



CREM

Nivelles, le 31 août 2002

VERS UNE GÉOMÉTRIE NATURELLE

Recherche N° 72/01 financée par le Ministère de la Communauté Française,
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique,
Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation
et du Pilotage interréseaux

Rapport de fin d'année, deuxième partie

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.

5 rue Émile Vandervelde B-1400 Nivelles Belgique

Tél. +32-(0)67 21.25.27 Fax. +32-(0)67 21.22.02 Cpte 068-2179326-54

rouche@amm.ucl.ac.be

RAPPORT AU TERME DE TROIS ANNÉES DE RECHERCHE (DEUXIÈME PARTIE)

Le présent document est la deuxième partie du rapport final d'une recherche qui s'est étalée sur trois ans. La première partie du rapport est présentée à part sous le titre *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur*.

AUTEURS DE LA RECHERCHE

Ce rapport est le fruit d'une recherche collective. Les membres du groupe de recherche sont : Michel Ballieu, Marie-France Guissard, Maria-Izabela Krysinska, Patricia Laurent, Christine Lemaître, Nicolas Rouche, Thaïs Sander, Philippe Tilleuil, Françoise Van Dieren, Marie-Françoise Van Troeye, Patricia Wantiez.

Chaque chapitre a été particulièrement pris en charge par une ou plusieurs personnes :
Thaïs Sander, Patricia Laurent, Christine Lemaître et Marie-Françoise Van Troeye pour les chapitres 1 et 2,

Nicolas Rouche pour le chapitre 3,

Françoise Van Dieren pour le chapitre 4,

Patricia Wantiez pour le chapitre 5,

Maria-Isabela Krysinska pour les chapitres 6 et 7,

Philippe Tilleuil pour le chapitre 8,

Michel Ballieu et Marie-France Guissard pour le chapitre 9,

Nicolas Rouche, soutenu par d'intéressantes conversations avec Philippe Tilleuil, pour le chapitre 10.

La mise au point informatique de l'ensemble du texte a été réalisée par Michel Ballieu et Marie-France Guissard. Patricia Wantiez a réalisé la plupart des figures du chapitre 4, et Guy Noël la plupart des figures des chapitres 6 et 7.

REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement toutes les personnes qui ont lu et commenté diverses versions provisoires de ce rapport. Il s'agit tout d'abord des membres du Comité d'Accompagnement de notre recherche au Ministère de l'Éducation et aussi des membres du Comité d'Accompagnement interne au CREM, en particulier Ginette Cuisinier, Thérèse Gilbert, Guy Noël. Nous remercions également les participants de nos formations dans le cadre de l'ASBL Formation en Cours de Carrière et de l'ICAFOC. Nous avons largement profité des critiques et recommandations de toutes ces personnes. Il va de soi cependant que la responsabilité finale de ce rapport incombe à ses seuls auteurs. Merci encore à Michel Thomas pour nous avoir éclairé sur un passage délicat d'un auteur grec et à Alain Destatte pour la réalisation de nombreuses photos.

FINANCEMENT DE CETTE RECHERCHE

Cette étude a été réalisée dans le cadre des conventions de recherche N^{os} 72/99, 72/00 et 72/01, financées par le Ministère de la Communauté française, Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux.

Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le Comité de Concertation de la Formation Continue du Caractère non confessionnel.

Deux postes de chargé de mission ont été affectés à temps partiel à cette recherche par le Comité de Concertation de la Formation Continue du Caractère confessionnel.

AVANT-PROPOS

En d'autres termes, il s'agit ici de raviver et de mettre en forme sur le plan psychologique les représentations fondamentales de l'espace que tout être humain se construit depuis l'enfance en manipulant des figures de l'espace, et qu'il clarifie sans cesse au cours de sa vie mentale, les différenciant et les articulant les unes aux autres. Cette insistance sur les représentations intuitives ne signifie pas que les considérations logiques sont exclues ici. Au contraire, nous allons bientôt construire des preuves. Mais ces preuves ont davantage pour but de clarifier les raisons d'être de certains phénomènes et leurs liens avec d'autres, que de montrer leur validité. [...] On peut expliquer les preuves « intuitives » comme ceci : nous considérons comme acquises intuitivement certaines relations géométriques dans un contexte précis, et grâce à des déductions logiques, nous en tirons des propriétés géométriques qui ne nous paraissent pas évidentes.

ERICH WITTMANN

Le sujet de la *géométrie naturelle* a déjà été traité – quoique seulement dans le cadre du plan – par le CREM dans une étude intitulée *Formes et mouvements* (voir le chapitre 4 de CREM [2001a]). Il existe dans l'histoire des antécédents remarquables à la géométrie que nous appelons ainsi. Que l'on songe, pour n'en citer que deux, à ARNAULD (inspiré par PASCAL) au XVII^e siècle et à CLAIRAUT au XVIII^e. L'auteur contemporain qui nous a le plus inspiré est E. WITTMANN [1987]. C'est même lui qui nous a suggéré la dénomination de *géométrie naturelle*.

Dans la mesure où il est possible de le dire en aussi peu de mots, il s'agit d'une géométrie qui part de propriétés arrivées à l'évidence dans l'action quotidienne et qui, en s'écartant le moins possible du sens commun, aboutit à organiser et prouver certaines propriétés non évidentes. Une telle géométrie convient aux débutants, mais elle contribue aussi à l'heuristique de la pensée géométrique en général. Elle est particulièrement appropriée à la conception d'un enseignement en spirale et en outre elle permet parfois d'accéder avec peu de prérequis à certaines questions assez avancées.

Outre quelques contributions de nature théorique, notre étude propose, de la maternelle jusqu'à 18 ans, quelques exemples de situations relevant de la géométrie naturelle. Les divers chapitres se suivent dans l'ordre chronologique des classes du maternel, du primaire et du secondaire. Survolons-les maintenant sans respecter cet ordre, mais plutôt en mettant en évidence les affinités entre les sujets traités.

L'introduction tente de cerner l'idée d'une géométrie naturelle, à partir des études antérieures du CREM.

Le chapitre 1 propose pour l'école maternelle des jeux et dessins de cubes. Le chapitre 2 traite de la même matière, plus systématiquement, pour l'école primaire. Il propose successivement des assemblages de cubes, des assemblages de cartons représentant des cubes et enfin des représentations de ces assemblages sur du papier tramé. Le chapitre 3, de nature plus théorique, complète les chapitres 1 et 2 par une analyse de la capacité à voir dans l'espace. À l'autre bout de la scolarité, le chapitre 8 esquisse les possibilités du jeu appelé K'NEX pour enseigner les éléments de la géométrie de l'espace, dans le contexte des polyèdres. Le chapitre 9, quant à lui, introduit aux groupes de symétries dans le plan et l'espace, à partir des polygones et des polyèdres.

Le chapitre 7 établit quelques propriétés non évidentes du parallélisme et de la perpendicularité dans les débuts de la géométrie de l'espace.

Le chapitre 4 élabore la notion d'aire de polygone. Le chapitre 5 traite de la transformation de tout polygone en un carré de même aire. Le chapitre 6 montre que la méthode de Cavalieri pour les volumes et les aires s'inscrit dans le cadre de la géométrie naturelle.

Le chapitre 10 enfin montre comment engendrer les coniques en s'appuyant sur des courbes de niveau.

Ajoutons que cette étude résulte du travail d'une équipe dans laquelle chacun a pu exprimer librement sa sensibilité. D'ailleurs, la géométrie naturelle n'est pas une idée que l'on puisse cerner de façon définitive. Les différents chapitres montrent bien la variété de ses interprétations possibles, ce qui a pour effet heureux de constituer, pour l'avenir, les bases d'un débat qui demeure nécessaire.

Présentation type des situations-problèmes

Les situations-problèmes rassemblées dans les chapitres 1, 2, 4, 8 et 9 de ce rapport sont présentées selon un plan uniforme¹ comportant les rubriques suivantes :

De quoi s'agit-il ? – Description, en une ligne ou deux, de l'activité proposée aux élèves.

Enjeux – Matières couvertes et compétences visées.

De quoi a-t-on besoin ? – Description du matériel requis. Relevé des connaissances supposées chez les élèves.

Comment s'y prendre ? – Cette rubrique comporte des questions à proposer aux élèves, des indications pour organiser le travail en classe, des éléments de réponses aux questions, et les éléments de la théorie auxquels la situation aboutit normalement.

Échos d'une ou plusieurs classes – Indications sur le déroulement de l'activité dans l'une ou l'autre classe expérimentale. On relève les réactions les plus communes, mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées.

Prolongements possibles – Nouvelles situations-problèmes, plus ou moins difficiles que celle faisant l'objet principal de la section. Ces situations peuvent jouer le rôle de variantes, d'exercices, de questions d'évaluation, de poursuite du travail pour les élèves mordus.

Vers où cela va-t-il ? – À quelles questions mathématiques plus avancées la situation en question prépare-t-elle de manière directe ou indirecte ? Quels rapports la situation en question entretient-elle avec d'autres disciplines ? Quelle place la situation occupe-t-elle dans la culture mathématique globale ?

Commentaires – Éclaircissements de toutes natures susceptibles d'être utiles aux enseignants et aux élèves, comme par exemple des indications sur l'histoire des mathématiques, des commentaires sur le caractère plus ou moins réaliste de certains modèles mathématiques, etc.

¹ Ce plan est inspiré par E. C. WITTMANN et G. MÜLLER [1990] et [1994]. Nous l'avons mis au point à l'occasion d'une recherche précédente (voir CREM [2001b]).

INTRODUCTION : LA GÉOMÉTRIE NATURELLE, UNE GÉOMÉTRIE DE SENS COMMUN

Pour le dire sommairement, ce que nous appelons *géométrie naturelle* dans cet ouvrage est une géométrie accessible à tout un chacun, ancrée dans le sens commun et qui ne recourt pas aux mesures (ceci est un choix que nous avons fait). Ce premier chapitre a pour objectif d'en montrer l'existence et les modalités principales. Il est divisé en trois sections : nous commençons par un exemple commenté qui montre déjà, dans une certaine mesure, ce qu'est la géométrie naturelle ; ensuite nous tentons de dégager les caractères propres d'une telle géométrie et en particulier ce qui la distingue des exposés géométriques classiques, ceux qui ont la forme d'un développement axiomatique de grande ampleur ; et enfin nous nous interrogeons sur son utilité et sa légitimité.

1 Un exemple d'argumentation géométrique proche du sens commun

1.1 L'exemple

Considérons un angle droit $\widehat{ABC}$ situé au-dessus d'un plan horizontal.

(A) Si un des côtés de l'angle, par exemple AB , est horizontal, et si l'autre n'est pas vertical, alors la projection verticale de l'angle sur le plan est un angle droit.

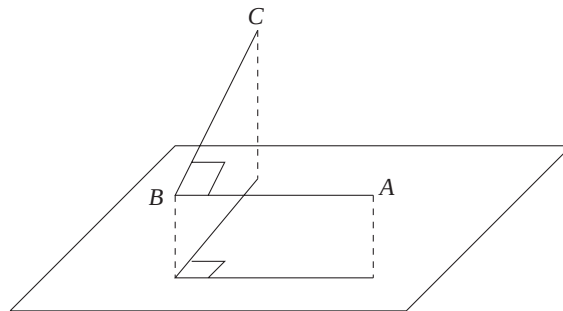


Fig. 1

Cette proposition est facile. L'angle droit avec un côté horizontal est *un objet simple* et bien défini. Le projeter verticalement sur un plan horizontal est *une opération*, elle aussi, *simple* et bien définie. On dessine sans peine une figure *typique* de la question posée, c'est-à-dire une figure qui représente toutes les situations en cause, sans imposer trop d'effort à l'imagination (voir figure 1).

Soit maintenant un angle droit $\widehat{ABC}$ situé au-dessus d'un plan horizontal, et qui se projette verticalement sur celui-ci suivant un angle droit. Que peut-on dire de la position d'un tel angle dans l'espace ? En particulier, est-ce qu'un au moins de ses côtés est horizontal ?

Il est intéressant, pour y voir clair, d'essayer d'ajuster une équerre dans un coin d'une pièce d'habitation. Après sans doute bien des tâtonnements, on arrive à soupçonner que si un angle (pas celui de l'équerre) a son sommet sur l'arête et que chacun de ses côtés suit un des deux murs en descendant, alors l'angle est aigu (voir figure 2). Et aussi que si un des côtés suit un mur en descendant, et que l'autre côté suit l'autre mur en montant, alors l'angle est obtus (voir figure 3).

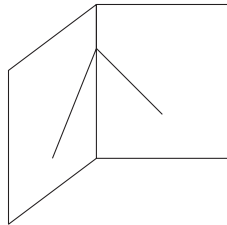


Fig. 2

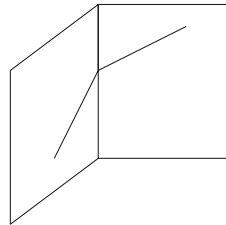


Fig. 3

On en vient alors à conjecturer que :

(B) Si un angle droit situé au-dessus d'un plan horizontal se projette verticalement sur celui-ci suivant un angle droit, alors c'est que, forcément, un de ses côtés est horizontal.

Pour prouver cela, on peut montrer que si aucun des côtés n'est horizontal, alors l'angle projeté n'est sûrement pas droit.

Voyons donc cela d'un peu plus près. Si aucun des côtés de $\widehat{ABC}$ n'est horizontal, alors soit les deux côtés percent le plan, soit un des côtés et le prolongement de l'autre percent le plan, soit les deux prolongements percent le plan. Contentons-nous d'examiner le premier cas. Les deux autres se traiteraient de manière analogue.

Supposons que A et C soient les points de percée de $\widehat{ABC}$ dans le plan. Faisons tourner l'angle $\widehat{ABC}$ autour de AC comme charnière, jusqu'à l'amener en position horizontale, en B' . C'est ce que montre la figure 4.

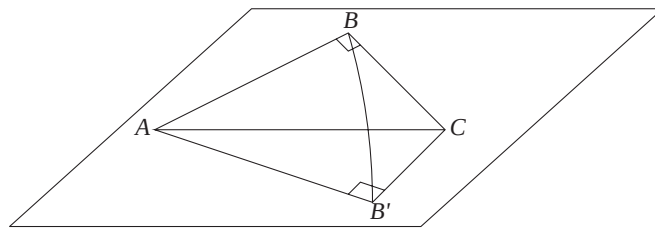


Fig. 4

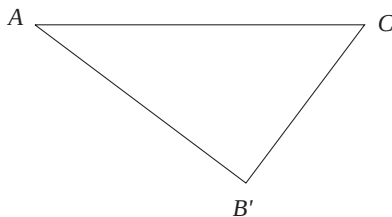


Fig. 5

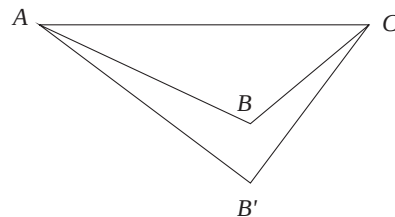


Fig. 6

La figure 5 montre l'angle rabattu vu du dessus. Nous voyons $\widehat{AB'C}$ en vraie grandeur. Ramenons l'angle jusqu'à sa position de départ par une rotation de sens inverse autour de AC . Le sommet B de l'angle, revenu à sa position de départ au-dessus du plan, est vu du dessus quelque part à l'intérieur du triangle $AB'C$ (en fait sur la hauteur issue de B'). Donc la projection de l'angle $\widehat{ABC}$ sur le plan horizontal est un angle obtus.

1.2 Analyse de l'exemple

Au rebours de la proposition directe (A), la réciproque (B) est difficile. Ce qui est donné, c'est *la propriété* qu'a un angle droit de se projeter suivant un angle droit. Cet angle droit projeté est simple à imaginer. Mais on sait d'expérience qu'une projection peut correspondre à une infinité d'objets projetés. Où donc peut se trouver l'angle que l'on projette ? Et surtout quelles directions dans l'espace peuvent prendre ses côtés ? On est obligé de chercher à clarifier un ensemble infini de situations dont chacune est difficile à se représenter : la projection verticale d'un angle, fut-il droit, situé de façon quelconque, est difficile à voir.

Alors on conjecture que la réciproque est vraie, mais cette conjecture n'a rien d'évident. Il faut donc l'assumer jusqu'à la preuve ou la réfutation. L'ennui est que, pour la prouver, l'énoncé invite à remonter de la projection (que l'on voit bien) à l'angle projeté, difficile à cerner vu l'ambiguïté (*bis repetita placent* !)

La seule démarche claire avec les projections, c'est, pour le dire familièrement, quand on va de l'objet à sa projection, pas l'inverse. Donc on s'arrange pour raisonner dans le bon sens. On considère toutes les situations où l'angle à projeter n'a pas de côté horizontal (en effet, considérer les autres ne conduirait nulle part). Et on entreprend de montrer que pour ces angles-là, la projection n'est pas un angle droit. On voit ainsi comment on est naturellement poussé vers ce que l'on appelle la contraposée de la conjecture.

On est soulagé d'être ramené au sens qui va de l'objet à sa projection, plutôt que l'inverse. *On peut alors, en effet, recommencer à imaginer une situation typique.* Mais il se fait qu'il y en a de trois sortes. Et donc on les prend une par une.

On prend le cas où les deux côtés de l'angle à projeter coupent le plan, et la situation que l'on dessine est typique (on dit aussi *paradigmatique*) : ceci veut dire qu'elle est assez simple pour représenter toutes les situations du même type.

Voyons maintenant quelles manœuvres à partir de là conduisent à la preuve. On rabat l'angle sur le plan horizontal, puis on le remonte, par un mouvement continu de rotation, jusqu'à sa position initiale. On s'aperçoit alors que le sommet de l'angle ramené à cette position se projette à l'intérieur du triangle $AB'C$. Et on conclut à vue que la projection de l'angle droit est un angle obtus.

1.3 L'exemple regardé avec du recul

Terminons par un bref inventaire des observations que l'on peut faire à propos de cette argumentation, en mettant principalement en évidence ce qui ne relève pas des mathématiques constituées.

1) Les énoncés étudiés concernent les directions horizontale et verticale, qui sont des directions physiques. Toutefois, ces énoncés ont un lien étroit avec d'autres énoncés plus généraux, indépendants de ces références à la physique : ceux dans lesquels la direction du plan n'est pas spécifiée et où *l'angle droit ayant un côté horizontal* est remplacé par *un angle droit ayant un côté parallèle au plan*.

- 2) Le premier énoncé renvoie à une figure et, par des symboles littéraux, à des points de la figure. Un énoncé abstrait aurait laissé au lecteur le soin de se construire une image mentale de la situation.
- 3) Les figures sont choisies de façon à être *vues au mieux*, ce qui implique qu'elles ont été conçues par référence à l'observateur. Ainsi, à la figure 1, l'angle à projeter est situé au-dessus du plan horizontal ; ensuite un de ses côtés est non seulement horizontal (ce qui se devait), mais frontal. À la figure 5, le plan horizontal est identifié au plan de la feuille et l'observateur est supposé le regarder du dessus.
- 4) Les projections orthogonales ne sont pas envisagées techniquement. Les propriétés qu'on en utilise sont celles qu'elles partagent, de manière approximative, avec ce que donne un regard du dessus sur un plan horizontal. On recourt donc ici à l'expérience acquise d'un accord suffisant entre les propriétés du regard et celles de la projection.
- 5) On recourt à un mouvement continu.
- 6) Enfin, comme nous l'avons vu, mais c'est l'observation la plus cruciale, le raisonnement comporte deux phases. L'ensemble des situations à envisager étant par trop touffu, on l'a ramené (d'une part par le passage à la contraposée, et de l'autre par la division en trois cas) à quelques ensembles plus petits, chacun maîtrisable par l'imagination. Il ne restait plus alors qu'à raisonner, dans chacun des cas, sur un exemple (une figure) représentatif de toutes les situations en cause.

2 Qu'est-ce qui caractérise en général la géométrie naturelle ?

L'exemple que nous venons de traiter et d'analyser assez longuement donne sans doute déjà une idée raisonnable de ce que nous appelons une géométrie naturelle. Plaçons-nous maintenant à un niveau plus général, en cherchant à caractériser cette géométrie telle qu'elle est représentée par tous les exemples traités dans notre recherche, et ceux que l'on pourrait encore y adjoindre. Certes, chacun des auteurs a vu le thème de la géométrie naturelle avec sa sensibilité propre. On ne peut nier qu'il y ait *des variétés de géométrie naturelle*. Cherchons néanmoins à nous approcher de ces démarches géométriques qui, tout en partant du terrain familier des élèves, conduisent toutefois clairement vers les géométries constituées, mais sans les assumer au départ.

L'exposé qui suit voudrait être une synthèse cohérente et raisonnablement complète, qui éclaire toutes les contributions de notre recherche. Pour lui assurer ce caractère, nous avons accepté qu'il comporte un certain degré de redondance avec ce qui précède.

2.1 Des notions familières

Au cours de l'enfance, les êtres humains apprennent en famille, à l'école, dans la rue, ... à manier et connaître les choses de leur environnement. Ils se familiarisent en particulier avec les propriétés essentielles de forme et de grandeur. Nous considérons ici ceux d'entre eux dont les connaissances dans ce domaine se limitent aux notions les plus répandues, les plus nécessaires à la vie (à l'exception – rappelons-le – des mesures), celles qui pour cela sont inscrites dans le sens commun.

Cet ensemble de connaissances élémentaires et fondamentales est loin d'être vide. Par exemple, tout le monde sait ce qu'est une ligne droite. Une telle ligne n'est pas vue comme infinie, mais elle est en tout cas extensible. Il en va de même de la notion de surface plane, conçue elle aussi comme non bornée, mais extensible. On utilise les termes de *droite* et de *plan* dans ces acceptions familières, en renvoyant à des propriétés au départ non explicitées, mais mobilisables. Autres exemples : tout le monde sait, ou au moins peut acquérir sans trop de peine l'expérience de ce que sont deux droites

qui se coupent, deux droites parallèles, un angle, un angle droit, un cercle et son centre, deux plans qui se coupent, deux plans parallèles.

Certaines de ces notions – et peut-être toutes – trouvent leur origine dans l'environnement physique. Par exemple, la genèse de l'angle droit est liée à l'horizontale et à la verticale, au point que l'usage confond parfois les deux termes de *vertical* et *perpendiculaire*.

Tout le monde comprend ce que sont deux longueurs égales (au sens de superposables), ou une longueur plus grande qu'une autre. On voit ce qu'est le milieu d'un trait, la somme de deux longueurs. Et de même on comprend ce que sont deux angles égaux ou inégaux, et la somme de deux angles (inutile ici de préciser *deux grandeurs angulaires*).

Tout le monde comprend ce que sont certains mouvements simples. Par exemple, transporter une chose en ligne droite sans changer son orientation dans l'espace, ou encore faire tourner une chose autour d'un axe. Peu importe que les termes de *translation* ou *rotation* soient connus ou non, les mouvements eux sont familiers.

La vue du dessus d'un objet situé au-dessus d'un plan horizontal n'est certes pas une notion précise. Elle possède néanmoins certaines propriétés raisonnablement claires et utiles. Par exemple, un angle droit parallèle au plan horizontal est perçu comme un angle droit (même si son image sur la rétine n'est pas un angle droit). Ou encore, si un point se trouve au-dessus d'une figure polygonale convexe dessinée dans le plan, on le voit à l'intérieur de la figure.

Toutes ces choses sont *connues intuitivement*. Mais il y a plus, car elles sont dotées de propriétés susceptibles d'être engagées dans des raisonnements. Donnons-en quelques exemples.

2.2 Des propriétés connues ou aisément reconnaissables

Il va de soi, par exemple, que si deux grandeurs sont égales à une même troisième, elles sont égales entre elles. Ou que si on veut maintenir constante une somme de deux grandeurs, et si on diminue un des termes de la somme, il faut augmenter l'autre.

De même, si deux angles sont opposés par le sommet, on reconnaît qu'ils sont égaux, ce qui est particulièrement clair si on les considère en position frontale, avec leurs deux côtés également inclinés. Ou encore, si on translate une droite dans une direction qui lui est parallèle, elle glisse sur elle-même et donc ne change pas de position. Dernier exemple enfin, personne ne contestera que les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu.

Ainsi, certains objets géométriques de base sont connus familièrement. Ils sont ce que H. FREUDENTHAL appelle des *objets mentaux*, par opposition aux concepts définis techniquement au sein d'une théorie mathématique organisée formellement. Les propriétés de ces objets demeurent d'ordinaire au niveau implicite. Mais lorsque la nécessité s'en fait sentir, par exemple dans des problèmes de construction, elles sont reconnues, identifiées, et deviennent mobilisables dans des raisonnements. Elles sont alors, selon l'expression de FREUDENTHAL, des outils efficaces pour organiser, comprendre, certains champs de phénomènes.

Essayons maintenant d'approfondir encore la notion de géométrie naturelle.

2.3 Des objets déplaçables

Les objets étudiés en géométrie naturelle ne sont pas des ensembles immobiles dans un espace abstrait. Ce sont des objets déplaçables, solides. Ils sont solides au sens où, dans tous les déplacements physiques ou mentaux qu'on leur fait subir, ils conservent leur forme et leur grandeur. Une telle

affirmation ne heurte pas le sens commun, même si elle renvoie aux problèmes de la *conservation* étudiés par PIAGET et à l'élucidation philosophique de la constance des objets (cf. MERLEAU-PONTY [1945]). La notion d'*espace* n'apparaît pas dans le cadre de la géométrie naturelle, et lorsqu'on y étudie des objets plans, ce ne sont pas des objets *du plan*.

2.4 Des symétries de deux ordres

Des symétries de deux ordres contribuent à faciliter la saisie des objets auxquels on accède par la géométrie naturelle. Il s'agit d'abord de la symétrie du corps humain et plus particulièrement de ses organes de perception (principalement mais pas seulement la vue) : l'être humain possède, en gros, un plan de symétrie. Il s'agit ensuite de la symétrie des deux directions physiques de base à la surface de la terre, à savoir l'horizontale qui est une direction de plans, et la verticale qui est une direction de droites.

Le plan de symétrie du corps humain, dans la plupart de ses positions habituelles à l'état de veille, est un plan vertical, ou à peu près. Les objets *plans* sont perçus le plus fidèlement lorsqu'ils se trouvent devant l'observateur et dans un plan frontal, à distance ni trop petite, ni trop grande.

Répétons que, pour saisir une projection orthogonale d'un objet sur un plan, il est éclairant de placer l'objet au-dessus du plan disposé horizontalement, et de le regarder du dessus, à la verticale. Incrire la situation dans les deux directions physiques qui nous sont les plus familières aide à les voir au mieux.

Autre exemple : lorsqu'il s'agit de saisir un objet plan possédant un axe de symétrie, le plus facile est de le disposer non seulement dans un plan frontal pour l'observateur, mais encore de placer son axe de symétrie dans le plan de symétrie de l'observateur : par exemple, on voit mieux un rectangle devant soi s'il est *bien droit*, plutôt que *de travers*.

Il en va des mouvements simples comme des objets. Ainsi, comme nous l'avons signalé, une translation d'une figure plane est plus fidèlement perçue lorsqu'elle a lieu non seulement dans un plan frontal, mais encore horizontalement.

E. MACH [1922] a, le premier sans doute, montré que l'être humain, pour percevoir les objets le plus fidèlement possible, s'efforce d'accorder la symétrie de son corps avec celles des objets et avec les directions horizontale et verticale. Il ajoute, ce qui nous paraît important, que lorsqu'un tel accord est trouvé, il en résulte pour l'observateur un sentiment d'équilibre qui est une satisfaction esthétique élémentaire.

Soulignons que, parce qu'elles renvoient à la biologie et à la physique, ces considérations sur la capacité de l'être humain à saisir les grandeurs et les formes se situent hors du cadre de la géométrie déductive.

2.5 Des preuves par l'exemple

À quel type de preuve recourt-on dans le cadre de la géométrie naturelle ?

Tout d'abord, on utilise des implications. Et ceci dès le départ. Les exemples de propriétés connues ou aisément reconnaissables que nous avons donnés à la section 2.2 sont des implications. En effet, elles s'énoncent ou peuvent s'énoncer sous la forme « si... alors... ». Et d'ailleurs, à défaut de posséder des implications au départ, nous n'aurions pu construire aucun raisonnement.

D'où vient l'évidence de ces implications ? Ce sont en fait des évidences qui se constatent sur des objets simples, et qui sont possibles seulement parce que ces objets sont simples. Ceci mérite une explication.

Qu'est-ce en effet qu'un objet simple, porteur d'évidence ? Lorsque, dans les raisonnements dont nous parlons ici, on affirme quelque chose d'un objet, on parle toujours en fait d'une classe d'objets. On parle par exemple de toutes les paires possibles de parallèles, de tous les rectangles possibles, de tous les angles imaginables, etc. Une telle classe est simple si on peut la parcourir sans peine en imagination, si on la voit en quelque sorte d'un bout à l'autre.

Mais comment fait-on pour imaginer toute une classe d'objets ? D'abord, nous l'avons dit, on amène – effectivement ou mentalement – un objet de la classe en position privilégiée devant soi. Ensuite, tous les objets semblables à celui-là, c'est-à-dire de même forme que lui, sont imaginés sans peine, car dès la prime enfance, l'être humain reconnaît les objets semblables. Si tous les objets de la classe sont semblables, alors l'effort de parcours s'achève là. Mais la classe des objets peut avoir, à similitude près, un ou plusieurs degrés de liberté. La classe des rectangles, par exemple, a un degré de liberté (le rapport de ses côtés) ; la classe des triangles en a deux (par exemple le rapport de deux côtés et l'angle compris entre ceux-ci). Le *nombre de degrés de liberté*, c'est le nombre de paramètres qu'il faut pour décrire la classe.

On parcourt sans trop de peine en imagination les classes pas trop hétéroclites, celles en fait qui n'ont pas plus d'un ou deux degrés de liberté. La géométrie naturelle n'accède directement qu'à celles-là, et n'accède – éventuellement – à certains autres qu'à travers celles-là. À titre de contre-exemple, on réalise la difficulté d'imaginer l'ensemble des quadrilatères, et encore davantage des pentagones.

Mais là où ce parcours en imagination est possible, on *voit* qu'une propriété reconnue sur quelques cas s'étend à tous les autres. C'est parce qu'on imagine – potentiellement – tous les objets de la classe infinie, qu'on sait que la propriété est vraie. Elle ne peut être fausse, parce qu'il n'y a pas de contre-exemple imaginable. Elle est nécessaire, parce qu'en quelque sorte elle épuise potentiellement l'examen de la classe entière. En ce sens on pourrait dire qu'il s'agit d'une *induction complète* (et même la plupart du temps d'une induction non dénombrable). Si on n'en connaissait pas les limites et les pièges, on pourrait dire que cette forme d'inférence où « on voit tout » est supérieure aux déductions formelles, dès que celles-ci, ce qui leur arrive souvent, permettent de conclure sans voir tout (ce qui par ailleurs est le signe de leur efficacité).

Ensuite, *lorsqu'on enchaîne plusieurs implications* pour construire une preuve, la preuve que l'on obtient est de la même nature. Prouver, dans le cadre de la géométrie naturelle, c'est montrer qu'aucune variante imaginable de la situation proposée n'échappe à la règle. Ce sont des preuves par l'exemple, possibles seulement parce que l'exemple (la figure) est représentatif de la classe. On dit aussi, dans un tel cas, que l'exemple est *paradigmatique*. Les preuves de ce type sont admises dans le cadre des mathématiques constituées lorsqu'on peut leur substituer des preuves *purement déductives* (ce que l'on ne prend pas toujours la peine de faire).

Cela étant, on comprend que la géométrie naturelle, à ce point liée aux évidences perceptives et aux images mentales, ne s'appuie sur aucun instrument conceptuel trop élaboré. Ce qui n'empêche pas qu'au moment où elle touche ses limites, cette géométrie invite à recourir aux nombres ou à des formes d'organisation algébrique.

3 Nécessité et fonction de la géométrie naturelle

On le voit, la géométrie naturelle est une géométrie commençante, qui accepte d'avoir beaucoup de propositions de départ et qui n'est pas unifiée. Elle correspond à un registre de la pensée géométrique plus proche du sens commun que celui des exposés plus complets, fondés tout entiers sur peu d'axiomes. Il existe beaucoup d'exemples de ces derniers.

On peut alors se demander pourquoi on ne partirait pas de l'un d'eux, choisi parmi les plus accessibles. D'autant que ces exposés vont plus loin et plus sûrement que la géométrie naturelle, car ils sont des produits longuement façonnés par des siècles d'efforts des mathématiciens. Tâchons de répondre à cette question, d'abord en fonction des premiers âges scolaires.

En premier lieu, une démarche axiomatique de longue haleine est inaccessible aux tout jeunes enfants, car ils vivent dans la pensée commune, et même dans la pensée commune en voie de formation. Leur relation aux propriétés géométriques des choses est par conséquent de l'ordre du quotidien. On conçoit par ailleurs combien il est important de développer leur savoir-faire et leur savoir à propos des formes et des grandeurs.

L'expérience – en particulier celle des « mathématiques modernes » – semble avoir prouvé qu'une approche axiomatique de grande ampleur est inaccessible à beaucoup d'enfants de 12, 13 ou 14 ans (nonobstant le fait qu'il s'agit là des âges où débutent les opérations formelles au sens de PIAGET). Il ne manque pas d'arguments plausibles pour expliquer cela. D'abord, un exposé axiomatique long est, comparé à la pensée commune, tellement réorganisé en vue de sa cohérence déductive qu'il est trop loin des élèves. Ensuite, si les axiomes sont en nombre restreint, il oblige à la démarche contre nature de prouver des évidences. Il a pour fonction une réorganisation logique de matériaux scientifiques qui le requièrent. Or les élèves de cet âge, n'ayant pas accumulé de tels matériaux, ne peuvent ressentir cette nécessité.

Cela n'exclut pas que quelques élèves soient sensibles à la séduction d'un discours parfaitement ordonné, fut-il quelque peu détaché du réel. De tels élèves méritent considération. Mais d'une part ils ne peuvent dicter la règle de l'enseignement. Et plus fondamentalement, on peut arguer qu'à les enfermer dans un univers intellectuel trop pur, on leur barre l'accès à bien des sources de la pensée créative.

Résumons et complétons ces quelques considérations pour montrer, en guise de conclusion, la nécessité et la fonction de la géométrie naturelle.

- 1) Il faut partir de la pensée commune, parce que, tout particulièrement en ce qui concerne les jeunes enfants, on ne peut pas partir d'ailleurs.
- 2) Le passage aux exposés axiomatiques formels est une rupture importante par rapport à la pensée commune. Cette rupture doit être motivée. Il faut arriver à faire partager par les élèves le besoin d'une mise en ordre. Or ce besoin n'est autre que celui de sortir la pensée commune des difficultés dans lesquelles elle s'empêtre. Il importe donc d'avoir reconnu et même quelque peu exploré ces difficultés. Alors, la pensée scientifique se construit, comme dit BACHELARD, *contre* la pensée commune. Mais aussi, et dans une mesure indispensable, en y plongeant ses racines.
- 3) La pensée géométrique arrivée à maturité ne se réduit pas – heureusement – à la construction de discours déductifs. Elle est une activité créative qui dans bien des circonstances peut utilement s'appuyer sur la considération d'objets solides déplaçables, de mouvements simples, de points de vue privilégiés sur des objets symétriques, de preuves paradigmatiques. La géométrie naturelle contribue à l'heuristique de la géométrie tout court.
- 4) Qui plus est, les matériaux accumulés par la pratique d'une géométrie de sens commun sont des sources d'intuitions possibles de *toute pensée mathématique* (et non seulement géométrique) ultérieure, jusque dans les registres les plus formels.

PRÉAMBULE COMMUN

AUX DEUX PREMIERS CHAPITRES

Les activités reprises dans ces chapitres ont été conçues pour les élèves des enseignements maternel et primaire. Elles ont été expérimentées à tous les niveaux de l'enseignement fondamental. Leur objectif principal est de familiariser les enfants à un type de représentation plane d'objets de l'espace : la perspective dite isométrique¹. Aucune règle théorique n'est explicitement donnée aux enfants ; c'est au travers de multiples expériences qu'ils maîtrisent, chacun à leur niveau, ce type de représentation.

Ce premier chapitre contient les activités destinées à l'enseignement maternel. Celles-ci sont essentiellement basées sur des manipulations et des constructions à partir d'objets de l'espace. Dans l'univers des jeunes enfants, le cube est un objet familier, il nous semble donc tout à fait approprié à une première approche de la géométrie dans l'espace.

Le deuxième chapitre concerne les élèves de l'enseignement primaire. Il comporte trois sections. La première reprend des activités de manipulation de cubes. À tout âge, les manipulations doivent constituer un point de départ et la présence de l'objet réel s'avère un recours utile dans bien des situations problématiques. La deuxième section introduit un premier type de représentation plane sous la forme de gabarits² de cubes. Les assemblages de gabarits donnent aux enfants l'occasion d'expérimenter le passage du plan à l'espace et réciproquement. Enfin la dernière section est consacrée au dessin sur papier pointé triangulaire² que nous trouvons pratique pour les représentations de cubes, puisqu'il permet d'effectuer des dessins corrects à main levée et sans aucune mesure.

Ces activités peuvent s'étaler sur l'ensemble du cursus primaire ou se concentrer sur un même niveau. L'enseignant veillera toutefois à ce que chaque enfant expérimente les trois phases d'apprentissage correspondant aux trois sections décrites ci-dessus, à savoir les constructions, les assemblages de gabarits et les dessins.

Certaines sections de ces deux chapitres ne comportent pas d'échos des classes car elles ont été considérablement remaniées après une première expérimentation et n'ont pas encore été présentées aux élèves dans leur nouvelle version.

¹ Il s'agit de la forme de projection parallèle dans laquelle le coefficient de réduction des longueurs est le même dans les trois directions orthogonales principales.

² Voir la description du matériel ci-après.

Description du matériel utilisé

Les cubes

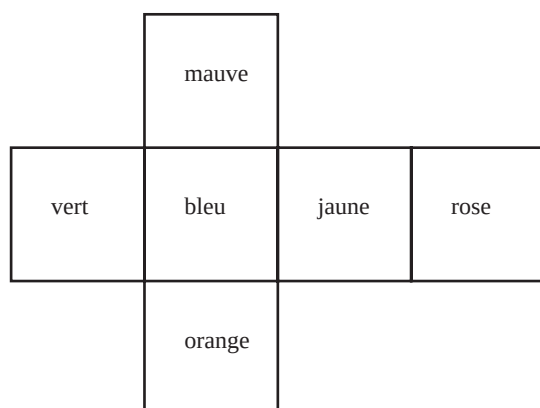


Fig. 1

En maternelle, nous utilisons deux types de cubes : des cubes en bois unis de huit couleurs différentes et des cubes multicolores ayant chacun une face verte, une bleue, une jaune, une rose, une orange et une mauve. Les couleurs doivent être placées comme sur la figure 1.

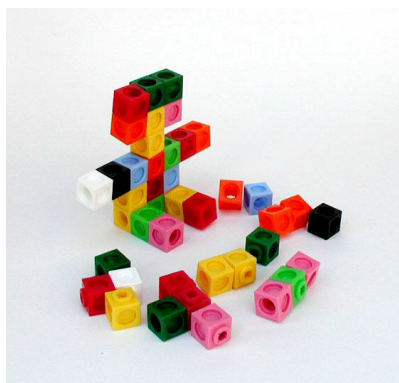


Fig. 2

En primaire, nous utilisons en plus ce que l'on appelle des « multicubes », c'est-à-dire des petits cubes plastiques emboîtables de 2 centimètres d'arête (figure 2).

Les gabarits

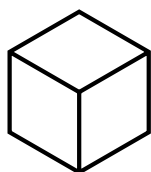


Fig. 3

Ce que nous appelons « gabarit » est en fait le dessin d'un cube en perspective isométrique, découpé dans une plaque magnétique à peindre, ou dans du carton (figure 3).

Nous avons créé pour nos activités deux sortes de gabarits magnétiques : des gabarits unis reprenant les couleurs des multicubes et des gabarits multicolores réalisés en fonction de la place des couleurs du cube multicolore.

Les gabarits magnétiques sont pratiques parce qu'ils adhèrent sur une surface métallique ferromagnétique (idéalement le tableau) et permettent une exploitation collective devant la classe entière.

Les gabarits en carton sont destinés à être manipulés sur la table par chaque enfant.

Le modèle du gabarit magnétique se trouve en annexe à la fiche 1 et le modèle pour créer des gabarits en carton à la fiche 6.

Le papier pointé



Le papier pointé triangulaire est le support idéal pour représenter des objets en perspective isométrique. Les points qui constituent la trame du papier pointé sont en fait les sommets de triangles équilatéraux.

Fig. 4

Remerciements

Pour le chapitre consacré à l'enseignement maternel, nous tenons à remercier Mesdames Colette Brasseur, Brigitte Decelle et Anne-Marie Rahier, institutrices maternelles à l'école fondamentale de la Communauté Française de Mont-Saint-Guibert, pour nous avoir permis d'expérimenter les activités avec une partie de leurs élèves.

Pour le chapitre consacré à l'enseignement primaire, nous remercions d'une part, les institutrices de première et deuxième années de « l'Autre École » à Auderghem et d'autre part, Madame Demessemacker, institutrice de quatrième année et Mademoiselle Bourgeois, institutrice de sixième année à l'Institut des Sœurs Notre-Dame d'Anderlecht pour nous avoir accueillis dans leurs classes.

Un grand merci aussi aux enfants pour leur participation active.

MANIPULATIONS DE CUBES

À L'ÉCOLE MATERNELLE

1 Jeux et dessins de cubes

De quoi s'agit-il ?

Les enfants réalisent des constructions avec des cubes, puis les dessinent.

Enjeux

Se familiariser avec des cubes et des constructions ;

utiliser et enrichir un vocabulaire relatif au matériel (cube, face, carré, ...) et à l'organisation spatiale (au-dessus, en dessous, à côté, à gauche, à droite, devant, derrière, contre, entre, ...);

s'initier aux premières représentations par le dessin de cubes et de constructions de cubes.

Compétences.

Se situer et situer des objets dans l'espace réel.

Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer.

Relever des régularités.

Organiser selon un critère, des objets réels ou représentés.

De quoi a-t-on besoin ?

Des cubes en bois unis ;

des cubes en bois multicolores ;

du matériel de peinture ;

du matériel de dessin : des feuilles blanches, des crayons de couleurs ou des pastels.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue une vingtaine de cubes unis à chaque enfant et leur demande, dans un premier temps, de réaliser des constructions libres.

Les enfants qui le souhaitent commentent leurs réalisations et l'enseignant les laisse libres de s'exprimer.

Après ce temps de familiarisation avec les cubes, l'enseignant distribue le matériel de dessin et donne la consigne suivante.

Dessinez la construction que vous avez réalisée.

On propose ensuite la même activité avec des cubes multicolores.

Au préalable, l'enseignant propose aux enfants l'activité suivante, qui met l'accent sur le nombre de faces. Il distribue à chacun un cube en bois ou en carton rigide, un matériel de peinture adéquat et leur donne la consigne suivante.

Vous allez peindre votre cube. Utilisez une nouvelle couleur chaque fois que vous changez de face.

Cette activité offre aux enfants l'occasion d'expérimenter les relations « topologiques », premiers critères de perception de l'espace.

L'enseignant distribue ensuite des cubes multicolores et rappelle les consignes données précédemment pour les cubes unis.

Échos des classes

Certains enfants ont dessiné l'objet représenté par la construction, par exemple une chenille ou une maison (figures¹ 1, 2 et 3).



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3

D'autres ont représenté les cubes multicolores et ont tenté une approche de la perspective en dessinant toutes ou certaines faces colorées du cube dans un carré ou un cercle (figures 4, 5 et 6).

¹ La présente étude étant imprimée en noir et blanc, nous avons substitué aux couleurs des nuances de gris.



Fig. 4



Fig. 5



Fig. 6

On parle ici de *réalisme intellectuel*. Cette expression renvoie à un mode de représentation qui consiste à dessiner non pas ce que l'on voit de l'objet selon un certain point de vue, mais tout ce qui appartient à l'objet, en y mélangeant les points de vue.

2 Rythmes de couleurs

De quoi s'agit-il ?

Les enfants complètent un début de construction avec des cubes en respectant un rythme de couleurs.

