Quatrième partie

Aspects historiques et épistémologiques des vecteurs

14

La naissance des vecteurs : un survol historique

Il n'est pas toujours facile d'avoir accès aux textes originaux qui témoignent de l'émergence d'un concept mathématique. Plutôt que d'écrire une introduction historique, nous avons préféré laisser la parole à quelques auteurs qui ont collaboré aux débuts du calcul vectoriel : Caspar Wessel, Jean-Robert Argand, Giusto Bellavitis, Peter-Guthrie Tait et Charles-Ange Laisant. Le lecteur dispose ainsi d'un début d'anthologie sur le sujet. Le choix des textes met en évidence la préoccupation majeure de chaque auteur à son époque : décrire simplement un déplacement c'est-à-dire une grandeur d'une autre espèce qu'un nombre réel, en fait quelque chose qui possède à la fois une direction, un sens et une longueur. Argand les appelle *lignes en direction* ou *lignes dirigées*, Tait les nomme *vecteurs* et Bellavitis les désigne par le terme *droites*.

Ce recueil de textes éclaire de manière significative les options qui ont dicté notre démarche dans les activités de mise en place du calcul vectoriel. La corrélation très étroite qui, dès le départ, allie les concepts de nombre complexe et de vecteur, nous a incité à montrer, dans l'esprit de Bellavitis, comment faire facilement et simplement de la géométrie avec les nombres complexes.

En effet, lorsque l'on tente de remonter aux origines des vecteurs, on se heurte inévitablement au souci qu'avaient les mathématiciens de l'époque de donner un sens aux quantités imaginaires. Cela débouche sur la représentation géométrique des complexes et sur leur généralisation à quatre dimensions, les quaternions.

Peter Guthrie Tait (1831-1901) fut, durant quarante ans, professeur de philosophie naturelle à l'université d'Édimbourg. Il était l'ami de William Thomson (Lord Kelvin) et de William Hamilton, inventeur des quaternions. Tait lui-même a écrit un *Traité élémentaire des quaternions* qui parut en 1867. Dans sa préface, il témoigne :

> Sir W. Hamilton, peu de jours avant sa mort, m'engagea vivement à hâter la rédaction de mon travail et à le publier dans le plus bref délai.
> Le sien était à la veille de paraître...

L'intérêt de cet ouvrage réside dans le fait qu'en plus de l'exposé de la théorie, il retrace brièvement l'historique du concept de vecteur.

Ainsi, au chapitre premier – *Des vecteurs et de leur composition* – nous trouvons :

> 1. Durant plus d'un siècle et demi, la représentation géométrique des quantités algébriques, soit négatives, soit imaginaires, -1 et $\sqrt{-1}$ (ou, selon la manière d'écrire, $-$ et $-^{\frac{1}{2}}$, préférée par d'autres), a formé un sujet favori de spéculation parmi les mathématiciens. L'essentiel de tous les procédés proposés consiste dans l'emploi des symboles ci-dessus pour désigner la *direction* et non la *longueur* d'une ligne droite.
>
> 2. À ce sujet, on s'est depuis longtemps mis en possession du principe d'après lequel, en mesurant les quantités positives le long d'une droite fixe dans un certain sens de sa direction, on devra mesurer les quantités négatives dans le sens de direction opposée de la même droite. Cette convention, en elle-même légitime et utile, forme la base de la méthode géométrique de Descartes, et elle est constamment mise en pratique dans les questions de la Géométrie analytique et dans les Mathématiques appliquées à la Physique.
>
> 3. Wallis, vers la fin du XVII[e] siècle, proposa de représenter les racines impossibles d'une équation quadratique en allant *au dehors* de la droite, sur laquelle on aurait porté les valeurs des racines si elles avaient été réelles. Sa construction revient à donner au symbole $\sqrt{-1}$ la signification de l'unité de longueur menée perpendiculairement à la droite sur laquelle sont portées les quantités réelles.

Nous avons reproduit, en annexe aux pages 555 à 558, un extrait du texte de Wallis [1685] auquel Tait fait allusion. Tait poursuit alors en ces termes :

> 4. En faisant usage des notations ordinaires de la Géométrie analytique à deux dimensions et en employant deux axes rectangulaires, nous pourrons définir le principe en question de la manière suivante : sur Oy l'unité de longueur sera représentée par $\sqrt{-1}$, sur Oy' par $-\sqrt{-1}$; par contre, sur Ox elle le sera par $+1$ et sur Ox' par -1.
>
> Si nous disposons ces quatre quantités dans un ordre circulaire, savoir dans l'ordre dans lequel elles se succéderont lorsqu'on les parcourt à l'aide d'une rotation dans le sens positif (et nous adopterons pour cela le sens opposé à celui du mouvement des aiguilles d'une montre), nous aurons la série
>
> $$+1, \quad \sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}.$$
>
> Dans cette série, chacun des termes se déduit du précédent par la multiplication de ce dernier par le facteur $\sqrt{-1}$. Nous sommes ainsi en droit de conclure que $\sqrt{-1}$ est un opérateur, dont l'application agit d'une manière analogue à celle d'une manivelle qui ferait tourner d'un angle de $90°$, et dans le sens positif, toute ligne droite passant par l'origine et assujettie à se mouvoir dans le plan des xy.
>
> 5. D'après cette manière de voir, la position d'un point dans le plan se trouve déterminée par la donnée d'une seule expression imaginaire. C'est ainsi que $a + b\sqrt{-1}$ pourra être considéré comme la simple représentation d'un point dont les coordonnées sont a et b. Mais on pourra tout aussi bien se servir de l'expression en question pour la représentation de la droite menée de l'origine au point dont il s'agit. Sous ce dernier aspect, l'expression $a + b\sqrt{-1}$ désigne à la fois et la *direction* et la *longueur* de la droite que nous venons de définir ; il est évident, en effet, que la droite forme avec l'axe des x un angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$ et que la longueur de la droite est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Cet extrait atteste clairement le lien existant entre les nombres complexes et les vecteurs du plan. Tait démontre ensuite que la multiplication de $a+b\sqrt{-1}$ par le facteur $\sqrt{-1}$ produit une rotation de $90°$ sans changement de longueur. Plus généralement, la multiplication par le facteur $\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha$ aura pour effet une rotation d'angle α dans le sens positif (la multiplication par $\sqrt{-1}$ étant le cas particulier correspondant à $\alpha = \frac{\pi}{2}$). Cette démonstration est fournie en annexe à la page 559. L'auteur explique ensuite que ce qui précède donne du sens à la formule de Moivre

