $M(t)$  ou  $M$ , la position du point mobile à l'instant  $t$  ;
- par  $M(t + \Delta t)$  ou  $M'$ , la position du point mobile à l'instant  $t + \Delta t$ ,  $\Delta t$  est donc l'intervalle de temps nécessaire à parcourir l'arc de cercle  $MM'$  ;
- et par  $\vec{v}(t)$ , la vitesse instantanée du point mobile  $M(t)$ , considérée comme grandeur vectorielle.