Enjeux

Imaginer et réaliser des constructions d'objets ;
expérimenter l'horizontale et la verticale ;
utiliser et enrichir un vocabulaire relatif aux couleurs et à l'ordre (avant, après, premier, dernier, ...) ;
créer, reconnaître et reproduire un rythme de couleurs, ce qui développe une forme de structuration spatio-temporelle.

Compétences. – Voir les compétences de l'activité 1 à la page 14.

De quoi a-t-on besoin ?

Par enfant, une vingtaine de cubes unis de couleurs différentes.

Comment s'y prendre ?

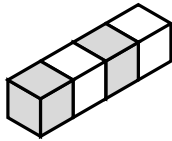


Fig. 7



Fig. 8

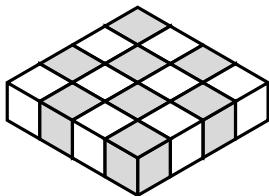


Fig. 9

Échos des classes

L'enseignant réalise avec des cubes un début de construction rectiligne faisant apparaître un rythme dans les couleurs (par exemple, un train avec un cube vert, un jaune, un vert, ..., voir figure 7).

Il donne ensuite la consigne suivante.

Continuez la construction en respectant le même ordre de couleurs.

Les constructions doivent, par nécessité, prendre des positions verticales et horizontales. Il est donc utile de proposer aux enfants de réaliser aussi des constructions de tours, comme le montre par exemple la figure 8.

Les enfants doivent découvrir la règle qui a permis le début de la construction, afin de la poursuivre. On varie la complexité des rythmes en fonction de l'âge et des capacités des enfants, en augmentant le nombre de cubes ou de couleurs différentes dans une structure.

On peut aussi proposer aux enfants de créer eux-mêmes une construction reproduisant un rythme de couleurs et ainsi d'établir une règle et de la respecter.

L'enseignant peut, pour les plus grands, dépasser la structure rectiligne et proposer une organisation dans deux directions de l'espace. On commence avec des cubes de deux couleurs différentes, ce qui donne, par exemple, la figure 9.

Les enfants doivent, dans ce cas, tenir compte des règles de développement dans deux directions. On augmente progressivement le nombre de cubes ou de couleurs dans la structure.

Les plus jeunes enfants sont absorbés par leur activité de construction et ne respectent pas la consigne de succession des couleurs. Ils se justifient en disant : « je fais aussi un train », ... Ils se limitent alors à une reproduction de la structure spatiale.

À partir de quatre ou cinq ans, ils commencent à respecter l'ordre des couleurs proposé. Et quand il s'agit de créer, les plus grands font parfois apparaître des constructions plus complexes.

3 Constructions à partir d'un modèle

De quoi s'agit-il ?

Les enfants reproduisent une construction en cubes à partir d'un modèle.

Enjeux

Reproduire une structure spatiale ;
respecter une consigne de construction.

Compétences. – Voir les compétences de l'activité 1.

De quoi a-t-on besoin ?

Une vingtaine de cubes unis par enfant.

Comment s'y prendre ?

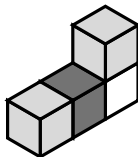


Fig. 10

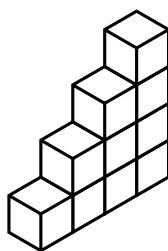


Fig. 11

Prolongement possible

L'enseignant réalise une construction avec quatre cubes unis, chacun d'une couleur différente. Il distribue aux enfants une vingtaine de cubes parmi lesquels doivent se trouver les quatre couleurs utilisées par l'enseignant, car il est important qu'ils puissent s'y référer s'ils en éprouvent le besoin. Il ne faut cependant pas attirer leur attention sur les couleurs utilisées, car seule la forme de la construction doit être respectée.

L'enseignant laisse les enfants observer le modèle et leur donne la consigne suivante.

Réalisez la même construction (par exemple, celle de la figure 10).

L'enseignant vérifie les réalisations des enfants avant de passer à un autre modèle. Selon l'âge et le niveau des enfants, le nombre de cubes est progressivement augmenté et les structures sont de plus en plus complexes.

L'enseignant peut également demander aux enfants de respecter une consigne orale de construction.

Sans modèle sous les yeux, l'enseignant leur propose par exemple de réaliser la plus haute tour possible ou le plus long train et ainsi aborde les notions de verticalité et d'horizontalité.

Il est aussi possible de demander aux enfants de réaliser un escalier. Ils doivent alors s'arranger pour que l'escalier monte régulièrement d'une marche de même hauteur (voir figure 11).

On peut proposer aux enfants de s'asseoir deux par deux, côte à côte. L'un réalise une construction et son voisin la reproduit. Ils confrontent leurs réalisations pour vérifier si elles sont identiques. On inverse ensuite les rôles.

2

MANIPULATIONS DE CUBES À L'ÉCOLE PRIMAIRE

1 Constructions

De quoi s'agit-il ?

Les élèves manipulent des cubes et réalisent des constructions d'après une consigne, d'après un modèle donné à trois dimensions, d'après un assemblage de gabarits réalisé par l'enseignant.

Enjeux

Créer des objets en assemblant des cubes ;
utiliser et enrichir un vocabulaire relatif au matériel (cube, face, ...) et à l'organisation spatiale (au-dessus, en dessous, à gauche, à droite, devant, derrière, ...) ;
différencier les constructions et reconnaître les objets identiques ;
reproduire une structure spatiale à partir d'un modèle à trois dimensions ;
prendre conscience que seules trois faces sont visibles lorsqu'on observe un cube posé sur une table ;
reconnaître dans un gabarit le dessin d'un cube ;
passer d'une représentation plane (gabarit) à une réalisation à trois dimensions.

Compétences

Se situer et situer des objets.

Reconnaître, comparer des solides, les différencier.

Construire des solides [...].

Associer un solide à sa représentation dans le plan.

*De quoi a-t-on
besoin ?*

Des multicubes ;
des cubes multicolores ;
des gabarits de cubes magnétiques unis et multicolores ;
des fiches 2 à 5 en annexe ;
des crayons de couleurs.

1.1 Constructions avec trois et quatre cubes

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue les multicubes aux enfants qui, dans un premier temps, les manipulent librement afin de se familiariser avec le matériel.

On leur donne ensuite la consigne suivante.

Réalisez des constructions différentes avec trois cubes (puis avec quatre cubes).

On peut aider les enfants en leur proposant de réaliser une construction avec trois cubes, puis d'en construire une deuxième sans démonter la première afin de pouvoir les comparer. Spontanément, certains enfants considèrent les constructions de la figure 1 (ou celles de la figure 2) comme différentes.

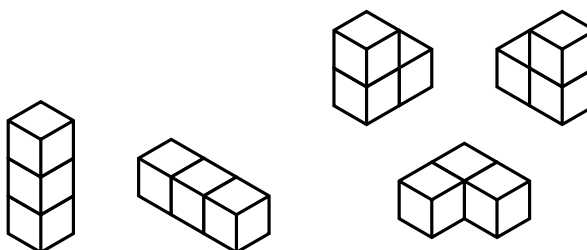


Fig. 1

Fig. 2

Il faut donc établir un critère de différenciation facile. On admet que deux constructions sont « les mêmes » lorsqu'on peut les placer l'une à côté de l'autre pour les voir de la même façon. Ainsi, suivant ce critère, la figure 2 représente trois objets identiques dans des positions différentes.

Il faudra aussi pour certains enfants préciser que les couleurs des cubes n'ont pas d'importance et que les constructions doivent seulement avoir des formes différentes.

On poursuit l'activité par les constructions de quatre cubes. L'ajout d'un quatrième cube permet d'introduire une troisième direction dans certaines constructions (figure 3).

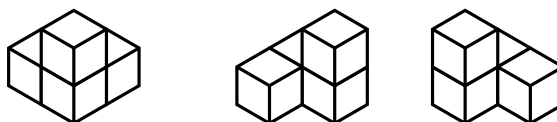


Fig. 3

On encourage les enfants à trouver un maximum de possibilités.

À la fin de l'activité, on donne la consigne suivante.

Comparez vos réalisations.
Regroupez celles qui sont identiques.

Cette consigne les amène à placer leurs constructions respectives côte à côte dans des orientations similaires. Si les éléments de la figure 4 sont présents simultanément dans les constructions des enfants, leur comparaison risque d'être un peu délicate. En effet, ces objets sont isométriques mais ne sont pas les mêmes, puisqu'on ne peut pas les positionner pour les voir de la même façon. Ils sont, en fait, les images l'un de l'autre dans un miroir. On dit qu'ils sont énantiomorphes.

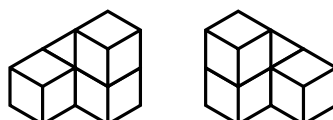


Fig. 4

Lorsque les enfants ont terminé leurs comparaisons, on obtient un ensemble de constructions dont toutes les possibilités sont reprises à la figure 5.

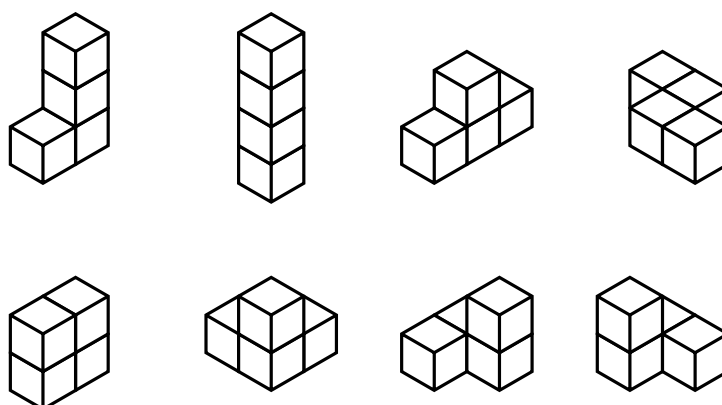


Fig. 5

Certains enfants terminent l'activité en réalisant les constructions qui leur manquent.

Échos des classes

Les enfants ont accordé beaucoup d'importance à la position des constructions sur la table : pour certains, une tour (verticale) de trois cubes n'est pas la même chose qu'un train (horizontal) de trois cubes (figure 6).

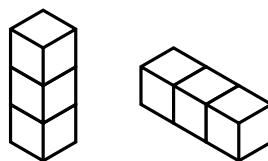


Fig. 6

À travers leurs propos, on sent la prégnance de l'horizontale et de la verticale, qui interfère avec leur vision globale de l'objet dans l'espace.

Le fait le plus significatif est sans doute la découverte des trois constructions qui occupent les trois directions de l'espace. En effet, beaucoup d'enfants ont obtenu en premier lieu les cinq constructions de la figure 7. Il leur a fallu un certain temps pour « sortir dans la troisième dimension » ; c'est-à-dire assembler leurs cubes dans les trois directions de l'espace (figures 8 et 9).

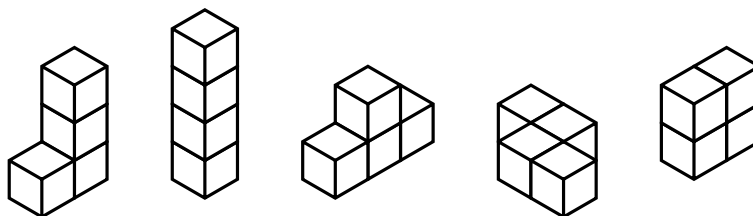


Fig. 7

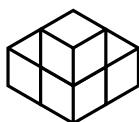


Fig. 8

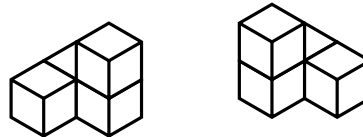


Fig. 9

1.2 Constructions à partir d'un modèle.

Comment s'y prendre ?

Les enfants sont assis deux par deux. L'un des deux réalise une construction avec quatre cubes unis de couleurs différentes, l'autre enfant reçoit la consigne suivante.

Reproduisez la construction de votre camarade en ayant celle-ci sous les yeux.

L'enseignant augmente la difficulté en passant à six cubes ou plus selon les possibilités et l'âge des enfants.

Ensuite, il demande à l'un des deux enfants de réaliser une nouvelle construction (de quatre ou six cubes) et de la cacher. La consigne est alors la suivante.

Dictez à votre camarade la façon de réaliser cette construction afin qu'il puisse la reproduire.

Les deux enfants confrontent ensuite leurs réalisations pour vérifier si elles sont pareilles.

Cette étape leur permet de verbaliser et d'enrichir leur vocabulaire relatif à l'espace.

Enfin, l'enseignant pourra exercer la mémoire des enfants. Pour cela, il demande à l'un des deux de construire un modèle avec ses cubes. L'autre enfant, n'ayant pas vu les étapes de la construction, observe l'objet fini le temps qui lui est nécessaire. Le modèle est ensuite caché et l'enseignant donne à cet enfant la consigne suivante.

Reproduisez, de mémoire, la construction initiale.

Quand l'enfant pense avoir terminé, il compare sa construction au modèle afin de vérifier la ressemblance.

L'enseignant peut réaliser cette même activité avec deux cubes multicolores, en attirant l'attention sur toutes les faces du cube, même celles qui sont moins ou non visibles.

Prolongements possibles

On peut demander aux enfants plus âgés de s'asseoir face à face et proposer à l'un de faire une construction et à l'autre de la reproduire comme s'il était à la place de son camarade. On peut lui préciser : « quand tu regardes *ta* construction, tu dois voir la même chose que ton camarade qui regarde *sa* construction ».

Les enfants peuvent se déplacer pour vérifier si les constructions sont bien pareilles, ou retourner celle du camarade lorsqu'il a lui-même terminé.

Échos des classes

Lors de la reproduction, nous avons remarqué que certains enfants faisaient des allers-retours pour corriger leurs constructions, alors que d'autres restaient assis mais déplaçaient leurs constructions sur la table pour les comparer.

1.3 Positionner le cube multicolore

Comment s'y prendre ?

L'enseignant donne un cube multicolore et pose la question suivante.

Combien de couleurs différentes a-t-on utilisées pour peindre ce cube ?

Cette question permet de mettre en évidence le nombre de faces d'un cube. On peut aussi, éventuellement reprendre l'activité 1 du chapitre 1.

Ensuite, l'enseignant demande aux enfants de placer le cube sur le banc avec une arête face à eux et leur demande ce qui suit.

Combien de faces différentes voyez-vous ?
Quelles sont les couleurs de ces faces ?

Après exploitation collective des résultats, on s'aperçoit que chaque enfant n'a dénombré que trois faces de couleurs différentes. Les autres couleurs ne sont pas visibles. L'enseignant attire donc l'attention des élèves sur le fait que, si on veut dessiner un cube, seules trois faces de ce cube sont nécessaires pour représenter ce que l'on voit.

Il présente alors un premier gabarit magnétique de cube multicolore (figure 10), qu'il fixe sur le tableau. Dans le contexte de l'activité, on peut espérer



Fig. 10

que tous les enfants reconnaissent dans ce gabarit, le dessin d'un cube. Cependant, pour s'assurer qu'ils établissent bien le lien entre le gabarit (représentation plane à deux dimensions) et l'objet (à trois dimensions), l'enseignant poursuit l'activité en deux temps.

Premier temps

Il donne d'abord la consigne suivante.

Placez votre cube dans la position correspondant à celle du gabarit qui se trouve au tableau.

L'enseignant vérifie auprès de chaque enfant et rectifie les erreurs si nécessaire. Il recommence plusieurs fois en variant les couleurs des faces visibles du gabarit au tableau.

Deuxième temps

Il place les enfants en vis-à-vis et dépose un cube multicolore entre eux, une arête verticale de face. Le type de perspective (isométrique) choisi pour dessiner les gabarits impose que l'objet qu'il représente ait une arête par devant. Il leur distribue une feuille sur laquelle sont dessinés deux gabarits vierges (fiche 2) et donne la consigne suivante.

Coloriez les faces du premier gabarit en respectant les couleurs que vous voyez sur le cube placé devant vous.

Chaque enfant constate que les couleurs qu'il utilise ne sont pas les mêmes que celles de son copain. Seule la face du dessus est de la même couleur pour les deux enfants. Au total, ils utilisent ensemble cinq couleurs. Où est donc passée la sixième ?

1.4 Constructions à partir d'assemblages de gabarits

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue aux enfants des cubes unis emboîtables, puis réalise au tableau un assemblage avec les gabarits magnétiques. Il leur demande ce qui suit.

Construisez avec vos cubes, l'objet dont le modèle est au tableau (figure 11).

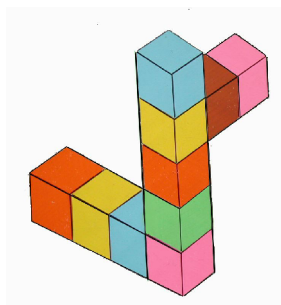


Fig. 11

L'enseignant propose des exercices de difficulté croissante tant au niveau du nombre de cubes, qu'au niveau du nombre de directions. Les fiches 3 à 5 des annexes proposent une série de modèles de difficultés diverses, parmi lesquelles l'enseignant peut choisir ceux qui conviennent le mieux au niveau des élèves de sa classe.

Les couleurs des gabarits aident les enfants dans leurs constructions. Ils peuvent, en effet, les faire correspondre à celles de leurs cubes et ainsi faciliter leur démarche.

Il faut attirer l'attention des enfants sur l'importance du dénombrement et la direction dans l'espace de chaque partie de la construction.

Échos des classes

Les enfants donnent un nom à l'assemblage, il l'appelle par exemple « serpent ». Cela les aide à avoir une image mentale globale de l'objet, et facilite leur construction. Ils comptent le nombre de cubes pour la « queue », pour le « corps » et pour la « tête ». Ce qui n'est pas aussi évident qu'il y paraît.

On a pu remarquer que certains avaient tendance à ajouter un cube à la « tête » ou la « queue ». De même, quelques enfants ne voient pas les trois directions de l'espace et construisent un serpent comme celui de droite sur la figure 12.

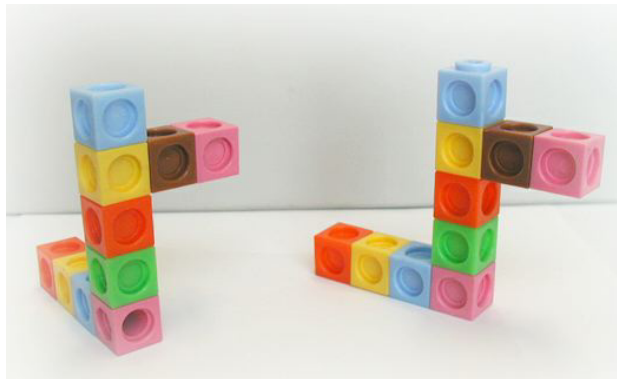


Fig. 12

2 Manipulations de gabarits de cubes

De quoi s'agit-il ?

Les enfants assemblent des gabarits pour reproduire des assemblages de cubes réalisés à trois dimensions.

Enjeux

Utiliser et enrichir un vocabulaire relatif au matériel (cube, face, ...) et à l'organisation spatiale (au-dessus, en dessous, à gauche, à droite, devant, derrière, ...);

orienter correctement ses gabarits pour que l'assemblage réalisé corresponde à l'objet réel;

passer d'une réalisation à trois dimensions à une réalisation à deux dimensions.

Compétences.

Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié.

Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement.

De quoi a-t-on besoin ?

Des multicubes;

des gabarits de cubes magnétiques (fiche 1 en annexe);

des gabarits de cubes en carton (fiche 6 en annexe).

2.1 Assembler deux gabarits à l'aide des cubes

À l'activité 1.3 à la page 23, les enfants ont découvert les gabarits multicolores, mais seul l'enseignant les a manipulés. Dans les activités suivantes, les élèves vont être confrontés à des gabarits unicolores, ils vont apprendre à les manipuler et à les assembler, d'abord par deux, ensuite dans des configurations plus complexes.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue aux élèves des multicubes et des gabarits en carton. Il place un gabarit magnétique au tableau, puis donne la consigne suivante.

Observez ce gabarit, décrivez ce que vous voyez.

Plusieurs réponses sont probables :

- « C'est une figure à six côtés. »
- « Il y a trois lignes tracées dessus. »
- « C'est le dessin d'un cube. »
- « Il y a trois parallélogrammes. »
- ...

Après exploitation des différentes réponses, on admet que ce gabarit peut être le dessin d'un cube. L'enseignant pose alors la question suivante.

Que représente chacun des segments dessinés à l'intérieur de l'hexagone ?
Que représente chacun des parallélogrammes ?

Il est très important pour la suite que les enfants établissent correctement les correspondances entre les éléments de l'objet réel et ceux de la représentation à deux dimensions.



Fig. 13



Fig. 14



Fig. 15

L'enseignant propose ensuite aux enfants de positionner un de leurs multicubes devant eux pour qu'ils le voient comme le gabarit du tableau. Après une correction collective, on convient que le cube doit être posé sur la table avec une arête verticale face à soi¹.

À ce moment, l'enseignant enlève le gabarit du tableau et demande aux enfants de placer un de leurs gabarits sur le banc pour représenter leur cube. Il est très important, à ce stade, de vérifier que l'enfant place correctement son gabarit comme sur la figure 13.

Pour rectifier les erreurs classiques montrées par les figures 14 et 15, on retournera systématiquement à l'objet réel en insistant sur les correspondances entre cet objet et la représentation à deux dimensions donnée par le gabarit : le cube a une arête verticale de face, on doit donc placer le gabarit pour qu'un des segments tracés à l'intérieur de l'hexagone soit vertical ; la face du dessus du cube est visible, un des trois parallélogrammes qui représentent les faces doit être au-dessus.

¹ Contrairement à ce qui se passe dans une représentation en perspective cavalière classique, il n'y a pas de face frontale dans la perspective isométrique.

Lorsque tous les élèves parviennent à orienter correctement leur premier gabarit, on passe à l'assemblage de deux gabarits. L'enseignant invite les enfants à déposer un deuxième cube au-dessus du premier et à les emboîter. Il leur donne la consigne suivante.

Représentez cet objet de deux cubes à l'aide de vos gabarits.

Pour faciliter l'exploitation collective des réalisations des élèves, on peut conseiller, dans un premier temps, d'imposer les couleurs des cubes et de choisir les couleurs correspondantes pour les gabarits. Pendant que les enfants travaillent, l'enseignant vérifie qu'ils placent bien leur modèle avec une arête verticale frontale. Les premiers assemblages de gabarits mettent généralement en évidence plusieurs problèmes ; les plus fréquents sont repris à la figure 16.

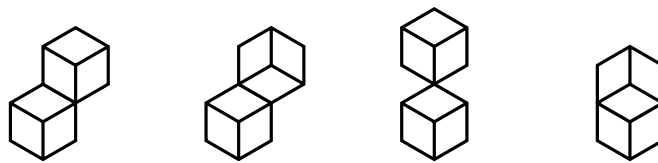


Fig. 16

Pour aider les élèves en difficulté, l'enseignant envoie au tableau un élève qui a réussi son assemblage et lui demande d'expliquer sa technique. Il insiste sur les différentes étapes évoquées par la figure 17 :

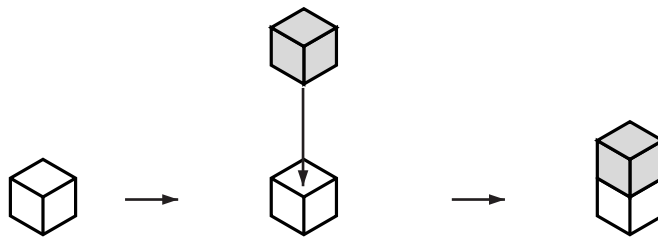


Fig. 17

orienter correctement son premier gabarit ; orienter correctement son deuxième gabarit ; approcher son deuxième gabarit par le dessus ; déposer le deuxième gabarit pour qu'il recouvre une face du premier, et que les arêtes verticales s'alignent.

Lorsque tous les enfants ont réussi leur premier assemblage, on répète la question, mais cette fois en accolant un deuxième cube à l'avant-plan droit. Ce deuxième assemblage, décrit à la figure 18, ne devrait pas poser de problèmes.

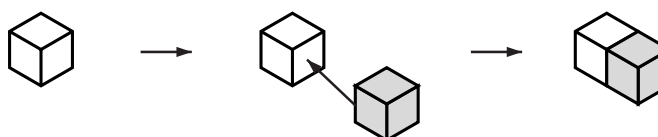


Fig. 18

On poursuit logiquement en les invitant cette fois à ajouter un cube à l'arrière-plan droit. Les enfants sont confrontés à un nouveau problème car le deuxième gabarit doit venir en-dessous du premier, il faut donc le glisser par dessous et non plus le superposer (voir figure 19).

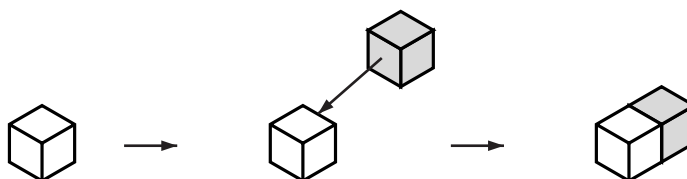


Fig. 19

Le même problème se pose dans le cas où le deuxième cube est placé en-dessous.

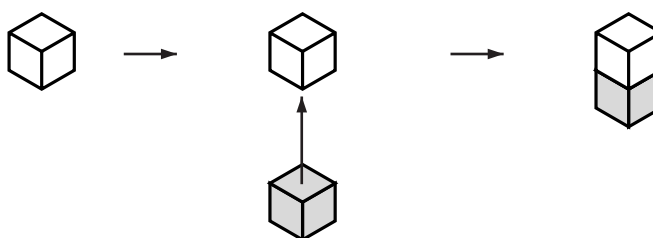


Fig. 20

On peut ainsi passer en revue toutes les positions possibles et on termine l'activité par une petite synthèse reprenant les différentes étapes à respecter pour assembler deux gabarits.

2.2 Assemblages de gabarits de cubes à partir de constructions données

Comment s'y prendre ?



Fig. 21

L'enseignant dépose devant chaque enfant la construction de la figure 21 dans la bonne position, une arête verticale face à l'enfant.

Dans un premier temps, il nous semble important, pour faciliter la mise en commun des résultats, que l'objet à représenter soit placé de la même façon devant chaque enfant afin qu'ils en aient tous la même vision (le même point de vue). L'enseignant distribue à chaque enfant une série de gabarits en carton et donne la consigne suivante.

Assemblez vos gabarits pour représenter la construction que vous voyez en face de vous.

Chaque enfant commence à assembler ses gabarits en fonction de la construction. L'enseignant repère les principales erreurs commises par les élèves,

puis commence l'exploitation collective des résultats. Il envoie un élève au tableau réaliser l'assemblage à l'aide des gabarits magnétiques. L'enfant peut emporter sa construction ou effectuer de mémoire son assemblage avec les gabarits magnétiques. L'enseignant veille à ce qu'il ne change pas le point de vue sur l'objet. Il est important de détailler chaque phase de l'assemblage et de rappeler les bons gestes à acquérir à chaque étape : orienter correctement le premier gabarit, une arête verticale et une face au-dessus ; orienter correctement le deuxième gabarit ; le superposer ensuite sur une face du premier. La difficulté déjà mise en évidence lors de l'activité précédente, à savoir glisser un gabarit en dessous de ceux qui sont déjà placés, s'accroît avec le nombre de gabarits de l'assemblage. Il est en effet difficile de soulever un gabarit pour en glisser un autre en dessous sans faire bouger les autres pièces déjà placées. Les difficultés répétées des élèves amènent l'enseignant à poser une nouvelle question.

Peut-on organiser son assemblage pour éviter de devoir glisser des gabarits en dessous des autres ?

Après tâtonnements et discussions, les élèves en arrivent à la conclusion suivante : « il faut d'abord placer les gabarits des cubes qui sont le plus derrière et le plus en dessous ». Les enfants qui n'avaient pas réussi leur assemblage recommencent en appliquant la méthode qui vient d'être mise au point.

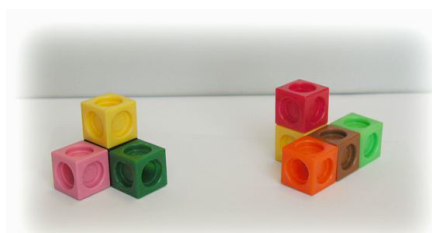


Fig. 22

L'enseignant leur propose ensuite les deux nouvelles constructions à représenter qu'il dépose correctement face à chaque enfant. Ces constructions (figure 22) sont un peu plus compliquées, car elles font intervenir une troisième direction de l'espace.

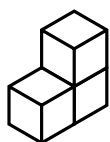


Fig. 23

L'enseignant vérifie que chaque enfant représente bien ce qu'il voit et procède à des corrections individuelles si cela s'avère nécessaire. Il peut, dans ce cas, demander aux enfants qui ont réussi leur représentation d'aider leurs camarades en difficulté.

À ce stade, il est important de faire prendre conscience aux élèves des différentes orientations possibles d'un objet. L'enseignant poursuit donc en distribuant l'objet de la figure 23 aux enfants et leur donne la consigne suivante.

Placez cette construction de trois cubes devant vous et représentez-la.

Puisque les enfants sont libres de placer leur construction comme ils le souhaitent, il est vraisemblable qu'ils ne la positionnent pas tous de la même façon. Les représentations qu'ils obtiennent sont donc différentes. Un éventail de possibilités est repris à la figure 24.

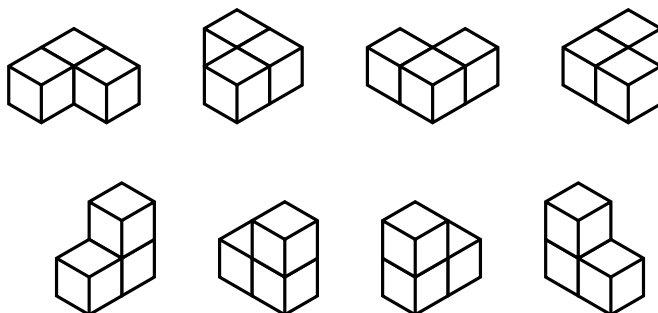


Fig. 24

L'enseignant choisit quelques assemblages intéressants et envoie les enfants les reproduire au tableau. Beaucoup sont surpris de voir apparaître des représentations différentes, alors qu'ils ont tous reçu la même construction. Pour qu'ils prennent conscience que ce sont bien toutes des images du même objet, l'enseignant demande à tous les enfants de placer leur construction pour qu'ils la voient comme le premier modèle représenté au tableau. Il vérifie ensuite le bon positionnement de toutes les constructions ou demande aux enfants d'un même banc ou d'une même rangée de comparer leurs solutions. Il n'intervient alors qu'en cas de litige.

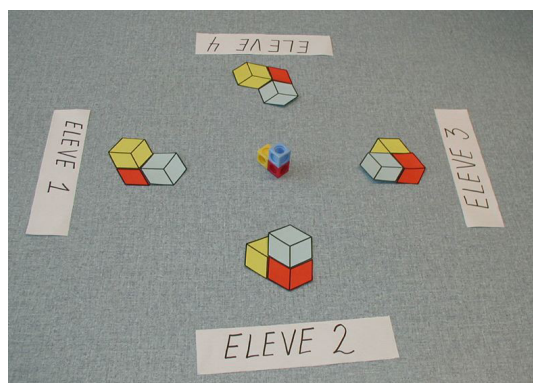


Fig. 25

Au lieu d'envisager plusieurs positions pour un même objet, on peut aussi envisager de faire varier les points de vue sur cet objet (figure 25). Pour cela, on invite les enfants à s'asseoir par groupe de quatre autour d'une table. On place une construction simple au centre de la table, chaque enfant représente ce qu'il voit avec ses gabarits. On demande aux enfants de coller leur assemblage sur une feuille pour qu'ils puissent comparer aisément leurs productions.

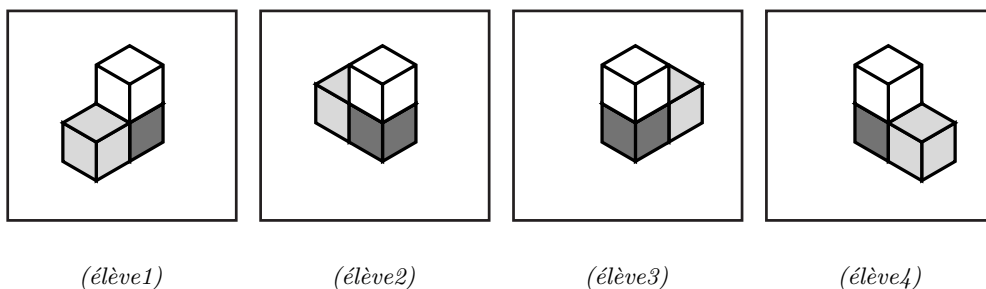




Fig. 26

Pour terminer, l'enseignant invite les enfants à représenter avec leurs gabarits des objets de plus en plus complexes (figure 26).

À titre d'exemples, une série de modèles est reprise aux fiches 4 et 5. Lorsqu'on augmente le nombre de cubes, la stabilité des assemblages devient de plus en plus problématique. C'est alors le moment de proposer aux enfants de passer à la phase de dessin.

3 Dessins de cubes et de constructions

Toutes les activités reprises dans cette section ont comme objectif le dessin de cubes ou d'assemblages de cubes sur papier pointé. Néanmoins, au préalable, on peut tester les représentations des élèves en les laissant librement dessiner un cube sur papier blanc. La diversité des réalisations peut aider les enfants à mieux comprendre l'intérêt d'un papier tramé qui uniformise les représentations et permet une communication plus facile.

Pré-Test

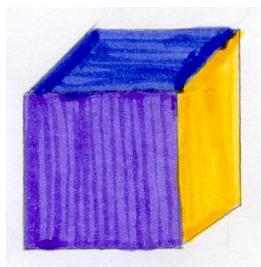


Fig. 27

Le dessin en perspective avec une face en « vraie grandeur » est le plus fréquent (figure 27).

On remarque aussi que certains enfants ont dessiné un cube en perspective avec une arête à l'avant-plan (figure 28) ou ont dessiné un développement de cube (figure 29).

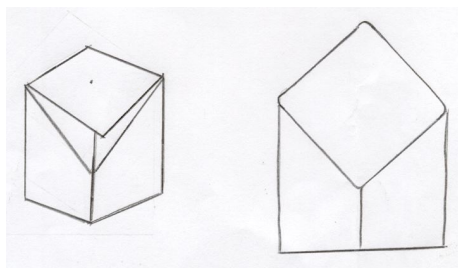


Fig. 28

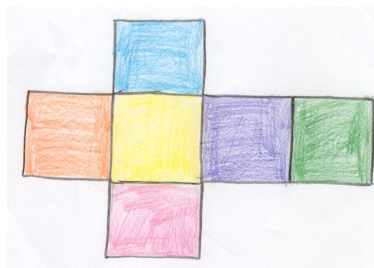


Fig. 29

D'autres dessinent également les arêtes cachées du cube (figure 30) ou un cube vu de haut dont la face carrée au centre est entourée de trapèzes, ce qui donne l'impression que le cube s'évase (figure 31).

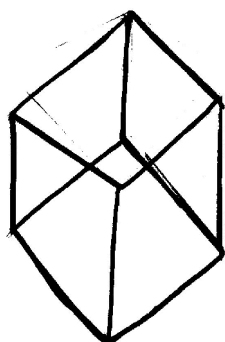


Fig. 30

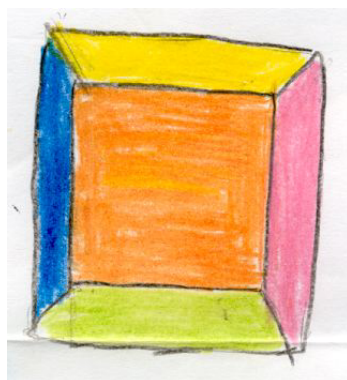


Fig. 31

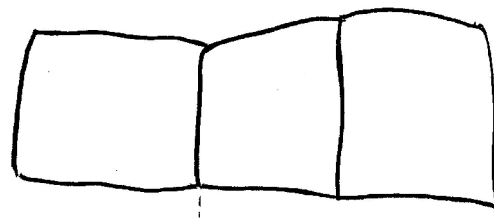


Fig. 32

Certains enfants représentent le cube par un carré ou plusieurs carrés juxtaposés (figure 32).

La représentation d'un cube par un carré voudrait dire que ce cube est parfaitement à hauteur des yeux et qu'aucune autre face n'est visible à part la face avant. Il est important de bien expliquer cela aux enfants et même de leur faire vivre la vision de cet unique carré en leur suggérant de placer un cube à hauteur de leurs yeux (mieux encore, d'un seul œil en fermant l'autre). Cette représentation par un unique carré est une des premières façons de le dessiner chez les plus jeunes (après le cercle), mais sans lien avec la position du cube. Cela semblerait dû au fait que l'objet ne possédant que des faces carrées, la forme « carré » devient une image mentale très forte. Elle parasite finalement la vision objective du cube où l'on distingue généralement plusieurs faces à la fois.

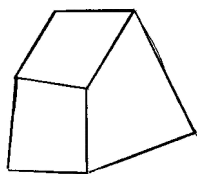


Fig. 33

De plus, dans le vocabulaire de certains enfants, il y a confusion entre les termes « cube » et « carré ». Afin de dessiner les autres faces du cube, les enfants rajoutent d'autres carrés. On peut alors parler de *réalisme intellectuel* ; les enfants, sachant que toutes les faces sont carrées, ne parviennent pas encore à sortir de cette représentation.

Une difficulté souvent rencontrée est d'assembler les faces qu'ils voient adjacentes (figure 33).

On note aussi que les enfants recherchent par essais et erreurs, effacent, retracent, pour obtenir des angles qui leur semblent être corrects (figure 34).

Enfin, le dessin de la figure 35 montre les étapes parcourues par un même enfant pour arriver à dessiner son cube.

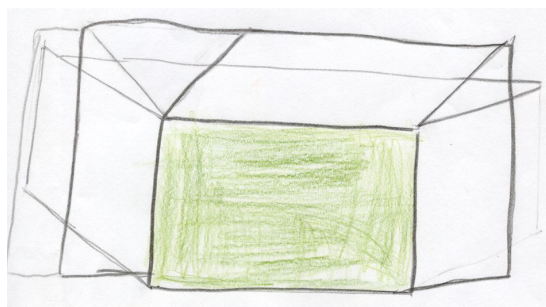


Fig. 34

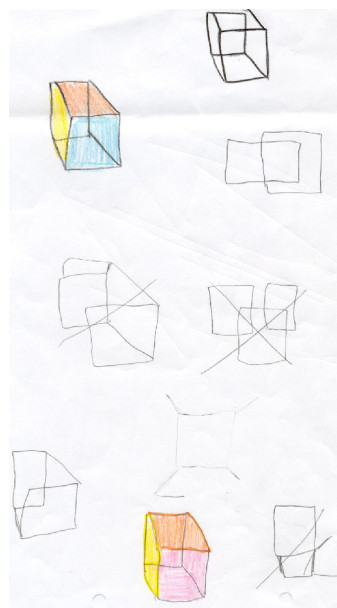


Fig. 35

Activités

De quoi s'agit-il ?

Les enfants dessinent, sur papier pointé, un cube ou un assemblage de cubes à partir d'un modèle réalisé avec les gabarits, à partir d'une construction à trois dimensions, en suivant une consigne déterminée par l'enseignant.

Enjeux

Utiliser et enrichir un vocabulaire relatif au matériel (cube, face, ...) et à l'organisation spatiale (au-dessus, en dessous, à gauche, à droite, devant, derrière, ...);

passer du gabarit d'un cube à son dessin sur papier pointé;

passer d'une représentation à trois dimensions à un dessin à deux dimensions.

Compétences.

Tracer des figures simples sur papier tramé.

Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement.

De quoi a-t-on besoin ?

Des multicubes;

des cubes multicolores;

la fiche 7 en annexe;

des feuilles de papier pointé (fiche 8 en annexe);

des crayons de couleurs.

3.1 Dessin d'un cube sur papier pointé (7 points)

Comment s'y prendre ?

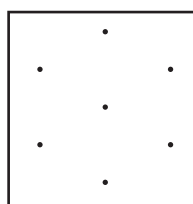


Fig. 36

L'enseignant suggère aux enfants, pour remédier au problème de stabilité de leurs assemblages de gabarits, de dessiner leurs constructions. Il leur présente à cet effet une feuille de papier pointé qui va leur permettre de réaliser des dessins qui correspondent exactement aux assemblages de gabarits.

a) Première étape

Avant de laisser les enfants dessiner sur la feuille complète, l'enseignant donne à chacun une feuille sur laquelle sont dessinés uniquement les sept points nécessaires au dessin du cube (figure 36 et fiche 7).

Il leur donne la consigne suivante.

Reliez les sept points de manière à faire apparaître le dessin d'un cube.

L'enseignant les laisse libres de faire plusieurs essais. Il suggère aux enfants en difficulté de prendre un de leurs gabarits comme modèle. Il peut aussi leur donner un calque avec la trame des sept points pour qu'ils le superposent à un de leurs gabarits en carton.

b) Deuxième étape

Lorsque tous ont réussi leur dessin, l'enseignant leur donne un cube multicolore et donne la consigne suivante.

Placez le cube multicolore avec une arête verticale devant vous, ensuite coloriez celui que vous venez de dessiner en respectant les couleurs des faces.

Variante. – On peut faire de même avec un cube multicolore placé au centre d'une table autour de laquelle sont assis quatre enfants, chaque enfant ayant une arête différente face à lui. Ils dessinent et colorient chacun le cube comme ils le voient sur une feuille à trame de sept points. Les dessins sont, ensuite, mélangés et les enfants doivent retrouver la place d'où ils ont été dessinés. On peut aussi leur demander de positionner le cube pour le voir comme sur un des quatre dessins.

c) Dernière étape

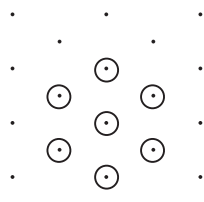


Fig. 37

Pour terminer, l'enseignant distribue une feuille de papier pointé (fiche 8) et donne la consigne suivante.

Retrouvez les sept points qui servent à dessiner un cube (figure 37) et reliez-les.

Lorsque les enfants sont confrontés à une feuille complète de papier pointé, certains ont tendance à vouloir dessiner le cube avec une face frontale.

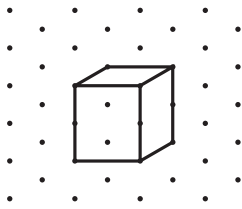


Fig. 38

Il est important de leur expliquer que la représentation qui nous intéresse ici est celle avec une arête à l'avant-plan et que le papier pointé est le support idéal dans ce cas. Pour dessiner un cube avec une face frontale, il est préférable d'utiliser du papier quadrillé, car sur le papier pointé, ce qu'ils dessinent comme étant une face frontale n'est pas un carré (figure 38).

3.2 Dessins de cubes sur papier pointé à l'aide d'assemblages de gabarits

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue aux enfants quelques multicubes, des gabarits en carton et une feuille de papier pointé. Il demande à chacun de poser un cube sur la table, toujours avec une arête verticale de face et de le dessiner sur sa feuille. Il donne ensuite la consigne suivante.

Attachez un deuxième cube à l'arrière-plan droit du premier. Reproduisez votre construction avec vos gabarits, puis dessinez-la sur votre feuille de papier.

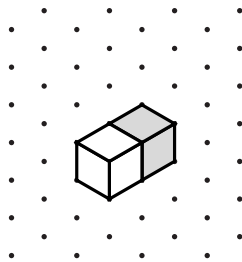


Fig. 39

Il est important dans cette première phase de dessin que les enfants se réfèrent à l'assemblage de gabarits. En effet, dès qu'on dessine un deuxième cube accolé au premier, certaines arêtes ne doivent pas apparaître, soit dans le premier cube, soit dans le deuxième. Le recours aux gabarits montre quelles arêtes sont cachées et aide donc sensiblement les enfants. Pour cet objet placé à l'arrière-plan, ce sont certaines arêtes du deuxième cube qui sont cachées par le premier (figure 39).

Les couleurs peuvent aussi se révéler une aide précieuse, notamment pour repérer le premier cube dessiné (dans toutes les figures, c'est le cube blanc).