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + \sqrt{-1}\,\sin m\alpha.$$

En effet, le premier membre représente un opérateur qui produit m rotations successives d'angle α chacune et le second membre exprime l'opérateur d'une rotation unique d'un angle $m\alpha$.

Il fait remarquer que l'expression qui entre dans la formule de Moivre présente une ressemblance frappante avec la forme $N(\cos\theta + \varpi \sin\theta)$ sous laquelle on peut mettre tout quaternion (voir ci-dessous), où N est un réel, θ un angle réel et ϖ tel que $\varpi^2 = -1$. « La différence essentielle réside dans le fait que ϖ n'est pas l'équivalent de l'élément algébrique $\sqrt{-1}$, mais qu'il représente l'unité de longueur *dirigée dans une direction* DONNÉE *quelconque dans l'espace* ». Tait présente alors diverses tentatives qui ont précédé l'invention des quaternions par Hamilton :

> 10. Dans le siècle actuel, Argand[1], Warren et d'autres ont étendu les résultats auxquels Wallis et Moivre étaient arrivés. Leurs efforts tendaient vers le but de représenter par une droite le produit de deux droites dont chacune était donnée par un symbole de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Jusqu'à un certain point ces tentatives ne furent pas vaines, mais le succès en était obtenu aux dépens de la simplicité ; la formidable rangée de radicaux dans le traité de Warren en fait foi.
>
> 11. Une recherche très remarquable a été publiée par Servois dans les *Annales de Gergonne* pour l'année 1813, et, autant qu'on a pu s'en assurer, elle est la seule, pour ce genre de recherches, dans laquelle on puisse découvrir la trace d'une anticipation de l'idée de quaternion. Servois, en cherchant à étendre à l'espace ce que l'expression $a + b\sqrt{-1}$ représente relativement à un plan, se trouve conduit par analogie à écrire
>
> $$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma$$
>
> pour représenter une droite dans l'espace et d'une longueur égale à l'unité, α, β, γ étant les angles que la droite ferait avec les trois axes. Il s'assure facilement que p, q, r ne peuvent pas être des quantités réelles, et il se demande : « Seraient-elles *imaginaires* réductibles à la forme générale $A+N\sqrt{-1}$? » C'est à cette question qu'il n'a pas de réponse. Nous verrons (au Chapitre suivant) que ces symboles ne sont autre chose que les i, j, k du Calcul des quaternions.

Tait conclut en signalant que seul le traité de Hamilton conduit à une méthode pratique douée de simplicité ; toutes les autres méthodes proposées, quelque ingénieuses qu'elles soient, conduisent constamment à des calculs d'une prolixité rebutante. Il donne alors une idée générale de ce à quoi Hamilton a abouti.

L'idée de Bellavitis [1854], que l'on retrouve dans Laisant [1887] (voir le texte en annexe à la page 562) était de définir un produit de vecteurs dont le résultat soit un vecteur. Cette opération correspondait à ce que nous identifions aujourd'hui comme le produit de deux nombres complexes, l'un des complexes jouant le rôle d'un opérateur qui agit sur l'autre en faisant subir à son point représentatif une similitude directe.

Hamilton veut généraliser à l'espace ce produit de vecteurs qui n'est ni un produit scalaire, ni un produit vectoriel. Il considère deux vecteurs $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ et se demande par quel opérateur il faut multiplier $\overline{OA}$ pour obtenir $\overline{OB}$.

Dans le cas simple où ces deux vecteurs ont même direction, il suffit de multiplier $\overline{OA}$ par un « facteur numérique » dont le signe dépend du fait que les vecteurs ont le même sens ou non.

Si les vecteurs ne sont pas parallèles, il essaie d'abord de déterminer « *le nombre des éléments numériques dont doit dépendre* » l'opérateur en question.

Tait poursuit en ces termes :

> Nous pouvons concevoir que la transformation de $\overline{OA}$ en $\overline{OB}$ s'opère successivement de la manière suivante :
>
> D'abord on augmente ou l'on diminue la longueur de $\overline{OA}$, jusqu'à ce qu'elle devienne égale à celle de $\overline{OB}$. Un *seul* nombre suffira pour effectuer cette opération : c'est le quotient des longueurs

[1] Le lecteur trouvera un extrait du texte de J.-R. Argand à la page 521.

des deux vecteurs. Ce nombre, comme Hamilton l'a fait remarquer, sera positif, ou, si l'on veut, privé de signe.

Ensuite on tourne $\overline{OA}$ autour de O jusqu'à ce que sa direction soit la même que celle de $\overline{OB}$, et, concurremment avec la première opération, les deux vecteurs se trouvent ainsi en coïncidence parfaite et sont devenus identiques l'un avec l'autre. Pour exprimer cette seconde opération, il faudra connaître *trois* éléments numériques, qui sont les *deux* angles déterminant le plan dans lequel s'effectue la rotation de $\overline{OA}$ (dans le cas d'une planète, ce seraient la longitude du nœud et l'inclinaison), et l'angle déterminant la valeur même de la rotation.