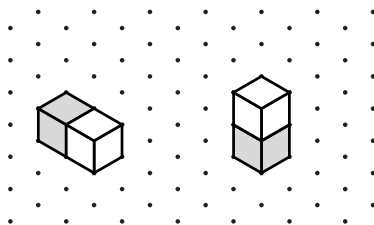


Fig. 40

Lorsque tous les enfants ont terminé ce premier dessin, on poursuit l'activité en faisant varier la position du deuxième cube, d'abord à l'arrière-plan gauche, puis en dessous (voir figure 40). Dans ces deux constructions, ce sont toujours des arêtes du deuxième cube qui ne doivent pas être dessinées.

L'enseignant propose ensuite aux enfants de dessiner les objets où le deuxième cube est au-dessus ou à l'avant-plan du premier. Les enfants sont alors

confrontés à la principale difficulté liée à ce type de représentation : certaines arêtes du premier cube, déjà dessinées, doivent disparaître car le deuxième les cache. Il faut donc les gommer (les figures 41 et 42 montrent les arêtes « parasites » en pointillé).

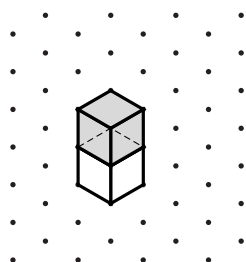


Fig. 41

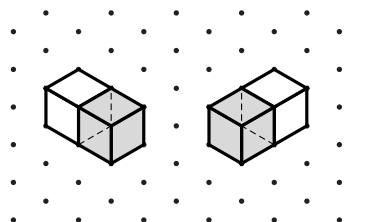


Fig. 42

Une comparaison des différentes constructions permet de mettre en évidence la conclusion suivante : il est préférable, lorsqu'on dessine un objet formé de plusieurs cubes, de commencer par ceux qui sont le plus au-dessus et le plus devant.

On remarque que la démarche mise ici en évidence est exactement l'inverse de celle établie pour l'assemblage de gabarits à l'activité 2.2. L'enseignant veillera à ce que les élèves distinguent bien les deux situations.

3.3 Dessins de cubes sur papier pointé à partir de constructions

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue à chaque enfant dix multicubes et des feuilles de papier pointé. Il donne la consigne suivante.

Avec ces dix cubes, construisez une « boîte » déposez-la à plat sur le plan de la table et dessinez-la sur votre feuille de papier pointé. Faites de même en la déposant ensuite verticalement.

Les figures 43, 44 et 45 montrent diverses réalisations des élèves.

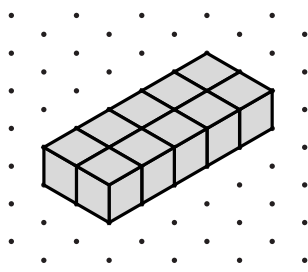


Fig. 43

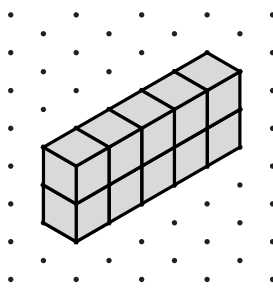


Fig. 44

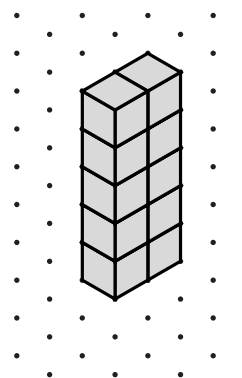


Fig. 45

L'enseignant rappelle aux élèves qu'il faut réfléchir au premier cube à dessiner pour éviter au maximum les coups de gomme. Cette activité permet aussi d'attirer l'attention des élèves sur l'alignement de certaines arêtes de leur construction et donc, par conséquent, sur les lignes directrices correspondantes dans leur dessin. À partir de là, la plupart se mettent à dessiner leur construction, non plus petit cube par petit cube, mais « globalement » en commençant par les arêtes extérieures de leur objet.

L'enseignant donne ensuite à chaque enfant la première construction de quatre cubes de la figure 46, une feuille de papier pointé et la consigne suivante.

Dessinez la construction sur votre feuille de papier pointé.

L'enseignant veille à ce que la construction ait bien une arête verticale face à l'enfant et vérifie l'exactitude des dessins. De nouveau, l'alignement des arêtes aide les enfants dans leur construction. Certains ont besoin de colorier chaque cube de leur dessin en respectant les couleurs. Quand tous les enfants ont terminé ce premier dessin, l'enseignant peut poursuivre l'activité avec les deux autres constructions, en demandant de respecter la même consigne.

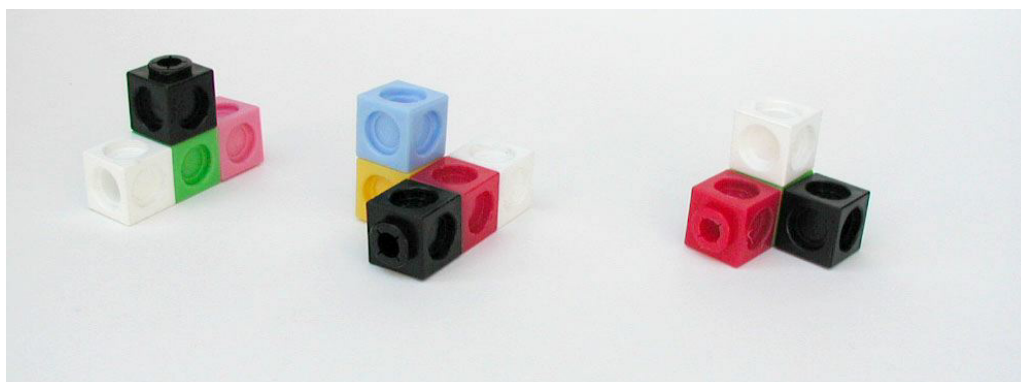


Fig. 46

Ces deux constructions présentent une difficulté supplémentaire, puisqu'ils introduisent une troisième direction dans le dessin. Les enfants qui ont terminé l'activité peuvent réaliser des constructions plus élaborées et les dessiner sur papier pointé.

Prolongement possible

L'enseignant invite les enfants à s'asseoir par groupe de quatre autour d'une table sur laquelle est déposée un objet formé de trois multicubes. Il leur donne la consigne suivante.

Dessinez cette construction sur une feuille de papier pointé.

Il vérifie l'exactitude de chaque dessin puis les rassemble afin de les comparer. Les enfants remarquent que les dessins ne sont pas les mêmes, ils correspondent à quatre points de vue différents du même objet. L'enseignant

peut ensuite mélanger les feuilles, les redistribuer au hasard et demander aux enfants de situer l'endroit d'où le dessin a été réalisé.

3.4 Dessins de cubes sur papier pointé par des enfants assis face à face

L'enseignant invite les enfants à s'asseoir deux par deux, face à face, et place entre eux un cube multicolore. Il leur donne une feuille de papier pointé avec la consigne suivante.

Dessinez le cube et coloriez les faces en respectant les couleurs.

Lorsque tous les enfants ont terminé, l'enseignant demande à chacun de cacher son dessin, puis donne la consigne suivante.

Décrivez, chacun à votre tour, ce que vous voyez, à votre voisin d'en face pour qu'il puisse dessiner et colorier la même chose que vous.

Lorsqu'ils ont terminé, les enfants comparent le dessin réalisé sous dictée avec celui qui a été caché. Ces dessins devraient être identiques. Les enfants discutent et se corrigent si nécessaire. L'enseignant leur propose le même exercice avec deux multicubes qu'ils placent d'abord verticalement, puis horizontalement (figures 47 et 48).

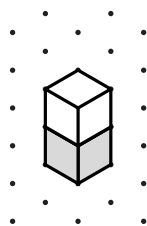


Fig. 47

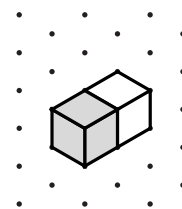


Fig. 48

Ils recommencent l'exercice avec deux cubes multicolores.

3

VOIR DANS L'ESPACE

Un petit croquis m'en dit souvent plus long qu'un long rapport.

NAPOLÉON BONAPARTE

S'il est essentiel de commencer par savoir, c'est justement pour avoir une chance de réussir à modifier le cours des choses.

JACQUES BOUVERESSE

Ce chapitre est un complément aux précédents. Il a pour but de donner aux enseignants une vue d'ensemble des problèmes que pose la vision dans l'espace.

1 Explorer les objets par la vue et le toucher

Pour percevoir la forme et les dimensions d'une figure plane, par exemple une figure découpée dans du papier, il suffit de la regarder d'un seul côté. Tel n'est pas le cas pour un solide opaque à trois dimensions, car si on se limite à un seul point de vue, on ne le voit pas tout entier. Pour le connaître complètement, il faut l'explorer par la vue ou le toucher. Il faut donc tourner autour, ou le faire pivoter devant soi, ou le tâter. Et ensuite, pour en avoir une intuition d'ensemble, il faut coordonner ces perceptions partielles successives. Cela se fait en général spontanément, mais la capacité de se représenter les objets de manière fidèle varie d'une personne à l'autre. Cette capacité peut être améliorée par l'exercice.

Le dessin industriel systématise cette nécessaire multiplicité des points de vue et leur recombinaison. On y donne habituellement trois vues d'un même objet : une vue de face, une vue du dessus et une vue de côté (voir section 6). Pour se représenter l'objet, il faut coordonner mentalement les trois vues. La capacité de le faire varie beaucoup d'une personne à l'autre, mais peut s'entraîner.

2 Reconnaître l'identité de deux objets

Comment pouvons-nous reconnaître que deux objets sont identiques ? Nous nous limitons ici à l'identité géométrique, c'est-à-dire à l'identité de forme et de grandeur. S'il s'agit de deux objets plans, on vérifie leur identité en les superposant. Une telle opération est par contre impossible pour les solides à trois dimensions, car ils ne peuvent pas se pénétrer l'un l'autre. Pour vérifier qu'ils ont même forme et même grandeur, il faut donc recourir à d'autres méthodes, ce qui est un des objets

de la géométrie. On peut conjecturer l'identité de deux objets simples en les disposant devant soi dans une même orientation, et en faisant glisser mentalement l'un sur l'autre jusqu'à ce qu'ils « se superposent en pensée » (comme on pourrait le faire en réalité s'ils étaient des hologrammes). C'est ce qu'illustrent les figures 1 et 2.

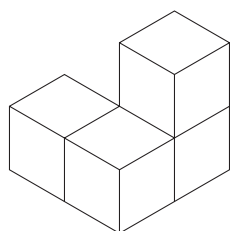


Fig. 1

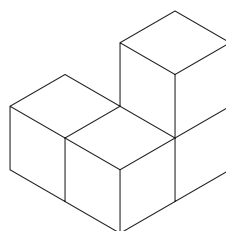


Fig. 2

Considérons maintenant les figures 3 et 4. Elles représentent toutes deux un assemblage de quatre cubes, et on peut dire aussi que ceux-ci y sont disposés *de la même façon*. Et pourtant, on a beau tourner ces objets comme on veut, on n'arrive pas à les superposer mentalement, par un simple glissement. En fait, ils sont images l'un de l'autre dans un miroir. De deux solides qui sont ainsi « les mêmes », quoique non superposables, mais qui le deviennent lorsqu'on remplace l'un des deux par son image dans un miroir, on dit qu'ils sont *énantiomorphes*¹.

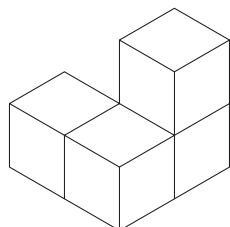


Fig. 3

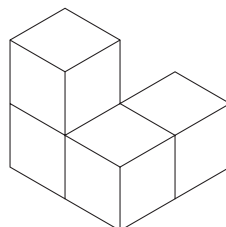


Fig. 4

À titre de contre-exemple, les figures 5, 6 et 7 représentent trois solides qui sont eux effectivement superposables. On ne doit pas les *renverser* dans un miroir pour arriver à les superposer mentalement. Mais si on réfléchit l'un d'eux dans un miroir, il demeure superposable aux autres.

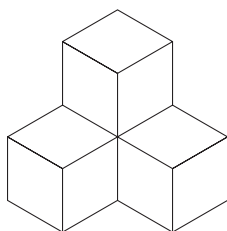


Fig. 5

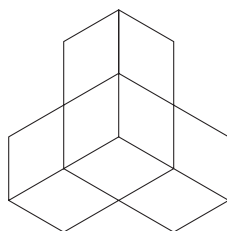


Fig. 6

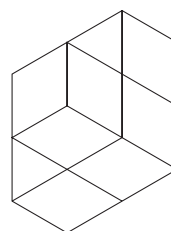


Fig. 7

Les personnes non habituées peuvent éprouver beaucoup de difficultés à reconnaître que deux objets énantiomorphes ne sont pas superposables. On ne saurait trop leur recommander d'expérimenter cela avec des objets réels, par exemple des assemblages de vrais cubes.

Il existe des couples d'objets énantiomorphes dans les espaces à une, à deux et à trois dimensions. Pour en savoir plus à ce sujet, on pourra se reporter à CREM [2001a].

¹ Ce terme savant a moins d'importance que le fait de reconnaître l'existence de paires d'objets de ce type.

3 Voir à plat ou en relief

Certains dessins sont perçus parfois à *plat*, et à d'autres moments *en relief*. Par exemple, beaucoup de lecteurs interpréteront spontanément la figure 8 comme un hexagone régulier dans lequel on a dessiné trois rayons. Mais d'autres lecteurs, ou les mêmes à d'autres moments, interpréteront cette figure comme un cube.

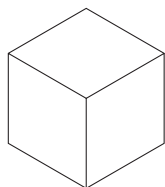


Fig. 8

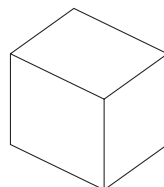


Fig. 9

La figure 9 sera perçue plus facilement comme un cube (ou un parallélépipède) que comme un hexagone irrégulier dans lequel on a tracé trois segments issus d'un même point et rejoignant trois sommets.

Ainsi, chacune de ces deux figures peut être perçue de deux façons, entre lesquelles l'observateur ne peut pas toujours choisir volontairement. La perception bascule souvent d'une interprétation à l'autre sans que l'on sache bien pourquoi.

Mais au début du XX^e siècle, les psychologues de la forme (M. WERTHEIMER, W. KÖHLER) ont remarqué que certaines figures sont perçues plus souvent à deux dimensions qu'à trois, et que pour d'autres, c'est l'inverse. Cette observation s'applique aux représentations planes d'objets à trois dimensions très symétriques tels qu'un cube, un parallélépipède rectangle, une pyramide droite, etc.

Restons-en provisoirement à l'exemple du cube. Dans la pratique, pour voir un cube s'inscrire – ou à peu de chose près –, dans un hexagone régulier, il faut le regarder d'un point de vue très particulier, avec un œil dans le prolongement d'une de ses diagonales (ou si on veut en prenant une de ses diagonales comme ligne de visée) et en fermant l'autre œil. En pratique, on ne perçoit presque jamais un cube de cette façon. Pour le percevoir ainsi, il faut véritablement chercher ce point de vue particulier. Et donc dans l'immense majorité des cas, on voit un cube « de côté », de sorte qu'il s'inscrit dans un hexagone irrégulier, ce dont la figure 9 montre un exemple.

Voici un autre exemple du même phénomène. La figure 10 sera plus souvent perçue comme un carré (ou un losange) muni d'une diagonale, que comme l'image d'un tétraèdre régulier, ou d'une pyramide à base triangulaire. Par contre, il faudra faire un effort moindre pour percevoir la figure 11 comme représentant une pyramide.

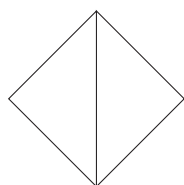


Fig. 10

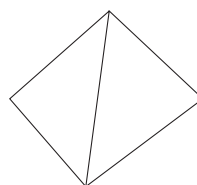


Fig. 11

Revenons aux figures 8 et 9. Un cube, objet très symétrique, peut être représenté par un dessin *très symétrique* ou *peu symétrique*. Il se fait que la perception visuelle interprète *le plus souvent* le dessin comme représentant la forme la plus simple et la plus symétrique. Il est plus simple d'interpréter

la figure 8 comme un hexagone régulier, figure plane effectivement très régulière, que comme un cube. Quant à la figure 9, vue dans le plan elle est peu régulière, tandis que vue dans l'espace elle renvoie à un cube, figure très symétrique. Le cerveau *choisit* en quelque sorte, le plus souvent, l'interprétation la plus simple et la plus régulière. C'est là ce que les psychologues appellent la *loi de la bonne forme*.

L'observation est peut-être encore plus frappante lorsqu'on représente des solides en tiges. La figure 12 montre un cube vu symétriquement, et la figure 13 un cube vu de côté. La figure 14 montre de même un tétraèdre vu symétriquement, et la figure 15 le même vu un peu de côté. La figure 16 est une pyramide à base carrée vue juste du dessus, et la figure 17 la montre vue de côté.

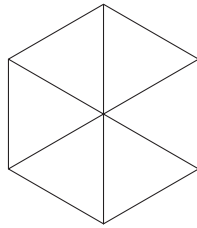


Fig. 12

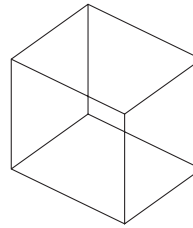


Fig. 13

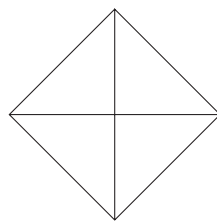


Fig. 14

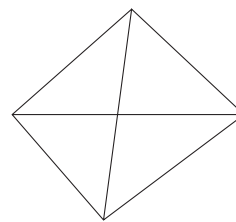


Fig. 15

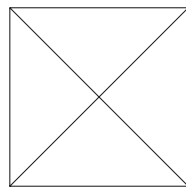


Fig. 16

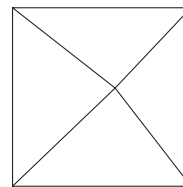


Fig. 17

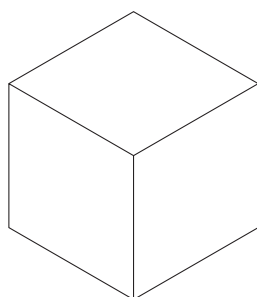


Fig. 18

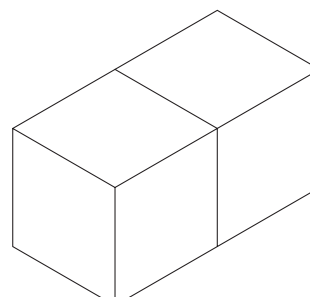


Fig. 19

La figure 18 sera parfois perçue comme un hexagone régulier. Mais si on la complète en la désymétrisant comme à la figure 19, alors on la perçoit plus facilement comme représentant un assemblage de deux cubes.

La figure 20, qui possède un axe de symétrie, sera difficilement perçue comme représentant trois cubes, au rebours de la figure 21 qui montre le même assemblage vu de côté.

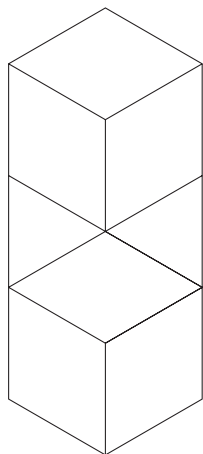


Fig. 20

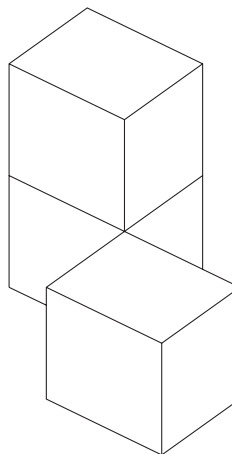


Fig. 21

Sur la loi de la bonne forme, on pourra consulter P. GUILLAUME, [1979].

4 Un seul dessin, plusieurs objets représentés

Nous avons vu à la section précédente qu'un même dessin peut, selon les circonstances, être perçu en plan ou en relief. Mais un même dessin peut aussi, selon les moments, être vu en relief de diverses façons.

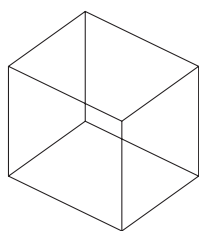


Fig. 22

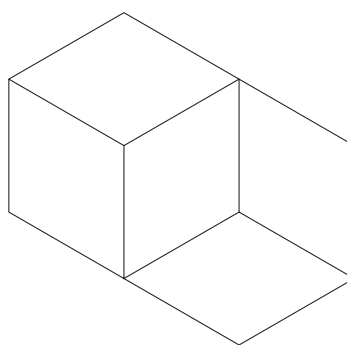


Fig. 23

Par exemple, la figure 22 qui représente un cube en arêtes, peut être interprétée selon les moments comme une vue du dessus, ou comme une vue du dessous.

Par exemple encore, la figure 23 peut être vue de quatre façons différentes :

- comme un cube au-dessus à gauche, cachant partiellement un cube en dessous à droite ;
- comme un cube en dessous à droite, cachant partiellement un cube au-dessus à gauche ;

- comme un cube auquel on a accolé, sur la droite et en dessous, un trièdre formé par trois faces de cube ;
- comme un cube auquel on a accolé, sur la gauche et au-dessus, un trièdre formé par trois faces de cube.

Il ne faut donc pas s'étonner si deux personnes, à un moment donné, disent ne pas voir la même chose². L'ambiguïté des représentations planes provient en fait de ce que tout point du plan est candidat pour représenter divers points de l'espace.

Une manière de réduire cette ambiguïté consiste à dessiner en trait pointillé les arêtes qui sont cachées si le solide est à faces pleines, ou situées à l'arrière s'il s'agit d'un solide en tiges. Par exemple, selon cette convention, le cube de la figure 24 est vu du dessus, tandis que celui de la figure 25 est vu par dessous.

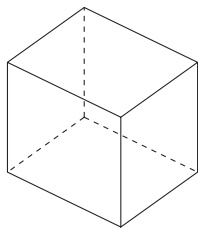


Fig. 24

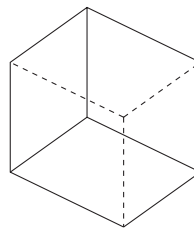


Fig. 25

Cette analyse des figures ambiguës montre une embûche de l'enseignement de la géométrie de l'espace. En effet, on ne peut guère espérer enseigner cette géométrie sans s'appuyer sur des représentations planes d'objets à trois dimensions (on ne peut pas toujours disposer de solides réels ou de maquettes). Et la situation peut devenir compliquée si les élèves ne s'entendent pas entre eux ou avec le professeur sur l'interprétation d'un dessin.

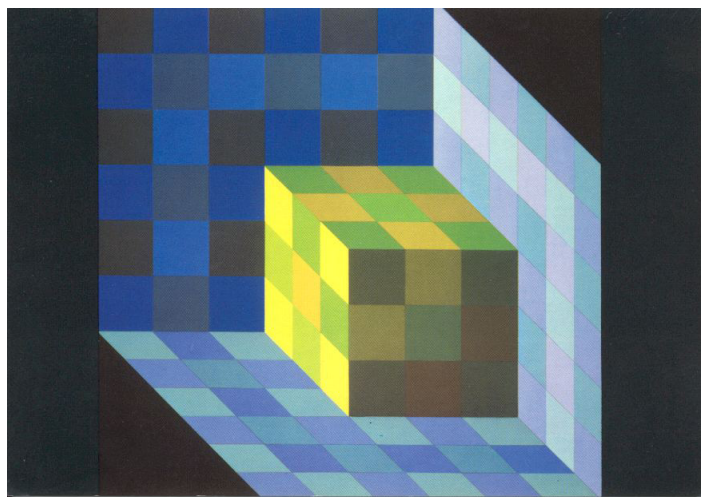


Fig. 26

² Ces visions différentes ne sont pas faciles à évoquer et le lecteur devra sans doute s'armer de patience. Il pourra s'aider de la remarque suivante : la figure 23 montre en deux endroits trois segments issus d'un même point et apparaissant en plan à 120° les uns des autres. Un tel trièdre peut être perçu de deux façons : soit avec son sommet devant et ses arêtes fuyant vers l'arrière, soit à l'inverse.

Le peintre VASARELY a astucieusement exploité l'ambiguïté des représentations planes d'objets de l'espace, comme le montre la figure 26. Celle-ci est reproduite schématiquement à la figure 27. Une autre œuvre de VASARELY, reproduite schématiquement à la figure 28, propose également une vue ambiguë d'un objet de l'espace.

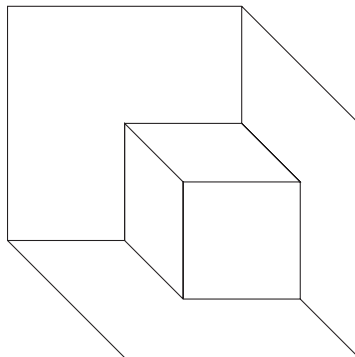


Fig. 27

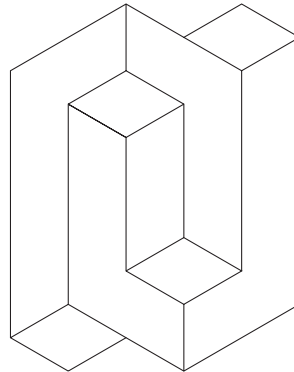


Fig. 28

5 Les figures impossibles

Il existe aussi des dessins qui paraissent à première vue représenter un objet de l'espace, mais qu'un examen plus attentif révèle comme impossibles à construire, au moins d'un certain point de vue. C'est le cas de l'assemblage de cubes que montre la figure 29 et qui forme une sorte de boucle.

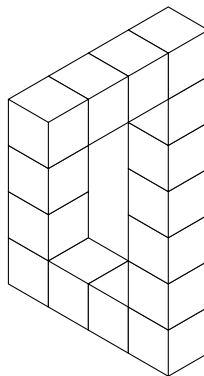


Fig. 29

On peut analyser cette impossibilité de plusieurs façons, dépendant de l'endroit où l'on commence à parcourir la boucle. Partons par exemple de la rangée de cubes la plus basse, qui va de l'arrière gauche vers l'avant droit. Elle se raccorde à une colonne verticale de 7 cubes, suivie d'une rangée horizontale de 3 cubes qui va vers la gauche et l'avant. Au bout de cette rangée, 2 cubes sont suspendus. Ils se trouvent donc à gauche et en avant. Il est donc impossible qu'ils se raccordent à notre cube de départ, puisque celui-ci se trouve à gauche et en arrière. En ce sens, l'assemblage est impossible à réaliser.

Mais si par contre on suppose que la boucle n'est pas fermée, alors la colonne de deux cubes suspendue en avant et à gauche peut être interprétée comme cachant la face supérieure du cube de départ de notre parcours, cube qui se trouve à gauche et en arrière. Ainsi, la figure 29 ne

représente un objet impossible que si on veut y voir une boucle fermée. Au cas contraire, elle est une représentation trompeuse d'une boucle ouverte parfaitement réalisable. Mais dans ce cas, il faut chercher soigneusement le point de vue adéquat pour la voir à peu près comme sur la figure.

La figure 30 montre une bande repliée en carré et vue du dessus. La figure 31 montre la même bande vue du dessous. Quant à la figure 32, elle est une déformation de ces mêmes figures, mais on ne peut arriver à lui faire correspondre une figure de l'espace. Le lecteur aura peut-être reconnu le logo des automobiles Renault (tourné d'un quart de tour). Il n'est pas étonnant que cette figure soit due à VASARELY.

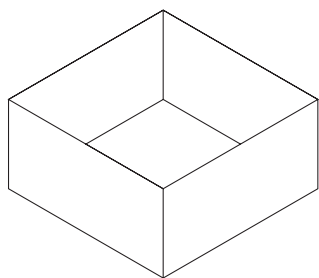


Fig. 30

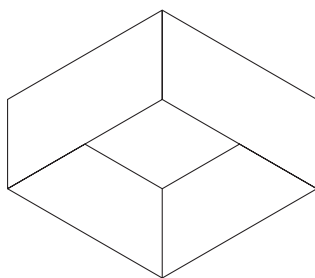


Fig. 31

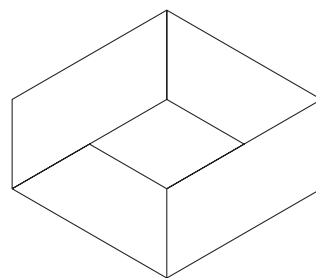


Fig. 32

La possibilité – si on ose dire –, des figures impossibles, résulte, comme celle de plusieurs visions d'un seul dessin, du fait qu'un point du plan est candidat pour représenter divers points de l'espace.

Le dessin présenté à la figure 33 montre un personnage examinant attentivement un objet impossible. Il est du graveur hollandais ESCHER. Celui-ci s'est aussi amusé à combiner des représentations impossibles à des choses familières comme un escalier ou un cours d'eau, créant ainsi des situations intrigantes. La figure 34 en montre un exemple. Si on imagine que l'eau coule dans un chenal quasi horizontal, alors elle devrait tomber derrière le bac. Mais comme elle tombe dans le bac, c'est que le chenal monte. Or selon l'interprétation immédiate du dessin en perspective, le chenal ne monte pas.

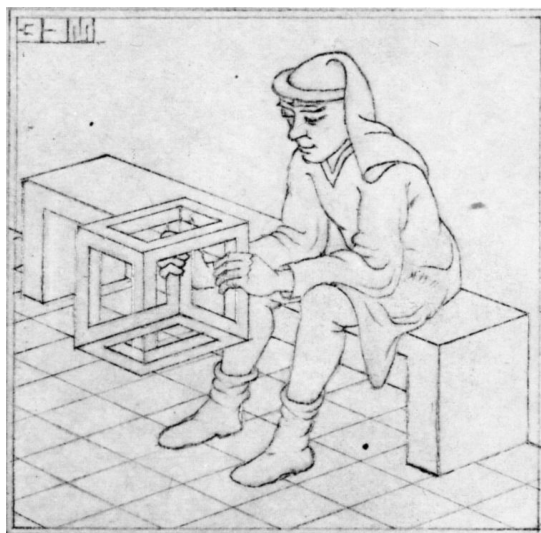


Fig. 33



Fig. 34

Sur les figures ambiguës ou impossibles, on pourra consulter J. GUIRAUD et P. LISON, [1976]. Pour ESCHER, voir par exemple J. L. LOCHER, [1976].

6 Plusieurs systèmes de représentation

Toutes les figures que nous avons proposées jusqu'ici sont en *perspective cavalière*³. Cela veut dire, entre autres, que lorsque deux arêtes d'un objet de l'espace sont parallèles, elles sont représentées en plan par deux traits parallèles. La figure 35 représente une petite église en perspective cavalière. Sur la perspective cavalière, voir G. AUDIBERT, [1990].

Dans une autre forme de perspective, appelée *perspective à point de fuite*, deux droites parallèles qui s'éloignent de l'observateur sont représentées par des segments qui convergent vers un point de fuite, comme celui vers lequel on croit voir se rejoindre les deux bords d'une route droite. La figure 36 représente le même édifice dans cette autre perspective. Sur la perspective à point de fuite, voir TH. GILBERT, [1987].

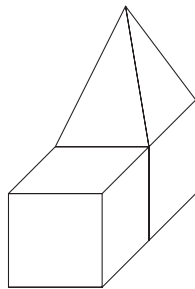


Fig. 35

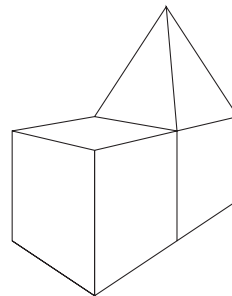


Fig. 36

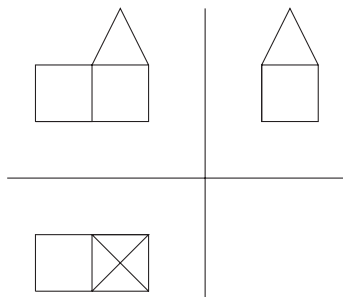


Fig. 37

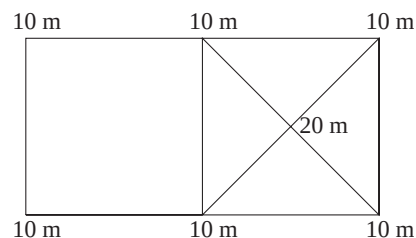


Fig. 38

En *dessin technique*, on représente un objet, comme nous l'avons rappelé ci-dessus, par une vue de dessus, une vue de face et une vue de côté. Un exemple en est donné à la figure 37. Sur ce mode de représentation, voir par exemple R. VERSCHRAEGEN, [1971].

Enfin, en *projection cotée*, on ne conserve que la vue du dessus, mais on y indique, dans une unité convenue, la hauteur à laquelle se trouvent différents points importants de l'objet. C'est ce qu'illustre la figure 38. Les cartes géographiques munies de courbes de niveau sont aussi des projections cotées : la figure 39 en donne un exemple.

³ Nous utilisons ici la locution *perspective cavalière* dans son acception la plus générale, celle qui renvoie à toutes les représentations pouvant résulter d'une projection parallèle sur un plan. En d'autres circonstances (cf. L. LISMONT, [2001] (B)), nous avons trouvé commode de réserver cette locution aux représentations dans lesquelles tout cube possède une face frontale.

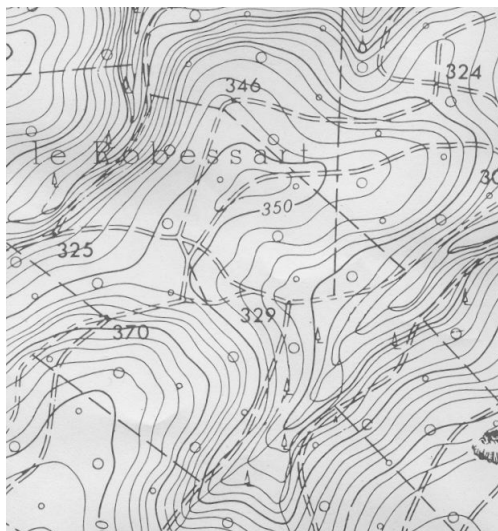


Fig. 39

Chacun de ces quatre systèmes de représentation a ses avantages et ses inconvénients. Leur multiplicité témoigne à la fois de l'insuffisance de chacun d'eux et de l'ingéniosité déployée par les hommes pour répondre à la nécessité pratique de représenter en plan les objets de l'espace. Les deux formes de la perspective sont utilisées surtout par les dessinateurs et les peintres, les projections orthogonales (cotées ou non) par les artisans, les architectes et les ingénieurs. Apprendre à manier ces diverses formes de représentation et à passer de chacune aux autres développe la capacité à *voir dans l'espace*. Voir à ce sujet la section 8.

La perspective à point de fuite a été conçue et perfectionnée par les peintres et les architectes de la renaissance italienne (BRUNELLESCHI, ALBERTI, PIERO DELLA FRANCESCA, ...). Elle a donné naissance au XVII^e siècle à la géométrie dite *projective*, discipline qui a atteint son plein développement au XIX^e siècle. Pour en apprendre un peu plus sur cette fécondation des mathématiques par la peinture, on pourra se reporter par exemple à A. DAHAN-DALMEDICO, [1986].

7 Voir bien ou mal

Comme nous l'avons rappelé à la section 1, on ne voit jamais complètement un objet de l'espace du premier coup : il faut multiplier les points de vue, puis réaliser une véritable synthèse de ces vues particulières, ce qui se fait plus ou moins consciemment. C'est à ce prix seulement que l'on se construit une idée intuitive de l'objet dans sa globalité.

7.1 Distance de l'objet

Ce travail de « prises de vues » et de synthèse est considérablement entravé ou facilité par certaines circonstances. Tout d'abord, on ne voit pas bien les objets trop grands. On voit bien un objet lorsqu'il s'inscrit dans un angle de vue modéré. La preuve, c'est que si l'objet est trop proche, on s'efforce de « prendre du recul », précisément pour diminuer l'angle de vue. Le professeur qui est le nez sur le tableau se plaint souvent de ne pas bien voir. Mais d'autre part, si on doit s'éloigner trop, on ne discerne plus bien les détails. Il arrive que l'on n'identifie un objet situé trop loin pour être vu distinctement que par référence à son environnement.

On ne voit pas bien non plus un objet trop petit, et si on s'en approche trop, on n'arrive plus à accommoder la distance de vision nette. Dans ce genre de circonstances, les myopes sont avantagés.

En résumé, pour qu'un objet soit vu distinctement, il faut qu'il ne soit ni trop grand, ni trop petit, ni trop loin, ni trop près⁴. Or nous sommes loin de maîtriser toujours les tailles des objets et leurs distances à nous. Il en résulte que nous voyons mal une proportion considérable des objets qui sollicitent notre attention.

7.2 Orientation de l'objet

D'autre part, l'orientation d'un objet peut aussi faciliter ou entraver sa perception. Pour examiner cette question, supposons que l'observateur soit dans une position *normale*, avec le buste vertical et le regard orienté devant lui et proche de l'horizontale. Et prenons l'exemple d'un cube. On le reconnaît plus facilement comme tel s'il est posé sur une table, c'est-à-dire sur un plan horizontal, face à l'observateur, un peu de travers de manière qu'on en voie trois faces.

De même une pyramide ou un cône droits sont le plus facilement reconnus lorsque leur axe est vertical. *A contrario*, on imagine le malaise d'une personne à qui l'on présenterait une maquette de maison orientée n'importe comment dans l'espace. L'horizontale et la verticale, qui sont des directions physiques familières à l'homme, jouent ainsi un rôle essentiel dans la perception d'une foule d'objets.

Insistons un peu sur ce point. On s'aperçoit spectaculairement du soutien qu'apportent les directions horizontale et verticale lorsqu'on en est soudain privé. Tel est le cas quand on cherche à comprendre les jours, les nuits et les saisons. Pour y arriver, on considère habituellement une représentation de la terre en quatre points de son orbite comme sur la figure 40. Le soleil est au centre et l'orbite est dessinée « horizontalement », ce qui permet de la voir au mieux. Sur la figure 41, nous avons isolé la terre avec son axe des pôles incliné. Nous avons aussi représenté la verticale (qui passe par le centre de la terre) ainsi que le plan de l'horizon, en un lieu situé à 45° de latitude nord. Les deux directions ainsi représentées ne coïncident pas du tout avec les bords de la feuille. Cela demande un grand effort d'imagination d'identifier cette verticale et cette horizontale avec les mêmes directions connues familièrement.

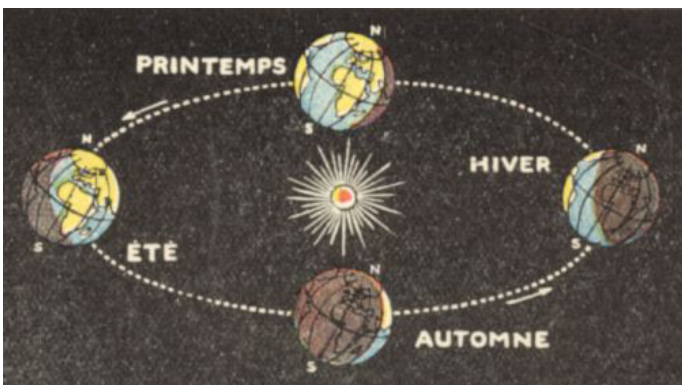


Fig. 40

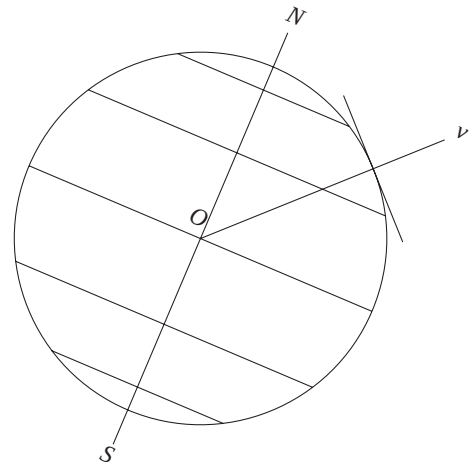


Fig. 41

⁴ Il faudrait ajouter encore ni trop brillant, ni trop sombre.

7.3 Orientation de l'observateur

Un observateur couché, ou placé dans une orientation inhabituelle (par exemple la tête en bas) a beaucoup de peine à percevoir les choses « comme elles sont ». Il en va de même s'il est en position normale, mais doit lever ou abaisser trop le regard, ou encore tourner trop les yeux vers la gauche ou la droite. Dans toutes ces circonstances, il est en outre difficile de communiquer à propos des objets. Par contre, si un objet est placé normalement devant soi, on peut parler à son sujet du dessus et du dessous, de l'avant et de l'arrière, de la gauche et de la droite, et ces qualifications aident à se le représenter. En outre, dans la communication entre personnes à propos des objets de l'espace, il est essentiel de comprendre ce que ces qualifications veulent dire lorsqu'elles s'appliquent à une autre personne que soi-même. En d'autres termes, il faut arriver à se mettre en imagination à la place de l'autre, pour saisir ce que veulent dire, par rapport à lui, *devant*, *derrière*, *à gauche*, *à droite*, *dessus* et *dessous*.

8 Qu'est-ce que voir dans l'espace ?

Ceci dit, qu'est-ce exactement que la capacité de *voir dans l'espace*, dont parlent si souvent les enseignants de mathématiques ? C'est tout d'abord la capacité, face à un objet perçu malaisément pour une raison quelconque, que ce soit sa position, sa taille, son orientation, ou une position défavorable de l'observateur, de le ramener mentalement et de se ramener soi-même dans une position d'observation aisée, ce qui permet de se le représenter fidèlement, d'en parler et de raisonner à son propos.

Cette capacité de ramener *mentalement* l'objet dans une position privilégiée, pour être à même d'en *détailler les propriétés*, est considérablement facilitée par deux circonstances importantes. D'une part si l'objet possède des symétries simples, celles-ci, perçues comme organisation globale de ses parties les unes par rapport aux autres, aident à le reconstituer dans la position privilégiée. Et de même, si l'objet est familier ou figuratif, ses diverses parties sont reconnues d'un coup d'œil, sans qu'il soit besoin de les détailler, et elles sont reconstituées en position privilégiée, sans devoir être transportées mentalement.

Nous venons de parler de *détailler les propriétés*. Voir dans l'espace, c'est aussi être capable d'agir mentalement sur les objets et d'imaginer des perceptions instructives. Par exemple faire tourner un objet, en faire le tour, l'agrandir ou le rapetisser, le déformer, le décomposer en ses parties et imaginer les connexions de ces parties et plus généralement sa structure, y discerner des axes ou des plans privilégiés, le situer dans un assemblage d'objets.

La capacité de voir dans l'espace est d'abord relative à la représentation mentale des objets (réels) perçus malaisément. Mais elle concerne aussi la restitution à trois dimensions des objets représentés en plan. Comme nous l'avons vu ci-dessus, les représentations planes d'objets de l'espace peuvent être ambiguës ou trompeuses. Elles ne sont en tout cas jamais totalement fidèles. Et c'est donc une opération non triviale, exécutée selon les cas de manière consciente ou raisonnée, que de faire correspondre à une figure plane, un objet en relief pensé en position privilégiée et donc sur lequel on puisse raisonner.

La reconstruction mentale d'un objet figuré par un dessin est facilitée par diverses circonstances. Montrons cela sur des exemples de perspective cavalière. Comme ci-dessus, la symétrie de l'objet, même si elle ne se retrouve pas dans le dessin, aide à la reconstruction (voir les figures 42 et 43). De même, le caractère figuratif est un facteur facilitant (voir les figures 44 et 45).