On voit ainsi que le rapport de deux vecteurs, c'est-à-dire le *multiplicateur* nécessaire pour opérer le changement de l'un des vecteurs dans l'autre, dépend en général de *quatre* nombres distincts : c'est de là que vient le nom de *quaternions* donné à ce multiplicateur.

Hamilton se heurte ainsi à deux difficultés lors de la généralisation à l'espace.

Dans le plan, à *deux* dimensions, le multiplicateur était déterminé par *deux éléments numériques* (en fait un nombre complexe) ; tandis que dans l'espace, à *trois* dimensions, il en faut *quatre*.

L'opérateur est ainsi un quaternion, qu'on représente d'ordinaire au moyen des unités imaginaires indépendantes i, j, k sous la forme

$$q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{avec } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

La deuxième difficulté qu'il devra surmonter est que, si le produit de deux complexes est commutatif, le produit de deux quaternions ne peut l'être. Ceci n'est guère étonnant si l'on reste bien conscient que nombres complexes et quaternions sont les opérateurs d'une similitude directe. Or, dans le plan, la composition de rotations de même centre est commutative ; tandis que dans l'espace, la composition de rotations d'axes concourants ne l'est pas de manière générale.

Dans l'extrait qui suit, Tait décrit les vecteurs de l'espace et la base de ce que nous appelons aujourd'hui le calcul vectoriel. Les passages intercalés dans le texte et mis entre accolades sont ajoutés par le traducteur.

...

Entamons donc le sujet en posant quelques notions géométriques très simples.

15. Considérons deux points A et B *dans l'espace*, et, supposant que A soit donné, demandons-nous quel est le nombre de données nécessaires pour fixer la position de B relativement à celle de A. Il faudra donc *trois* données numériques.

Si nous faisons emploi de coordonnées polaires, et qu'il s'agisse par exemple de définir la position de la Lune relativement à celle de la Terre, nous devrons connaître soit la longitude et la latitude géocentriques du satellite, soit son ascension droite et sa déclinaison, et, de plus, nous devrons connaître la distance ou rayon vecteur de cet astre. Les données seront donc encore au nombre de *trois*.

16. Remarquons de suite qu'aucune mention n'a été faite des coordonnées elles-mêmes soit de A et B, ni de celles de la Terre et de la Lune ; il ne s'est agi que des coordonnées *relatives*.

En conséquence, une expression telle que $\overline{AB}$, en tant qu'elle représente une droite ayant une certaine longueur et une certaine direction, est implicitement dépendante de *trois* nombres ; toute autre droite parallèle à AB et dirigée dans le même sens, dépendra des mêmes trois nombres en question.

Nous pouvons donc établir en principe que *toutes les droites égales et parallèles* {et dirigées dans le même sens} *sont susceptibles d'être représentées par un même symbole, et ce symbole dépendra de trois éléments numériques.* C'est sous ce rapport qu'une droite sera appelée un VECTEUR : à l'aide d'un vecteur nous voyageons, pour ainsi dire, à partir de l'*origine* A du vecteur pour arriver à son *extrémité* B, ou, si l'on veut, ce vecteur sera un *véhicule* qui transporte un certain point mobile à partir de A jusqu'en B {mais représentant d'ailleurs la ligne droite qui relie ces deux points}. On pourra donc se servir d'un vecteur pour représenter un *déplacement* défini et dans l'espace.

17. Nous ferons ici, une fois pour toutes, la remarque suivante, qu'en établissant les principes d'un nouveau Calcul nous sommes parfaitement libres d'introduire telle définition de nos symboles qu'il nous sera convenable de poser, pourvu que nous évitions les définitions qui seraient en contradiction les unes avec les autres. L'inventeur des quaternions, en se donnant cette liberté d'action, n'avait en vue que de donner à sa méthode la plus grande *simplicité* possible, la plus grande conformité, si l'on peut s'exprimer ainsi, aux lois naturelles.

18. Représentons $\overline{AB}$ par α ; d'après ce qui précède, cela nous dira que α dépendra de trois nombres. Supposons que $\overline{CD}$ soit égal en longueur à $\overline{AB}$, et de plus parallèle à $\overline{AB}$ et dirigé dans le même sens ; alors nous pouvons à juste titre poser

$$\overline{CD} = \overline{AB} = \alpha,$$

en employant le signe d'*égalité*, =, pour dénoter que les vecteurs reliés entre eux par ce signe sont à la fois *égaux en longueur* et *parallèles dirigés dans le même sens*. Nous avons ainsi donné une plus grande extension à la signification du symbole algébrique de l'égalité.

De plus, nous observons qu'une égalité telle que

$$\alpha = \beta$$

entre vecteurs contient implicitement trois égalités entre des nombres.

19. Nous arrivons à l'introduction de la définition du signe + dans le nouveau calcul (et à celle du signe −, qui s'en déduira). Soient A, B, C trois points quelconques, et (en vertu de la signification que nous venons de donner au signe de l'égalité =) posons

$$\overline{AB} = \alpha,\ \overline{BC} = \beta,\ \overline{AC} = \gamma.$$

En conformité avec ce que nous avons établi au n° 16 (relativement à la signification d'un vecteur comme pouvant dénoter une translation), nous établirons maintenant qu'entre α, β, γ tels que nous venons de les définir, la relation

$$\alpha + \beta = \gamma$$

devra avoir lieu ; en un mot, nous posons

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

La signification du signe + de l'addition des vecteurs, introduite de cette manière avec un élargissement de la signification purement algébrique de ce signe n'est en contradiction avec aucun des principes précédemment introduits. Il y a plus : la nouvelle signification nous met en possession d'une règle qui régit *la composition des vitesses simultanées tant pour la valeur que pour la direction de la vitesse résultante.*

On trouvera cette règle à l'égard des vecteurs justifiée par une autre considération : c'est qu'en ajoutant ensemble algébriquement des différences de coordonnées rectilignes de même nom de A et de B à celles de B et de C, on devra obtenir les différences de coordonnées correspondantes de A et de C. Cela montre en outre que ces coordonnées devront entrer linéairement dans l'expression d'un vecteur.

20. Dans le cas spécial où le point C (dont la position à l'égard de A est tout à fait arbitraire) vient à coïncider avec A il sera évident que nous aurons

$$\overline{AC} = 0,$$

puisqu'il n'y aura pas de chemin, par suite pas de vecteur, à parcourir entre A et C. Dans ce cas, la relation ci-dessus nous donnera

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Si donc nous définissons la signification du signe $-$ de la soustraction par la relation suivante,

$$\overline{BA} = -\overline{AB},$$

nous verrons que le signe $-$, *appliqué à un vecteur, produit l'effet d'intervertir le sens de direction du vecteur.*

Ce principe s'accorde en tout point avec ceux que nous avons déjà introduits. Par exemple, ayant

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

nous en déduisons

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC},$$

c'est-à-dire

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB},$$

relation qui ne diffère de celle du point de départ que par la permutation de B avec C, et, par la suite, elle ne fait que reproduire le principe primitivement introduit.

21. Pour un triangle ABC quelconque nous avons évidemment

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0,$$

et pour un polygone fermé plan ou gauche, de même,

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{YZ} + \overline{ZA} = 0.$$

Nous aurons aussi

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{YZ} = \overline{AZ}.$$

Ces relations expriment les règles connues de la composition des vitesses et, par la suite, en vertu de la seconde loi de mouvement {suivant les *Principes* de Newton}, elles expriment également les règles de la composition des forces.

L'*interprétation* de l'expression d'une somme de vecteurs gagnera en clarté, si l'on effectue la *construction* de la somme en appliquant la règle pratique suivante : placer l'origine de chacun des termes au point occupé par l'extrémité du terme immédiatement précédent dans l'expression de la somme, l'origine du premier terme étant arbitrairement donnée. De cette manière, *le vecteur qui représente la somme aura pour origine celle du premier terme et pour extrémité le point occupé par l'extrémité du dernier terme en vertu de la construction.* Dans cette opération, le signe $+$ aura reçu la signification de la *liaison* d'une nature définie qu'il s'agit d'établir entre deux termes consécutifs.

22. Si nous composons ensemble un nombre quelconque de vecteurs *parallèles* entre eux, le résultat sera évidemment un multiple de l'un d'entre eux par un nombre abstrait.

Soient A, B, C des points situés sur une même droite ; nous aurons, par exemple,

$$\overline{BC} = x\overline{AB},$$

x étant un nombre positif lorsque B est situé entre A et C ; dans tous les autres cas, x sera négatif : la valeur absolue de x sera dans tous les cas égale au rapport de longueur entre BC et AB. Cette proposition est évidente d'elle-même lorsque ce rapport est commensurable, et par un mode de raisonnement bien connu on l'étendra facilement au cas cas d'un rapport incommensurable.

23. Une proposition importante et presque évidente par elle-même consiste en ce qu'*un vecteur quelconque peut être décomposé en trois composantes parallèles à trois vecteurs donnés, non parallèles entre eux deux à deux ni parallèles à un même plan,* et que, *de plus, cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.*

...

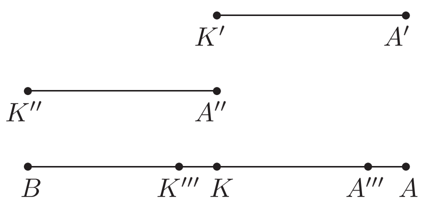
Nous présentons ci-après quelques autres témoignages. D'abord, celui du Norvégien Caspar Wessel. Son étude, qui avait été présentée à l'Académie des Sciences du Danemark en 1797 a été publiée dans les Mémoires de cette Académie. On trouvera en annexe, à la page 560 une version anglaise de cet extrait où il définit la manière d'additionner deux « droites ».

> On ajoute deux lignes droites en les unissant de telle manière que la seconde ligne commence là où finit la première, il passe alors une ligne droite du premier au dernier point des lignes jointes. Cette ligne est la somme des lignes jointes.
>
> Par exemple, si un point avance de trois pieds et recule de deux pieds, la somme de ces deux chemins n'est pas les premiers trois pieds joints aux derniers deux pieds ; la somme est un pied en avant. Car ce chemin, parcouru par le même point, produit le même effet que les deux autres chemins.
>
> ...

Quelques années plus tard, Argand écrivait son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* [1806]. On y trouve notamment ceci :

> ... 5. Observons maintenant que, pour l'existence des relations qui viennent d'être établies entre les quantités $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, ..., il n'est pas nécessaire que le départ de la direction, qui constitue une partie de l'essence de ces quantités, soit fixé à un point unique K ; mais que ces relations ont également lieu, si l'on suppose que chaque expression, comme $\overline{KA}$, désigne en général une grandeur égale à $\overline{KA}$, et prise dans la même direction, comme $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$, $\overline{K'''A'''}$, $\overline{BK}$, ...(fig. 3).

Fig. 3.