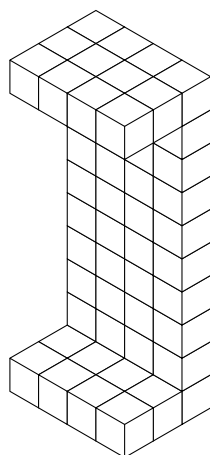


Fig. 42

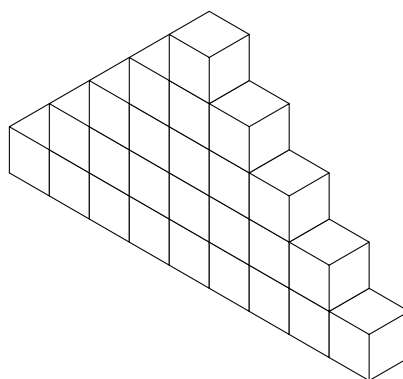


Fig. 43

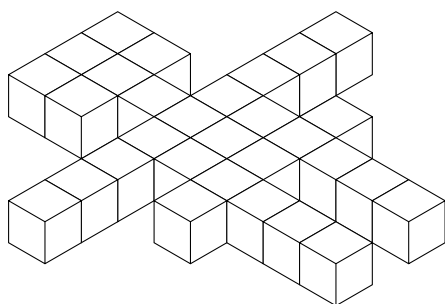


Fig. 44

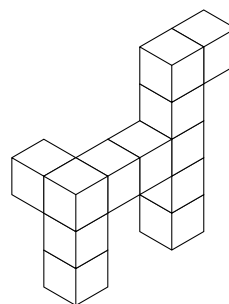


Fig. 45

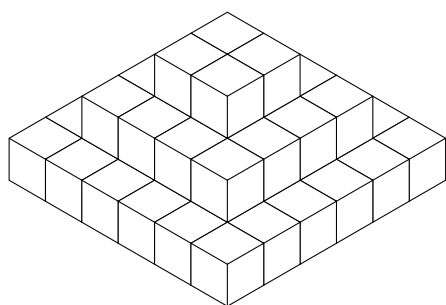


Fig. 46

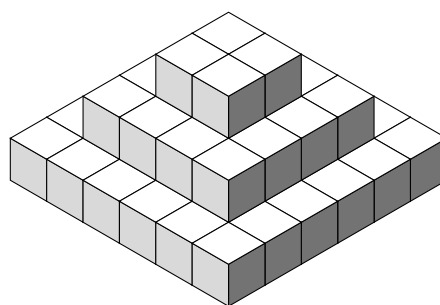


Fig. 47

Des ombres propres, supposées provenir d'un éclairage latéral, favorisent souvent la perception du relief, ce que l'on réalise en comparant les figures 46 et 47. Enfin, certains comptages ou mesures sommaires servent aussi à la reconstruction spatiale : c'est ainsi par exemple que l'appendice situé au-dessus et à droite de l'objet présenté à la figure 48 est constitué de deux cubes et non de trois. Avoir reconnu ce nombre aide à se souvenir de l'objet⁵.

⁵ Nous avons observé plusieurs fois que des personnes à qui on demandait de construire un assemblage réel de cubes d'après le modèle de la figure 48 construisaient cet appendice avec trois cubes.

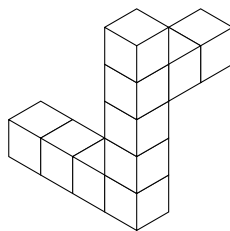


Fig. 48

9 La vision dans l'espace et la pensée

Parce que l'être humain doit sans cesse se situer parmi des objets à trois dimensions et agir sur eux, la capacité de voir dans l'espace a clairement une valeur pratique inappréciable. Mais pourquoi cette capacité est-elle un atout dans l'apprentissage des mathématiques ?

Tout d'abord, elle aide à apprendre la géométrie, ce qui va de soi. Mais en outre, dans toutes les autres parties des mathématiques, les intuitions spatiales constituent un soutien essentiel. Il faut même ici généraliser d'emblée le propos. Car ce qui soutient la pensée mathématique, ce sont les intuitions géométriques non seulement dans l'espace à trois dimensions, mais aussi dans des espaces à une et deux dimensions. Qui plus est, il y a des interactions utiles entre la droite, le plan et l'espace : les droites sont des éléments structurants du plan, comme les droites et les plans le sont de l'espace. La vision dans l'espace, au sens restreint où nous en avons parlé jusqu'ici, n'est qu'une facette (centrale) d'une sorte d'agilité de l'esprit circulant à travers des espaces de dimensions variées. Donnons-en quelques exemples.

On imagine volontiers les nombres rangés sur une droite. Mais le produit de deux nombres correspond à un réseau rectangulaire ou à un rectangle, le produit de trois facteurs à un parallélépipède. La figure 49 illustre géométriquement la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, sur l'exemple $3 \times (2 + 4) = 3 \times 2 + 3 \times 4$. La figure 50 permet de saisir intuitivement l'associativité de la multiplication, car on s'y persuade sans peine que $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$. La propriété de commutativité est aussi illustrée par ces deux figures.

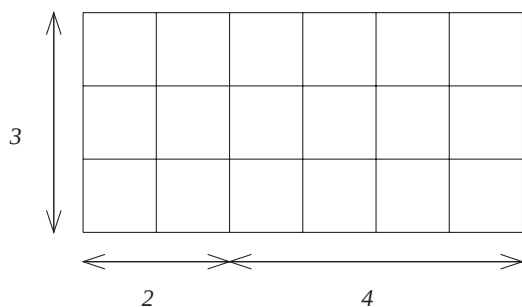


Fig. 49

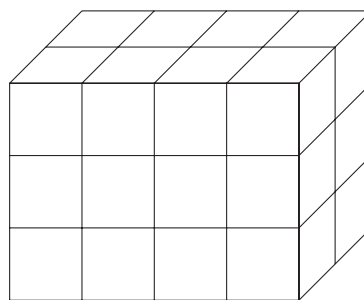


Fig. 50

Les fonctions d'une variable réelle sont représentées par des tableaux à deux entrées. Les fonctions de deux variables par des tableaux à trois entrées, dont la disposition la plus naturelle est celle d'un parallélépipède. Les mêmes fonctions se représentent naturellement comme des surfaces topographiques au-dessus d'un plan de coordonnées x et y . Les fonctions réelles de trois variables peuvent être imaginées comme représentant la densité d'un corps, variable d'un point à un autre. Les lieux

géométriques sont souvent des surfaces dans l'espace. Résoudre un système de trois équations à trois inconnues revient à rechercher l'intersection de trois plans. Les questions de programmation linéaire se ramènent souvent à la recherche d'un maximum ou d'un minimum dans une région polyédrale.

On pourrait multiplier les exemples. Mais une autre considération est importante⁶. En mathématiques, par delà les fonctions de deux ou trois variables, il y a les fonctions de $4, 5, \dots, n, \dots$ variables. Par delà les systèmes de trois équations, il y a les systèmes de $4, 5, \dots, n, \dots$ équations, etc. Or il se fait que les intuitions acquises dans le cadre des espaces ordinaires à deux ou trois dimensions se transposent, vaille que vaille, mais de façon tout de même efficace, à des espaces à plus de trois dimensions. Il y a même dans les mathématiques d'aujourd'hui une discipline appelée l'*analyse fonctionnelle*, où l'on étudie des objets dans des espaces possédant une infinité de dimensions. Et lorsqu'on étudie des objets dans de tels espaces, on revient sans cesse en pensée à des notions de géométrie familière, comme par exemple celle de distance.

Poussons la réflexion encore un peu plus loin. La pensée se communique le plus souvent par le langage. Or tant le langage parlé que le langage écrit se développent à une dimension : les mots parlés se suivent nécessairement dans le temps, et les mots écrits sont alignés. Ainsi, les moyens ordinaires de communication sont *unidimensionnels*. Mais la pensée est-elle, de son côté, unidimensionnelle ? Évidemment non. L'être humain vit dans l'espace et pense, se représente des choses dans l'espace. Et comme nous l'avons vu ci-dessus, il pense dans l'espace bien des choses qui ne sont pas naturellement inscrites dans l'espace. En outre, la pensée s'occupe des choses, mais aussi et peut-être surtout des relations entre les choses. Or il n'y a pas de raison que les relations entre les choses se présentent toujours en ligne⁷. C'est pour cela, selon toute vraisemblance, que la faculté de voir dans l'espace est un soutien de la pensée en général, et pas seulement de la pensée mathématique, ou géographique, ou architecturale, ... Il est donc sage de faire le pari qu'une substantielle instruction géométrique contribue à la formation intellectuelle générale.

10 Comment apprendre ?

Tout enfant, dans son milieu de vie, perçoit et manipule des objets solides, apprend à en parler et s'efforce d'en dessiner certains. De plus, il est plongé dans un univers d'images, animées ou non, qui le familiarisent avec les vues en plan d'objets solides. Il apprend spontanément à faire le va-et-vient entre ces objets et leurs représentations les plus communes. Ainsi et par la force des choses, il acquiert une certaine capacité à voir dans l'espace, variable d'un individu à l'autre. Cet apprentissage spontané se situe dans le cadre de l'intelligence des situations (cf. H. WALLON, [1970]), et ne relève donc pas au départ d'une activité déductive. L'*intelligence des situations* ou *intelligence pratique* est celle qui permet à l'enfant – ou à l'adulte –, en présence des choses qui sollicitent son attention, d'enchaîner quelques actions pour réaliser un but. Elle se distingue de l'intelligence abstraite, qui peut s'exercer hors de la présence des choses, sur des symboles qui les représentent.

Telle que nous venons de la présenter, l'intelligence des situations semble indépendante de l'acquisition du langage. Mais il faut tout de suite corriger cette impression. Il est vrai que le geste du bébé qui saisit son biberon et le porte à sa bouche du côté de la tétine se passe de mots et de phrases. Mais dès que l'enfant se met à parler, le langage soutient les démarches de l'intelligence pratique,

⁶ Nous évoquons ici au passage certains sujets mathématiques qui ne seront pas familiers à plus d'un lecteur. Cela ne devrait pas compromettre la compréhension générale de notre argumentation.

⁷ Dans les mathématiques d'aujourd'hui, on représente souvent les relations par des flèches, et on construit des diagrammes dits *à flèches*, que l'on peut en un certain sens voir comme des phrases à $2, 3, 4, \dots, n, \dots$ dimensions. Voir à ce sujet R. LAVENDHOMME, [1982].

contribue en quelque sorte à les piloter. Cela témoigne d'un *premier pas* vers l'intelligence abstraite. En effet, les mots qui sous-tendent les actions renvoient à des objets, des situations spatiales, et des actions dans l'espace. Or chaque mot de cet ordre – substantif, verbe, adverbe, préposition, ... – parce qu'il renvoie non pas à une chose singulière, mais à une catégorie, est le représentant d'un objet mental⁸. C'est sur ce terrain où l'intelligence pratique et le langage quotidien se forment l'un par l'autre, en s'épaulant mutuellement, que la pensée abstraite et déductive commence à prendre son essor. On conçoit sans peine l'importance, pour la suite de l'éducation, de cette première phase de la vie, en apparence peu intellectuelle et où beaucoup de choses s'acquièrent spontanément, grâce à la stimulation du milieu.

Mais si beaucoup de choses s'acquièrent spontanément, il est vrai aussi que l'école peut – et doit – contribuer à renforcer et perfectionner les acquis spontanés, pour donner aux enfants le maximum de chances de développer leurs potentialités. Les interventions de l'école peuvent se situer dans des registres divers et complémentaires. Voici, brièvement évoqués, quelques exemples d'activités possibles dans une classe.

- 1) Désigner à vue, dans un lot d'objets, la copie⁹ d'un objet que l'on a par ailleurs sous les yeux.
- 2) Désigner à vue, dans un lot d'objets, la copie d'un objet que l'on a été voir au fond de la classe, sans pouvoir le transporter.
- 3) Retrouver par tâtonnement, dans un sac contenant un lot d'objets, un objet dont on a une copie sous les yeux.
- 4) Reproduire un assemblage d'objets (par exemple une construction en cubes) que l'on a sous les yeux.
- 5) Reproduire un tel assemblage d'après un dessin (par exemple en perspective cavalière).
- 6) On découpe dans des cartons des représentations de cubes comme celles qui apparaissent sur les figures 1 à 4. En disposant de tels cartons sur la table, représenter en plan un assemblage de cubes que l'on a devant soi. Assembler des cartons pour figurer une situation spatiale est plus facile que de dessiner, mais aussi mobilise d'autres capacités psychomotrices (par exemple celle de glisser un carton sous un autre pour figurer un objet à l'arrière de celui-ci).
- 7) Dessiner un assemblage d'objets sur du papier quadrillé ou pointé, ou sur du papier blanc, à main levée ou aux instruments.
- 8) Reproduire ou représenter un assemblage d'objets que l'on peut aller voir au fond de la classe, mais non transporter.
- 9) Reproduire ou représenter un assemblage d'objets décrit oralement par une autre personne, à partir de l'assemblage lui-même, ou d'une représentation.
- 10) Décrire par écrit un assemblage d'objets, et le donner à reproduire à une autre personne, à partir de la description.

De telles activités soigneusement graduées exercent les perceptions visuelles et tactiles, les facultés psychomotrices (à l'œuvre pour assembler des objets, dessiner selon diverses techniques), la mémoire, les langages parlé et écrit. Elles obéissent à des critères de succès intrinsèques, c'est-à-dire

⁸ La locution *objet mental*, introduite par H. FREUDENTHAL, doit être distinguée de celle de concept mathématique au sens le plus courant. Un concept mathématique s'inscrit dans une théorie axiomatique, il répond à une définition précise, comportant toutes les connotations techniques qui lui permettent de déjouer les pièges des démonstrations. Un *objet mental* est une notion appartenant au langage quotidien ou proche de celui-ci, moins connotée techniquement que la plupart des concepts mathématiques, et qui est néanmoins un outil efficace pour analyser et comprendre une classe de phénomènes numériques, géométriques ou autres. Pour plus de détails à ce sujet, voir par exemple N. ROUCHE, [1992].

⁹ Ici et ci-dessous, le mot *copie* renvoie à un objet de même grandeur et de même forme.

indépendants de la sanction du maître : dans chaque cas, on vérifie sans peine le succès ou l'échec de l'opération. Certains mobilisent l'action d'une personne isolée, d'autres requièrent la collaboration entre deux ou plusieurs personnes.

Revenons un moment sur le rôle du langage. Les enfants non seulement utilisent, mais mettent au point, souvent entre eux, un langage qui leur permet de communiquer efficacement. Ils choisissent fréquemment des mots qui ne sont pas ceux des manuels. *Ces mots, que l'adulte parfois n'attend pas, témoignent d'une première objectivation de la pensée* : on se met d'accord sur une désignation, et cela fonctionne, on se comprend et on arrive par là au bout des opérations entreprises.

Certes il importe que petit à petit les enfants apprennent les dénominations officielles, parce qu'elles leur ouvrent des possibilités de communication plus larges, quasi universelles. Il faut apprendre à parler comme tous les autres.

Mais dans l'apprentissage de la langue scientifique, *l'essentiel* se trouve dans la communication claire des choses et des idées, et non dans le respect d'un langage convenu. La rigueur du langage n'est pas un objectif en soi. Elle a une fonction, qui est d'aider à éviter les quiproquos et les erreurs, d'affermir la pensée, de rendre la démarche intellectuelle sûre.

Quelques mots maintenant sur l'apprentissage des représentations planes d'objets de l'espace. Les enfants et les adolescents s'initient à la géométrie, en particulier à celle de l'espace. Cette étude ne saurait être au départ celle d'axiomes, de définitions et de propriétés déduites. Elle consiste plutôt, au cours des premières années de l'enfance, en activités comme celles que nous avons évoquées ci-dessus, qui renforcent dans l'action, la pensée et le langage ce qu'apporte de facto l'environnement quotidien¹⁰. En ce sens, le rôle de l'école élémentaire n'est pas d'abord d'inculquer une discipline intellectuelle préexistante, codifiée dans un livre¹¹.

Au sortir de l'enfance, on étudie plus résolument la géométrie raisonnée. En ce qui concerne la géométrie de l'espace, la manipulation de vrais objets à trois dimensions demeure indispensable et stimulante jusqu'à la fin des études. Mais à côté des solides et des maquettes, les représentations planes doivent aussi jouer un grand rôle.

Pour deux raisons d'abord, elles ont un intérêt propre. En effet, nous vivons, comme on dit, dans une civilisation de l'image, et donc il est utile de comprendre les images et de savoir à l'occasion s'en servir pour argumenter (et pour tant d'autres choses !) ; ensuite, la recherche de représentations fidèles a joué un grand rôle dans l'histoire du dessin, de la peinture et du bas-relief, et les résultats de cette recherche sont de ce fait porteurs d'une profonde signification culturelle. C'est pourquoi il est bon que l'étude des représentations planes – y compris sans doute dans leur dimension historique – soit un thème en soi dans les leçons de géométrie de l'espace (voir à cet égard CREM [2001a] et [2001b]).

Mais une autre raison, davantage liée à la géométrie elle-même, rend cette étude inéluctable. D'une part, comme nous l'avons déjà observé, on n'a pas toujours à sa disposition des solides réels ou des maquettes. Et force est donc de s'expliquer à l'aide de dessins. Mais il y a plus profond : comme nous l'avons aussi expliqué ci-dessus, nous voyons mieux, plus complètement, les choses plates que les choses en relief. Et donc, dans certaines circonstances, malgré les ambiguïtés des représentations planes, et à condition que ces ambiguïtés soient clairement connues et reconnues, il est plus aisé de raisonner sur une figure que sur un solide. Par exemple, pas mal de formes et de mesures se lisent plus aisément sur un plan d'architecte que sur une maquette. *Et donc les représentations*

¹⁰ Trop souvent sans doute, dans l'enseignement élémentaire, la géométrie des programmes se limite aux définitions des figures et solides courants, et à quelques formules d'aires et de volumes. Cette remarque n'entraîne pas que les aires et volumes soient des matières négligeables, loin de là. Mais elles devraient faire l'objet d'un autre exposé.

¹¹ Peu importe si certains, par respect de l'acception habituelle du terme *science*, veulent qualifier cet apprentissage de pré-scientifique – ou en l'occurrence de pré-géométrique – plutôt que de scientifique.

planes ne sont pas toujours un pis-aller auquel on recourt parce que les maquettes sont chères et encombrantes. Il arrive qu'elles soient aussi par elles-mêmes une aide positive à l'intelligence des choses de l'espace.

Acceptons donc pour acquise cette double constatation que les représentations planes sont, dans la géométrie de l'espace, à la fois des chapitres à étudier et des moyens d'accéder aux connaissances. À cause de cela, un paradoxe apparaît. Car pour apprendre la géométrie, on doit s'appuyer sur les représentations planes, mais pour comprendre les représentations planes (dont la plupart sont des projections¹²), on a besoin de la géométrie. Ainsi les deux vont de pair, et le paradoxe suffit à montrer qu'il n'y a pas à la géométrie de l'espace un *accès* pur, où chaque élément serait d'emblée à sa place dans les chaînes déductives issues d'un ensemble d'axiomes. Bien entendu, une telle théorie existe (et peut même être développée selon divers ordres), mais elle ne peut être le fait que d'une mise au point tardive (fin du secondaire ou enseignement supérieur) d'un savoir acquis tout autrement. Une certaine maîtrise du va-et-vient entre le plan et l'espace relève d'abord du registre perceptivo-moteur et sert d'appui au registre déductif.

¹² Les développements de solides constituent une exception.

L'AIRE COMME RECOUVREMENT D'UNE FIGURE

Préambule

Le calcul des aires est enseigné dès l'école fondamentale. Son utilité dans la résolution de problèmes issus de la vie courante est telle que l'on veille à ce que les élèves disposent rapidement de procédures et de formules, aux dépens parfois d'une approche de la notion fondamentale d'aire comme recouvrement d'une figure.

La notion d'aire comme recouvrement permet des comparaisons, elle fonde la construction des formules de calcul et constitue un outil de démonstration. Cette notion joue un rôle central dans la géométrie grecque, elle intervient dans la plupart des démonstrations du théorème de Pythagore, et d'une toute autre façon, dans une démonstration du théorème de Thalès. Or, on le sait, ces deux théorèmes ouvrent la voie à des calculs de longueurs dans des figures dont on ne connaît pas toutes les dimensions et par là au calcul de distances inaccessibles. Ils sont aussi à la base de la trigonométrie.

Les activités de cette section s'adressent à des élèves de troisième année du secondaire de l'enseignement de transition, elles constituent un parcours dans la géométrie avec la notion d'aire comme fil conducteur. Elles renouent avec un certain regard, celui que porte la géométrie grecque sur les figures et les grandeurs, et mettent en place les outils de pensée qu'il faut engager dans les démonstrations qui utilisent des comparaisons d'aires.

1 Aires et périmètres

De quoi s'agit-il ?

Comparer des figures selon différents critères. Sont-elles superposables, de même aire, de même périmètre ? Expérimenter que des figures qui ont même aire n'ont pas nécessairement même périmètre (et réciproquement). Imaginer des découpages pour comparer les aires de figures non superposables.

Enjeux

La notion d'aire, abordée indépendamment du calcul des aires. Distinguer un énoncé de sa réciproque.

De quoi a-t-on
besoin ?

Comment s'y
prendre ?

Matériel. – La fiche 9 à la page 193 présentée en annexe.

Prérequis. – Reconnaître à vue des mouvements qui permettent de superposer deux figures.

Les premières figures à comparer sont dessinées sur papier pointé. Cette trame, composée à partir d'un pavage de triangles équilatéraux, empêche le recours aux unités et aux formules habituelles, tout en donnant accès à des décompositions utiles pour comparer les périmètres et les aires des figures proposées.

Fiche 9

1. Quelles sont les figures qui ont la même aire ?
2. Quelles sont celles qui ont le même périmètre ?

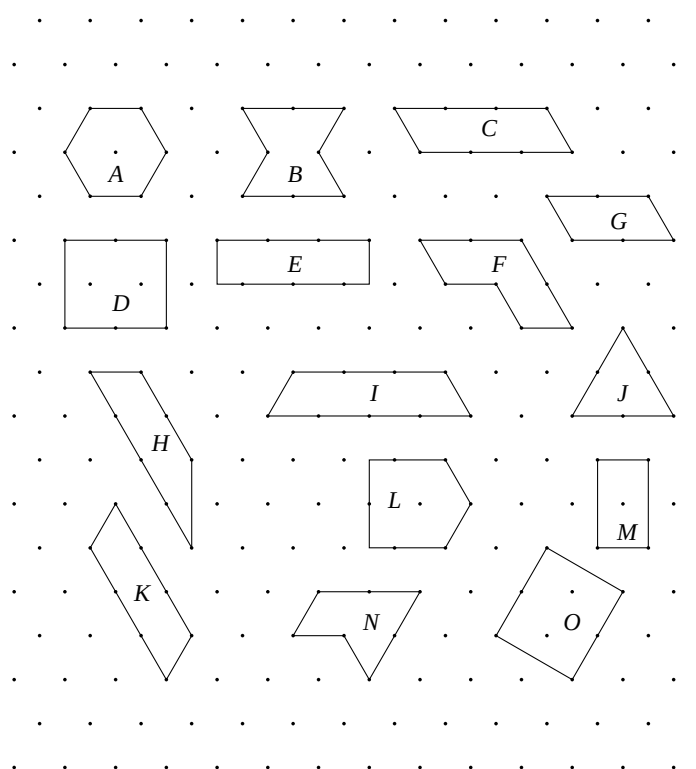


Fig. 1

Le travail commence par l'examen de la trame, c'est le ressort de l'activité !

La figure *B* est formée de deux trapèzes qui valent chacun un demi-hexagone. Ce premier découpage donne d'emblée une méthode de comparaison qui consiste à découper, puis à recomposer des figures en « morceaux superposables ». Ainsi,

- la figure *C* est composée de six triangles superposables aux triangles qui forment la figure *K* ou la figure *B*,
- la figure *F* est formée des mêmes trapèzes que la figure *B*,

- la figure G ne contient que quatre triangles, elle appartient à une autre catégorie.

Dans certains cas, la comparaison des figures selon les périmètres n'est pas aisée. Ainsi, dans les figures D , E , H , L , M et O , deux longueurs interviennent : le côté du triangle équilatéral et la hauteur de ce triangle, la hauteur étant évidemment plus courte que le côté. Il faut donc repérer ces deux longueurs, leurs moitiés ou leurs multiples, additionner puis comparer les sommes obtenues. Le passage par des lettres pour désigner ces deux longueurs facilite le travail. Soit a la longueur du côté et b celle de la hauteur. Le périmètre de la figure D s'écrit alors :

$$4a + 4b,$$

et celui de E :

$$6a + 2b.$$

Pour comparer ces deux périmètres, retranchons à chacun les parties communes et comparons les restes :

Figure D	Figure E
$\begin{array}{r} 4a + 4b \\ -4a - 2b \\ \hline 2b \end{array}$	$\begin{array}{r} 6a + 2b \\ -4a - 2b \\ \hline 2a \end{array}$

Comme $b < a$, le périmètre de D est inférieur à celui de E .

De même pour comparer les périmètres des figures D et L .

Figure D	Figure L
$\begin{array}{r} 4a + 4b \\ -4a - 2b \\ \hline 2b \end{array}$	$\begin{array}{r} 5a + 2b \\ -4a - 2b \\ \hline a \end{array}$

On retourne au papier pointé pour constater que $2b$ est plus grand que a , le périmètre de D est donc plus grand que celui de L .

Le professeur pose alors une nouvelle série de questions qui introduisent une synthèse.

Vrai ou Faux ?

1. Si deux figures sont superposables, alors elles ont même aire.
2. Si deux figures ont même aire, alors elles sont superposables.
3. Si deux figures ont même périmètre, alors elles ont même aire.
4. Si deux figures ont même aire, alors elles ont même périmètre.
5. Si deux figures ont même aire et même périmètre, alors elles sont superposables.

Le premier énoncé est évidemment vrai, il a servi de critère pour répondre aux questions de la fiche 9. Par contre, réaliser clairement et justifier que la proposition réciproque est fausse est moins facile : c'est cependant une

étape importante dans la formation des élèves. Les quatre énoncés suivants sont là pour aider à franchir ce cap. Les propositions sont toutes fausses. Pour justifier cela, il suffit d'exhiber chaque fois un contre-exemple. On en trouve pour chaque énoncé dans la figure 1. Ainsi, exhiber les figures F et C qui ont même aire et même périmètre, sans pour autant être superposables, suffit à prouver que la cinquième proposition est fausse.

Ces propriétés ayant été analysées quant au fond, un travail sur la forme peut être envisagé, à savoir : aborder la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante. Voici, à titre d'exemple, quelques questions.

Vrai ou faux ?

1. Pour que deux figures soient superposables, il faut qu'elles aient même aire.
2. Pour que deux figures soient superposables, il suffit qu'elles aient même aire.
3. Pour que deux figures aient même aire, il faut qu'elles soient superposables.
4. Pour que deux figures aient même aire, il suffit qu'elles soient superposables.
5. Deux figures sont superposables, seulement si elles ont même aire.

La question suivante demande de comparer des aires de figures familières. Mais cette fois, les élèves les dessinent eux-mêmes sur un papier vierge de toute trame.

Les diagonales d'un carré, d'un rectangle et d'un parallélogramme déterminent-elles des triangles de même aire ?

Les quatre triangles de la figure 2, dont un sommet est l'intersection des diagonales, sont très faciles à identifier, ils sont évidemment superposables et ont même aire.

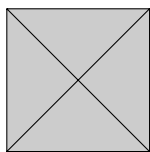


Fig. 2

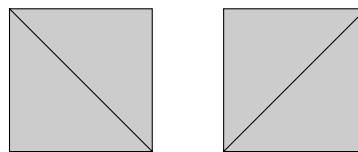


Fig. 3

Les quatre triangles montrés par la figure 3 sont moins faciles à repérer car, lorsqu'on trace les deux diagonales comme sur la figure 2, ces triangles se chevauchent. On constate, dans la figure 2, que ces triangles sont superposables selon le cas, par un demi-tour, par un quart de tour ou une symétrie orthogonale. Ils ont même aire.

Les diagonales du carré déterminent donc deux ensembles de triangles, un premier ensemble composé de quatre petits triangles de même aire ; un autre, de quatre triangles plus grands, eux aussi de même aire.

Dans le rectangle, considérons d'abord les triangles dont un sommet est l'intersection des diagonales. On voit deux paires de triangles superposables par un demi-tour, montrés par la figure 4.

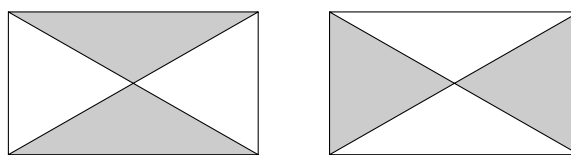


Fig. 4

Les deux triangles grisés de la figures 5 ne sont visiblement pas superposables, ceux de la figure 6 ne le sont pas non plus. Pour comparer leurs aires, on peut recourir aux formules mais on peut aussi, et c'est la méthode que nous préconisons ici, tenter de superposer les figures par morceaux.

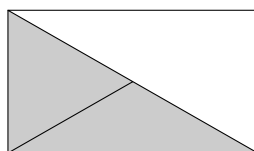


Fig. 5

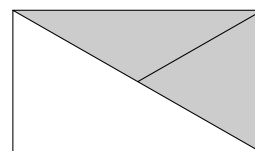


Fig. 6

Les élèves ayant, à plusieurs reprises (voir fiche 9), coupé des triangles selon une hauteur, on peut espérer qu'ils transfèrent cette expérience et tracent d'eux-mêmes les médianes du rectangle (voir figure 7).

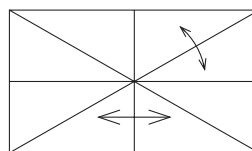


Fig. 7

Ce découpage met en évidence huit triangles superposables. Lorsqu'ils sont adjacents, ils sont superposables soit par une symétrie orthogonale, soit par un demi-tour. Il suffit ensuite de les assembler par paires pour reconstituer les triangles montrés par les figures 5 et 6. Les quatre triangles dont un sommet est l'intersection des diagonales du rectangle ont donc la même aire.

Considérons à présent les quatre triangles dont un côté est une diagonale du rectangle (voir figure 8). Lorsqu'on les considère à l'intérieur d'un même rectangle, ils sont superposables selon le cas, par un demi-tour ou par une symétrie orthogonale. Ils couvrent chacun un demi-rectangle. Ils ont même aire.

Les diagonales du rectangle, tout comme celles du carré, déterminent deux ensembles de triangles. Dans chaque ensemble, on trouve quatre triangles de même aire.

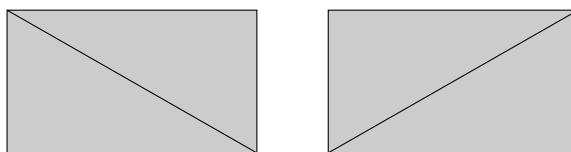


Fig. 8

Dans le parallélogramme, repérons d'abord les triangles dont un sommet est l'intersection des diagonales : ils se superposent deux à deux par un demi-tour ; ce sont les deux triangles grisés et les deux triangles blancs de la figure 9.

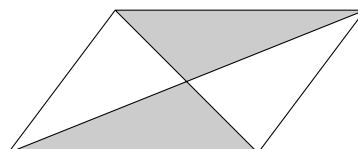


Fig. 9

On croit avoir terminé car la construction des médianes (voir figure 10) ne fait pas apparaître de sous-figures superposables et pourtant...

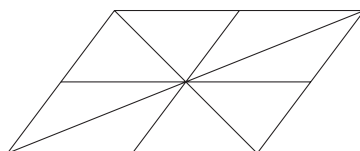


Fig. 10

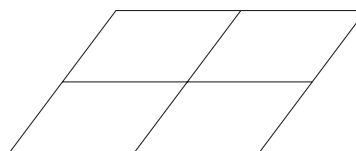


Fig. 11

Observons d'abord sur la figure 11 que les médianes forment quatre petits parallélogrammes superposables et que chacun est composé de deux triangles superposables.



Fig. 12

Les quatre triangles de la figure 12 valent chacun la moitié d'un de ces petits parallélogrammes, ils ont donc même aire.

La figure 13 montre que les triangles dont un sommet est l'intersection des diagonales sont composés chacun de deux triangles de la figure 12, ils ont donc même aire.

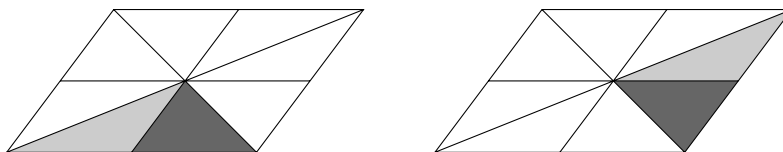


Fig. 13

Il faut évidemment considérer aussi les quatre grands triangles qui ont comme côté l'une des deux diagonales du parallélogramme de départ : ils sont superposables deux à deux par un demi-tour. Chacun est un demi parallélogramme, ils ont donc tous les quatre la même aire.

Carré, rectangle et parallélogramme sont donc découpés par leurs deux diagonales en deux ensembles distinctes de triangles, comportant chacun quatre triangles de même aire.

Le travail se clôture avec un retour sur la notion de polygones de même aire : lorsqu'on peut découper un polygone en un nombre fini de pièces et réarranger celles-ci pour former un autre polygone, alors les deux polygones ont même aire. On dit aussi que ces polygones sont *équidécomposables*.

2 Démontrer le théorème de Pythagore

De quoi s'agit-il ?

Les élèves se servent d'une trame quadrillée qui leur est fournie, pour comparer les aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle.

Enjeux

Conjecturer la relation de Pythagore et disposer d'éléments pour la démontrer.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – La fiche 10 à la page 194.

Prérequis. – Aire du rectangle, aire du triangle rectangle comme demi-rectangle.

Comment s'y prendre ?

Avant d'aborder l'exploration proprement dite du théorème de Pythagore, il est bon de le situer dans le cadre de la détermination d'un triangle. On sait par expérience que lorsqu'on articule deux barres de métal et qu'on les fixe l'une à l'autre pour qu'elles forment un angle donné, on détermine un troisième segment représenté par une ficelle sur la figure 14.

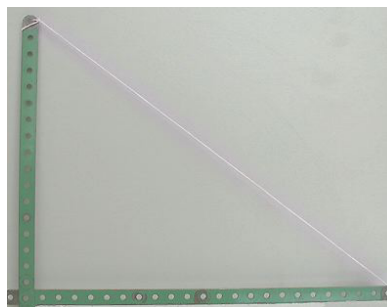


Fig. 14

On imagine donc que l'on peut calculer la longueur de la ficelle à partir de celles des deux barres. Le professeur soumet alors aux élèves quelques triangles rectangles, ils mesurent les côtés et cherchent une relation entre

les longueurs. Les essais s'avèrent infructueux. C'est alors que le professeur introduit la fiche 10. Celle-ci dévie la recherche d'une relation entre longueurs vers celle d'une relation entre des aires.

Le professeur précise qu'aucune mesure à la règle n'est nécessaire, qu'il faut se servir uniquement des indications fournies par la trame quadrillée. Il recommande d'appeler u , la longueur du côté du carreau et u^2 l'aire d'un carreau. Nous appelons ici *carreau*, le plus petit carré qu'on peut dessiner sur la trame.

Fiche 10

Y-a-t-il une relation entre les aires des carrés construits autour d'un même triangle rectangle ?

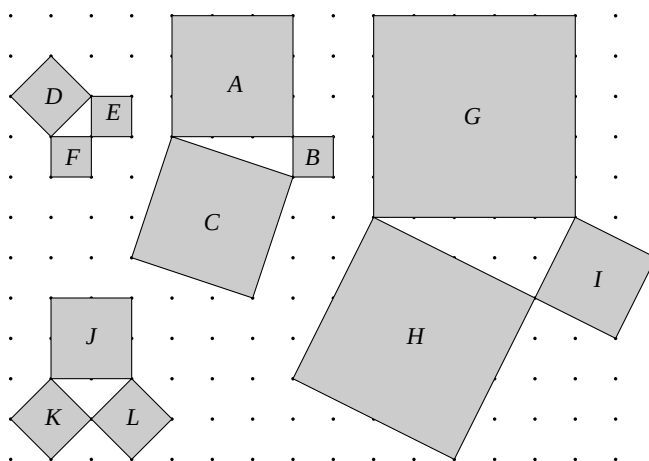


Fig. 15

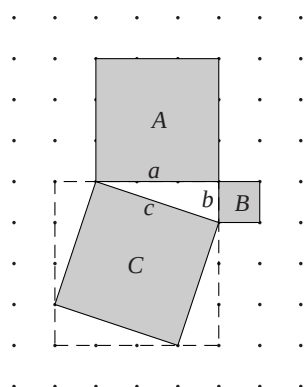


Fig. 16

Les élèves dressent un tableau dans lequel ils reportent pour chaque triangle, les mesures de chacun des carrés en distinguant le petit carré, le moyen et le plus grand (celui qui est construit sur l'hypoténuse).

Chaque fois que les côtés d'un carré ne sont pas dans les directions du quadrillage, on se sert d'un carré extérieur qui contient lui, un nombre entier de carreaux. C'est le cas, par exemple, du carré C montré par la figure 16. Les triangles extérieurs au carré, sont tous les mêmes, ils couvrent chacun un demi-rectangle qui vaut $3u^2$. L'aire du carré C vaut donc

$$16u^2 - (4 \times 1,5u^2) = 10u^2.$$

Le tableau, une fois complété, conduit à conjecturer que la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle vaut celle du carré construit sur l'hypoténuse.

Figure	Aire du plus petit carré	Aire du carré moyen	Aire du carré construit sur l'hypoténuse
<i>ABC</i>	$1u^2$	$9u^2$	$10u^2$
<i>DEF</i>	$1u^2$	$1u^2$	$2u^2$
<i>GHI</i>	$5u^2$	$20u^2$	$25u^2$
<i>JKL</i>	$2u^2$	$2u^2$	$4u^2$

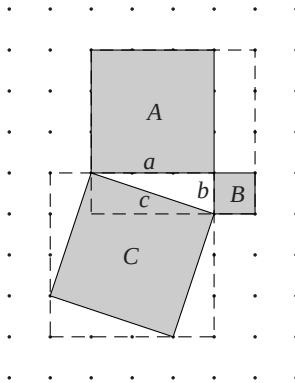


Fig. 17

Cette relation est surprenante. L'explication vient dès que l'on construit un autre carré extérieur aux carrés *A* et *B*. C'est ce que montre la figure 17. Les carrés *A* et *B*, complétés de quatre triangles, remplissent un carré de côté $a + b$. Le carré *C* et les quatre mêmes triangles remplissent aussi un carré de côté $a + b$. On a donc : aire *A* + aire *B* = aire *C*.

Après la phase d'exploration sur une trame quadrillée et l'explication que l'on vient de découvrir, il faut s'assurer que cette relation reste vraie pour des triangles rectangles qui ne sont pas dessinés sur une trame quadrillée. La démonstration induite par la question qui suit, utilise les propriétés des figures telles qu'elles ont été travaillées lors de la phase exploratoire.

Construire puis découper huit triangles rectangles superposables. Appeler a et b les côtés de l'angle droit de ces triangles. Tracer deux carrés de côté $a + b$. Dans chacun des deux carrés, placer quatre triangles de sorte que les parties du carré non recouvertes par les triangles aient elles-mêmes la forme carrée.

La figure 18 montre deux façons de disposer les triangles.

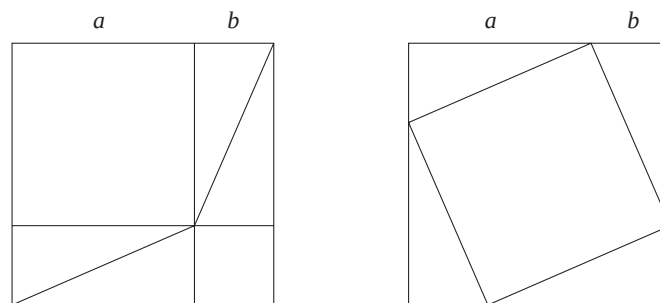


Fig. 18

Il faut d'abord s'assurer que les vides laissés par les triangles sont bien des carrés. C'est évident pour les carrés de côtés a et b tandis que pour celui de côté c (l'hypoténuse), il faut vérifier. On peut s'y prendre de deux façons : soit en montrant qu'il s'agit d'un losange dont les angles sont droits, soit en considérant que les quatre points qui déterminent ce quadrilatère sont images l'un de l'autre par une rotation de 90° .

L'équivalence entre l'aire du carré construit sur l'hypoténuse et celles des carrés construits sur les côtés de l'angle droit apparaît par différence. Ces

figures illustrent les égalités

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$$

Algèbre et géométrie s'éclairent mutuellement. Un enchaînement naturel d'idées a conduit les élèves, au départ d'une notion très élémentaire (l'aire d'une figure), à conjecturer, puis à démontrer un des plus grands théorèmes de l'histoire de la pensée mathématique.

Retournons à présent au triangle rectangle formé à partir de deux tiges de métal (voir figure 14 à la page 63) : lorsque celles-ci forment un angle droit, la longueur de la ficelle qui relie les extrémités des deux barres est la racine carrée de la somme des carrés des longueurs des barres.

3 Aire du parallélogramme

De quoi s'agit-il ?

Les élèves comparent les aires de parallélogrammes qui ont même hauteur.

Enjeux

Établir la formule de l'aire du parallélogramme et savoir pourquoi on peut, dans ce calcul, choisir comme base n'importe quel côté du parallélogramme. La maîtrise de ces deux points conditionne l'accès à la démonstration du théorème de Thalès par les aires.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Les fiches 11 à 14.

Prérequis. – Aire du rectangle. Cas d'isométrie des triangles. Invariants des isométries. Angles à côtés parallèles, à côtés perpendiculaires.

Comment s'y prendre ?

On propose la fiche suivante aux élèves :

Fiche 11

Ces deux parallélogrammes ont-ils la même aire ?

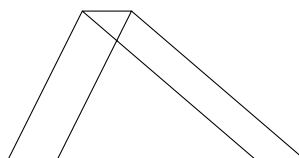


Fig. 19

Le professeur recommande aux élèves de compléter la figure pour y faire apparaître un trapèze et deux triangles superposables par translation. La figure 20 montre les deux triangles et la translation.

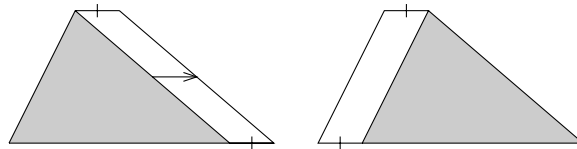


Fig. 20

Il suffit ensuite de considérer chaque parallélogramme comme « ce qui reste » lorsqu'on ôte au trapèze, à tour de rôle, un des deux triangles, et le tour est joué !

Cette démonstration établit l'égalité des aires de tous les parallélogrammes qui ont des bases de même longueur et des hauteurs (relatives à ces bases) de même longueur. On peut en effet disposer des parallélogrammes qui ont ces caractéristiques, comme ceux de la figure 19 et former un trapèze.

On notera qu'on a utilisé le principe d'« équicomplémentarité » pour comparer des aires. Chez Euclide, ce principe fait référence à la notion commune : « si à des choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux ».

On propose ensuite aux élèves la fiche suivante.

Fiche 12

Pour chaque parallélogramme, dessiner un rectangle de même aire.

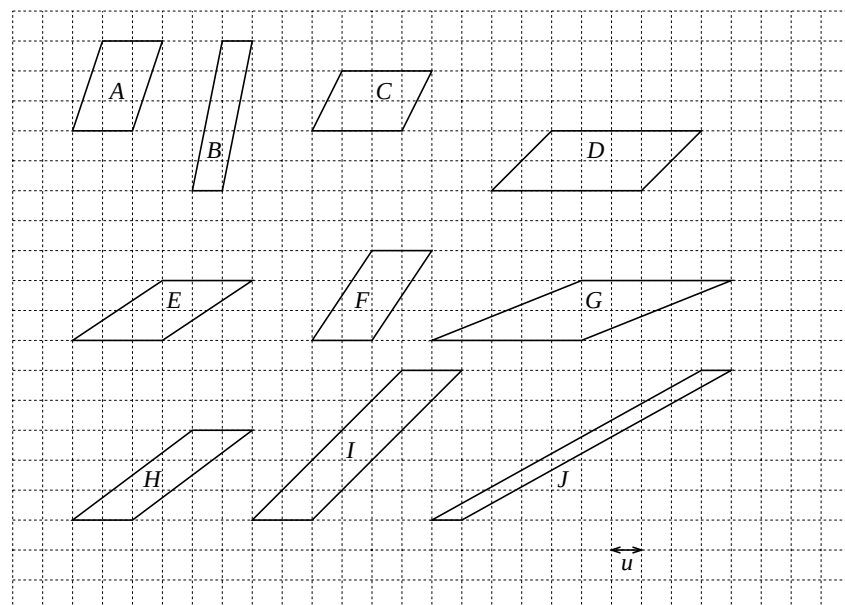


Fig. 21

Cette figure introduit un calcul d'aires. Une unité de longueur u est donnée. L'unité d'aire est u^2 . Comme le rectangle est un parallélogramme, il suffit de construire un rectangle dont les dimensions sont la base et la hauteur du parallélogramme donné.