> En effet, en suivant, à l'égard de cette nouvelle espèce de grandeurs, les raisonnements qui ont été faits plus haut, on verra que, si $\overline{KA}$, $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$, ... sont des unités positives, $\overline{AK}$, $\overline{A'K'}$, $\overline{A''K''}$, ... seront des unités négatives ; ...
>
> ... 6. En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$, ..., et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.
>
> Comme elles doivent être le sujet des recherches qui vont suivre, il est à propos de leur appliquer une dénomination particulière. On les appellera *lignes en direction* ou, plus simplement, *lignes dirigées*. Elles seront ainsi distinguées des *lignes absolues*, dans lesquelles on ne considère que la longueur, sans aucun égard à la direction...

En 1854, Giusto Bellavitis signait un texte intitulé *Sposizione del metodo delle equipollenze* dans le tome XXV, 2^{e} partie des *Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle scienze residente in Modena*. Nous donnons en annexe (page 561) un extrait du texte original en italien dont voici la traduction. Nous renvoyons également au texte de Laisant [1887] (page 562).

> Cette méthode satisfait à un désir de Carnot de trouver un algorithme, qui représente en même temps et la grandeur et la position des différentes parties d'une figure ; il en résulte, par voie directe, des solutions graphiques simples et élégantes de problèmes géométriques. La méthode des équipollences comprend comme cas particuliers les méthodes de coordonnées parallèles ou polaires, le calcul barycentrique, etc. : les problèmes sur les courbes s'y résolvent en général sans privilégier une manière de représentation plutôt qu'une autre ; le plus souvent les calculs y sont plus rapides qu'en géométrie analytique et les résultats sont exprimés sous une forme plus simple.
>
> Une chose essentielle dans la méthode des équipollences est la distinction entre les quantités positives et négatives, de sorte que la *corrélation* des figures est une conséquence nécessaire de l'algorithme sans nul besoin d'aucune attention spéciale, qui ne peut être que source d'erreur. Celui qui est habitué aux principes de la *Géométrie de Position* trouvera aisé de me suivre dans les quelques conventions sur lesquelles s'appuie la méthode ; peut-être pourrait-on être encore plus proche des usages habituels ; mais je ne trouve pas convenable de donner la préférence à une facilité poussée à l'extrême plutôt qu'à la concision des formules. Les conventions seront faciles à retenir par cœur, parce que certaines sont conformes aux règles habituelles relatives aux quantités positives et négatives, d'autres conformes à la très connue composition des forces. Les équipollences expriment des relations entre droites considérées non seulement comme ayant une grandeur, mais également une direction (ou ce qu'on peut exprimer par inclinaison) ; si bien qu'elles sont essentiellement différentes des équations, qui expriment des relations entre seules quantités réelles ; néanmoins le calcul des équipollences suit exactement les mêmes règles, qui sont utilisées dans les équations, ce qui lui confère pas mal d'avantages.
>
> ...

Bellavitis expose alors sa méthode qui est en fait notre calcul vectoriel et va jusqu'à définir le produit de deux vecteurs, qui n'est rien d'autre que le produit de deux nombres complexes.

Annexe VII

Extraits de textes originaux

CHAP. LXVI.

Of Negative Squares, *and their* Imaginary Roots *in Algebra.*

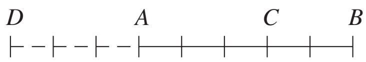
. . .

These *Imaginary* Quantities (as they are commonly called) arising from the *Supposed* Root of a Negative Square, (when they happen,) are reputed to imply that the Case proposed is Impossible. And so indeed it is, as to the first and strict notion of what is proposed. For it is not possible, that any Number (Negative or Affirmative) Multiplied into itself, can produce, (for instance) -4. Since that Like Signs (whether $+$ or $-$) will produce $+$; and therefore not -4.

But it is also Impossible, that any Quantity (though not a Supposed Square) can be *Negative*. Since that it is not possible that any *Magnitude* can be *Less than Nothing*, or any *Number Fewer than None*.

Yet is not that Supposition (of Negative Quantities,) either Unuseful or Absurd; when rightly understood. And though, as to the bare Algebraick Notation, it import a Quantity less than nothing: Yet, when it comes to a Physical Application, it denotes as Real a Quantity as if the Sign were $+$; but to be interpreted in a contrary sense.

As for instance: Supposing a man to have advanced or moved forward, (from A to B,) 5 Yards; and than to retreat (from B to C) 2 Yards: If it be asked, how much he had Advanced (upon the whole march) when at C? I find (by Subducting 2 from 5,) that he is Advanced 3 Yards. (Because $+5 - 2 = +3$.)



But if, having Advanced 5 Yards to B, he thence Retreat 8 Yards to D; and it be then asked How much he is Advanced when at D, or how much Forwarder then when he was at A: I say -3 Yards. (Because $+5 - 8 = -3$.) That is to say, he is advanced 3 Yards less than nothing.

Which in propriety of Speech, cannot be, (thince there cannot be less than nothing.) And therefore as to the Line AB *Forward*, the case is Impossible.

But if (contrary to the Supposition,) the Line from A, be continued *Backward*, we shall find D, 3 Yards *Behind* A. (Which was presumed to be *Before* it.)

And thus to say, he is *Advanced* -3 Yards; is but what we should say (in ordinary form of Speech), he is *Retreated* 3 Yards; or he wants 3 Yards of being so Forward as he was at A.

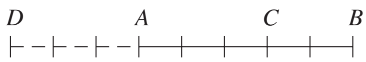
Which doth not only answer Negatively to the Question asked. That he is not (as was supposed,) Advanced at all: But tells moreover, he is so far from being advanced, (as was supposed) that he is Retreated 3 Yards; or that he is at D, more Backward by 3 Yards, than he was at A.

And consequently -3, doth as truly design the Point D; as $+3$ designed the Point C. Not Forward, as was supposed; But Backward from A.