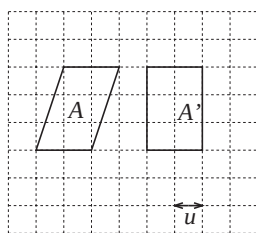


Fig. 22

Par exemple, pour le parallélogramme A , on construit un rectangle A' (voir figure 22) de $2u$ sur $3u$; il contient six carreaux, son aire est de $6u^2$.

Les parallélogrammes F et H ont même base et même hauteur que le rectangle A' , ils ont donc aussi même aire. Les parallélogrammes C et E ont une base de $3u$ et une hauteur de $2u$, ils ont donc même aire que le rectangle A' , à savoir $6u^2$. On trouve de la même façon l'aire des parallélogrammes B et J , elle vaut $5u^2$. Les parallélogrammes D , G et I ont une aire de $10u^2$.

On conclut :

1. L'aire d'un parallélogramme vaut $a \times h$, a étant un côté et h , la hauteur relative à ce côté.

Un autre énoncé, qui généralise celui-ci, sera bien utile dans la suite pour comparer des parallélogrammes qui ont même hauteur et des bases différentes (voir figure 23).

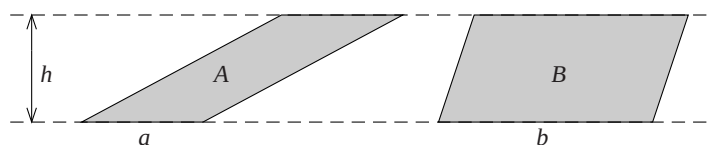


Fig. 23

2. Les aires de parallélogrammes de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.

En effet, $\frac{\text{aire de } A}{\text{aire de } B} = \frac{a \times h}{b \times h} = \frac{a}{b}$.

Ce théorème est essentiel : il opère le passage de la deuxième dimension à la première.

Fiche 13

1. Est-il possible de dessiner deux rectangles distincts qui ont même aire que le parallélogramme de la figure 24 ?
2. Est-il possible de dessiner deux rectangles distincts qui ont même aire que le losange de la figure 25 ? Imaginer des réponses avant de dessiner.

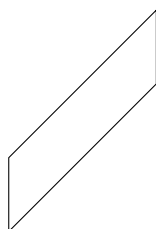


Fig. 24

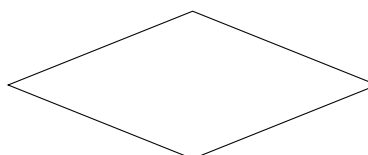


Fig. 25

Voici deux rectangles qui répondent à la première question.

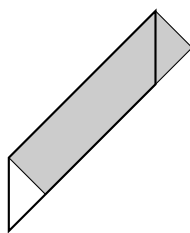


Fig. 26

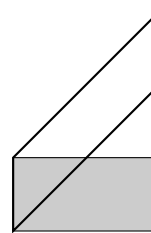


Fig. 27

Chacun d'eux a une aire égale à celle du parallélogramme puisqu'il a comme base un côté du parallélogramme et comme hauteur, la hauteur relative à ce côté. Ces deux rectangles ont donc même aire. Ceci montre que pour calculer l'aire d'un parallélogramme, on peut utiliser n'importe quel côté du parallélogramme, à condition de prendre ensuite comme hauteur, la hauteur relative à ce côté.

Les figures 28 et 29 montrent deux rectangles qui ont même aire que le losange.

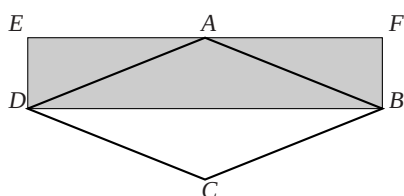


Fig. 28

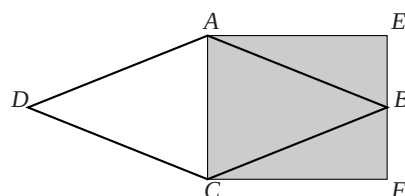


Fig. 29

On en tire deux façons de calculer l'aire d'un losange. Les lettres D et d désignant la grande et la petite diagonale, on a

$$\text{aire du losange} = D \times \frac{d}{2} = \frac{D}{2} \times d.$$

On peut aussi répondre à la question en s'inspirant des constructions réalisées en réponse à la fiche précédente : prendre comme base, tantôt un côté du losange, tantôt l'autre (voir les figures 30 et 31).

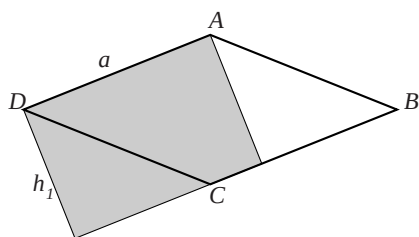


Fig. 30

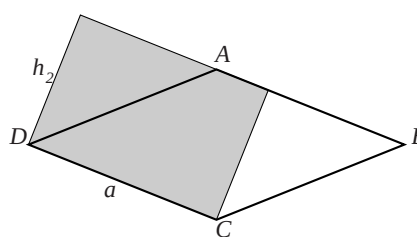


Fig. 31

Se pose alors la question de savoir si ces deux rectangles, qui ont même aire, sont ou non superposables. On peut vérifier qu'ils le sont effectivement en considérant que chacun des triangles grisés de la figure 32 est isométrique à un triangle blanc de la même figure.

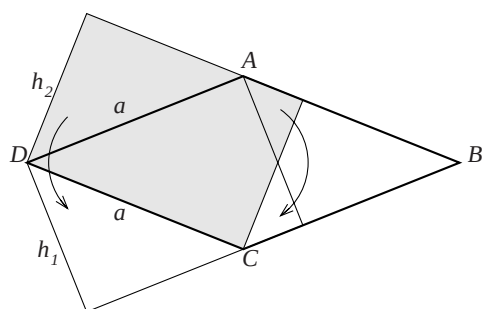


Fig. 32

En effet :

- les deux grands triangles, un gris et un blanc, sont rectangles, ils ont des hypoténuses de même longueur et des angles de même amplitude (angles à côtés parallèles).
- les deux petits triangles viennent chacun compléter le même cerf-volant de sommet B pour former un triangle rectangle. Les deux triangles ainsi formés sont isométriques car leurs hypoténuses ont même longueur (a) et qu'ils ont des angles de même amplitude (angles à côtés perpendiculaires inférieurs à 180°). Les deux petits triangles sont donc isométriques.

Le professeur oriente ensuite les élèves vers une autre façon de démontrer que les deux rectangles ont les mêmes dimensions. Il donne la consigne qui suit.

Ecrire l'aire de chacun des rectangles en utilisant les notations des figures 30 et 31.

L'aire du rectangle de la figure 30 à la page précédente s'écrit ah_1 , celle du rectangle de la figure 31 à la page précédente, ah_2 . On a par ailleurs

$$ah_1 = ah_2,$$

puisque chaque rectangle a même aire que le losange. Après simplification de l'égalité, on a donc

$$h_1 = h_2.$$

Ces deux rectangles ont donc les mêmes dimensions.

Cette dernière démonstration est très rapide, elle comporte un passage de la deuxième dimension à la première, elle ressort plus du calcul que de la manipulation de figures.

Fiche 14

On croise deux bandes de papier de même largeur comme sur la figure 33. Quelle est la nature du quadrilatère qui se forme à l'intersection des deux bandes ?

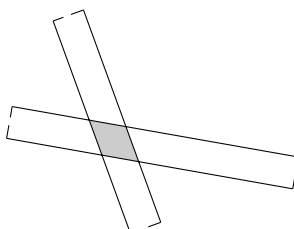


Fig. 33

Le quadrilatère est certainement un parallélogramme. Mais, sauf dans les cas où les bandes sont disposées comme sur la figure 34, on perçoit rarement que c'est un losange.

Même dans ce cas, la figure que l'on a entre les mains n'étant pas très stable, on hésite. Pour s'assurer qu'il s'agit bien d'un losange et comprendre en même temps pourquoi des bandes de même largeur forment nécessairement un losange, on entreprend de démontrer. Il s'agit donc de prouver que ce parallélogramme a des côtés égaux. Reportons-nous à la figure 35 et montrons que $a = b$.

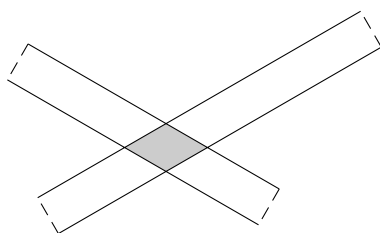


Fig. 34

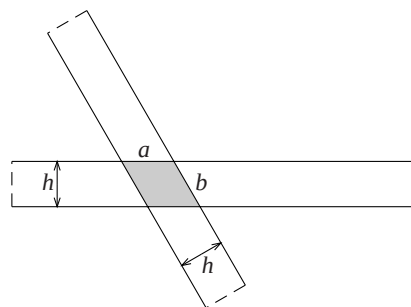


Fig. 35

L'idée de s'assurer d'une égalité de longueurs par le biais des aires est préparée par la fiche précédente. Calculons l'aire du parallélogramme de deux façons, nous avons :

$$ah = bh,$$

ce qui prouve que $a = b$.

Cette démonstration, comme la précédente, porte sur des longueurs mais utilise des égalités d'aires. Il s'agit ici aussi d'une réduction de dimension, démarche inverse de ce que l'on a l'habitude de faire.

4 Démontrer le théorème de Thalès

De quoi s'agit-il ?

Les élèves comparent des parallélogrammes de même hauteur pour établir des égalités de rapports.

Enjeux

Établir une égalité entre rapports de longueurs par le biais d'un rapport d'aires. Démontrer le théorème de Thalès pour des segments qui ne sont pas nécessairement commensurables.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – Une première version du théorème de Thalès portant sur des configurations qui présentent un réseau de parallèles équidistantes. Les énoncés établis à l'issue des activités précédentes.

Comment s'y prendre ?

La démonstration que nous proposons ci-après ne présuppose pas qu'il existe un réseau de parallèles équidistantes qui partage OA et AB (voir figure 36) en parties égales. Il va de soi que cette démonstration ne peut intervenir dans la formation des élèves qu'après une approche de la conservation des rapports par une projection parallèle, à propos de figures qui présentent des réseaux de parallèles équidistantes. C'est dans ce contexte en effet, que la proportionnalité entre segments est accessible à des débutants. On trouve dans CREM [2002] une proposition d'enseignement qui développe cette approche.

La démonstration qui suit est directement inspirée de celle que propose Euclide dans le Livre 6 consacré aux rapports et proportions. Nous l'avons simplement adaptée pour faire voir les figures-clés que nous avons travaillées jusqu'ici, à savoir, des parallélogrammes de même hauteur. Ils remplacent les triangles utilisés par Euclide. Les questions qui suivent guident les élèves dans l'exploration des figures qui sous-tendent la démonstration et indiquent les étapes par lesquelles il faut passer.

Voici la première étape.

Soit un triangle OBB' (voir figure 36) dans lequel on a tracé, par un point A qui appartient à OB , la parallèle à BB' .

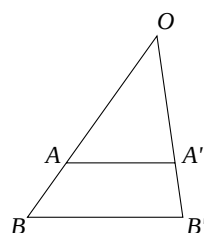


Fig. 36

On demande de

1. mener par B la parallèle à $B'O$ et par O la parallèle à BB' , appeler C l'intersection de ces deux droites,
2. prolonger AA' , appeler D l'intersection de AA' avec BC ,
3. repérer, dans la figure ainsi obtenue, tous les parallélogrammes qui ont même hauteur et écrire leurs aires respectives.

La figure 37 montre la construction demandée et fait voir trois parallélogrammes qui ont même hauteur.

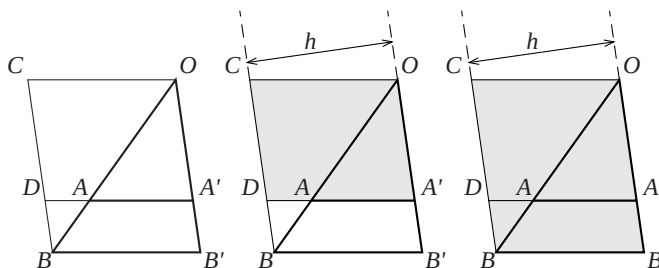


Fig. 37

L'aire du parallélogramme $OCDA'$ est $OA' \times h$,
 L'aire du parallélogramme $DA'B'B$ est $A'B' \times h$,
 L'aire du parallélogramme $OB'BC$ est $OB' \times h$.

La deuxième étape est analogue à la première.

Reproduire la figure 36.

On demande ensuite de

1. mener par B' la parallèle à BO et par O la parallèle à BB' , appeler E l'intersection de ces deux droites,
2. prolonger AA' , appeler F l'intersection de AA' avec $B'E$,
3. repérer tous les parallélogrammes de cette figure qui ont même hauteur et écrire leurs aires respectives.

La figure 38 montre la construction demandée et fait voir trois parallélogrammes qui ont même hauteur.

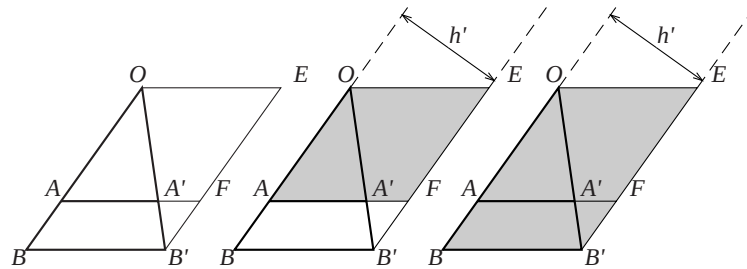


Fig. 38

L'aire du parallélogramme $OAFE$ est $OA \times h'$,
 L'aire du parallélogramme $AFB'B$ est $B'F \times h'$,
 L'aire du parallélogramme $OEB'B$ est $B'E \times h'$.

La dernière étape demande de passer d'un rapport d'aires à un rapport de longueurs.

Montrer que les rapports $\frac{OA}{OB}$ et $\frac{OA'}{OB'}$ sont égaux.

Il faut choisir les parallélogrammes qui engagent les rapports dont il est question dans l'énoncé. Dans les figures 37 et 38, les parallélogrammes utiles sont colorés en gris.

L'aire du parallélogramme $OCDA'$ (figure 37) est égale à celle du parallélogramme $OAFE$ (figure 38) puisque leurs bases sont égales et qu'ils ont même hauteur. Pour la même raison, l'aire du parallélogramme $OB'BC$ (figure 37) est égale à celle du parallélogramme $OEB'B$ (figure 38).

Le rapport des aires des parallélogrammes grisés de la figure 37 est donc égal au rapport entre les aires des parallélogrammes grisés de la figure 38. On a donc

On a donc

$$\frac{OA' \times h}{OB' \times h} = \frac{OA \times h'}{OB \times h'}$$

Et après simplification,

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}.$$

On peut faire la même chose pour d'autres paires de parallélogrammes et montrer en ce faisant, qu'on a aussi

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}.$$

On énonce ensuite la propriété suivante, qui est une forme élémentaire du théorème de Thalès.

3. *Toute parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments homologues proportionnels.*

QUADRATURE DES FIGURES RECTILIGNES PLANES

1 Introduction

Ce chapitre commence par quelques exemples particuliers et simples de transformations d'un rectangle en un carré de même aire. Pour arriver à ces transformations, on s'appuie d'abord sur des décompositions d'un rectangle en quelques pièces (une sorte de puzzle) permettant de reconstituer le carré, puis sur le théorème de Pythagore exprimé numériquement.

Dans une seconde partie, on étudie la question de manière plus générale, et en s'imposant de ne recourir qu'à des puzzles, et donc en excluant le recours aux mesures.

La possibilité de transformer n'importe quel rectangle en un carré de même aire, appelée *quadrature du rectangle*, peut avoir deux prolongements intéressants. D'une part, ce problème permet d'introduire une vision géométrique de la racine carrée. D'autre part, il débouche sur la question encore plus générale de la quadrature d'une figure rectiligne plane. Nous montrerons en effet dans la dernière section que le cas du rectangle permet de résoudre la quadrature de n'importe quel polygone.

De plus, si on sait construire un carré de même aire que n'importe quel polygone, alors on sait comparer les aires de deux polygones sans recourir à aucune mesure ou aucun calcul. En effet, il est facile de comparer les aires de deux figures semblables, comme deux carrés : il suffit de les superposer pour voir lequel est le plus grand.

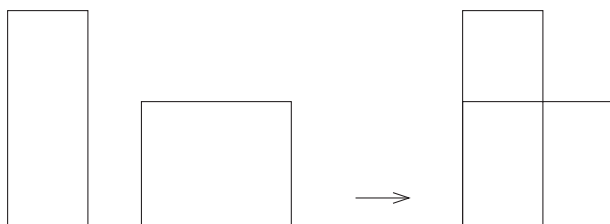


Fig. 1

Par contre, il n'est généralement pas possible, du premier coup d'oeil, de dire lequel, parmi deux polygones quelconques, a la plus grande aire, aucune superposition ne permettant parfois de conclure. Le problème se pose d'ailleurs déjà pour deux rectangles. La figure 1 propose par exemple deux rectangles dont on veut comparer les aires, et ces deux mêmes rectangles superposés.

Sur cette figure, et à défaut de mesurer les côtés et calculer les aires, on ne voit pas bien lequel des deux rectangles a la plus grande aire.

Par contre, si on a une méthode pour construire, pour chacun de ces deux rectangles, un carré de même aire, alors on peut décider, sans aucune mesure, lequel des deux rectangles a la plus grande aire, en comparant les deux carrés associés.

En général, la quadrature des polygones permet donc également de comparer les aires de deux polygones par des méthodes purement géométriques, sans effectuer aucune mesure ni aucun calcul (même si, dans un premier temps et dans le cas particulier du rectangle, nous aurons recours à la mesure pour exhiber quelques premiers exemples simples).

Nous pensons que ce chapitre peut servir, dans la forme que nous lui avons donnée, à la formation (initiale ou continuée) des régents. Il pourrait cependant être adapté, ne fut-ce que partiellement, pour en faire une activité dans des classes de troisième ou quatrième année de l'enseignement secondaire, par exemple comme support géométrique à l'introduction des racines carrées.

2 Des rectangles et des carrés de même aire

La première question est très simple : il s'agit de trouver quelques exemples de couples carré-rectangle de même aire. Nous imposerons ensuite certaines conditions afin d'arriver à une démarche plus systématique, liée au théorème de Pythagore. Au passage, nous verrons apparaître quelques puzzles qui permettent de découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire.

Construire quelques exemples de couples rectangle-carré de même aire.

La première idée devrait être de trouver des couples d'entiers dont le produit est un carré parfait. Un exemple est donné à la figure 2.

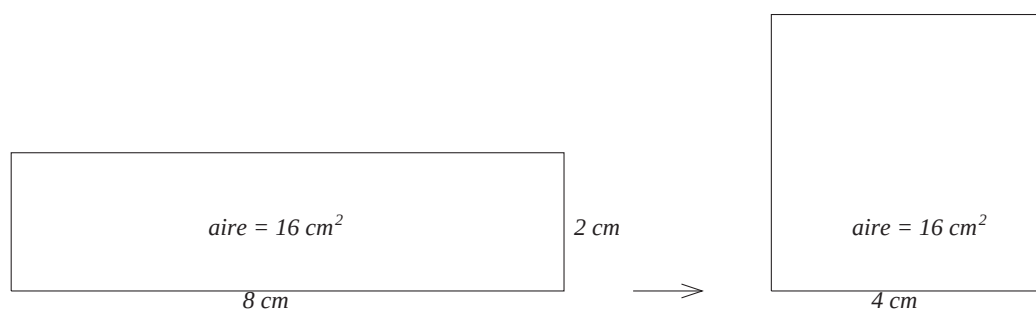


Fig. 2

D'autres exemples du même type peuvent être trouvés, comme le rectangle de côtés 4 cm et 9 cm, et le carré de côté 6 cm. Certains élèves auront peut-être pensé à la solution simple qui consiste à choisir un rectangle dont un côté mesure 1 cm et la mesure de l'autre côté est un carré parfait.

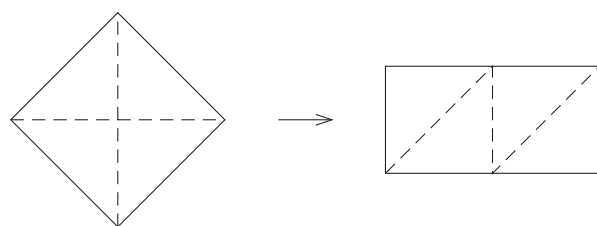


Fig. 3

D'autres enfin pourraient penser au découpage d'un carré en 4 triangles rectangles qui permettent de reconstituer un rectangle de même aire que celle du carré (voir figure 3).

Si ce type d'exemple n'a pas été proposé, il peut être introduit par la question suivante.

Comment construire un carré de même aire qu'un rectangle donné, lorsque celui-ci a un côté de longueur 1 cm, et un autre côté dont la mesure est un nombre entier de centimètres (2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm,...) ?

Pour un rectangle de côtés 1 cm et 2 cm, la solution est donnée à la figure 3 (où l'on passe cette fois du rectangle au carré). Remarquons que, dans ce cas, le carré obtenu est de côté $\sqrt{2}$.

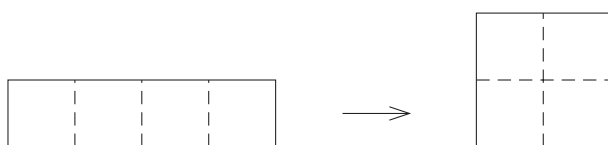


Fig. 4

Le rectangle de côtés 1 cm et 4 cm ne doit évidemment pas poser de problème : il a même surface qu'un carré de 2 cm de côté. On peut cependant se demander si, comme dans le cas précédent, on peut faire un découpage du rectangle pour obtenir le carré. La solution est aussi très simple et est donnée à la figure 4.

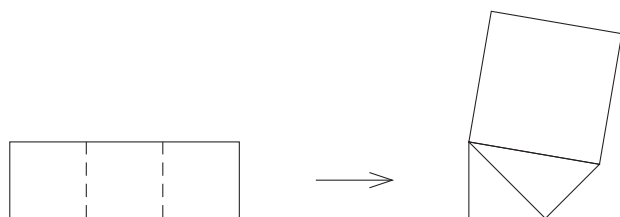


Fig. 5

Pour le rectangle de côtés 1 cm et 3 cm, les élèves penseront peut-être à utiliser le théorème de Pythagore pour construire un segment de longueur $\sqrt{3}$. Si ce n'est pas le cas, on peut les guider en remarquant que le rectangle de côtés 1 cm et 3 cm est constitué de la réunion d'un rectangle de côtés 1 cm et 2 cm, pour lequel on a déjà construit un carré d'aire égale (voir figure 3), et d'un carré de côté 1 cm.

Le problème revient donc à construire un carré dont l'aire vaut la somme des aires de deux autres carrés, ce qui s'obtient grâce au théorème de Pythagore (voir figure 5). Mais, dans ce cas, on ne voit pas a priori de puzzle permettant de passer du rectangle au carré. .

En général, pour construire un carré d'aire égale à celle d'un rectangle de côtés 1 cm et n cm, il suffit de pouvoir construire un segment de longueur $\sqrt{n}$, et on peut utiliser pour cela le procédé appelé *escargot de Pythagore*, représenté sur la figure 6.

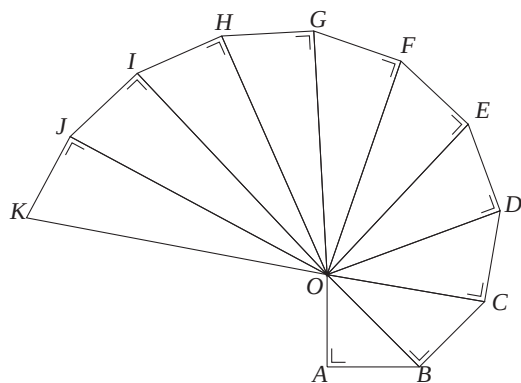


Fig. 6

En construisant successivement des segments de longueur 1 $[OA]$, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FG]$, ..., on déduit du théorème de Pythagore que $|OB| = \sqrt{2}$, $|OC| = \sqrt{3}$, $|OD| = \sqrt{4} = 2$, $|OE| = \sqrt{5}$, $|OF| = \sqrt{6}$, ...

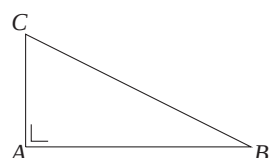


Fig. 7

De plus, on peut la plupart du temps sauter des étapes et arriver à un *turbo-escargot*, par exemple :

si $|AB| = 2$ et $|AC| = 1$ alors $|BC| = \sqrt{5}$;
 $\sqrt{5}$ peut donc être construit en une seule étape ;

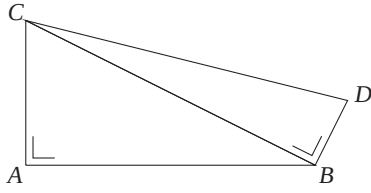


Fig. 8

si $|AB| = 4$ et $|AC| = 2$ alors $|BC| = \sqrt{20}$;
 si de plus $|BD| = 1$ alors $|CD| = \sqrt{21}$;
 $\sqrt{21}$ peut donc être construit en deux étapes.

3 Une propriété intéressante

Nous aimerions trouver une propriété assurant l'existence d'un puzzle permettant de passer d'un rectangle à un carré de même aire dans tous les exemples de la section précédente.

Choisir un exemple de couple rectangle-carré de même aire : on note le rectangle $ABCD$ et le carré $A'B'C'D'$. Pour comparer les deux figures, on les superpose par exemple en faisant coïncider les deux angles droits en A et A' . Tracer alors les droites obliques BD' , $B'D$ et CC' . Que constate-t-on ?

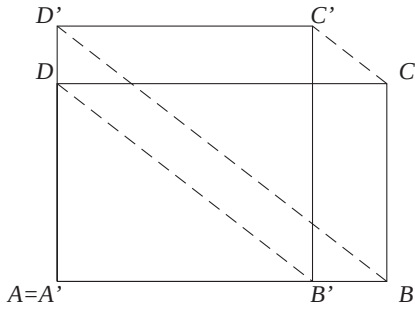


Fig. 9

La construction demandée mène à une figure telle que la figure 9.

Quel que soit l'exemple choisi, on remarque que les droites BD' , $B'D$ et CC' semblent parallèles. On peut donc énoncer la conjecture suivante.

1. Conjecture : Si un rectangle $ABCD$ et un carré $A'B'C'D'$ ont même aire, et si on les superpose comme à la figure 9, alors les droites BD' , $B'D$ et CC' sont parallèles.

En supposant que cette conjecture soit correcte, on peut alors poser le problème suivant.

Si on se donne un carré $A'B'C'D'$ et un segment $[AD]$, comment construire un rectangle de même aire que le carré, et dont un côté est $[AD]$?

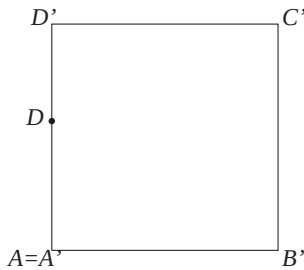


Fig. 10

Pour construire le rectangle demandé, on se ramène à la configuration de la figure 9. On trace un carré $A'B'C'D'$ et un segment $[AD]$ comme sur la figure 10.

On trace alors $B'D$ et la parallèle à $B'D$ passant par D' . On note B le point d'intersection de cette parallèle avec $A'B'$. Il suffit alors de tracer le rectangle de côtés $[AD]$ et $[AB]$.

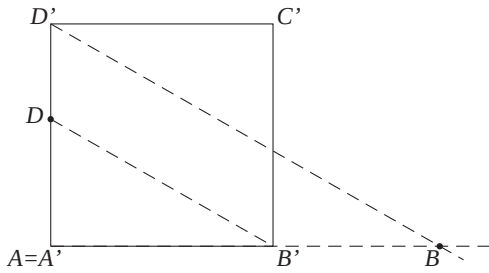


Fig. 11

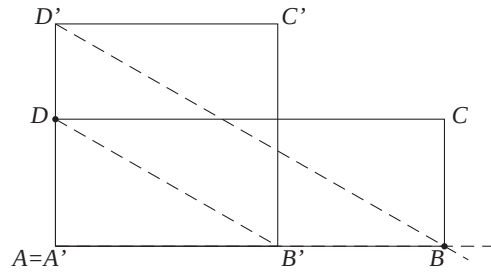


Fig. 12

Comment s'assurer que le rectangle $ABCD$ construit à la figure 12 est bien de même aire que le carré $A'B'C'D'$? Peut-on trouver un puzzle qui permet de passer du carré au rectangle ?

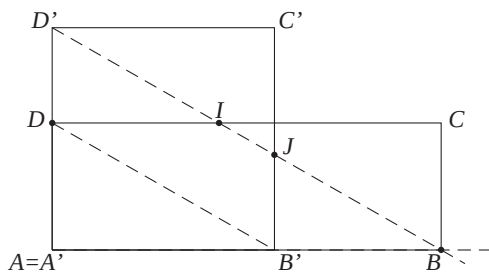


Fig. 13

Si on observe bien la figure 12, on voit apparaître des triangles isométriques qui devraient permettre de répondre à la question. Notons pour cela I et J les points d'intersection de BD' avec CD et $B'C'$.

Les triangles $DD'I$ et $B'JB$ sont isométriques : en effet, par construction $BD' \parallel B'D$, ce qui implique $|DI| = |B'B|$, et comme ces deux triangles sont à côtés parallèles, ils sont bien isométriques.

De même, les deux triangles $D'C'J$ et ICB sont isométriques : comme $|DI| = |B'B|$ et $|AB| = |CD|$, on a également $|IC| = |A'B'| = |D'C'|$, et comme les deux triangles sont à côtés parallèles, ils sont bien isométriques.

Ces deux paires de triangles isométriques vont permettre de comparer facilement les aires du rectangle $ABCD$ et du carré $A'B'C'D'$. On a en effet

$$\begin{aligned} \text{aire de } A'B'C'D' &= \text{aire de } A'DIJB' + \text{aire de } DD'I + \text{aire de } D'C'J, \\ &= \text{aire de } A'DIJB' + \text{aire de } B'JB + \text{aire de } ICB, \\ &= \text{aire de } ABCD. \end{aligned}$$

Ces deux paires de triangles isométriques donnent aussi clairement un puzzle qui permet de passer du carré au rectangle : il suffit de découper dans le carré les deux triangles $DD'I$ et $D'C'J$, puis de les faire glisser pour qu'ils occupent respectivement les places de $B'JB$ et ICB , et on obtient le rectangle.

D'autre part, cette construction donne un certain poids à notre conjecture, puisque nous avons montré qu'à partir d'un carré et d'un segment quelconque, on peut effectivement construire un rectangle de même aire que le carré et ayant le segment comme côté, tout en vérifiant l'hypothèse de parallélisme des droites obliques que nous avons tracées.

4 Quadrature du rectangle

À la section précédente, nous avons construit un rectangle de même aire qu'un carré donné, et ayant un segment donné pour côté. Réciproquement, nous voudrions trouver une méthode pour

construire un carré de même aire qu'un rectangle donné. Ce problème porte le nom de *quadrature du rectangle*. Nous essaierons également de trouver un puzzle correspondant à cette construction.

Dans ce cas-ci, la construction est moins immédiate que celle donnée à la section précédente, puisque nous ne disposons pas d'un côté de la figure cherchée, c'est-à-dire du carré de même aire qu'un rectangle donné. Cependant, nous disposons de la conjecture du parallélisme établie à la section précédente, qui va nous permettre de trouver d'autres propriétés de la figure formée par un rectangle et un carré de même aire, afin d'aboutir à la construction recherchée.

Sur la figure 9 à la page 78, à partir de laquelle nous avons établi notre conjecture, nous observons deux triangles à côtés parallèles $AB'D$ et ABD' . Supposons que nous fassions tourner le triangle $AB'D$ autour de A d'un quart de tour dans le sens anti-horlogique. Étudier la figure formée des deux triangles après transformation.

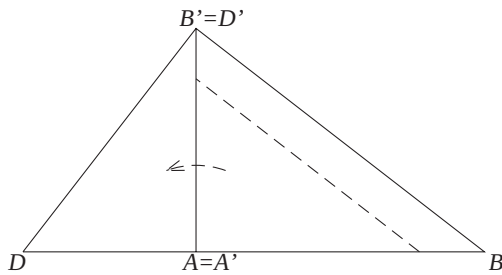


Fig. 14

La figure obtenue est la figure 14.

Après transformation, le point B' se confond bien avec D' puisque, sur la figure 9, $A'B'C'D'$ est un carré et donc $|AB'| = |AD'|$. De plus, le triangle $DB'B$ de la figure 14 est rectangle en $B' = D'$. En effet, les droites $B'D$ et BD' de la figure 9 étant parallèles, les angles $\widehat{ADB'}$ et $\widehat{AD'B}$ sont égaux, et comme le petit triangle ADB' est rectangle en A , on a également $\widehat{ADB'} + \widehat{AB'D} = 90^\circ$, ce qui implique finalement que $\widehat{AD'B} + \widehat{AB'D} = 90^\circ$, et donc aussi que l'angle en $B' = D'$ du triangle $DB'B$ de la figure 14 est droit.

D'autre part, on peut également remarquer que la hauteur du grand triangle rectangle $DB'B$ de la figure 14, qui est le côté du carré de la figure 9, divise l'hypoténuse en deux segments qui sont les côtés du rectangle de la figure 9. Comme, sur cette figure, le rectangle et le carré ont même aire, on a $|AD'|^2 = |DA| \cdot |AB|$, autrement dit on retrouve le résultat bien connu sur la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle. Il s'énonce comme suit.

2. *Le carré de la mesure de la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle vaut le produit des mesures des segments que cette hauteur détermine sur l'hypoténuse.*

Revenons au problème de la construction d'un carré de même aire qu'un rectangle donné $ABCD$, dont nous allons noter les mesures des longueurs des côtés a et b . Le côté du carré cherché mesurera donc $\sqrt{ab}$. Le raisonnement que nous avons fait ci-dessus suggère de d'abord s'intéresser au problème suivant.

Comment construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $a + b$, et dont la hauteur issue de l'angle droit divise l'hypoténuse en deux segments de longueurs a et b ?

Il faut se rappeler ici qu'un triangle rectangle est toujours inscrit dans un demi-cercle dont un diamètre est l'hypoténuse du triangle. On trace donc un segment $[DB]$ de longueur $a + b$, que l'on divise en deux segments de longueurs a et b , en plaçant un point A sur $[DB]$ de telle façon que $|DA| = a$ et $|AB| = b$. On trace ensuite un demi-cercle de diamètre $[DB]$, et le sommet de l'angle droit du triangle rectangle recherché est le point d'intersection B' du demi-cercle et de la perpendiculaire à $[DB]$ passant par A .

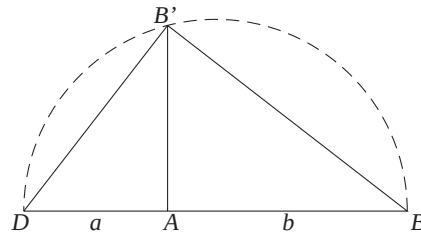


Fig. 15

La propriété de la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle nous assure que, sur la figure 15, le segment $[AB']$ mesure $\sqrt{ab}$, autrement dit ce segment est le côté d'un carré de même aire qu'un rectangle de côtés a et b .

Nous voudrions de surcroît trouver un puzzle qui permette de découper un rectangle donné pour en faire un carré de même aire. Pour cela, nous construisons d'abord le carré de même aire que le rectangle, grâce à la construction du triangle rectangle décrite ci-dessus : nous obtenons la figure 15. Ensuite, nous effectuons la démarche inverse de celle utilisée précédemment : à partir de la figure 15, nous faisons tourner le triangle $DB'A$ d'un quart de tour dans le sens horlogique autour de A , pour obtenir la figure 16 (où les deux triangles sont encore à côtés parallèles), que nous complétons en construisant le rectangle de côtés $[AB]$ et $[AD]$, et le carré de côté $[AB']$ (voir figure 17).

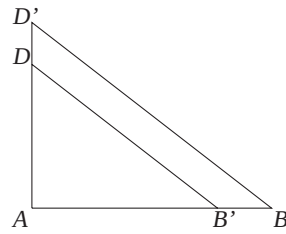


Fig. 16

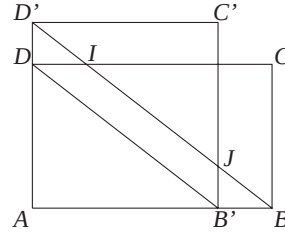


Fig. 17

Nous observons sur la figure 17 deux paires de triangles isométriques : $DD'I$ et $B'JB$ d'une part, $D'C'J$ et ICB d'autre part (la justification est la même qu'à la fin de la section 3). Ces isométries de triangles permettent encore de visualiser l'égalité des aires du rectangle et du carré, mais aussi de trouver un puzzle qui permet de découper le rectangle pour obtenir le carré (voir figure 18).

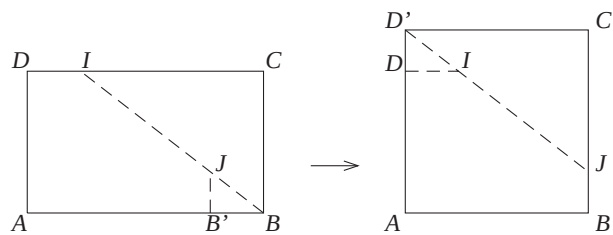


Fig. 18

Nous avons donc résolu notre problème de la quadrature d'un rectangle. Nous avons vu au passage que la conjecture des parallèles que nous avons énoncée à la section 3 était vérifiée, puisqu'elle arrive maintenant comme conséquence de la construction du côté d'un carré de même aire qu'un rectangle donné, en utilisant le résultat concernant la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle (voir figure 15).

Cependant, nous avons travaillé sur des figures, et nous pouvons nous demander si celles-ci sont les plus générales possibles. Par exemple, lorsque nous observons la figure 17, nous pouvons nous

rendre compte que le point J pourrait être à l'extérieur du rectangle si celui-ci était particulièrement allongé.

Qu'est-ce qui change dans la résolution du problème de la quadrature d'un rectangle, lorsqu'on choisit par exemple b très grand par rapport à a (a et b représentant toujours les longueurs des côtés du rectangle) ?

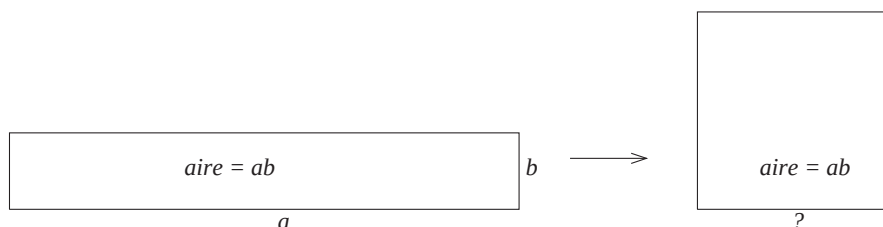


Fig. 19

La construction est la même que dans le cas précédent : on commence par trouver le côté du carré recherché en construisant un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $a + b$, et dont la hauteur issue de l'angle droit divise l'hypoténuse en deux segments de longueur a et b .

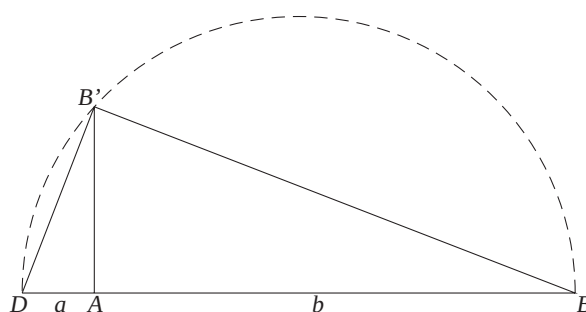


Fig. 20

On fait à nouveau tourner le triangle rectangle ADB' d'un quart de tour autour de A pour obtenir la figure 21, que l'on complète ensuite en construisant le rectangle de côtés $[AB]$ et $[AD]$, et le carré de côté $[AB']$ pour obtenir la figure 22.

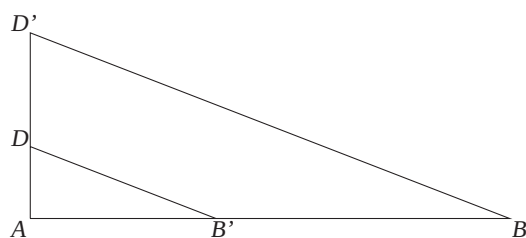


Fig. 21

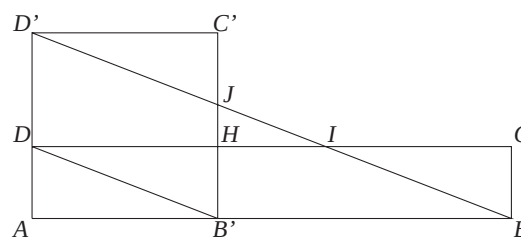


Fig. 22

À la figure 22, on a encore $B'D \parallel BD'$, mais on voit que les triangles isométriques à considérer pour le puzzle ne sont plus disposés de la même façon. Les deux paires de triangles isométriques sont

$DD'I$ et $B'JB$ d'une part, $D'C'J$ et ICB d'autre part (la justification reste la même que dans la première construction), et permettent de comparer les aires du rectangle et du carré. On a en effet

$$\begin{aligned}
 \text{aire de } ABCD &= \text{aire de } ADHB' + \text{aire de } B'HIB + \text{aire de } ICB, \\
 &= \text{aire de } ADHB' + \text{aire de } B'JB - \text{aire de } HIJ + \text{aire de } ICB, \\
 &= \text{aire de } ADHB' + \text{aire de } DD'I - \text{aire de } HIJ + \text{aire de } D'C'J, \\
 &= \text{aire de } ADHB' + \text{aire de } DD'JH + \text{aire de } D'C'J, \\
 &= \text{aire de } A'B'C'D'.
 \end{aligned}$$

D'autre part, ces deux paires de triangles isométriques donnent également un puzzle qui permet de découper le rectangle pour obtenir le carré (voir figure 23 où le petit triangle du puzzle est isométrique au triangle HIJ de la figure 22).

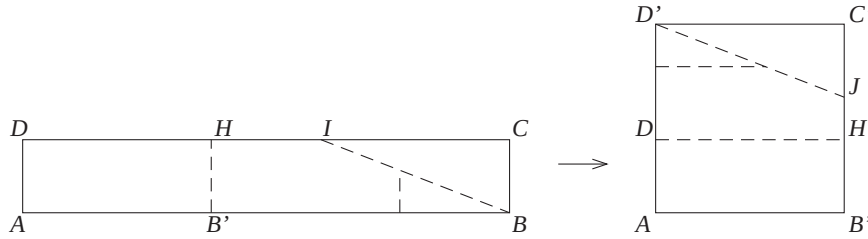


Fig. 23

On voit que le problème de la quadrature du rectangle se résout de différentes manières, selon que le rectangle est « allongé » ou pas, c'est-à-dire selon l'ordre de grandeur du rapport $\frac{b}{a}$ des longueurs des côtés du rectangle (en supposant par exemple que b est la longueur du grand côté du rectangle) : si ce rapport est petit, alors on se réfère au premier cas qui a été traité et on obtient un puzzle de trois pièces (voir figure 18), et si le rapport est grand, alors on se réfère au deuxième cas et on obtient un puzzle de quatre pièces (voir figure 23). À quel moment passe-t-on d'un cas de figure à l'autre, et qu'en est-il du rapport $\frac{b}{a}$ à ce moment ?

Les figures 17 et 22 nous ont permis d'obtenir les puzzles dans les deux cas. Nous les reproduisons ci-dessous afin de pouvoir les comparer.

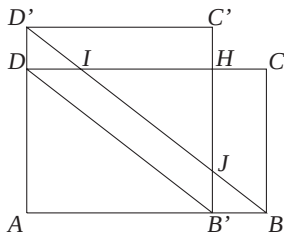


Fig. 24

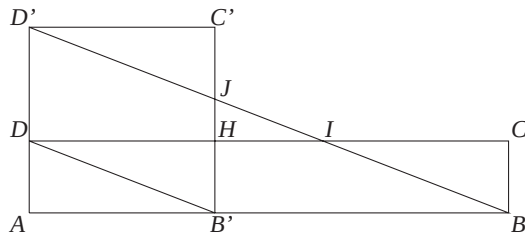


Fig. 25

Dans la figure 24, le triangle HIJ se trouve à l'intérieur du rectangle et du carré, tandis que dans la figure 25, il passe à l'extérieur du rectangle et du carré.

Si on imagine, à partir de la figure 24, que l'on allonge le rectangle (en allongeant $[AB]$), on observe que le triangle HIJ devient de plus en plus petit et, à un certain moment, les trois points I , J et H se confondent puis, si on continue l'allongement, on passe à la configuration de la figure 25. Examinons plus attentivement le cas où les points I , J et H sont confondus (voir figure 26)

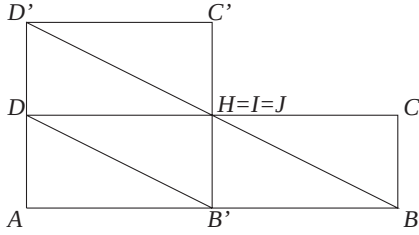


Fig. 26

Dans les figures 24 et 25, les triangles $DD'I$ et $B'JB$ sont isométriques, et les triangles $D'C'J$ et ICB sont isométriques. Ces isométries seront encore vraies dans le cas où les points H , I et J sont confondus. Dans ce cas, on a $|HC| = |DH|$ et $|DD'| = |AD|$. On peut alors en déduire que $|AB| = 4|AD|$.

On voit finalement que c'est lorsque la longueur b du grand côté du rectangle vaut 4 fois la longueur a du petit côté, que l'on passe d'un puzzle à 3 pièces à un puzzle à 4 pièces. De plus, lorsque b vaut exactement $4a$, le puzzle est très simple, puisqu'il suffit alors de couper le rectangle en deux pour obtenir un carré de même aire (les rectangles $ADHB'$, $DD'C'H$ et $B'HCB$ sont évidemment isométriques sur la figure 26).

5 Généralisation aux figures rectilignes planes

À la section précédente, nous avons résolu le problème de la quadrature du rectangle. Nous pouvons nous demander s'il est possible, de la même manière, de construire un carré de même aire qu'un polygone quelconque donné. Nous allons examiner quelques exemples, en nous ramenant à chaque fois au cas du rectangle, puis nous étendrons nos arguments au cas général.

Étant donné un parallélogramme quelconque, comment construire un carré de même aire que ce parallélogramme ?

L'idée est bien sûr de se ramener au cas du rectangle, puisqu'il y a un découpage bien connu qui permet de passer d'un parallélogramme à un rectangle de même aire (pour cela, on choisit comme base du parallélogramme son plus long côté).

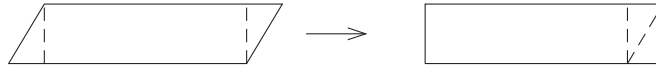


Fig. 27

Le rectangle obtenu peut être transformé en un carré de même aire (voir section 4), et on en déduit que le parallélogramme peut également être transformé en un carré de même aire. De plus, en combinant le puzzle donné à la figure 27 avec le puzzle permettant de passer d'un rectangle à un carré de même aire, on se convainc qu'il est également possible de trouver un puzzle permettant de découper un parallélogramme pour obtenir un carré de même aire.

Étant donné un triangle quelconque, comment construire un carré de même aire que ce triangle ?

De nouveau, on essaie de se ramener à l'un des cas déjà étudiés précédemment. Or il est assez facile de découper un triangle pour obtenir un parallélogramme de même aire : il suffit de tracer un segment joignant les milieux de deux côtés (ce segment est alors parallèle au troisième côté), puis de combiner les deux morceaux comme sur la figure 28.

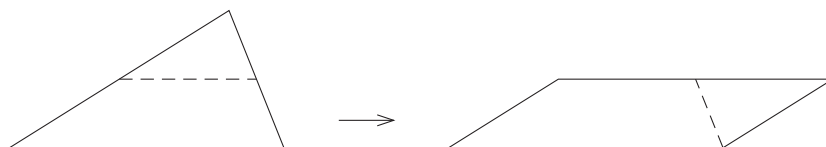


Fig. 28

À nouveau, comme il est possible de construire un carré de même aire qu'un parallélogramme, il est également possible de construire un carré de même aire qu'un rectangle, et par combinaison de puzzles, on voit qu'il existe également un puzzle qui permet de découper un triangle pour obtenir un carré de même aire.

En général, la quadrature d'un polygone quelconque est-elle toujours possible ?

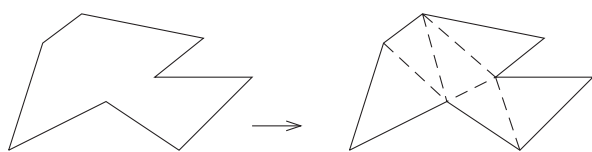


Fig. 29

Pour répondre à cette question, on essaie encore de se ramener aux cas déjà résolus. Or tout polygone peut être découpé pour former un nombre fini de triangles. La figure 29 en donne un exemple.

Or chacun des triangles peut être transformé (avec puzzle) en un carré de même aire. Nous sommes donc arrivés à montrer que tout polygone peut être transformé en un nombre fini de carrés dont la somme des aires vaut l'aire du polygone de départ, et qu'il existe un puzzle qui réalise cette transformation (en combinant le découpage du polygone en triangles et les puzzles pour chacun des triangles).

Il reste donc à trouver une méthode qui permette de transformer un nombre fini de carrés en un seul carré, dont l'aire vaille la somme de celles de tous les autres carrés.

Supposons que l'on ait deux carrés, comment construire un carré dont l'aire vaut la somme des aires des deux carrés ?

Il s'agit ici d'une application directe du théorème de Pythagore sous sa forme géométrique : *la somme des aires des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle vaut l'aire du carré construit sur l'hypoténuse*. Il suffit donc, quand on a deux carrés quelconques, notés A et B sur la figure 30, de les placer dans la position du théorème de Pythagore, et l'aire du carré C de la figure 30 vaut la somme des aires des carrés A et B .

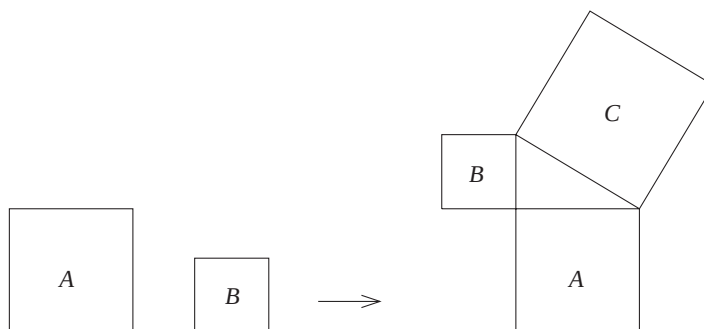


Fig. 30

De plus, il existe de nombreux puzzles qui permettent de prouver visuellement le théorème de Pythagore, et donc de découper deux carrés pour les transformer en un carré dont l'aire vaut la somme des aires des deux carrés (voir par exemple R. B. Nelsen [1993]).

Revenons au problème de la quadrature d'un polygone quelconque. Nous avons vu que tout polygone peut être découpé pour obtenir un nombre fini de carrés dont la somme des aires vaut l'aire du polygone de départ. Or, le théorème de Pythagore permet de découper deux carrés pour obtenir un carré dont l'aire vaut la somme des aires des deux carrés. Mais si on a trois carrés, il suffit d'en prendre deux, d'utiliser Pythagore pour les transformer en un seul carré, que l'on combine de la même façon avec le troisième carré qui reste, pour obtenir un carré dont l'aire vaut la somme des aires des trois carrés de départ. Et on peut faire de même avec quatre carrés, cinq carrés, ... ; il suffit d'itérer le processus.

Nous avons donc finalement montré qu'il est possible de transformer un nombre fini de carrés en un seul carré dont l'aire vaut la somme des aires des carrés que l'on a combinés, et cette transformation peut être le résultat d'une combinaison de puzzles. Comme nous avons aussi montré que tout polygone pouvait être transformé en un nombre fini de carrés dont la somme des aires vaut l'aire du polygone, nous sommes finalement parvenus au résultat suivant.

3. *La quadrature de n'importe quel polygone est réalisable ; autrement dit on peut transformer n'importe quel polygone en un carré de même aire que le polygone de départ. De plus, cette transformation peut se faire à l'aide d'un puzzle qui permet de découper le polygone pour obtenir un carré de même aire.*

PARALLÉLISME ET PERPENDICULARITÉ À TROIS DIMENSIONS

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons quelques éléments d'une géométrie dite « naturelle » telle qu'elle est décrite dans l'introduction de cette étude. Il s'agit des relations de parallélisme et de perpendicularité dans la géométrie à trois dimensions, relations qui trouvent leur point de départ dans l'espace physique de notre environnement immédiat. Nous entendons par là l'environnement qui est à la portée de nos mains ou de nos regards, et dans lequel les objets ont une taille raisonnable.

Pour schématiser géométriquement cet environnement, nous faisons d'abord le choix de certaines formes simples situées dans l'espace, à savoir les droites et les plans. Ensuite, en nous appuyant sur des intuitions communes forgées à partir d'expériences quotidiennes, nous récoltons un premier lot de propriétés relatives à ces formes, et qui nous semblent évidentes ; nous les appelons *propriétés intuitives*. Enfin, nous énonçons quelques propriétés moins évidentes que nous appelons *propositions*. Nous déduisons ces propositions des propriétés intuitives, en nous appuyant sur une expérience de pensée qui permet de voir les configurations géométriques étudiées dans une position privilégiée. Celle-ci sera précisée ci-après.

La « naturalité » de la géométrie pratiquée ici s'explique par le fait que nous utilisons en concomitance trois sources de connaissances : l'intuition, l'expérience et la déduction.

2 Droites et plans : premières formes dans l'espace

Les formes de l'espace telles que les droites et les plans sont des objets mentaux qui se constituent à partir d'expériences ou d'observations faites dans le monde réel.

Notion de droite

Expérience : La ligne imaginaire de visée d'un géomètre arpenteur, d'un chasseur, des rayons solaires pénétrant dans une pièce obscure par un petit orifice.

Notion de plan

Expérience : La surface libre d'un lac, d'un liquide dans un récipient, le parement d'un mur, sont des exemples de surfaces planes.

Expérience : Pour obtenir une surface *plane* dans une masse de sable humide, on dépose sur le sable deux bâtons droits qui se touchent sans se croiser, on remplit de sable l'espace entre eux et on égalise le sable à l'aide de mouvements d'un troisième bâton s'appuyant sur les deux autres.

Propriété intuitive 1 : *La surface balayée par une droite mobile qui se meut en s'appuyant constamment sur deux droites fixes sécantes, est un plan.*

Propriété intuitive 2 : *Deux droites sécantes déterminent un plan.*

3 Notions de droites et plans parallèles et perpendiculaires



Fig. 1 : Un arbre

Notre perception de l'espace est en étroite relation avec la force de pesanteur. Cette force qui est dirigée à peu près vers le centre de la Terre, se manifeste au quotidien par exemple par son influence sur les arbres dont certains poussent très proches de la verticale (figure 1), par la nécessité de construire des maisons à la verticale sur des sols horizontaux, par l'effort que nous devons fournir pour soulever des objets, ceux-ci tombant vers le sol dès qu'on les lâche. La verticalité et l'horizontalité font donc partie de notre environnement. C'est pour cette raison que certaines propriétés des droites et des plans dans l'espace sont plus facilement perçues comme évidentes quand les droites et plans sont dans des positions privilégiées, celles de verticalité et d'horizontalité.

Notion de droite verticale

Expérience : Un fil à plomb, qui permet de vérifier la verticalité d'un mur, matérialise une *droite verticale* (figure 2).

Notion de droites parallèles

Toutes les droites verticales se rencontrent au centre de la terre, qui est éloigné de nous à peu près de 6400 km. Mais on les considère habituellement sur une faible longueur. C'est le cas des deux peupliers de la figure 3, ou de deux fils à plomb suspendus côte à côte. Ces exemples donnent une idée de deux *droites parallèles*. Deux droites verticales, en un lieu donné pas trop étendu, sont considérées comme *parallèles*.



Fig. 2 : Un fil à plomb



Fig. 3 : Deux arbres

Notion de plan horizontal

Expérience : La surface libre d'un lac ou d'un liquide dans un récipient matérialise un *plan horizontal*.

Notion de plans parallèles

Expérience : Dans un immeuble, les étages sont construits sur des plans horizontaux. Les étages illustrent la notion de plans parallèles. Ainsi, on considère que *tous les plans horizontaux sont parallèles entre eux*.



Fig. 4 : Bulle d'air d'un niveau d'eau

Notion de droite horizontale

Expérience : Pour vérifier si une droite est horizontale, on se sert d'un niveau d'eau. Celui-ci comporte deux marques et quand la bulle d'air est placée entre elles, elle indique que le niveau est réglé à l'horizontale. Dans cette position, le niveau matérialise une *droite horizontale*. La figure 4 montre une situation où la bulle d'air n'est pas située entre les deux marques. Dans ce cas, la direction du niveau n'est pas horizontale.

Expérience : Faisons flotter un bâton droit sur la surface d'un lac. Le bâton matérialise une droite horizontale.

Propriété intuitive 3 : *Toute droite contenue dans un plan horizontal est horizontale.*

Deux droites horizontales ne sont pas nécessairement parallèles. Elles peuvent aussi être sécantes ou ne pas se rencontrer, sans être pour autant parallèles. Mais on a la propriété intuitive suivante.

Propriété intuitive 4 : *Si deux droites sont parallèles et si l'une d'elles est horizontale, alors la seconde est également horizontale.*

Expérience : Si un niveau d'eau tourne autour d'un point fixe, et que dans toutes les positions, la bulle du niveau est entre les deux repères, alors le niveau balaie un plan horizontal.

Propriété intuitive 5 : *Une surface balayée par une droite horizontale mobile tournant autour d'un point fixe est un plan horizontal.*

Expérience : Certains niveaux, comme celui de la photo de la figure 5, sont munis de deux bulles et permettent de vérifier simultanément l'horizontalité de deux droites sécantes et orthogonales. Pour vérifier si une surface plane est horizontale, il suffit en fait de vérifier que deux droites sécantes du plan sont horizontales. Cette propriété est un peu plus générale que ce que donne l'expérience du niveau, puisque dans celui-ci les deux droites sont perpendiculaires.



Fig. 5 : Niveau d'eau

Propriété intuitive 6 : *Un plan qui contient deux droites sécantes et horizontales est aussi horizontal.*

Remarque : Un plan qui contient deux droites parallèles et horizontales n'est pas nécessairement horizontal. Cela est illustré par les marches d'une échelle en position oblique ou verticale.

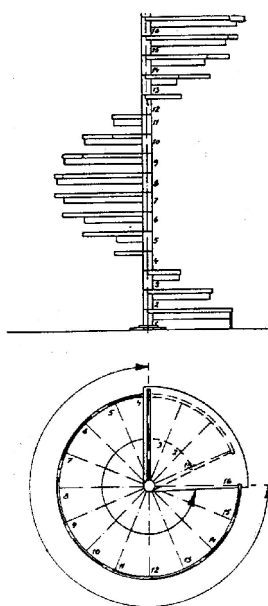


Fig. 6 : Escalier en colimaçon

Notion de droites gauches

Expérience : Les bords des marches d'un escalier en colimaçon illustrent le fait qu'il y a des droites horizontales qui ne se rencontrent pas et qui ne sont pas parallèles (figure 6). Deux droites dans une telle position sont appelées *droites gauches*.

Notion de droites perpendiculaires

Expérience : Suspendons un fil à plomb au-dessus d'un plan horizontal de manière que le fil à plomb touche le plan. Par le point de contact, menons une droite dans le plan. La droite du fil à plomb et celle du plan donnent un modèle de droites perpendiculaires.

On peut disposer l'angle privilégié d'une équerre le long du fil à plomb et de la droite du plan horizontal. Deux droites sécantes situées n'importe où et le long desquelles on peut disposer les deux côtés de l'angle privilégié d'une équerre sont appelées perpendiculaires.

Propriété intuitive 7 : Deux droites sécantes, l'une verticale et l'autre horizontale, sont perpendiculaires.

Expérience : Faisons tourner une équerre autour d'un de ses côtés disposé à la verticale. L'autre côté appliqué sur un plan horizontal ne décolle pas du plan.

Propriété intuitive 8 : Une droite mobile perpendiculaire en un point donné à une droite verticale fixe, engendre un plan horizontal.

Notion de droite perpendiculaire à un plan

Une droite verticale fixe et le plan horizontal engendré par une droite mobile perpendiculaire à la droite fixe illustrent la notion de droite et de plan perpendiculaires : *toute droite verticale est perpendiculaire à tout plan horizontal*. On dit qu'une droite qui coupe un plan est perpendiculaire à celui-ci si elle est perpendiculaire à toutes les droites passant par son pied dans le plan.

Expérience de pensée

L'expérience de pensée décrite ci-dessous amène à considérer comme particulièrement éclairantes les configurations géométriques dont les éléments essentiels sont des droites verticales et des plans

horizontaux. Ce point de vue particulier et les quelques propriétés intuitives déjà établies ou à établir permettent de déduire rapidement des propositions non évidentes, comme nous ne tarderons pas à le voir.

On suppose que toute figure de l'espace comportant des droites et des plans peut être déplacée de sorte qu'un de ses plans devienne horizontal, ou qu'une de ses droites devienne verticale. Dans un tel déplacement, les propriétés de parallélisme et d'orthogonalité de la figure au départ sont conservées à l'arrivée, de même que la distance entre deux points quelconques (la bijection est implicite, les objets solides étant déplaçables). Le déplacement en sens inverse est également possible.

4 Droite perpendiculaire à un plan

PROPOSITION 1

Une droite perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan est perpendiculaire à ce plan.

Dans la démonstration, nous allons nous appuyer sur des propriétés déjà établies et sur l'expérience et les propriétés intuitives ci-après.

Expérience : Quand un carton en forme de rectangle plié en deux suivant une parallèle à un de ses côtés, est posé sur un plan horizontal, alors la ligne de pliage est en position verticale, quelle que soit l'ouverture du carton (figure 7). Si on applique le carton sur un plan situé en position quelconque, on arrive à la conclusion qui suit.



Fig. 7 : Carton plié en deux

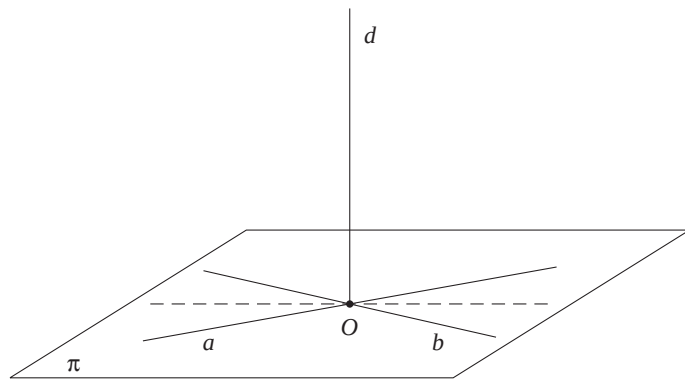


Fig. 8

Propriété intuitive 9 : *Pour deux droites sécantes, il existe une droite perpendiculaire à ces deux droites.*

Propriété intuitive 10 : *Une droite perpendiculaire à deux droites horizontales sécantes est une droite verticale.*

Revenons à la démonstration de la proposition 1. Considérons un plan π , deux droites a et b de ce plan sécantes en un point noté O et une droite d perpendiculaire à chacune d'elles (figure 8). La propriété intuitive 9 assure l'existence d'une telle droite. Grâce à la propriété intuitive 9, on a également l'existence et l'unicité de la droite perpendiculaire en un point à un plan.

Par l'expérience de pensée, nous amenons le plan π à la position horizontale. Ainsi, par la propriété 3, les droites a et b deviennent également horizontales et, par l'expérience de pensée, la droite d

reste perpendiculaire à ces droites. Donc, d'après la propriété intuitive 10, la droite d devient une droite verticale. Ainsi, la droite d est perpendiculaire au plan π puisque, comme nous l'avons vu, toute droite verticale est perpendiculaire à tout plan horizontal.

5 Perpendiculaire commune à deux droites gauches

Si les droites données sont sécantes, la perpendiculaire commune est la perpendiculaire au plan de ces droites passant par leur intersection.

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite coplanaire avec les parallèles et perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Étudions maintenant le cas de deux droites gauches.

PROPOSITION 2

Il existe une perpendiculaire commune à un couple de droites gauches. La distance entre deux points, dont chacun appartient à une droite différente, est la plus courte lorsque les deux points appartiennent à la perpendiculaire commune. Cette distance s'appelle distance entre les deux droites.

Pour établir cette proposition, nous nous appuyons sur de nouvelles propriétés intuitives précédées par une expérience.

Expérience : À la figure 6, la colonne de l'escalier en colimaçon matérialise la perpendiculaire commune aux droites matérialisées par les bords des marches. Sur la vue en projection orthogonale de l'escalier de la même figure, les bords des marches horizontales sont représentés par des segments et la colonne verticale de l'escalier est représentée par un point. Cette expérience amène deux nouvelles propriétés intuitives.

Propriété intuitive 11 : *Sur la vue du dessus, une droite verticale est représentée sur le plan horizontal par un point, une droite non verticale par une droite et deux droites gauches non verticales par deux droites sécantes.*

Propriété intuitive 11bis : *De tous les segments qui joignent un point à un plan horizontal, le plus court est celui qui est vertical.*

Propriété intuitive 12 : *La perpendiculaire commune à deux droites horizontales gauches est une droite verticale représentée sur la vue du dessus des deux droites par le point d'intersection de leurs projections.*

Propriété intuitive 13 : *Parmi tous les segments possibles dont les extrémités sont situées sur deux droites horizontales gauches, le segment le plus court est celui qui est à la verticale.*

Revenons à la démonstration de la proposition 2. Donnons-nous deux droites gauches notées a et b . Translatons la droite a vers la droite b jusqu'à que la droite translatée a' et la droite b soient sécantes. Engendrons un plan par une droite mobile qui se meut en s'appuyant sur les deux sécantes. Par l'expérience de pensée, amenons ce plan en position horizontale. Alors la droite b devient horizontale, de même la droite a qui est parallèle à une droite du plan considéré (en vertu de la propriété intuitive 4). En vertu de la propriété intuitive 11, leurs projections orthogonales sur un plan horizontal sont deux droites sécantes; en vertu de la propriété intuitive 12, le point d'intersection des sécantes représente la perpendiculaire commune. En vertu de la propriété intuitive 13, la distance la plus courte entre les droites est représentée par la longueur du segment de la perpendiculaire commune déterminé par ses point d'intersection avec les droites données.

6 Projections parallèles

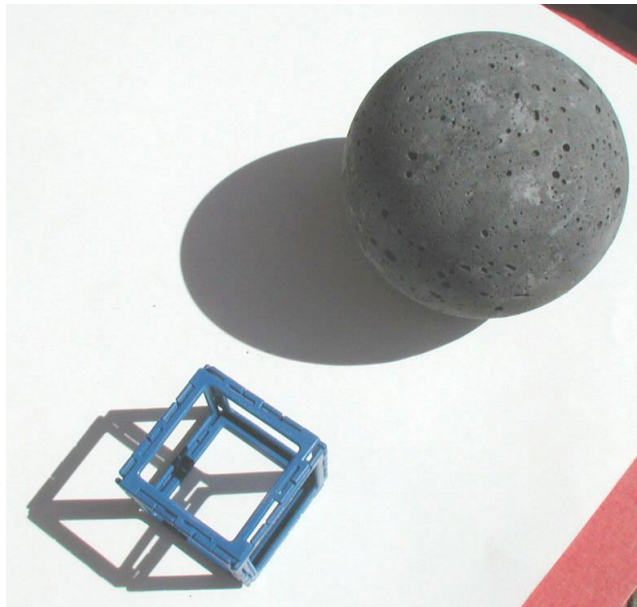


Fig. 9 : L'ombre au soleil d'un cube et d'une sphère

Expérience : Lorsqu'on observe l'ombre au soleil d'un cube, on y voit une figure plane dont des segments correspondent aux arêtes du cube et dans laquelle les arêtes parallèles sont représentées par des segments parallèles (figure 9). Ces ombres nous suggèrent une façon de représenter un cube sur une feuille de papier.

D'une manière générale, les représentations planes des formes à trois dimensions et la compréhension de leur fonctionnement sont importantes lorsqu'on étudie des problèmes de la géométrie à trois dimensions ; elles aident à organiser les démonstrations et à formuler des arguments.

Dans cette section, on s'intéresse au fonctionnement d'un type de représentation plane qui a les mêmes propriétés que celles observées sur les ombres au soleil.

Comme modèle géométrique de l'ombre au soleil, on choisit les projections parallèles sur un plan, parce que cela correspond à l'interprétation suivante du phénomène de l'ombre : dans un faisceau de rayons lumineux parallèles, certains sont arrêtés par l'objet ; ceux-là correspondent à l'ombre sur le plan.

Pour s'assurer que ce modèle est conforme aux observations, il faut vérifier si les propriétés de l'ombre énoncées ci-dessus peuvent être traduites dans le modèle des projections parallèles.

PROPOSITION 3

Les projections parallèles sur un plan de deux droites parallèles sont deux droites parallèles, si aucune de ces droites n'est parallèle à la direction de la projection et si la direction de la projection n'est pas parallèle au plan de projection.

Pour établir cette proposition, on s'appuie sur la propriété intuitive suivante.

Propriété intuitive 14 : *La section de deux plans horizontaux par un plan non horizontal est constituée de deux droites parallèles et horizontales.*

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 3. Considérons deux droites parallèles, notées a et b , et une droite d déterminant la direction des projections parallèles. Par hypothèse, cette droite n'est parallèle ni à la droite a , ni à la droite b , ni au plan de projection. Une droite mobile sécante avec a et parallèle à d engendre un plan noté π_a . Une droite mobile sécante avec b et parallèle à d engendre un autre plan noté π_b . Les intersections de ces plans avec le plan de projection donnent deux droites qui sont les projections parallèles des droites a et b sur le plan de projection.

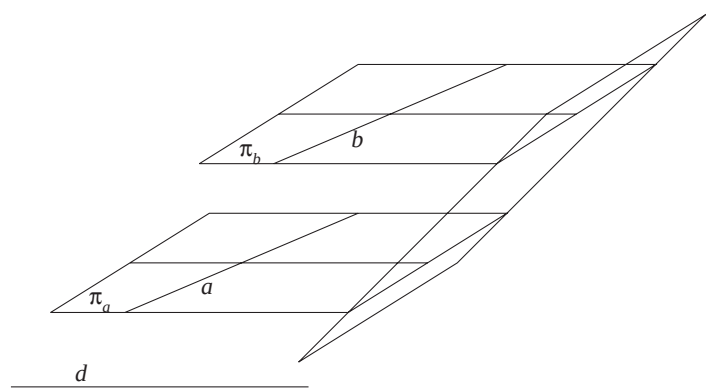


Fig. 10

Par l'expérience de pensée, on amène le plan π_a à la position horizontale, les droites a et d deviennent des droites horizontales et la droite b reste parallèle à la droite a . Donc d'après la propriété intuitive 4, elle devient horizontale (figure 10). D'après la propriété intuitive 6, le plan π_b devient également horizontal, puisqu'il contient deux droites horizontales sécantes, la droite b et la parallèle à d .

Dans les déplacements faits lors de l'expérience de pensée, le plan de projection modifie également sa position, mais il reste sécant avec les plans considérés. Or, d'après la propriété intuitive 14, l'intersection des deux plans horizontaux avec le plan de projection est constituée de deux droites parallèles. Amenées à leurs positions initiales, ces droites parallèles composent les intersections des plans π_a et π_b avec le plan de projection.

COROLLAIRE

La projection parallèle d'un parallélogramme est un parallélogramme.

7 Section plane d'un cylindre

Expérience : L'ombre au soleil d'une sphère est une courbe qui semble être un cercle étiré (figure 9). Cette courbe est appelée *ellipse*.

L'ombre au soleil d'une sphère peut être modélisée géométriquement par projection parallèle de la sphère sur un plan de projection. Du point de vue géométrique, cela revient à étudier des projections parallèles des points de la sphère qui sont aussi les points de contact des tangentes à la sphère parallèles à la direction de la projection. Toutes ces tangentes à la sphère forment une surface qui est un cylindre droit de rayon égal au rayon de la sphère. Ainsi, l'ombre de la sphère peut être modélisée géométriquement comme section plane d'un cylindre droit.

PROPOSITION 4

Une section plane d'un cylindre droit, est une courbe fermée obtenue à partir du cercle de la base du cylindre par une dilatation.

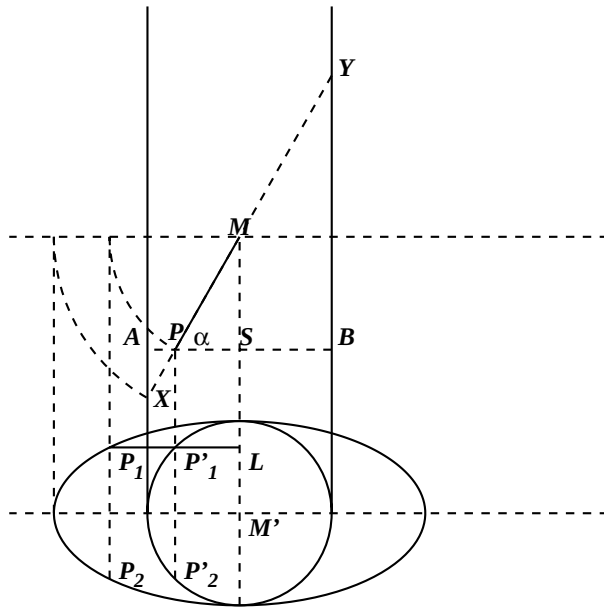


Fig. 11 : section d'un cylindre

L'argumentation s'appuie sur la figure 11, qui montre la situation privilégiée d'un cylindre vertical.

Le segment $[A, B]$ représente la vue de face de la section plane du cylindre par un plan horizontal, le segment $[X, Y]$ représente la vue de face de la section du cylindre par un plan oblique. La vue du dessus des deux sections est représentée par le cercle de la même figure.

Dans la suite, pour construire la courbe d'intersection entre le plan oblique et le cylindre, on considère un point courant P du segment $[X, Y]$. Il représente, dans la vue de face, l'intersection entre le plan de section, le plan horizontal et le cylindre (un cylindre plein en l'occurrence).

Pour construire en vraie grandeur la courbe d'intersection entre le plan oblique et le cylindre, on rabat le plan oblique en position horizontale par une rotation autour du segment horizontal représenté par le point M . On voit alors que le point courant P'_1 du cercle est envoyé sur le point courant P_1 de la courbe obtenue comme section du cylindre.

Quand le point P se meut sur le segment $[XY]$, alors le point P'_1 (ou P'_2) se meut sur le cercle, et le point P_1 (ou P_2) se meut sur la courbe allongée représentée à la même figure 11.

Montrons que cette courbe est obtenue par une dilatation (étirement) du cercle. En effet, étant donné que

$$|P'_1 L| = |PS|$$

et que

$$|P_1 L| = |PM|,$$

on a que

$$\frac{|P'_1L|}{|P_1L|} = \frac{|PS|}{|PM|}.$$

Le rapport $\frac{|PS|}{|PM|}$ ne dépend pas de la position du point P , il est donc constant (car il est égal à $\cos \alpha$). Il en résulte que tout point P_1 de la courbe d'intersection est l'image d'un point P'_1 du cercle par une dilatation parallèle à un diamètre fixe du cercle et de rapport $\frac{|PS|}{|PM|}$.

VOLUMES ET AIRES

L'enseignement du calcul des aires et des volumes est une occasion privilégiée pour pratiquer la géométrie dans l'espace. Cette problématique peut être abordée d'une manière « naïve » comme l'a fait CAVALIERI au XVII^e siècle ou même déjà ponctuellement ARCHIMÈDE. Pour convaincre le lecteur de cela, nous proposons dans ce chapitre, pour le calcul des aires et des volumes, une organisation théorique possible et qui, en outre, suggère une organisation didactique. Nous établissons ici des résultats relatifs aux volumes de solides tels que pyramide, cône, sphère, et aux surfaces de solides tels que cône et sphère.

1 Le principe de Cavalieri, pourquoi, comment ?

1.1 Quelques faits intrigants

Commençons par citer quelques formules connues ; leur analyse permettra ensuite d'en déduire des faits intrigants.

On sait que le volume d'une pyramide ou d'un cône de base B et de hauteur h est égal à $\frac{1}{3} \times (Bh)$. Comparons cette formule avec celle du volume d'un prisme ou d'un cylindre de même base et même hauteur, à savoir Bh . On observe que le volume d'une pyramide vaut $\frac{1}{3}$ du volume d'un prisme de même base et de même hauteur, que le volume d'un cône vaut $\frac{1}{3}$ du volume du cylindre de même base et même hauteur. Comment expliquer ce rapport $\frac{1}{3}$?

On sait que le volume d'une sphère de rayon r vaut $\frac{4}{3}\pi r^3$. Écrivons cette formule sous la forme $4 \times (\frac{1}{3}\pi r^2 r)$ ou sous la forme $\frac{1}{3} \times (\pi(2r)^2 r)$. Observons que

- la formule $4 \times (\frac{1}{3}\pi r^2 r)$ nous fait penser au volume quadruple d'un cône de hauteur r et de rayon r ;
- la formule $\frac{1}{3} \times (\pi(2r)^2 r)$ nous fait penser à un cône de hauteur r et dont la base a pour rayon le diamètre $2r$ de la sphère.

La formule qui donne l'aire d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$; cette aire est quatre fois plus grande que l'aire du grand cercle.

La formule $4\pi r^2$ est aussi celle de l'aire latérale du cylindre de hauteur $2r$ et de même rayon r que celui de la sphère. Comment est-il possible que l'aire de la sphère soit la même que l'aire latérale du cylindre de même rayon, bien que cela ne semble pas être vrai ?

Terminons par citer le résultat étonnant établi par ARCHIMÈDE à propos de la sphère et du cylindre circonscrit à la sphère.

Le rapport du volume du cylindre au volume de la sphère est le même que le rapport de l'aire totale du cylindre à l'aire de la sphère. Ce rapport vaut $3/2$.

Dans l'organisation théorique proposée ci-après, nous abordons ces questions en les traitant au départ à la manière des géomètres grecs, c'est-à-dire d'abord en termes de rapports, pour aller ensuite jusqu'aux formules. Nous pensons ainsi éclairer le lecteur sur les raisons profondes de ces résultats étonnants.

1.2 Équidécomposabilité des surfaces et des solides

Dans le chapitre 4, on a comparé des aires de figures planes en s'appuyant sur leur équidécomposabilité. Dans cette section, nous évoquons quelques résultats théoriques sur l'équidécomposabilité des polyèdres et les limites de la méthode d'équidécomposabilité. Notre source est M. GRÉGOIRE [1992].

Dans le cas des figures planes les plus communes, comme par exemple les polygones, la méthode d'équidécomposabilité des figures de même aire s'appuie sur une propriété élémentaire des aires, à savoir :

Deux figures planes qui sont décomposables en un même jeu de figures plus petites, ont une même aire.

On peut se poser la question réciproque : sachant que deux figures sont de même aire, sont-elles équidécomposables ? En 1832, le mathématicien hongrois F. BOLYAI a démontré que :

Si deux polygones ont la même aire, ils peuvent être décomposés en les mêmes figures polygonales en nombre fini.

Dans le cas des figures planes délimitées par des courbes, de telles décompositions ne sont plus possibles. L'exemple le plus connu est celui du cercle et du carré de même aire. Le problème correspondant s'appelle la quadrature du cercle. Il n'a pas de solution par équidécomposition.

Dans le cas des polyèdres, l'égalité des volumes n'est pas une condition suffisante pour assurer l'équidécomposabilité. En effet, en 1900, le mathématicien allemand MAX DEHN a démontré qu'un tétraèdre régulier n'est pas équidécomposable avec un tétraèdre rectangle et isocèle de même volume et qu'il existe une infinité de paires de tétraèdres non équidécomposables. Ce même mathématicien a formulé et démontré une condition nécessaire pour l'équidécomposition de deux polyèdres. Cette condition s'exprime en fonction des angles dièdres et des longueurs des arêtes. Les figures 10 et 11 montrent deux autres tétraèdres de même volume et qui ne sont pas équidécomposables : les tétraèdres *AEFD* et *ACEF*.

En 1965, le mathématicien suisse J. P. SYDLER a démontré que la condition de DEHN est suffisante.

La condition de DEHN est rarement satisfaite par deux pyramides de même volume. Il est donc impossible en général de décomposer une pyramide en un nombre fini de polyèdres pour recomposer une nouvelle pyramide ou un polyèdre de volume connu. Ainsi, pour calculer le volume d'une pyramide, il faut faire appel à d'autres méthodes. Parmi celles-ci se trouve une méthode appelée *principe de CAVALIERI*.

1.3 Principe de Cavalieri

Au XVII^e siècle, les mathématiciens ont inventé une méthode particulière pour mesurer des aires et des volumes. Il s'agit de la méthode des indivisibles, qui a été traitée en 1635 par BONAVENTURA CAVALIERI dans son ouvrage « La géométrie des indivisibles ». Les indivisibles de CAVALIERI sont obtenus par découpage d'une figure par des droites parallèles ou d'un solide par des plans parallèles.

Les indivisibles de CAVALIERI d'un polygone sont des segments parallèles obtenus comme intersections du polygone avec des droites parallèles, les indivisibles d'un parallélépipède sont, toujours chez CAVALIERI, des parallélogrammes égaux à la base et situés dans des plans parallèles à celle-ci, les indivisibles d'un cylindre sont des cercles situés dans des plans parallèles à la base, les indivisibles d'une pyramide sont des triangles semblables au triangle de la base et situés dans des plans parallèles à la base.

CAVALIERI utilise les indivisibles pour formuler le principe qui permet de comparer des aires ou des volumes. Cette comparaison s'appuie sur la notion de rapport de grandeurs.

LE PRINCIPE DE CAVALIERI

Soient deux surfaces dans un plan et toutes les droites parallèles à une droite donnée. Si chacune de ces droites détermine dans les deux surfaces des segments de même longueur ou de longueurs dans un même rapport, les surfaces ont respectivement même aire ou des aires dans ce même rapport.

Soient deux solides et tous les plans parallèles à un plan donné. Si chacun de ces plans détermine dans les deux solides des sections de même aire ou dont les aires sont dans un même rapport, les solides ont même volume ou des volumes dans ce même rapport.

Dans le cas des aires des polygones, le principe de CAVALIERI peut être confronté avec la méthode d'équidécomposabilité.

Prenons pour exemple un rectangle et un parallélogramme de même base et de même hauteur. D'une part, nous savons qu'ils sont équidécomposables (voir chapitre 4). D'autre part, si les bases de deux parallélogrammes sont alignées comme le montre la figure 1, alors nous pouvons observer que chacune des droites parallèles aux bases détermine dans les deux parallélogrammes les segments de même longueur.

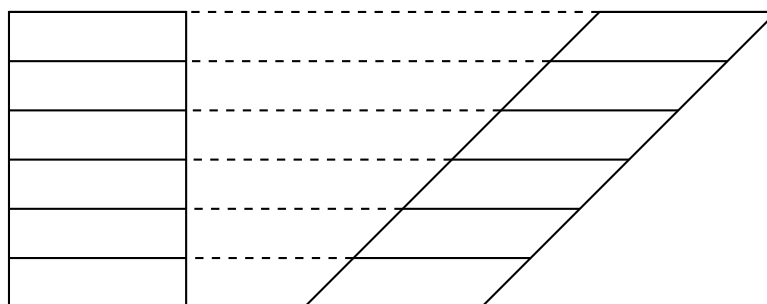


Fig. 1 : Un rectangle et un parallélogramme

Le même rapprochement entre les deux méthodes peut se faire dans le cas de deux triangles de même base et de même hauteur. D'une part, de tels triangles sont équidécomposables ; d'autre part, si leurs bases sont alignées comme sur la figure 2, alors chacune des droites parallèles à la droite des bases détermine dans les deux triangles des segments de même longueur.

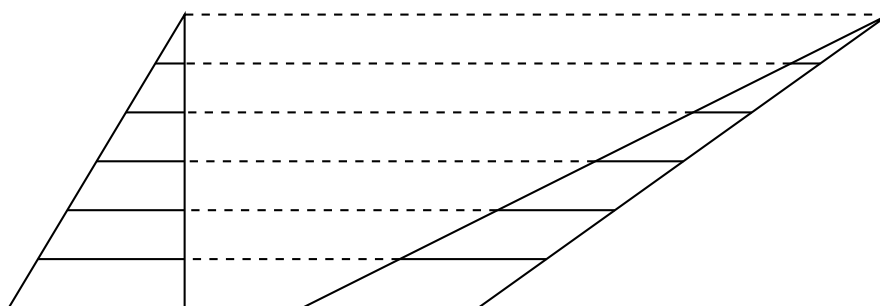


Fig. 2 : Deux triangles de même base et de même hauteur

Dans le cas des volumes, pour amener le principe de CAVALIERI à l'évidence, on imagine des expériences faisant appel à nos intuitions.

- On considère deux solides creux qu'on peut remplir d'eau, posés sur un plan horizontal. On suppose qu'à chaque niveau, leurs sections ont une même aire. Ainsi, lorsqu'on les remplit, la petite quantité d'eau ajoutée à chaque niveau pour faire monter un peu celui-ci, est la même dans chacun des solides. Il en résulte qu'au total, on verse la même quantité d'eau dans les deux solides, et par conséquent le volume de l'un est égal au volume de l'autre. Une variante de cette expérience consiste à verser simultanément, dans les deux récipients, de l'eau sortant de deux robinets dont le débit est le même. A chaque moment, les niveaux d'eau dans les deux récipients sont les mêmes.
- On considère un solide obtenu par empilement de feuilles de papier (figure 3). En le déformant par une poussée exercée sur le tas de feuilles, on obtient un autre solide vu comme un autre empilement des mêmes feuilles de papier. Les volumes des deux tas sont les mêmes.



Fig. 3 : Deux tas de feuilles

- On considère un cylindre obtenu par empilement de pièces de monnaies. En le déformant par une poussée exercée sur le tas de pièces, on obtient un autre solide (figure 4). Les volumes des deux tas de pièces sont les mêmes.



Fig. 4 : Trois tas de pièces

Les figures 3 et 4 suggèrent les deux propositions suivantes.

Deux parallélépipèdes de même base et de même hauteur ont même volume.

Deux cylindres de même base et de même hauteur ont même volume.

Le principe de CAVALIERI permet de les établir de la manière suivante.

Quant à la première proposition, considérons un parallélépipède posé sur un plan horizontal. D'une part, toute section du solide par un autre plan horizontal est un parallélogramme isométrique à la base. Considérons ensuite deux parallélépipèdes de même base et de même hauteur posés sur un même plan horizontal, par exemple l'un droit et l'autre oblique. Toute section de l'un et de l'autre par un plan horizontal quelconque donne deux parallélogrammes isométriques à la base, donc de même aire. Le principe de Cavalieri permet de conclure que les parallélépipèdes ont le même volume. D'autre part, on peut prouver que deux parallélépipèdes de même base et de même hauteur sont équidécomposables. Un exemple particulièrement simple de cela est donné par les deux parallélépipèdes $ABCDEFGH$ et $ABCDLMNK$ de la figure 5.

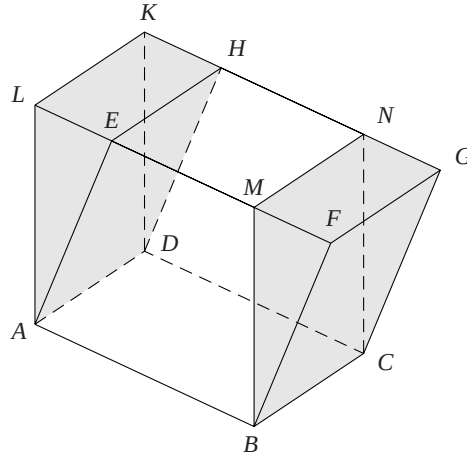


Fig. 5 : Deux parallélépipèdes équivalents par décomposition

Quant à la deuxième proposition, considérons un cylindre de base circulaire. Posons-le sur un plan horizontal. Alors toute section par un autre plan horizontal est un cercle isométrique au cercle de la base. Si ensuite nous plaçons sur le même plan un autre cylindre de même base et de même hauteur, alors toute section des deux cylindres par un plan horizontal donne deux cercles isométriques à celui de la base, donc isométriques entre eux. On conclut que les deux cylindres ont le même volume. De même pour un solide non cylindrique construit sur une base circulaire et tel que ses sections par des plans parallèles à la base soient des cercles isométriques à la base : son volume est égal au volume du cylindre de même hauteur et de même base.