So that $+3$, signifies 3 Yards Forward; and -3, signifies 3 Yards Backward: But still in the same Streight Line. And each designs (at least in the same Infinite Line,) one Single Point: And but one. And thus it is in all Lateral Equations; as having but one Single Root.

Now what is admitted in Lines, must on the same Reason, be allowed in Plains also.
As for instance: Supposing that in one Place, we Gain from the Sea, 30 Acres, but Lose in another Place, 20 Acres: If it be now asked, How many Acres we have gained upon the whole: The Answer is, 10 Acres, or +10. (Because of $30 - 20 = 10$.) Or, which is all one 1600 Square Perches. (For the *English* Acre being Equal to a Plain of 40 Perches in length, and 4 in breadth, whose Area is 160; 10 Acres will be 1600 Square Perches.) Which if it lye in a Square Form, the Side of that Square will be 40 Perches in length; or (admitting of a Negative Root,) -40.
But if then in a third Place, we lose 20 Acres more; and the same Question be again asked, How much we have gained in the whole; the Answer must be -10 Acres. (Because $30-20-20 = -10$.) That is to say, The Gain is 10 Acres less than nothing. Which is the same as to say, there is a Loss of 10 Acres: or of 1600 Square Perches.
Anf hitherto, there is now new Difficulty arising, nor any other Impossibility than what we met with before, (in supposing a Negative Quantity, or somewhat Less than nothing:) Save only that $\sqrt{}1600$ is ambiguous; and may be +40, or -40. And from such Ambiguity it is, that Quadratick Equations admit of Two Roots.
But now (supposing this Negative Plain, -1600 Perches, to be in the form of a Square;) must not this Supposed Square be supposed to have a Side? Anf if so, What shall this Side be?
We cannot say it is 40, nor that it is -40. (Because either of these Multiplyed into itself, will make $+1600$; not -1600).
But thus rather, that it is $\sqrt{} - 1600$, (the Supposed Root of a Negative Square;) or (which is Equivalent thereunto) $10 \sqrt{} - 16$, or $20 \sqrt{} - 4$, or $40 \sqrt{} - 1$.
Where $\sqrt{}$ implies a Mean Proportional between a Positive and a Negative Quantity. For like as $\sqrt{}b\,c$ signifies a Mean Proportional between $+b$ and $+c$; or between $-b$, and $-c$; either of which, by Multiplication, makes $+bc$:) So doth $\sqrt{}-b\,c$ signify a Mean Proportional between $+b$ and $-c$, or between $-b$ and $+c$; either of which being Multiplied, make $-bc$. And this as to Algebraick consideration, is the true notion of such Imaginary Root, $\sqrt{} - bc$.

Ces quantités, dites *imaginaires*, provenant des racines supposées de carrés négatifs, sont censées impliquer que la situation est impossible. Et il en est effectivement ainsi si l'on s'en tient strictement à ce qui est communément admis. Car il est impossible qu'un nombre (négatif ou positif), multiplié par lui-même puisse produire (par exemple) -4, en vertu de la règle des signes. Mais il est tout aussi impossible qu'une quantité quelconque, même non supposée carrée, puisse être négative. En effet, il n'est pas possible qu'une grandeur puisse être *moindre que rien*, ou qu'un nombre soit *plus petit que zéro*.
Mais cette supposition (de l'existence de quantités négatives) n'est ni inutile, ni absurde, lorsqu'elle est bien comprise. Et si, du point de vue de la notation algébrique pure, cela amène une quantité inférieure à zéro, lorsqu'on l'applique à la physique, elle représente une quantité tout aussi réelle que si le signe était $+$, mais il faut l'interpréter en sens contraire.
Ainsi, par exemple : supposons qu'un homme ait avancé (de A vers B) de 5 yards, et qu'ensuite, il ait reculé (de B vers C) de 2 yards. Si on demande de combien il a avancé (quand il est en C), ou à combien de yards il est devant A, je trouve (en soustrayant 2 de 5) qu'il a avancé de 3 yards (parce que $5 - 2 = 3$).



Mais si, ayant avancé de 5 yards vers B, il recule ensuite de 8 yards vers D, et qu'on demande de combien il a avancé quand il est en D, ou combien plus en avant il est de A, je dis -3 yards (parce que $5 - 8 = -3$). C'est-à-dire qu'il a avancé de 3 yards de moins que rien.
Ce qui, du point de vue de la justesse de l'expression ne peut être, puisqu'il ne peut exister moins que rien. Ainsi, si on se limite à la ligne AB vers l'*avant*, la situation est impossible.
Mais si (contrairement à notre supposition) la ligne partant de A peut être prolongée vers l'arrière, nous trouverons D 3 yards derrière A (ce qui est supposé être avant lui).
Et donc, dire qu'il a *avancé* de -3 yards représente ce que nous exprimerions, en langage ordinaire, par : il a reculé de 3 yards, ou il manque 3 yards pour être aussi en avant qu'il l'était en A.
Ceci ne répond pas seulement par un nombre négatif à la question posée, car il n'a pas (comme on l'avait supposé) avancé du tout, mais au contraire, il est si loin d'avoir avancé, qu'il a reculé de 3 yards, et qu'il est en D, 3 yards plus en arrière que lorsqu'il était en A.
Et, par conséquent, -3 désigne le point D aussi réellement que $+3$ désigne le point C. Non pas en avant, comme on l'avait supposé, mais en arrière de A. Ainsi, $+3$ signifie 3 yards en avant et -3, 3 yards en arrière, mais toujours sur la même ligne droite. Et chacun désigne (en tout cas sur la même ligne droite infinie) un et un seul point. Et il en va ainsi pour toute équation du premier degré qui n'admet qu'une seule racine.

Maintenant, ce qu'on admet sur les droites doit, pour la même raison, être admis dans les plans. Et par exemple, supposons qu'en un endroit, nous gagnons 30 acres sur la mer, mais que nous en perdons 20 en un autre lieu, et qu'on demande combien d'acres nous avons gagné en tout ; la réponse est 10 acres ou $+10$ (parce que $30 - 20 = 10$). Ceci représente aussi 1600 perches carrées (car l'acre anglais est une surface rectangulaire de 40 perches de longueur sur 4 perches de largeur dont l'aire est 160 ; 10 acres valent donc 1600 perches carrées).
Si cette surface est un carré, son côté sera long de 40 perches ou (si on admet la racine négative) -40. Mais si en un troisième endroit, on perd 20 acres de plus, et qu'on pose la même question : combien avons nous gagné en tout ? La réponse doit être -10 acres (car $30 - 20 - 20 = -10$) c'est-à-dire que le gain est de 10 acres moins que rien. Ce qui revient à dire qu'il y a une perte de 10 acres ou de 1600 perches carrées.
Et de là naît une nouvelle difficulté, qui n'est pas plus une impossibilité que celle que nous avons rencontrée précédemment (en supposant une quantité négative ou moindre que rien). Ne considérer que $\sqrt{1600}$ est ambigu, cela peut être 40 ou -40. Et de cette ambiguïté, il ressort que les équations quadratiques ont deux racines.
Maintenant (en supposant que cette surface négative -1600 perches a la forme d'un carré), ne doit-on pas admettre que ce supposé carré possède un côté ? Et si oui, que sera ce côté ?
Nous ne pouvons pas dire qu'il vaut 40, ni -40 (parce que l'une ou l'autre de ces valeurs, multipliée par elle-même, donnera $+1600$, pas -1600). Mais plus vraisemblablement, sa valeur est $\sqrt{-1600}$ (la supposée racine d'un carré négatif) ou (ce qui est équivalent) $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$. Le symbole $\sqrt{\ }$ suggère une moyenne proportionnelle entre une quantité positive et une quantité négative. Car, de la même manière que $\sqrt{bc}$ représente une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $+c$, ou entre $-b$ et $-c$ (dont le produit vaut bc dans les deux cas), $\sqrt{-bc}$ indique une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $-c$, ou entre $-b$ et $+c$ (dont le produit vaut $-bc$). Et ceci, sur le plan algébrique, fournit la véritable interprétation d'une telle racine imaginaire $\sqrt{-bc}$.

6. Si l'on opère sur le symbole $a+b\sqrt{-1}$ par le moyen du facteur $\sqrt{-1}$, on obtient $-b+a\sqrt{-1}$; ce résultat établit que les coordonnées x, y du point représenté sont respectivement $-b$ et a ; mais, d'après la seconde manière de voir, $-b+a\sqrt{-1}$ représente la droite menée de l'origine au point $(-b, a)$. La longueur de cette droite est demeurée égale à $\sqrt{a^2+b^2}$, mais la direction de la droite fait avec l'axe des x un angle égal à $\operatorname{tang}^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$, angle qui dépasse de 90° l'angle $\operatorname{tang}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, comme il est facile de s'en assurer.
7. Le théorème de Moivre nous aidera à avancer d'un pas de plus en avant dans la voie. En effet, si nous multiplions, non plus par $\sqrt{-1}$ mais par un facteur plus général égal à $\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha$, ce facteur, opérant sur une droite quelconque dans le plan des xy, aura pour effet de la faire tourner, dans le sens positif, d'un angle égal à α. [On s'aperçoit du reste que le facteur $\sqrt{-1}$ employé en premier lieu ne représente qu'un cas particulier de $\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha$, correspondant à $\alpha=\frac{1}{2}\pi$.]
Nous aurons ainsi, en effectuant la multiplication d'après les règles ordinaires,

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(a+b\sqrt{-1}) = a\cos\alpha-b\sin\alpha+\sqrt{-1}(a\sin\alpha+b\cos\alpha).$$

On s'aperçoit, par la forme même du résultat, que le produit indique l'effet de la rotation d'un angle α, et l'on peut vérifier le fait en faisant tourner les axes de coordonnées d'un angle α (mais dans le sens contraire), à l'aide des formules connues pour le changement d'axes. Nous pouvons aussi vérifier le fait de la rotation de la manière suivante : en premier lieu, la longueur sera

$$[(a\cos\alpha-b\sin\alpha)^2+(a\sin\alpha+b\cos\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},$$

ce qu'elle était auparavant ; en second lieu, l'inclinaison sur l'axe des Ox est égale à

$$\operatorname{tang}^{-1}\left(\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{a\cos\alpha-b\sin\alpha}\right) = \operatorname{tang}^{-1}\frac{(\operatorname{tang}\alpha+\frac{b}{a})}{(1-\frac{b}{a}\operatorname{tang}\alpha)} = \alpha+\operatorname{tang}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$

8. Par ce qui précède nous pouvons maintenant nous rendre compte du sens de la formule

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^m = \cos m\alpha+\sqrt{-1}\sin m\alpha.$$

En effet, le premier membre représente un opérateur qui produit m rotations successives, d'un angle α chacune ; le second membre exprime l'opérateur d'une rotation unique d'un angle $m\alpha$ d'un seul trait.
Arrivés à ce point de la question, nous avons intérêt à constater, par anticipation, qu'un quaternion est généralement susceptible d'être mis sous la forme

$$N(\cos\theta+\varpi\sin\theta),$$

N étant une quantité purement numérique, θ un angle réel et ϖ répondant à

$$\varpi^2=-1.$$

Cette forme de représentation d'un quaternion et les formes d'expression qui entrent dans la formule de Moivre ont entre elles une grande ressemblance ; mais il y a entre elles une différence essentielle (et c'est en elle que réside le point capital de l'invention de Hamilton), savoir que ϖ n'est pas l'équivalent de l'élément algébrique $\sqrt{-1}$, mais qu'il représente l'unité de longueur *dirigée dans une direction* DONNÉE *quelconque dans l'espace.*

Two right lines are added if we unite them in such a way that the second line begins where the first one ends, and then pass a right line from the first to the last point of the united lines. This line is the sum of the united lines.
For example, if a point moves forward three feet and backward two feet, the sum of these two paths is not the first three and the last two feet combined ; the sum is one foot forward. For this path, described by the same point, gives the same effect as both the other paths.