Dans le cas des cylindres de même base et de même hauteur, par exemple l'un droit et l'autre oblique, nous ne pouvons plus nous appuyer sur leur équidécomposabilité, car celle-ci n'est pas possible.

2 Comparer des volumes

Dans cette section, nous faisons référence aux notions ou aux propriétés suivantes :

- la notion de rapport de deux grandeurs et de proportion entre quatre grandeurs ;
- le théorème de PYTHAGORE en termes d'aires ;
- le théorème suivant : tout cercle est au carré qui lui est circonscrit dans le rapport $\frac{\pi}{4}$;
- la propriété de THALÈS dans le plan.

2.1 Comparer les volumes de pyramides et de prismes

PROPOSITION 1

Deux pyramides de même hauteur et de même base polygonale (ou bases polygonales isométriques) sont de même volume.

Avant d'établir ce résultat, étudions d'abord la nature d'une section plane quelconque d'une pyramide de base polygonale par un plan parallèle à la base. Cette section est homothétique au polygone de la base, et donc ses angles sont égaux respectivement à ceux du polygone de la base (figure 6). Comme, en plus, les sommets du polygone de la section plane sont situés sur des arêtes de la pyramide issues de son sommet, par la propriété de THALÈS, tous ces sommets divisent ces arêtes

dans le rapport des distances au sommet du plan de la section et du plan de la base. Ce rapport est aussi le rapport d'homothétie dans l'espace entre le polygone de la base et le polygone de la section.

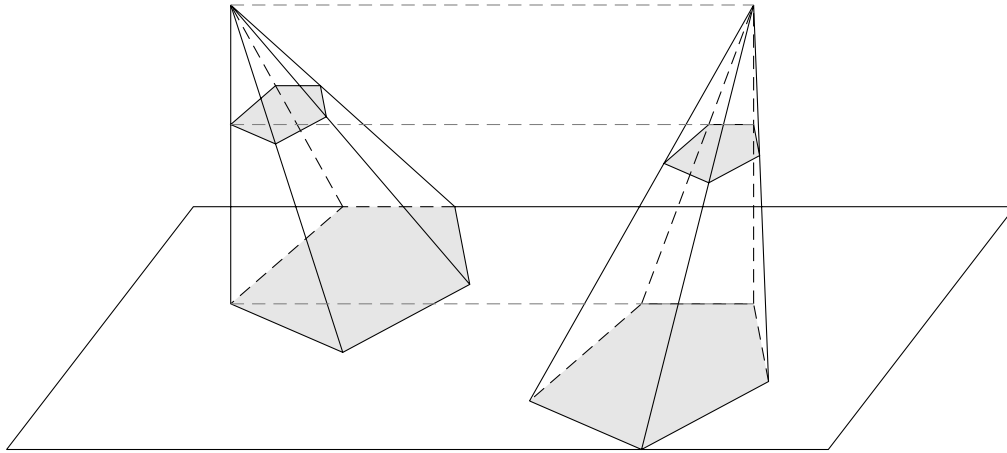


Fig. 6

Considérons maintenant deux pyramides de même hauteur et de même base polygonale. Plaçons-les sur un plan horizontal. Les polygones de section par un plan horizontal quelconque sont homothétiques aux polygones de bases, avec le même rapport d'homothétie. Ces polygones ont donc même aire. Par le principe de CAVALIERI, les volumes des pyramides sont égaux aussi.

Passons maintenant à une nouvelle proposition.

PROPOSITION 2

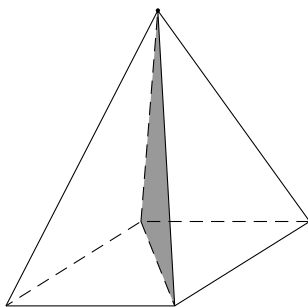


Fig. 7

Toute pyramide ayant pour base un parallélogramme est constituée de deux tétraèdres de même volume.

Cette proposition est la conséquence de la proposition 1. En effet, le plan qui passe par le sommet de la pyramide et par une diagonale de la base, coupe la pyramide en deux tétraèdres de même hauteur et de même base triangulaire (figure 7).

PROPOSITION 3

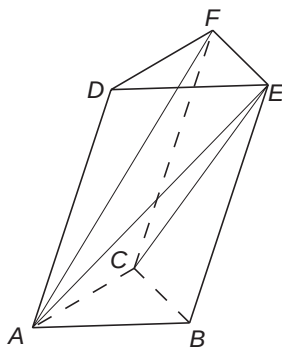


Fig. 8

Tout prisme à base triangulaire peut être décomposé en trois pyramides à base triangulaire de même volume.

Ce résultat a été déjà établi par EUCLIDE (III^e siècle av. J.-C.) La figure 8 montre un prisme à base triangulaire.

Les figures 9, 10, 11 montrent une décomposition du prisme $ABCDEF$ en trois pyramides à base triangulaire : $ABCE$, $AEFD$ et $ACEF$.

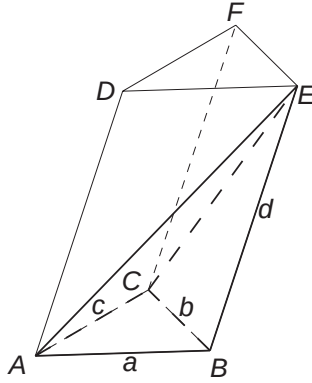


Fig. 9

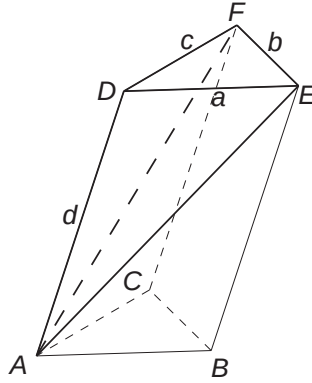


Fig. 10

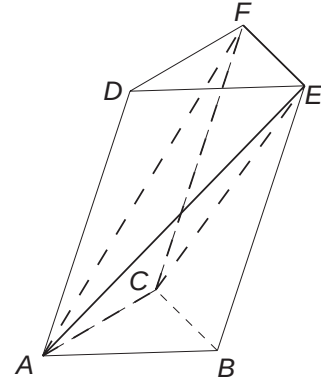


Fig. 11

Les pyramides $ABCE$ et $AEFD$ ont une même hauteur et des bases isométriques. D'après la proposition 1, elles ont même volume.

Les pyramides $ABCE$ et $ACEF$ peuvent être considérées comme obtenues à partir de la section de la pyramide $ABEFC$ par le plan ACE . D'après la proposition 2, ces pyramides à base triangulaire ont même volume.

Ainsi, les trois pyramides $ABCE$, $AEFD$ et $ACEF$ qui constituent le prisme ont même volume. Cela signifie que le volume de chacune d'elles vaut $\frac{1}{3}$ du volume du prisme.

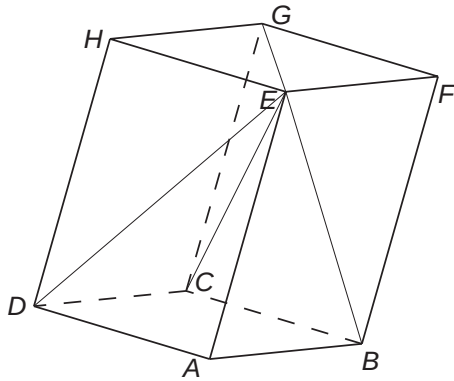


Fig. 12

PROPOSITION 4

Tout parallélépipède peut être décomposé en trois pyramides de même volume.

La figure 12 montre un parallélépipède $ABCDEFGH$.

Les figures 13, 14, 15 montrent une décomposition du parallélépipède en trois pyramides ayant le même sommet, chacune ayant pour base une face du parallélépipède : $EABCD$, $EBCGF$ et $ECGHD$.

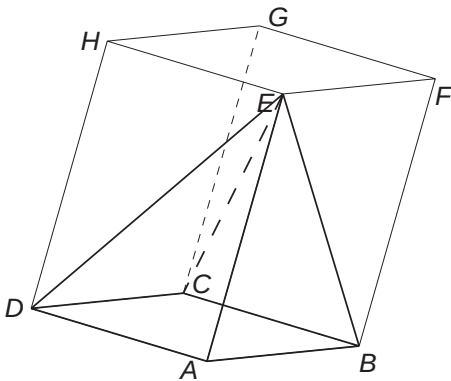


Fig. 13

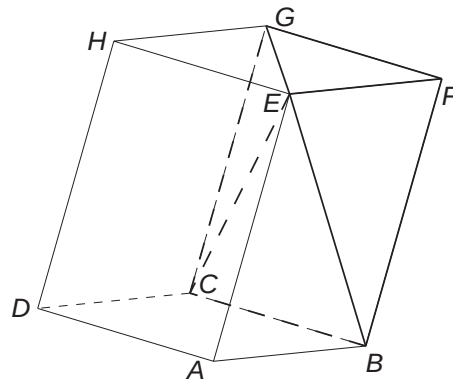


Fig. 14

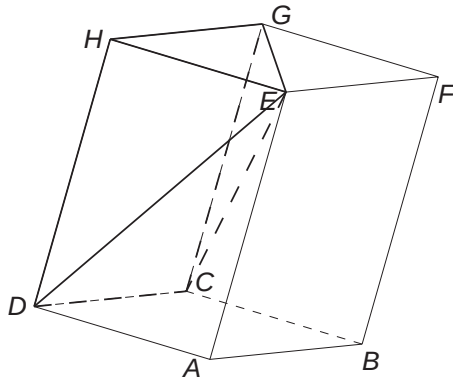


Fig. 15

Chacune de ces trois pyramides peut être décomposée, à son tour, en deux pyramides à base triangulaire et de même volume, comme dans la proposition 2 :

- la pyramide $EABCD$ en les pyramides $EABD$ et $EBCD$,
- la pyramide $EBCGF$ en les pyramides $EBGF$ et $EBCG$,
- la pyramide $ECGHD$ en les pyramides $EDGH$ et $EDCG$.

Les pyramides $EABD$, $EFGB$ et $EDGH$ (figures 16, 17, 18) sont de même hauteur, car toutes les trois sont « coincées » entre les deux plans horizontaux $ABCD$ et $EFGH$. Elles ont pour bases des triangles ABD , EFG et EHG , tous les trois situés dans des plans horizontaux. Ces bases sont isométriques. Ainsi, en vertu de la proposition 1, ces pyramides ont même volume.

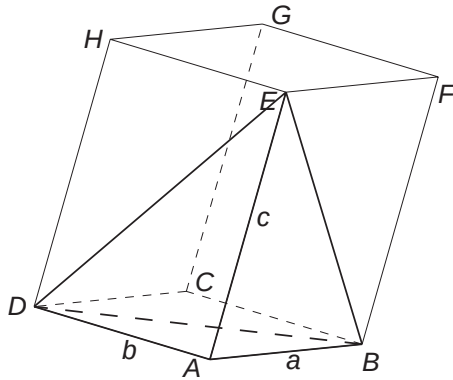


Fig. 16

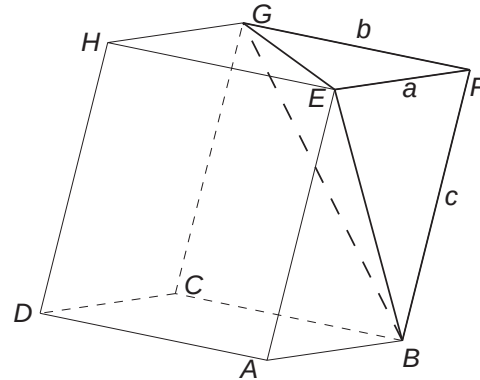


Fig. 17

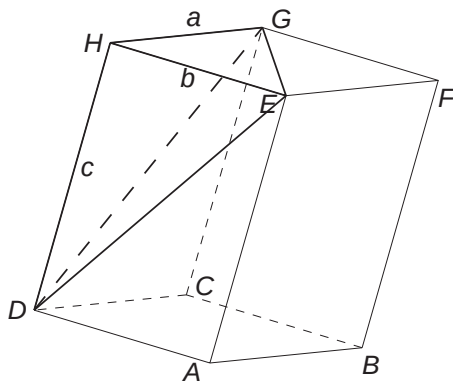


Fig. 18

Il en résulte que les six pyramides à base triangulaire sont de même volume et donc les trois pyramides ayant pour bases des faces du parallélépipède sont aussi de même volume. Ainsi le volume de chacune des trois pyramides dont le parallélépipède est constitué vaut $\frac{1}{3}$ du volume du parallélépipède.

PROPOSITION 5

Toute pyramide à base triangulaire peut être logée dans un prisme à base triangulaire de volume trois fois plus grand que celui de la pyramide.

Donnons-nous une pyramide à base triangulaire. La figure 19 montre une des possibilités pour la loger dans un prisme de même base et de même hauteur. Elle est l'une des trois pyramides de la

décomposition possible du prisme en trois pyramides de même volume évoquée à la proposition 3. Ainsi, le volume d'un prisme est trois fois plus grand que celui d'une pyramide de même base triangulaire et de même hauteur.

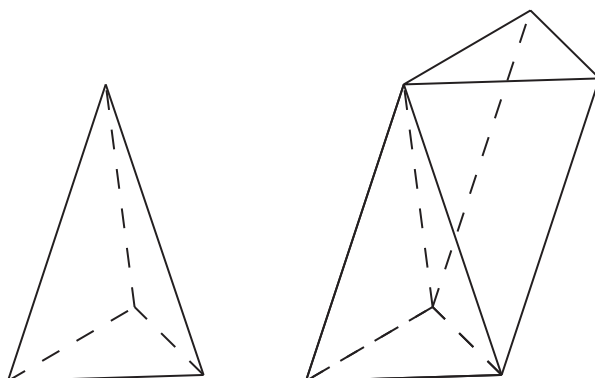


Fig. 19

PROPOSITION 6

Toute pyramide dont la base est un parallélogramme peut être logée dans un parallélépipède de volume trois fois plus grand que celui de la pyramide.

Donnons-nous une pyramide ayant pour base un parallélogramme. La figure 20 montre l'une des possibilités pour la loger dans un parallélépipède de même base et de même hauteur. Elle est l'une des trois pyramides de la décomposition possible du parallélépipède en trois pyramides de même volume évoquée à la proposition 4. Ainsi, le volume d'un parallélépipède est trois fois plus grand que le volume d'une pyramide de même base et de même hauteur.

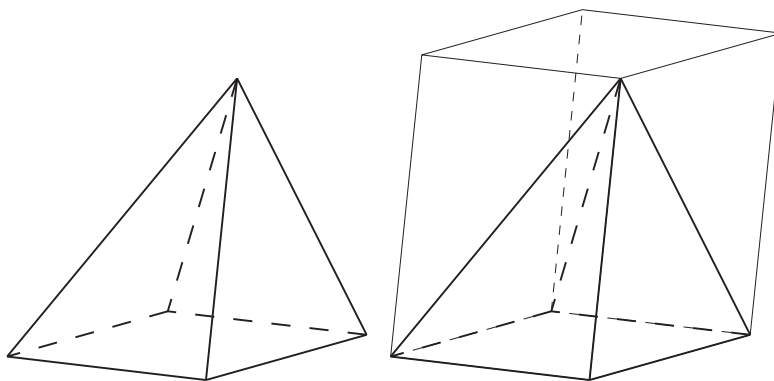


Fig. 20

PROPOSITION 7

Toute pyramide ayant pour base un quadrilatère quelconque peut être logée dans un prisme de volume trois fois plus grand que celui de la pyramide.

Donnons-nous une pyramide à base quadrilatérale (figure 21). Décomposons-la en deux pyramides à bases triangulaires par le plan passant par son sommet et une diagonale de la base. Chaque pyramide à base triangulaire ainsi obtenue peut être logée dans un prisme à base triangulaire de volume trois fois plus grand que le sien. Ce prisme est de même base et de même hauteur que la pyramide (figure 21). Ainsi, lorsqu'on réunit les deux prismes correspondant respectivement à chacune des deux pyramides à base triangulaire de départ, on obtient un prisme à base quadrilatérale

qui contient la pyramide donnée. Le volume de ce prisme est trois fois plus grand que celui de la pyramide.

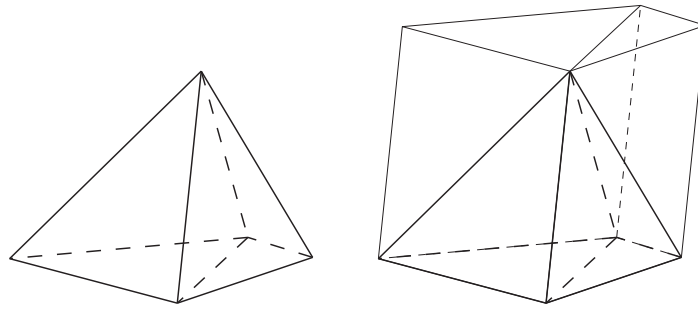


Fig. 21

Remarquons que lorsque la base d'une pyramide est un polygone quelconque, alors le procédé est analogue ; on décompose la pyramide donnée en pyramides à bases triangulaires, à chacune d'elles on associe un prisme de mêmes base et hauteur, on réunit tous ces prismes en un seul dont la base et la hauteur sont les mêmes que celles de la pyramide donnée. Comme le volume de chaque composante de cette pyramide vaut $\frac{1}{3}$ du volume du prisme associé, on conclut que le volume de la pyramide donnée vaut $\frac{1}{3}$ du volume du prisme associé. On considère ici qu'il est possible de trianguler tout polygone.

2.2 Comparer les volumes de cônes et de cylindres

PROPOSITION 8

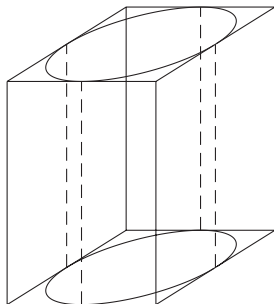


Fig. 22

Considérons un cylindre quelconque à base circulaire et inscrivons-le dans un parallélépipède à base carrée et de même hauteur. Le rapport de leurs volumes est égal au rapport de leurs bases, qui ne dépend pas du rayon du cylindre.

Plaçons les deux solides sur un plan horizontal (figure 22). Toute section du premier et du second par un plan horizontal quelconque donne respectivement un carré et un cercle inscrit dans ce carré. Le rapport des aires de ces sections est constant. D'après le principe de Cavalieri, le rapport des volumes du cylindre et du parallélépipède est égal au rapport des bases.

PROPOSITION 9

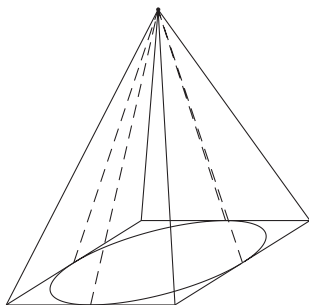


Fig. 23

Le rapport des volumes d'un cône à base circulaire et d'une pyramide à base carrée circonscrite au cône est le même que le rapport des volumes du cylindre de même rayon et même hauteur et du parallélépipède à base carrée circonscrit au cylindre.

Considérons un cône quelconque à base circulaire et inscrivons-le dans une pyramide à base carrée et de même sommet. Plaçons les deux solides sur un plan horizontal (figure 23).

Toute section du premier et du second par un plan horizontal quelconque donne respectivement un carré et un cercle inscrit dans ce carré. Le rapport des aires de ces sections est constant. D'après le principe de CAVALIERI, le rapport des volumes du cône et de la pyramide est égal à ce rapport. D'après la proposition 8, ce rapport est égal au rapport des volumes du cylindre de même rayon et du parallélépipède à base carrée dans lequel le cylindre est inscrit.

La proposition suivante est la conséquence immédiate des propositions 6, 8 et 9.

PROPOSITION 10

Le rapport des volumes d'un cône et d'un cylindre de même base et de même hauteur est égal au rapport des volumes de la pyramide et du parallélépipède à base carrée dans lesquels ils sont respectivement inscrits (figures 24 et 25). Ce rapport vaut $\frac{1}{3}$.

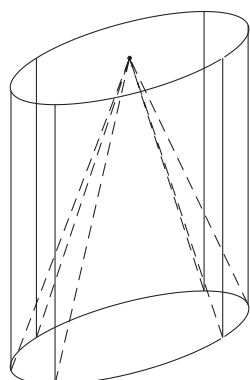


Fig. 24

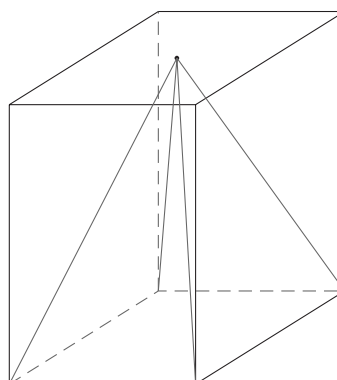


Fig. 25

Le rapport $\frac{1}{3}$ mis en évidence à l'occasion des comparaisons des volumes d'une pyramide et d'un prisme de même base et de même hauteur, ou d'un cône et d'un cylindre de même base et de même hauteur, peut être considéré comme étant aussi remarquable que le rapport π de l'aire d'un cercle et de son diamètre, même si, en tant que nombre, π pose plus de problèmes que $\frac{1}{3}$.

2.3 Comparer les volumes d'une demi-sphère, d'un cône inscrit et d'un cylindre circonscrit à la demi-sphère

PROPOSITION 11

Considérons une demi-sphère et un cône, tous deux inscrits dans un même cylindre comme cela est suggéré à la figure 26. Alors le volume de la demi-sphère est égal à la différence entre le volume du cylindre et le volume du cône.

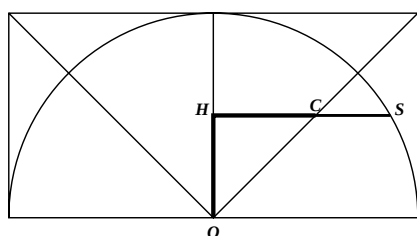


Fig. 26

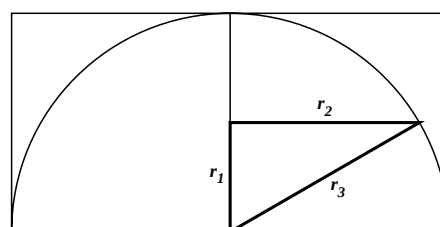


Fig. 27

Plaçons les trois solides sur un même plan horizontal, le cône étant posé sur sa pointe. Comparons les aires des cercles obtenus comme leurs sections par un plan horizontal quelconque. Notons par r_1 , r_2 et r_3 les rayons des sections respectives du cône, de la sphère et du cylindre.

Étant donné que le rayon du cône est égal à sa hauteur, le rayon de la section du cône est égal à la hauteur du plan de section au-dessus du plan horizontal (figure 26).

Le rayon du cylindre est également celui de la demi-sphère. Il en résulte que ce rayon, à savoir r_3 , est égal à l'hypoténuse du triangle rectangle représenté à la figure 27.

Doublons tous les côtés de ce triangle ; nous obtenons un nouveau triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont les diamètres d_1 et d_2 des sections du cône et de la sphère et dont l'hypoténuse est le diamètre d_3 de la section du cylindre (figure 28). Par le théorème de PYTHAGORE en terme d'aires, on a que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés.

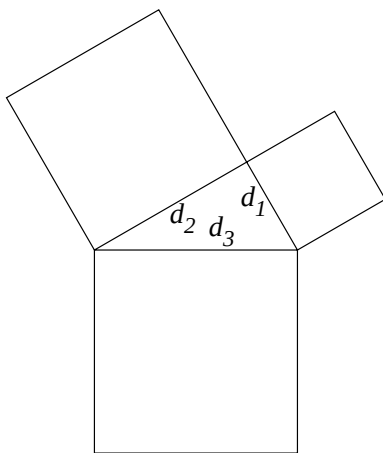


Fig. 28

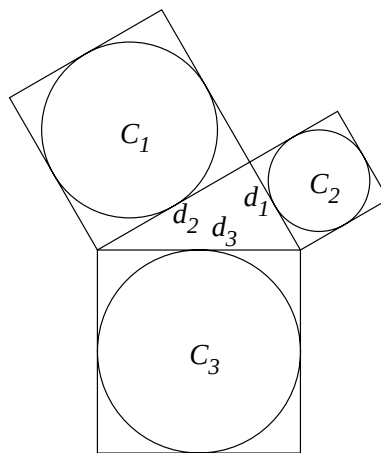


Fig. 29

Le raisonnement qui suit est inspiré par celui de GALILÉE [1665].

Considérons trois cercles, chacun inscrit dans un des trois carrés. C'est ce que représente la figure 29. Le rapport des aires d'un carré et du cercle qui y est inscrit est constant. Le théorème de PYTHAGORE s'étend ainsi aux aires des cercles ; la somme de l'aire du cercle de rayon r_1 et de l'aire du cercle de rayon r_2 est égale à l'aire du cercle de rayon r_3 . Or, l'aire du cercle de rayon r_1 est celle de la section du cône, l'aire du cercle de rayon r_2 est celle de la section de la sphère et l'aire du cercle de rayon r_3 est celle de la section du cylindre.

À partir de ce qui précède, on obtient que, pour n'importe quel plan horizontal, l'aire de la section du cylindre est égale à la somme de l'aire de la section du cône et de l'aire de la section de la sphère.

En d'autres termes, pour tout plan horizontal, l'aire de la section de la sphère (cercle de rayon r_2) est égale à l'aire de la couronne de rayons r_1 ($= |HC|$) et r_3 . Cette couronne est une section plane du solide qu'on obtient à partir du cylindre quand on en enlève le cône. Or, le volume de ce solide est égal à la différence du volume du cylindre et du volume du cône.

Par le principe de CAVALIERI, le volume de la demi-sphère est égal au volume de ce nouveau solide, et donc il est égal à la différence du volume de cylindre et du volume de cône.

CONCLUSION 1

Le volume d'une demi-sphère est égal à deux fois le volume du cône dont les rayon et hauteur sont égaux au rayon de la demi-sphère. Le volume de la sphère de même rayon est égal à quatre fois le volume du même cône.

En effet, c'est la conséquence immédiate du fait que le volume de la demi-sphère est égal à la différence du volume de cylindre et du volume de cône dont les rayon et hauteur sont égaux au rayon de la demi-sphère et du fait que le volume du cylindre est égal à trois fois le volume du cône considéré.

CONCLUSION 2

Le rapport des volumes d'une sphère et du cylindre circonscrit à la sphère est égal à $\frac{2}{3}$.

Cette conclusion est immédiate, car ce rapport est celui du volume de la demi-sphère et du cylindre circonscrit à la demi-sphère.

3 Calculer des volumes

Dans cette section, nous traduisons en termes de formules les résultats des sections précédentes. Pour cette raison, cette section se situe au-delà de la géométrie naturelle telle que nous l'avons conçue ici.

Partons pour cela des formules suivantes, dans lesquelles les unités d'aire et de volume sont celles qui dérivent naturellement de l'unité de longueur :

- l'aire du rectangle de hauteur a et de base b est ab ;
- le volume du parallélépipède rectangle de dimensions a , b et c est abc ; le volume du parallélépipède de base B et de hauteur h est Bh .

Ces formules sont établies aisément pour des mesures entières ou rationnelles. On les admet ici pour des mesures irrationnelles. On a en outre que

- l'aire du cercle de rayon r est πr^2 ;
- le rapport des aires d'un cercle et d'un carré circonscrit au cercle est $\frac{\pi}{4}$;
- la longueur de la circonférence de rayon r est $2\pi r$.

Ces formules une fois admises, on en tire plusieurs autres, à savoir les suivantes.

Le volume d'un parallélépipède dont la base mesure B unités d'aire et dont la hauteur mesure h unités de longueur, est égal à Bh .

Considérons deux parallélépipèdes de même hauteur avec des bases de même aire, posés sur un plan horizontal. D'après le principe de CAVALIERI, ils ont même volume. Si, en plus, l'un de ces parallélépipèdes est un parallélépipède rectangle, alors son volume est égal à abc , et peut aussi s'écrire Bh . Il en résulte que le volume de l'autre parallélépipède, supposé quelconque, est aussi égal à Bh .

Le volume d'un prisme de base triangulaire B et de hauteur h , est donné par la formule Bh .

En effet, le volume d'un prisme à base triangulaire vaut la moitié du volume du parallélépipède de même hauteur et dont la base est un parallélogramme constitué de deux triangles isométriques à la base du prisme.

Le volume d'une pyramide à base triangulaire de base B et de hauteur h , vaut $\frac{1}{3}Bh$.

Par la proposition 5, à toute pyramide à base triangulaire, on peut associer un prisme de même base, de même hauteur et de volume triple. On a donc que

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3}(Bh) = \frac{1}{3}Bh.$$

Le volume d'une pyramide dont la base B est un parallélogramme et dont la hauteur est égale à h vaut $\frac{1}{3}Bh$.

Par la proposition 6, à toute pyramide dont la base est un parallélogramme, on peut associer un parallélépipède de même base, de même hauteur et de volume triple. D'où

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3}Bh.$$

Le volume d'une pyramide dont la base B est un quadrilatère quelconque et dont la hauteur égale h vaut $\frac{1}{3}Bh$. Par la proposition 7, à toute pyramide dont la base est un quadrilatère quelconque, on peut associer un prisme de même base, de même hauteur et de volume triple. D'où

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3}Bh.$$

Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égal à $\pi r^2 h$.

Considérons un cylindre de rayon r et de hauteur h . Il peut être inscrit dans un parallélépipède de même hauteur et dont la base carrée a pour côté $2r$. Leurs volumes sont dans un rapport égal à $\frac{\pi}{4}$. D'où

$$V_{\text{cylindre}} = \frac{\pi}{4}(2r)^2 h = \frac{\pi}{4}4r^2 h = \pi r^2 h.$$

Le volume V d'un cône de rayon r et de hauteur h est égal à $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Considérons un cône de rayon r et de hauteur h . Il peut être inscrit dans un cylindre de même rayon et de même base. D'après la proposition 12, le rapport de leurs volumes est égal à $\frac{1}{3}$. D'où

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{3} 4r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Le volume V d'une sphère de rayon r vaut $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Dans une configuration comme celle de la figure 26, le volume du solide obtenu en retirant le cône du cylindre est égal à $\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$. Ce volume est égal à celui de la demi-sphère. D'où on a

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

4 Aires de solides

4.1 Aire latérale d'un cône

Dans cette section, nous allons calculer l'aire latérale du cône par deux raisonnements différents. Le premier s'appuie sur des calculs élémentaires d'aires de secteur de disque et sert à rendre plausible le second, qui est inspiré par le principe de CAVALIERI.

PROPOSITION 12

L'aire latérale d'un cône droit de rayon r et de génératrice ℓ et l'aire de sa base sont dans un rapport égal à $\frac{\ell}{r}$.

Premier raisonnement.

La surface d'un cône est une surface développable, c'est-à-dire qu'« elle peut, à partir d'un coup de ciseaux idéal, être mise à plat, (...) être appliquée sur un plan » (S. Baruk [1992]). La portion du plan correspondant à la surface du cône est un secteur de disque de rayon ℓ et d'arc de longueur $2\pi r$ (figures 30 et 31).

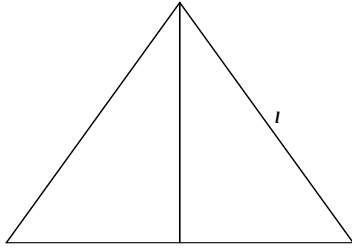


Fig. 30

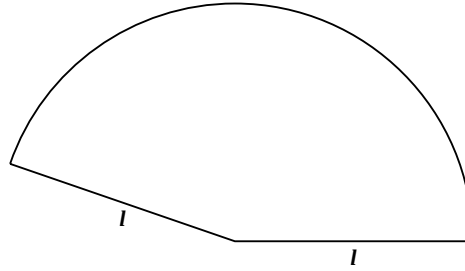


Fig. 31

Dans la suite du raisonnement, nous nous appuyons sur le résultat suivant.

Les aires de deux secteurs circulaires d'un même cercle et les arcs correspondants sont des grandeurs proportionnelles.

Ainsi, l'aire A de la surface du cône comparée à l'aire du cercle est dans le même rapport que la longueur de l'arc du secteur au périmètre du cercle. On a donc

$$\frac{A}{\pi \ell^2} = \frac{2\pi r}{2\pi \ell}$$

ou, après simplification,

$$\frac{A}{\pi \ell} = r.$$

Il en résulte que

$$A = \pi r \ell.$$

De là, on tire que le rapport entre l'aire de la surface latérale et celle de la base du cône est égal à $\frac{\ell}{r}$.

Second raisonnement.

La comparaison de l'aire latérale du cône et de l'aire de sa base conduit au paradoxe suivant. La surface latérale d'un cône peut être vue comme composée de l'assemblage des cercles découpés par tous les plans parallèles à sa base. A chacun de ces cercles, on peut associer sa projection sur la base du cône et réciproquement. L'assemblage des cercles ainsi projetés compose le disque de la base. Ainsi les deux surfaces, celle du disque et celle du cône, sont composées des mêmes éléments indivisibles. On pourrait alors penser que l'aire du disque de la base est la même que l'aire latérale du cône. Or, visiblement, cela n'est pas le cas. Ce paradoxe est dû à TACQUET, enseignant jésuite d'Anvers, qui l'a imaginé pour refuser la méthode des indivisibles de CAVALIERI.

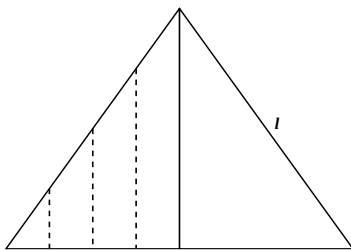


Fig. 32

Il a été étudié récemment par M. SCHNEIDER [1988]. Cette dernière a proposé à des élèves le problème suivant : *Considérons la surface d'un cône droit comme l'assemblage des cercles qu'y découpent tous les plans parallèles à sa base. Associons à chacun de ces cercles sa projection sur la base du cône. Les cercles ainsi projetés composent le disque de base. Quelle relation y a-t-il entre l'aire latérale du cône et celle de sa base ?* La figure 32 illustre cela sur une vue en coupe.

Dans sa thèse, M. Schneider a relaté les faits suivants. « Certains élèves remarquent qu'il y a autant de cercles sur la base que sur la surface latérale et ils concluent que les deux aires sont égales :

si l'on met ces circonférences l'une dans l'autre dans un même plan, on devrait obtenir la même valeur que si on empilait ces cercles l'un sur l'autre pour former la surface latérale du cône ?

Certains autres s'étonnent que cela conduise à un résultat incorrect, car l'aire latérale ne peut [...] pas égaler l'aire de la base, puisqu'elle varie avec la génératrice.

Certains encore affirment que le résultat est faux, car dans le raisonnement, on ne respecte pas les conditions d'application du principe de CAVALIERI.

Pour expliquer le paradoxe, quelques élèves remarquent qu'il y a plus de points sur l'arête que sur le rayon et donc plus de cercles sur la surface latérale, que l'espacement des cercles sur la base diffère de l'espacement des cercles sur le cône ou que deux cercles de l'aire latérale enserrent une bande plus large sur le cône que leurs correspondants dans la base ou que dans le raisonnement on ne tient pas compte d'une certaine notion d'« épaisseur » des indivisibles circulaires. »

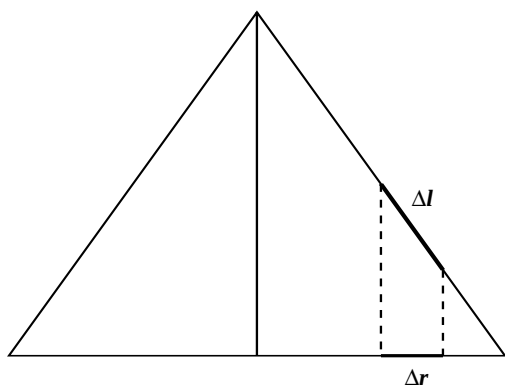


Fig. 33

En effet, lorsqu'on dessine des cercles également espacés sur la surface du cône (voir par exemple l'espacement Δl sur la figure 33), les cercles correspondants situés dans la base sont aussi espacés également, mais les espaces sont différents (voir par exemple Δr sur la figure 33). L'espacement des cercles sur la surface est $\Delta l / \Delta r$ fois plus large que celui des cercles sur la base. Comme le rapport $\Delta l / \Delta r$ est égal au rapport $\frac{\ell}{r}$, il est donc plausible de penser que le rapport $\frac{\ell}{r}$ est aussi celui de deux aires, l'aire latérale notée S et l'aire de la base πr^2 (figure 33). On obtiendrait ainsi l'égalité des rapports

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\ell}{r}.$$

Ce résultat est le même que celui obtenu par le premier raisonnement. Ainsi, la propriété intuitive selon laquelle « le rapport de l'espacement des cercles est égal au rapport des aires des surfaces considérées », gagne en plausibilité. La géométrie naturelle, on le voit, se pratique aussi dans le registre heuristique.

4.2 Aire d'une sphère

La formule $\frac{1}{3}4\pi r^3$ du volume d'une sphère de rayon r établie dans la section précédente, suggère que le volume d'une sphère est égal au volume d'un cône de hauteur r et dont la base a pour rayon $2r$. On peut écrire en effet

$$\frac{1}{3}4\pi r^3 = \frac{1}{3}(4\pi r^2)r = \frac{1}{3}\pi(2r)^2r.$$

Cette formule suggère aussi que la sphère peut être vue comme un solide qui n'est pas très différent d'un solide composé d'un très grand nombre de pyramides de hauteurs égales au rayon de la sphère et dont les bases semblent « paver » la surface de la sphère.

On peut donc retenir la conjecture suivante.

CONJECTURE : L'aire de la sphère de rayon r est égale à $4\pi r^2$.

Nous allons confirmer cette conjecture par un raisonnement de type infinitésimal. Il s'agit de s'appuyer sur l'approximation d'une petite tranche de la surface de la sphère par la surface d'un cône tronqué (figures 34 et 35). Ce raisonnement est aux confins de la géométrie naturelle, car il cache un passage à la limite.

PROPOSITION 13

L'aire d'une sphère est égale à l'aire latérale du cylindre circonscrit.

On considère une sphère de rayon r et le cylindre qui lui est circonscrit. On coupe les deux solides par deux plans parallèles à la base du cylindre et distants de h comme indiqué sur la figure 35. On considère ensuite le cône tronqué engendré par la rotation du segment QT , tangent en P à la sphère, autour de l'axe du cylindre. Dans la suite, on s'appuie sur l'intuition selon laquelle l'aire latérale de la tranche de la sphère est aussi proche que l'on veut de l'aire latérale du cône tronqué, pour autant que les plans parallèles soient suffisamment proches l'un de l'autre.

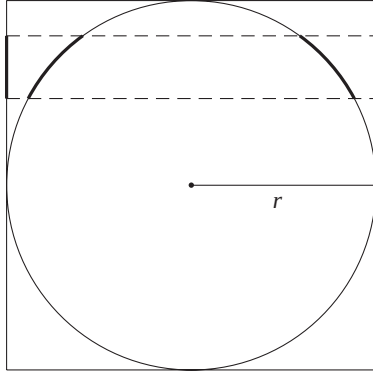


Fig. 34

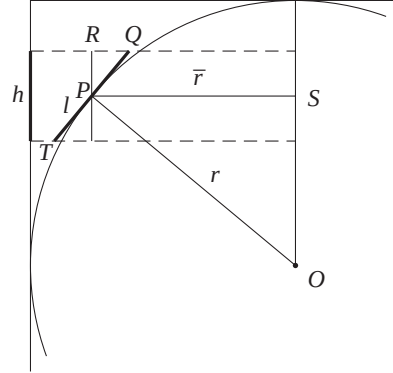


Fig. 35

À partir de la similitude des triangles OPS et QPR , on obtient l'égalité des rapports

$$\frac{|OP|}{|PS|} = \frac{|QP|}{|PR|}.$$

Comme on a $|OP| = r$, $|PR| = \frac{h}{2}$, et qu'on convient de noter $|PS| = \bar{r}$, $|QP| = \frac{\ell}{2}$, la proportion établie s'écrit ainsi

$$\frac{r}{\bar{r}} = \frac{\ell}{h},$$

ou encore

$$rh = \bar{r}\ell,$$

ce qui entraîne

$$2\pi rh = 2\pi r\ell.$$

Par ailleurs, on peut montrer, comme on l'a fait pour l'aire latérale du cône, que l'aire latérale du cône tronqué s'écrit $2\pi\bar{r}\ell$. Ceci étant, comme l'aire latérale du cône tronqué approxime une tranche de l'aire de la sphère, on se convainc que l'aire de la sphère égale l'aire latérale du cylindre. D'où la conclusion suivante.

L'aire de la sphère de rayon r est égale à

$$S = 4\pi r^2.$$

Remarquons que ce résultat confirme la conjecture. Sa plausibilité est donc renforcée ainsi que la confiance qu'on peut avoir dans le nouveau type d'arguments utilisés ici et des intuitions qui sont derrière ces arguments.

La conclusion suivante s'appuie sur la Conclusion 2 de la section 2.3 et elle termine cette section.

CONCLUSION

Le rapport de l'aire de la sphère et de l'aire totale du cylindre circonscrit à la sphère est égal au rapport de leurs volumes et ce rapport est égal à $\frac{2}{3}$.

5 Les moyens élémentaires d'étude des aires et des volumes

Réévoquons pour conclure quelques approches qui suffisent pour construire une première théorie des notions d'aire et de volume. On remarquera que le principe de CAVALIERI pour les aires planes n'est pas relevé ci-dessous, car il n'est pas indispensable. Pour la classe des figures élémentaires planes étudiées habituellement, on suppose vraies les propriétés suivantes.

Propriétés d'équidécomposabilité.

- Si une figure en contient une autre, alors la figure qui est constituée de leur différence a pour aire la différence des aires de ces deux figures.
- Deux figures isométriques (superposables) sont de même aire (propriété de congruence).
- Si on compose sans recouvrement une figure avec un nombre fini de figures données, alors son aire est égale à la somme des aires des composantes.

Pour mesurer des aires, on s'appuie en outre sur les propriétés suivantes.

Mesure des aires.

- L'aire d'un rectangle de base b et de hauteur h est égale à $b \times h$.
- L'aire d'un polygone peut être mesurée à l'aide d'une surface unitaire, comme par exemple un carré.
- La mesure d'une aire, en fonction de l'unité choisie, est un nombre positif (la mesure des aires est non négative).

En plus des propriétés ci-dessus, on recourt à des passages à la limite intuitifs, principalement pour les aires délimitées par des courbes et qui ne sont pas équidécomposables avec des polygones. Ces passages à la limite portent sur des suites d'aires polygonales.

Venons-en maintenant aux volumes. Les principes suivants suffisent pour construire une première théorie des volumes. On remarquera que le principe de CAVALIERI permet de ne pas recourir aux congruences des solides et qu'il court-circuite aussi les passages à la limite.

Pour la classe des solides élémentaires étudiés habituellement, on suppose vraies les propriétés suivantes.

Propriétés d'équidécomposabilité.

- Si un solide contient un autre solide, alors le solide qui est constitué de leur différence a pour volume la différence des volumes de ces deux solides.
- Si un solide est composé par la réunion d'un nombre fini de solides disjoints deux à deux, alors son volume est égal à la somme des volumes qui le composent.

Mesure des volumes.

- Le volume d'un parallélépipède droit de base B et de hauteur h est égal à Bh .
- Le nombre associé à un volume, en fonction de l'unité choisie, est un nombre positif (la mesure de volume est non-négative).

À ce lot de propriétés, on ajoute le principe de CAVALIERI qui permet d'amener le problème de calcul des volumes à celui des aires. Il est formulé ici d'une manière plus générale :

- Considérons deux solides et tous les plans perpendiculaires à une droite donnée. Si toute section plane d'un des solides par un de ces plans est plus petite que la section par le même plan de l'autre solide, alors le volume du premier solide est plus petit que le volume du second.

APOSTOL [1967] formule des propriétés analogues et il les considère comme axiomes pour définir le concept d'aire et le concept de volume. C'est en s'appuyant sur ces propriétés qu'il met en place le calcul intégral des aires et des volumes.