Questo metodo soddisfa un desiderio del Carnot di trovare un algoritmo, che rappresenti nello stesso tempo e la grandezza e la posizione delle varie parti di una figura ; ne risultano quindi, per via diretta, eleganti e semplici soluzioni grafiche dei problemi geometrici. Il metodo delle equipollenze comprende come casi particolari i metodi delle coordinate parallele o polari, il calcolo baricentrico ecc. : i problemi sulle curve vi si risolvono in generale senza preferire una maniera di rappresentazione ad un' altra ; perlochè i calcoli sono più spediti di quelli della Geometria analitica, ed i risultamenti sono espressi sotto forma più semplice.
È essenziale nel metodo delle equipollenze la distinzione delle parti positive dalle negative, sicchè la *correlazione* delle figure è una conseguenza necessaria dell' algoritmo, senza che vi sia bisogno di alcuna speciale osservazione, perlochè viena tolta ogni tema di errore. Chi sia abituato ai principj della *Géometrie de Position* troverà facile seguirmi nelle poche convenzioni su cui si appogia il metodo ; forse si potrebbero rendere ancora più conformi all' uso ordinario ; ma non trovo conveniente di posporre la brevità delle formule ad una leggerissima facilità. Le convenzioni saranno facili da ritenersi a memoria, perchè alcune conformi alle solite regole relative alle quantità positive e negative, altre conformi alla notissima composizione delle forze. Le equipollenze esprimono relazioni di rette considerate non solo rispetto alla direzione (o inclinazione che voglia dirsi) ; sicchè esse sono essenzialmente differenti dalle equazioni, che esprimono relazioni di sole quantità reali ; nulladimeno il calcolo delle equipollenze segue precisamente le stesse regole, che valgono nel calcolo delle equazioni, il che torna non poco vantaggioso.
. . .

CHAPITRE II

Multiplication et division des droites.

Produit de deux droites.–Produits de plusieurs droites.

28. Jusqu'à présent, dans les calculs que nous avons effectués sur les droites, nous n'avons fait intervenir que la multiplication *par un nombre réel.* Nous avons maintenant à considérer des produits de droites multipliées les unes par les autres, et pour cela, nous devons tout d'abord définir le produit de deux droites, que nous supposerons ramenées à la même origine O.

Le produit de deux droites OA, OB *est une droite* OC *dont la* longueur *est égale au* produit *des longueurs de* OA *et* OB*, et dont l'*inclinaison *est égale à la* somme *des inclinaisons de* OA *et* OB.

Il suit de là que l'équipollence[10] OA.OB = OC entraîne les deux égalités[11]

$$\text{gr.OA} \times \text{gr.OB} = \text{gr.OC} \quad \text{et} \quad \text{inc.OA} + \text{inc.OB} = \text{inc.OC}.$$

Une première remarque, indispensable à faire, c'est que, tandis que la somme de deux droites était tout à fait indépendante de tout autre élément du plan, leur produit dépend au contraire de l'origine des inclinaisons que l'on a choisie.

Malgré la multiplicité des inclinaisons d'une droite donnée, il ne peut y avoir aucune indécision sur la direction du produit, puisque l'inclinaison de celui-ci ne peut jamais être altérée que d'un nombre entier de circonférences, ce qui ne change rien à sa direction.

Sans contester ce qu'une définition comme celle que nous venons de donner peut en apparence présenter d'arbitraire *a priori*, il est bon de montrer cependant qu'elle se justifie assez naturellement, à la condition qu'on admette pour unité la droite OI de longueur égale à l'unité et dirigée suivant l'origine des inclinaisons.

D'après la définition de la multiplication admise en Arithmétique, on doit former le produit OC, au moyen du multiplicande OA, comme le multiplicateur OB est formé au moyen de l'unité OI. Or, quelles opérations a-t-on fait subir à OI pour l'amener en OB ? On a modifié la longueur dans le rapport $\frac{\text{gr.OB}}{\text{gr.OI}} = \text{gr.OB}$, puis on a fait tourner la droite ainsi obtenue, dans le sens convenable, de l'angle $\beta = \text{inc.OB}$. L'analogie nous conduit donc à dire, que pour avoir le produit OA.OB, nous devons modifier la longueur de OA dans le rapport gr.OB, ce qui donnera une droite de longueur gr.OA x gr.OB dirigée suivant OA, puis faire tourner cette droite de l'angle β. Or, elle avait pour inclinaison $\alpha = \text{inc.OA}$. Son inclinaison après la rotation sera donc $\alpha + \beta$; c'est-à-dire que nous retombons précisément sur la droite OC, telle que nous l'avons définie plus haut.

[10] Il faut entendre l'égalité.

[11] La notation gr.AB désigne la longueur (grandeur) d'une droite AB, indépendamment de la direction de cette droite.

La notation inc.AB désigne l'inclinaison d'une droire AB. C'est l'angle formé par la droite OM (OM=AB) et une droite OX appelée *origine des inclinaisons.* L'inclinaison est *positive* si la rotation qui amène OX sur OM s'effectue dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, sinon elle est négative.