MONTER ET DÉMONT(R)ER EN GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

1 Introduction

Le sentiment exprimé dans ce passage de votre lettre où vous me dites
« plus je réfléchis sur toutes ces choses, plus je reconnais que les mathématiques forment une science expérimentale aussi bien que toutes les autres sciences ... » ce sentiment, dis-je, est aussi le mien.

C. HERMITE¹

Ce texte résume les principales étapes d'un cours de géométrie dans l'espace destiné à des élèves de 16 à 18 ans. Son originalité réside dans le rôle qu'y joue la *réalisation* de figures géométriques à trois dimensions à l'aide d'un *jeu de construction*.

L'apprentissage de la géométrie dans l'espace

Dans l'apprentissage de la géométrie dans l'espace, trois types d'activités sont essentielles :

- des activités d'expérimentation, où l'élève construit, manipule et explore de véritables objets à trois dimensions ;
- des activités de représentation, où l'élève traduit ses observations et ses hypothèses en termes de figures planes ;
- des activités de structuration, où l'élève organise ses résultats en schémas déductifs.

Bien sûr, lorsqu'un élève résout un problème de géométrie, ces activités ne se succèdent pas dans l'ordre où on vient de les décrire ; au contraire, elles se mélangent, se bousculent, s'opposent même, et ne manquent pas de se reproduire plusieurs fois, dans un désordre apparent. Mais aucun de ces types d'activités ne peut être négligé dans un apprentissage sérieux

¹ Mathématicien français (1822-1901), à qui l'on doit des contributions remarquables en analyse et en algèbre, entre autres une formule de résolution générale de l'équation du cinquième degré, la démonstration de la transcendance du nombre e , etc. Suivant le témoignage de J. Hadamard, qui fût son élève, il semble qu'Hermite détestait la géométrie... La citation est extraite d'une lettre à L. Königsberger, datée de 1880.

de la géométrie dans l'espace. À terme, on peut d'ailleurs concevoir qu'un élève « voit dans l'espace » lorsqu'il est capable de coordonner (de manière consciente) ses expériences concrètes concernant les figures de l'espace, ses représentations de ces figures, et les hypothèses et les raisonnements qu'il leur associe.

Monter et démonter...

Ce texte propose un ensemble de situations qui mettent en scène cette coordination des trois types d'activités, en insistant tout particulièrement sur le rôle de l'expérimentation, c'est-à-dire de la réalisation effective de maquettes associées à un problème géométrique donné. Cette expérimentation est ici rendue possible grâce à un jeu de construction appelé K'NEX®. Dans un contexte d'enseignement, les avantages qu'offre ce jeu méritent qu'on les détaille un peu :

- le montage et le démontage des objets sont faciles, les objets sont néanmoins bien rigides et résistants, très maniables, et ils peuvent évoluer et être modifiés suivant les besoins de la question qu'ils mettent en scène ;
- les grandeurs qui caractérisent les composants sont simples (les longueurs sont choisies dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1, et les angles sont multiples de 45°), on peut réaliser des mesures sur une maquette, et plusieurs tailles ou couleurs d'objets sont envisageables ;
- ces contraintes de longueurs et d'angles sont aussi sources de développements intéressants (si tous les angles sont multiples de 45° , on dispose de pièces permettant de réaliser des assemblages sous un angle dièdre de 90° , d'où la possibilité de construire de nouveaux angles, ...), de plus on dispose de rotules qui, avec un peu d'ingéniosité, rendent possible la construction de n'importe quel angle, plan ou dièdre, etc.

Ces multiples caractéristiques sont mises en valeur dans la résolution des problèmes retenus ici.

Mais malgré toutes ces qualités, il ne faut pas croire que le recours à K'NEX® soit la seule manière de faire de la géométrie expérimentale. D'autres jeux de constructions géométriques existent² et peuvent rendre d'excellents services, et les pailles et les tuyaux de pipes, ainsi que les bandes de papier tressées ou les développements (pour les polyèdres), ... restent très profitables, et démocratiques de surcroît. Par ailleurs, un des objectifs d'un cours de géométrie dans l'espace consiste à apprendre aux élèves à se libérer des maquettes. Et en fait le dessin, et même le raisonnement formel à lui tout seul, devraient permettre à l'élève de réaliser à *terme* toutes les expériences dont il rêve !

² *VOLUMES À CONSTRUIRE* chez Fernand Nathan, *POLYDRON* de Polydron International, *MULTIPOLY* chez Philip and Stacey, etc. Mais ces jeux sont en général orientés vers la construction de polyèdres, et semblent moins polyvalents que K'NEX®.

... prépare à démontrer

Aborder la géométrie dans l'espace au départ de constructions effectives d'objets peut induire des développements théoriques qui s'écartent un peu des sentiers battus.

Par exemple, la plupart des constructions réalisables en K'NEX® sont dérivées de la géométrie du cube. Ces constructions amènent progressivement l'élève à étudier des figures de plus en plus élaborées *relativement* à certaines autres figures plus élémentaires, considérées comme *figures de référence*, telles que le cube. Elles servent effectivement de référence tant pour la représentation plane que pour le raisonnement déductif : une figure un peu complexe, mais inscrite dans une autre figure bien connue, s'imagine et se conçoit mieux, et ses propriétés, d'abord dissimulées, se découvrent ensuite à partir de celles de la figure-mère.

Monter – et démonter ! – des objets réels contribue donc à les faire voir d'une autre manière, précisément parce qu'on les a conçus et construits : on les connaît quasiment « de l'intérieur ». Et si on veut poursuivre dans cette manière de voir et de faire de la géométrie dans l'espace, il est presque naturel de ne pas attacher une présentation traditionnelle des résultats théoriques à des expériences qui ne peuvent la produire qu'indirectement.

Ainsi, les axiomes fondamentaux de la géométrie dans l'espace sont habituellement énoncés en termes d'objets premiers, non définis, et illimités³, tels que les droites et les plans. Or, dès qu'on travaille sur des constructions réelles ou sur leurs représentations, les figures *limitées* (telles que segments, triangles, quadrilatères, ...) sont bien plus naturelles que les figures illimitées. Y a-t-il moyen de construire des synthèses théoriques en privilégiant autant que possible de telles figures limitées ? Il semble bien que oui, et on verra que ce mode d'approche suggère des problématiques inattendues et intéressantes.

D'autre part, l'observation de maquettes et l'étude des problèmes qui s'y rapportent mettent en évidence des hypothèses de travail ou des propriétés pour lesquelles la nécessité d'une démonstration ne s'impose pas d'emblée. Ainsi un cube regorge de rectangles « évidents » au sens où il ne semble pas nécessaire de prouver tout de suite qu'il s'agit bien de rectangles. En mathématiques, il est essentiel que de telles évidences ne soient pas passées sous silence, mais bien reconnues et *formulées* explicitement comme hypothèses de travail, leur statut pouvant alors être remis en question ultérieurement au fur et à mesure des besoins. Ces hypothèses de travail reconnues comme telles sont qualifiées ici de *principes*. Une bonne part de ce qu'il s'agit de réaliser dans une synthèse théorique consiste donc d'abord à mettre ces principes judicieusement à jour et à les exploiter, puis, pas à pas, à les faire dériver d'un nombre de plus en plus restreint de principes premiers et de propriétés démontrées. Une reconstruction par élagages successifs demande peut-être plus de temps que les exposés classiques, mais elle met inmanquablement en valeur une raison d'être majeure d'une théorie mathématique.

³ À l'exception évidemment des points !

Des questions hors de propos ?

Lorsqu'un enseignant organise son cours au départ de situations-problèmes, il doit savoir qu'il rencontrera des questions auxquelles ni ses élèves, ni lui-même peut-être n'arriveront à répondre, et que ce n'est pas nécessairement l'indice d'un défaut de préparation ou d'un échec, bien au contraire.

Il existe une tendance naturelle dans l'enseignement des mathématiques à suivre l'ordre logique et à expliquer toutes les techniques et toutes les réponses, avant de soulever les questions et de considérer les exemples, en supposant que les étudiants auront ainsi à leur disposition toutes les connaissances utiles pour y répondre le moment venu.

Il vaut mieux parsemer le cours de questions intéressantes et mystérieuses, et d'exemples inexplicables, même si les étudiants, les professeurs ou qui que ce soit, n'est pas près d'y répondre. Le meilleur ordre psychologique d'apprentissage pour un sujet de mathématiques est bien souvent très différent de l'ordre strictement logique. En tant que mathématicien, nous savons que les questions sans réponses ne connaîtront jamais de fin. Au contraire, les étudiants conçoivent généralement les mathématiques comme une nourriture prête à être consommée, et qu'il leur faudra digérer en conséquence.

Il nous faudrait présenter les mathématiques à nos étudiants d'une manière qui soit, à la fois plus intéressante et plus proche des situations réelles que les étudiants rencontreront dans la suite de leur existence, à savoir *sans réponse assurée*.

W. P. THURSTON⁴

La construction de maquettes (avec les contraintes propres à un jeu tel que K'NEX®), et les questions étudiées dans le texte, suggéreront souvent de *nouvelles* questions pour lesquelles les éléments de réponses ne seront pas (encore) disponibles, ou même carrément difficiles. Ces questions « hors de propos » n'en sont pas moins passionnantes ! Quelques-unes sont relevées dans le texte et brièvement discutées. Leur statut est celui de *prolongements possibles*, à revisiter plus tard, ou tout simplement de questions dont la vocation est de rester ouvertes. Évidemment, ces questions ne sont ni obligatoires, ni même appropriées à tous les élèves, et leur liste est naturellement incomplète. Elles ne sont mentionnées que pour renforcer cette ambiance d'une géométrie en train de se découvrir, de se faire ...

Juste pour voir !

Ce texte est donc une proposition d'enseignement de la géométrie *dans certaines figures fondamentales de l'espace*, fondée sur la construction effective de ces figures (le cube étant la plus simple d'entre elles) et des figures apparentées ou dérivées ; elle est bien *fondée* ainsi, au sens où les activités d'expérimentation *conditionnent* les activités de représentation et de structuration ultérieures.

⁴ Mathématicien américain contemporain (1946 – ...), spécialiste de la géométrie en dimensions 2 et 3. La citation est un extrait (traduit) de *Mathematical Education* — Notices of the American Mathematical Society, 37 (1990), 844-850.

Évidemment, cette proposition n'achève en aucune manière l'enseignement de la géométrie dans l'espace : il reste d'autres portes à ouvrir, mais leurs charnières ne devraient plus trop grincer ! Ainsi, la *géométrie synthétique classique* étudie dès le début des objets plus abstraits que le cube, et structure leurs propriétés de manière plus exigeante (par exemple le parallélisme vient avant la perpendicularité, ...). Et ce mode de pensée est tellement performant qu'il n'est pas souhaitable de le négliger. Mais ce sera d'autant plus facile que la géométrie dans des figures (limitées) a été conçue comme une première approche des problèmes et des modes de raisonnement de la géométrie synthétique classique. Parallèlement, la *géométrie vectorielle* et la *géométrie algébrique des coordonnées et des équations* sont des disciplines qui se construisent tout de suite en termes de figures limitées de l'espace : le segment et le parallélogramme pour la géométrie vectorielle, le cube ou le prisme pour la géométrie des coordonnées et des équations. Et presque de par leur nature même, ces deux géométries sont inséparables l'une de l'autre, puisque tout prisme est un assemblage particulier de parallélogrammes. Encore une fois, la géométrie dans des figures (limitées) de l'espace prépare à de tels développements.

Et pour conclure, le contenu et l'objectif majeur de ce texte peuvent peut-être se résumer en une boutade : il ne s'agit que d'un essai, d'un exercice d'une ampleur inhabituelle, dans lequel on se risque à penser la géométrie un peu différemment, ... *juste pour voir* !

Avertissement

Les problèmes considérés dans la suite ne visent que les aspects les plus élémentaires de la géométrie dans l'espace (incidence, sections planes, débuts de la perpendicularité et du parallélisme), avec les synthèses et développements théoriques qui s'y rattachent ; d'autres sujets restent à aborder (méthodes synthétiques usuelles, transformations) ou l'ont déjà été (méthodes vectorielles ou algébriques), ailleurs ou partiellement, cf. G. Noël et al. [1997] et P. Tilleuil [2001]. Le texte se limite à l'essentiel, tant pour les activités d'expérimentation que pour celles de représentation et de structuration, sans détailler tous les développements méthodologiques auxquels ces activités peuvent donner lieu. Mais tout enseignant un peu sensible à l'apprentissage de la géométrie dans l'espace n'aura aucune peine à « boucher les trous »...

2 Les premières maquettes

De quoi s'agit-il ?

Les élèves construisent d'abord un cube à l'aide de pièces du jeu K'NEX®, et le représentent en projection parallèle. Ils construisent et représentent ensuite quelques pyramides et un octaèdre régulier.

Enjeux

Construire une figure à partir d'une figure-mère (le cube) ; découvrir et utiliser (pour reproduire un schéma de montage ou un dessin) quelques symétries d'une figure de l'espace.

De quoi a-t-on besoin ?

Certaines pièces du jeu K'NEX® ; la plupart d'entre elles sont reprises dans la figure 1 ci-dessous.

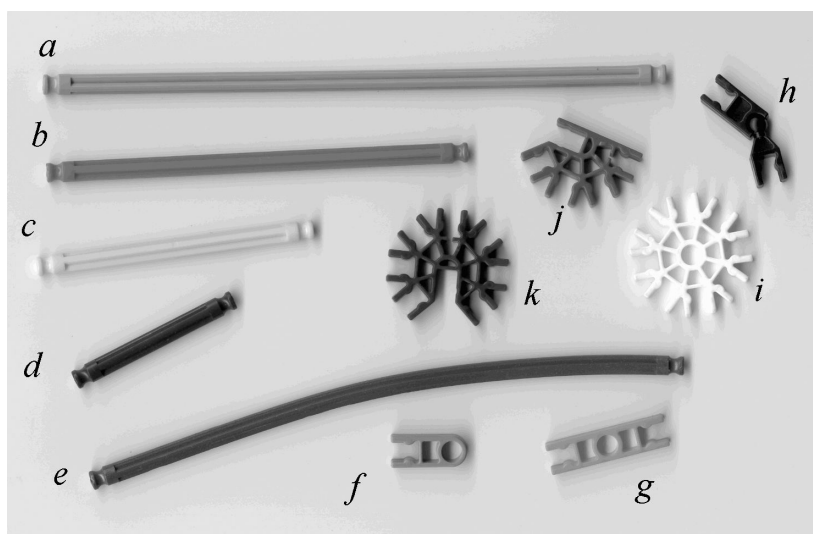


Fig. 1 : Quelques pièces utilisées dans ce chapitre.

Légendes de la figure 1 :

- a* : baguette, ou tige (grise), d'approximativement 19,2 cm ;
- b* : baguette, ou tige (rouge), d'approximativement 12,9 cm ;
- c* : baguette, ou tige (jaune), d'approximativement 8,5 cm ;
- d* : baguette, ou tige (bleu foncé), d'approximativement 5,4 cm ;
- e* : baguette, ou tige (mauve), pliable, d'approximativement 18,8 cm ;
- f* : demi-jonction ;
- g* : jonction ;
- h* : rotule ;
- i* : étoile (complète) ;
- j* : demi-connecteur ;
- k* : connecteur complet.

Lorsqu'elles sont engagées dans des jonctions ou des connecteurs, les tiges sont successivement dans des rapports de $\sqrt{2}$ à 1.

2.1 La construction d'un cube

Comment s'y prendre ?

L'observation des maquettes (grues, voitures, ...) dans les boîtes de jeux K'NEX® montre immédiatement qu'il y a moyen de construire des objets à 3 dimensions.

Question 1.

Comment construire un cube en K'NEX® ?

Un assemblage fondamental

Cette activité est l'occasion de découvrir une des principales méthodes d'assemblage du jeu. On dispose pour cela de deux types d'éléments : le *connecteur complet* et le *demi-connecteur* (cf. les figures 2 et 3).

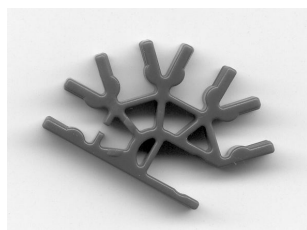


Fig. 2 : Un demi-connecteur.



Fig. 3 : Un connecteur complet.

Ces types de connecteurs peuvent s'emboîter l'un dans l'autre suivant leur encoche libre. Suivant les besoins, on peut assembler ainsi deux connecteurs complets (cf. la figure 4), un connecteur complet avec un demi-connecteur, ou deux demi-connecteurs.

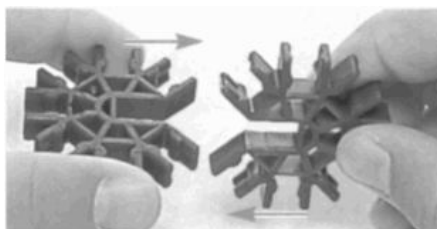


Fig. 4 : Assemblage de deux connecteurs complets.

Le résultat est une configuration où des angles multiples de 45° sont disponibles suivant deux plans perpendiculaires (cf. la figure 5).



Fig. 5 : Divers types de connecteurs, assemblés à 90° .

La construction d'un cube

La construction d'un cube est évidemment le B, A, BA de la construction de maquettes, et doit être réalisée par tous les élèves.

L'idée à la base de cette construction – et qui peut se généraliser pour la construction de la plupart des polyèdres – consiste à organiser le travail à partir de la disposition des angles adjacents en un sommet quelconque du cube. Comme il s'agit d'un assemblage de 3 angles droits adjacents deux-à-deux, il faut donc disposer en chaque sommet du cube d'un assemblage de connecteurs tels que celui décrit ci-dessus.

Dès lors, pour construire un cube en K'NEX[®], il faut disposer de 12 baguettes de même longueur (donc de même couleur) pour les arêtes, et de 2×8 connecteurs (des demi-connecteurs ou des connecteurs complets conviennent pareillement), puisqu'un cube comporte 8 assemblages de 3 angles droits adjacents deux-à-deux (un par sommet).

En géométrie dans l'espace, l'assemblage de 3 angles droits adjacents deux à deux est souvent appelé un *trièdre trirectangle* ou plus simplement un *trièdre droit*.

La représentation d'un cube

La représentation d'un cube en projection parallèle est classique, et (théoriquement !) connue des élèves. Mais comme la grande majorité des dessins ultérieurs seront réalisés au départ du cube considéré comme « figure-mère », il convient de vérifier dès le début que les élèves ne rencontrent pas de difficultés à représenter un cube en projection parallèle (sinon, cf. par exemple le chapitre 7 de CREM [2001b]).

Lorsque les élèves réalisent leurs dessins sur des feuilles quadrillées, il peut être commode de partir de données communes à tous. Or, la projection parallèle d'un cube est entièrement déterminée par les coordonnées (planes) des projections A , B , C et D de 4 sommets du cube en configuration de trièdre droit. Par exemple, si dans la figure 6, l'origine est située en O et la feuille est quadrillée au demi-centimètre, et si

- les coordonnées du point A sont $(2; 2)$,
- les coordonnées du point B sont $(12; 2)$,
- les coordonnées du point C sont $(5; 4)$,
- les coordonnées du point D sont $(2; 12)$,

on obtient une représentation d'un cube de 10 cm de côté avec deux faces parallèles en vraie grandeur (cf. la figure 7).

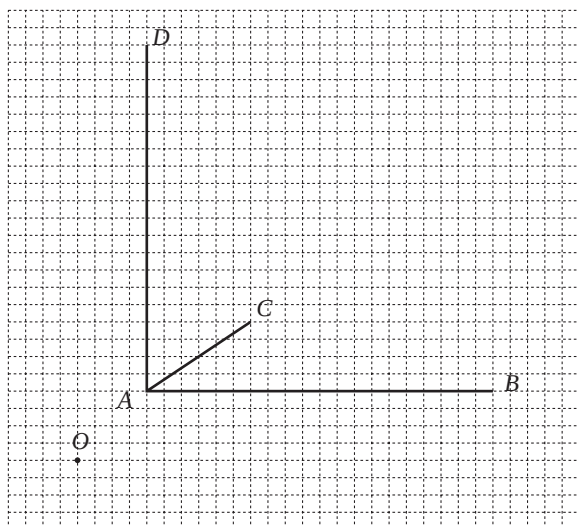


Fig. 6 : Une grille de construction...

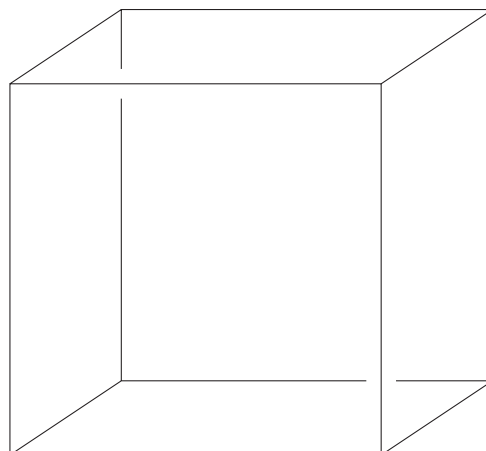


Fig. 7 : ... et le résultat.

Pareillement, si

- les coordonnées du point A sont $(4; 4)$,
- les coordonnées du point B sont $(12; 1, 5)$,
- les coordonnées du point C sont $(10; 8, 5)$,
- les coordonnées du point D sont $(4; 14)$,

on obtient une représentation du même cube avec seulement 4 arêtes parallèles en vraie grandeur : cf. les figures 8 et 9.

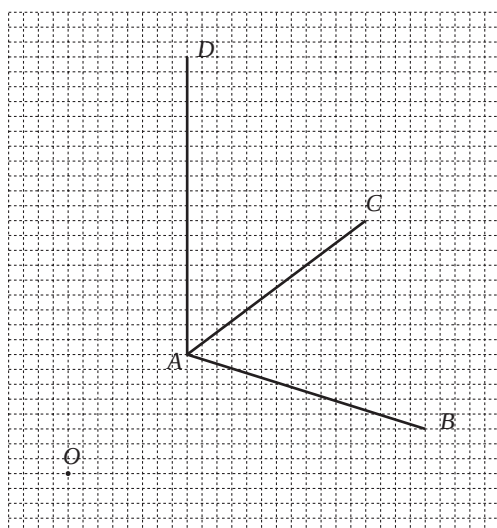


Fig. 8 : Une autre grille de construction...

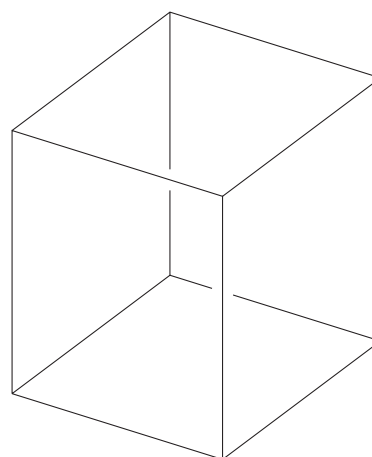


Fig. 9 : ... et le résultat.

En réalisant ces dessins, on observera qu'une telle représentation plane au départ d'un trièdre droit donné s'obtient exactement suivant le même

« schéma de montage » que celui du cube en K'NEX[®] : il suffit de reproduire le modèle de trièdre aux bons endroits et dans l'orientation appropriée !

2.2 Il n'y a pas que le cube...

Comment s'y prendre ?

Avec les pièces de K'NEX[®], il y a moyen de construire beaucoup de figures qui ne sont pas des cubes. Dans un premier temps, il vaut peut-être mieux ne pas se lancer dans une exploration systématique de *toutes* les possibilités de construction de figures que le jeu permet de développer. On se limite ici à quelques figures de base, qui vont aider à assimiler les techniques de construction, et à préparer des situations dont l'intérêt se révélera progressivement dans la suite.

Question 2.

Comment construire en K'NEX[®] :

- une (et même plusieurs) pyramide(s),
- une pyramide dont toutes les arêtes ont même longueur ?

Représenter ces figures, en précisant comment elles dérivent d'un cube.

Il est difficile de prévoir dans quel *ordre* la construction de pyramides peut se dérouler en classe. Ce qui suit n'a donc qu'un caractère... d'illustration !

Un angle inattendu

Dans un cube en K'NEX[®], on peut construire les diagonales consécutives de faces carrées adjacentes, puisque le rapport des longueurs des baguettes (une fois assemblées) est de $\sqrt{2}$ à 1. Mais cela peut demander qu'on modifie l'orientation des connecteurs là où les diagonales en question doivent se rejoindre ; ces manipulations sont faciles à mettre en œuvre. On obtient ainsi une *pyramide trirectangle* (figure 10).

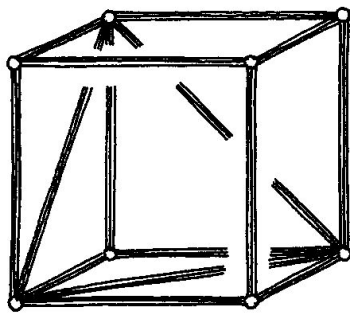


Fig. 10 : Une pyramide trirectangle dans un cube.

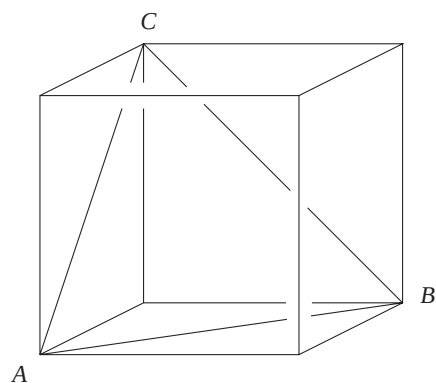


Fig. 11 : Le triangle équilatéral manifeste.

Cette construction est remarquable : elle fait apparaître un triangle équilatéral *manifeste* et *inattendu* !

En effet, le triangle ABC dans la figure 11 est manifestement équilatéral, puisque toutes les faces du cube étant isométriques, leurs diagonales sont évidemment *aussi* isométriques.

Mais de prime abord, il est assez inattendu de construire des angles de 60° à partir de l'assemblage de pièces déclinées chacune en multiples de 45° ; on se risquerait presque à écrire

$$45^\circ \ll + \gg 45^\circ = 60^\circ.$$

Le « truc », c'est que l'angle de 60° ainsi construit n'est situé dans aucun des plans des connecteurs qui permettent de le construire, ce que l'insertion dans le cube fait voir immédiatement. Autrement dit, dans la pseudo-égalité $45^\circ \ll + \gg 45^\circ = 60^\circ$, chacun des angles est situé dans des plans différents de celui des deux autres !

Il est intéressant de désolidariser ensuite cette pyramide du cube qui a permis de la construire.

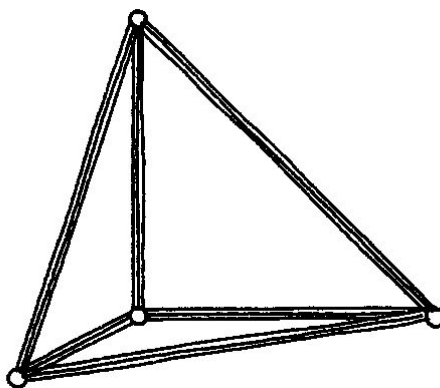


Fig. 12 : Une pyramide trirectangle sans son cube.

On obtient donc une pyramide à 4 faces (ou *tétraèdre*), dont 3 faces sont des triangles rectangles isocèles et 1 face est un triangle équilatéral. En ses 4 sommets, on observe respectivement 3 assemblages d'angles de 45° , 45° et 60° adjacents 2 à 2, et 1 assemblage en trièdre droit, hérité du cube original.

On peut alors proposer aux élèves de construire une pyramide trirectangle *sans* passer par la construction du cube « géniteur » (en ne leur fournissant que les pièces nécessaires à cette construction).

Deux grandes sœurs

Les élèves peuvent construire d'autres pyramides en K'NEX[®], soit en les inscrivant dans un ou plusieurs cubes, soit par assemblage de pyramides trirectangles, soit peut-être encore autrement ...

Par exemple, en assemblant 2 pyramides trirectangles suivant une de leurs faces en forme de triangle rectangle isocèle, on obtient une nouvelle pyramide à 4 faces (ou *tétraèdre*).

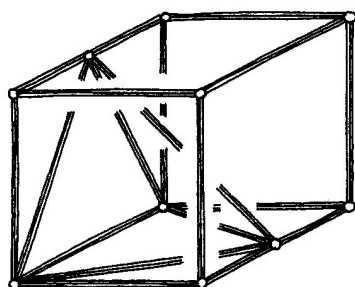


Fig. 13 : Une autre pyramide dans un double cube...

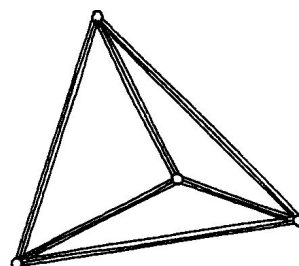


Fig. 14 : ... et sans son double cube.

Cette pyramide comporte 2 faces qui sont des triangles rectangles isocèles et 2 faces qui sont des triangles équilatéraux. En ses 4 sommets, on observe respectivement 2 assemblages d'angles de 45° , 45° et 60° adjacents 2 à 2, et 2 assemblages d'angles de 60° , 60° et 90° adjacents 2 à 2.

Pareillement, si on assemble 2 pyramides du type construit précédemment, suivant une de leurs faces en forme de triangle rectangle isocèle, on obtient encore une nouvelle pyramide, à 5 faces cette fois-ci. On obtient d'ailleurs la même figure en assemblant 4 pyramides trirectangle le long d'une même arête d'un angle droit. L'insertion de cette nouvelle pyramide dans un quadruple cube (qui est aussi le demi-cube de côté double) illustre ces modes de construction (cf. la figure 15).

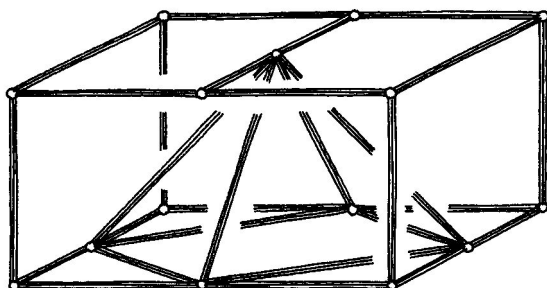


Fig. 15 : Une pyramide dans un demi-cube...

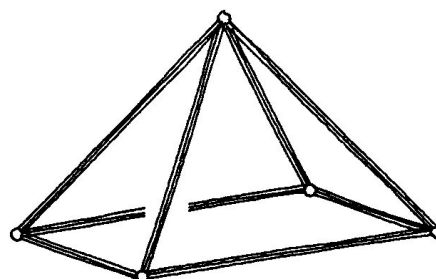


Fig. 16 : ... et sans le demi-cube.

Cette pyramide comporte 4 faces qui sont des triangles équilatéraux, et 1 face en forme de carré; toutes ses arêtes ont donc la même longueur. En ses 4 sommets, on observe respectivement 4 assemblages d'angles de 60° , 60° et 90° adjacents 2 à 2, et – pour la première fois ! – 1 assemblage de 4 angles de 60° adjacents 2 à 2.

Ici aussi, on peut proposer aux élèves de construire directement ces pyramides, sans passer par les intermédiaires cubiques qui ont permis de les engendrer.

La représentation de ces nouveaux objets

Elle se réalise au départ d'un réseau de cubes convenablement agencés, en transférant sur le dessin le schéma de montage mis en œuvre avec les pièces de K'NEX®. La figure 17 ci-dessous montre un exemple achevé d'une telle représentation, au départ de la grille de construction de la figure 8.

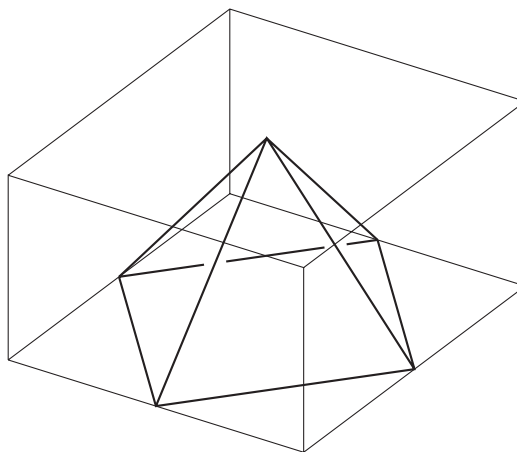


Fig. 17 : Une représentation plane d'une pyramide dont toutes les arêtes sont de même longueur.

Prolongement possible

PROBLÈME

Est-il possible de construire en K'NEX® d'autres pyramides que celles obtenues à l'issue de la question précédente ?

Quelques indications

C'est un problème élémentaire, mais un peu corsé, dans lequel les démonstrations sont essentiellement de nature combinatoire, puisqu'un nombre assez restreint – mais bien organisé – de vérifications permet d'en venir à bout !

Si on se limite aux pièces de type a, b, c, d (baguettes) et j, k (connecteurs) dans la figure 1, la réponse est-elle... oui, ou non ?

Voici quelques éléments permettant de le savoir.

- *Il n'y a pas moyen de construire avec ces pièces d'autres angles que les multiples entiers de 45° et de 60° . Pour s'en convaincre, il suffit de construire tous les angles issus d'un assemblage de deux connecteurs complets (cf. la figure 4).*
- *Les seuls triangles constructibles avec ces pièces sont les triangles rectangles isocèles et les triangles équilatéraux. C'est une conséquence immédiate du résultat précédent.*
- *Il n'y a pas moyen de construire avec ces pièces une configuration de 3 angles de 60° adjacents 2 à 2. Il suffit – à nouveau – de construire toutes les configurations de 3 angles adjacents 2 à 2, issus d'un assemblage de 2 connecteurs complets. On retrouve exclusivement les configurations déjà*

obtenues, à savoir : $(45^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$, $(60^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ et $(90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$; en particulier, la configuration $(45^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ se révèle impossible.

Par ailleurs, on a déjà eu l'occasion de vérifier qu'une configuration de 4 angles de 60° adjacents 2 à 2 est parfaitement réalisable avec les pièces retenues !

• Il n'y a donc que 2 types de tétraèdres constructibles avec les types de pièces choisis, et aucun n'est régulier ! ... Et ils ont déjà été construits.

• Qu'en est-il pour les pyramides dont la base est un polygone ayant plus que 3 côtés ? On pourrait espérer que de tels polygones sont toujours décomposables en triangles constructibles, mais c'est malheureusement faux : un rectangle dont les côtés sont dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1 fournit un contre-exemple, puisque l'angle d'une diagonale avec un côté n'est pas constructible.

À titre documentaire, la pyramide de base $ABCD$ représentée dans la figure ci-dessous, telle que $|AD| = |BC| = |BE| = |EC| = 2$ et $|AB| = |CD| = |AE| = |ED| = \sqrt{2}$ est « presque » constructible. « Presque », car toutes les longueurs conviennent, mais les 3 angles adjacents en B (ou en C) sont alors égaux à 45° , 60° et 90° , ce qui n'est pas constructible.

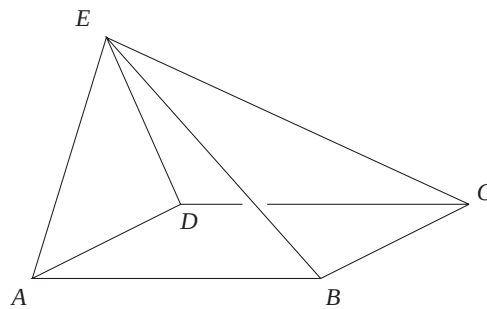


Fig. 18 : Cette pyramide n'existe pas ... en K'NEX.

Il reste donc à explorer toutes les pyramides dont la base est un polygone constructible avec les pièces retenues, et ayant au moins 4 et au plus 7 côtés. C'est une (petite) affaire de patience, qui achève de montrer pourquoi la réponse au problème posé est... oui, ou peut-être... non !?!

Question 3.

Comment construire un octaèdre régulier en K'NEX® ? Le représenter, en précisant comment il dérive d'un cube.

À ce stade des manipulations, une certaine habileté se développe et les solutions se dégagent vite.

Une étoile au cœur du cube

En assemblant deux des pyramides à 5 faces rencontrées dans la résolution de la question 2 suivant leur base carrée, on obtient l'octaèdre recherché. Il est formé de 8 triangles équilatéraux, et en chacun de ses 6 sommets, on observe le même assemblage de 4 angles de 60° adjacents 2 à 2.

Quelle que soit la manière dont on aborde cette construction, il faut essayer de la situer dans la suite des constructions précédentes et, ce faisant, on ne peut manquer de la situer relativement à un – ou plusieurs – cubes. Toutes les observations qu'on peut faire à cette occasion se résument dans la figure suivante. On construit un « grand » cube en y faisant figurer les deux médianes de chaque face carrée, ainsi que leur point d'intersection que l'on réalise par l'assemblage de deux connecteurs complets. On relie ensuite entre eux ces points d'intersection, pourvu qu'ils soient situés dans des faces adjacentes du cube. L'octaèdre devient ainsi la figure qui réunit (agréablement) les centres de symétrie des faces du cube ; sans entrer dans une définition technique, on peut dire que l'octaèdre est ainsi réalisé en tant que polyèdre *dual* du cube.

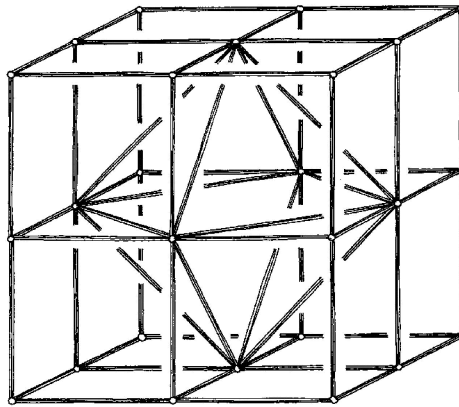


Fig. 19 : Une construction d'un octaèdre comme dual du cube.

Une représentation plane de l'octaèdre

Partant de cette dernière construction, il n'y a plus de grande difficulté à réaliser une représentation plane de l'octaèdre. La figure 20 ci-dessous montre une telle représentation, au départ de la grille de construction de la figure 8 ; ce n'est bien sûr que le « double » de la figure 17.

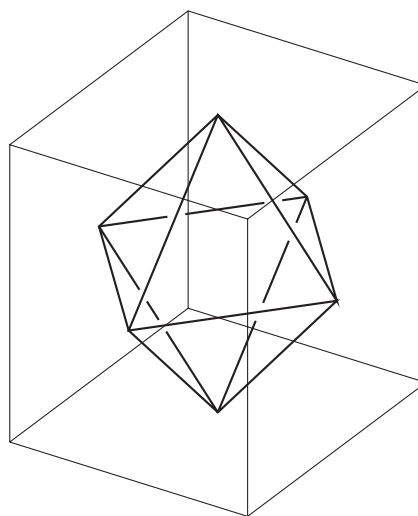


Fig. 20 : Une projection parallèle d'un octaèdre.

Prolongement possible

PROBLÈME

Lorsqu'on réalise un octaèdre comme polyèdre dual d'un cube, il « tient debout » parce que le cube qui permet de le construire est posé sur une de ses bases carrées. Sans ce cube, l'octaèdre ne tient évidemment pas tout seul en équilibre sur un de ses sommets. Comment représenter l'octaèdre naturellement, c'est-à-dire posé sur une de ses *faces* ?

Quelques indications

La première chose qui saute aux yeux, lorsqu'on pose l'octaèdre sur une de ses faces, c'est que la face opposée lui est parallèle et ensuite, qu'elle semble être dans la position de la face « au sol », *mais après une rotation de 60°* ! On reviendra plus loin sur tout ce qui peut encore être décrit et déduit de l'observation de cette position particulière⁵, mais – pour le moment – comment ces observations aident-elles à *représenter* l'octaèdre ainsi posé sur une de ses faces ?

Ce n'est pas immédiat : en effet, lorsqu'on a posé l'octaèdre de cette manière, son « cube-mère » a accompagné le mouvement, et n'est plus du tout aussi utilement situé qu'auparavant ! En fait, il n'y a plus de cube immédiatement utile pour réaliser le dessin souhaité. Il faut donc chercher à représenter directement des triangles équilatéraux en projection parallèle et calculer (que faire d'autre ?) la distance qui sépare les faces opposées de l'octaèdre. À titre documentaire, le théorème de Pythagore permet de calculer cette distance δ en fonction – par exemple – de la longueur c du côté, ou du rayon R du cercle circonscrit à un des triangles équilatéraux ; on trouve

$$\delta = c \frac{\sqrt{3}}{3} = R\sqrt{2}.$$

On peut en déduire un procédé de construction (peu glorieux) de l'octaèdre posé sur une face.

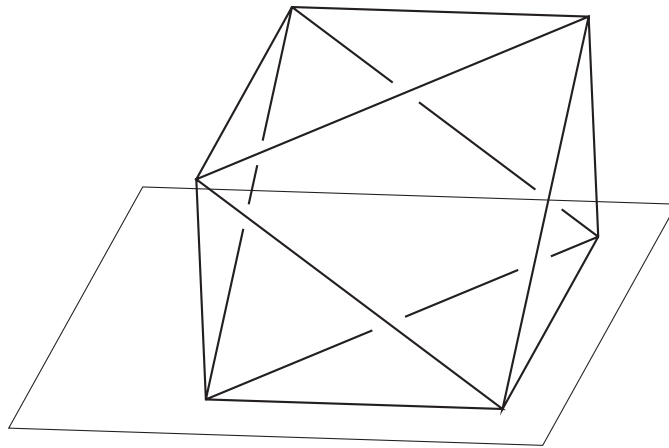


Fig. 21 : Une projection parallèle d'un octaèdre posé sur une face.

⁵ L'octaèdre est ainsi l'exemple le plus simple de ce qu'on appelle un *antiprisme* !

De très belles représentations de l'octaèdre dans cette situation ont été réalisées par Léonard de Vinci (cf. L. Pacioli [1509]) ; on en trouvera ci-dessous deux reproductions.

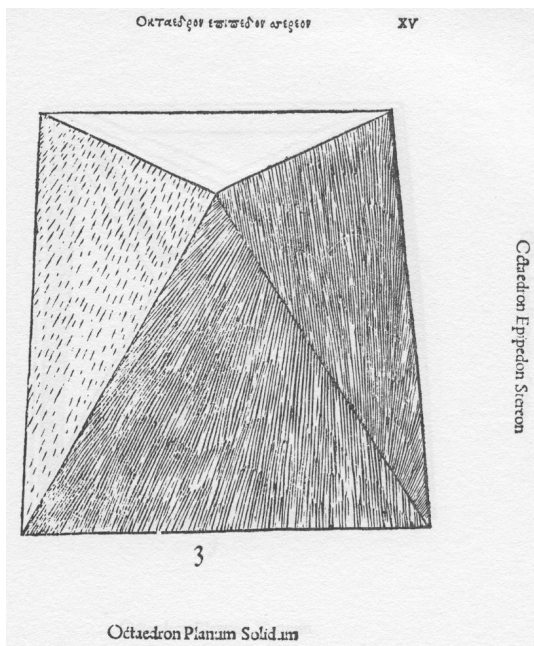


Fig. 22 : Un octaèdre plein posé sur une face.

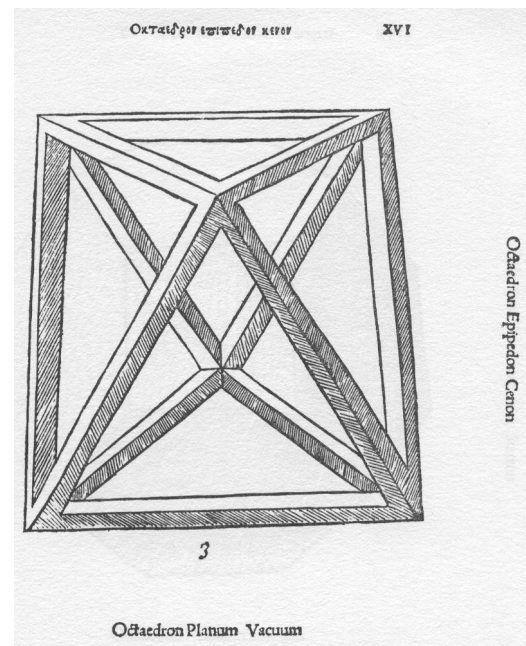


Fig. 23 : Un octaèdre creux posé sur une face.

Prolongement possible

PROBLÈME

Est-il possible de construire un tétraèdre régulier en K'NEX® ?

Quelques indications

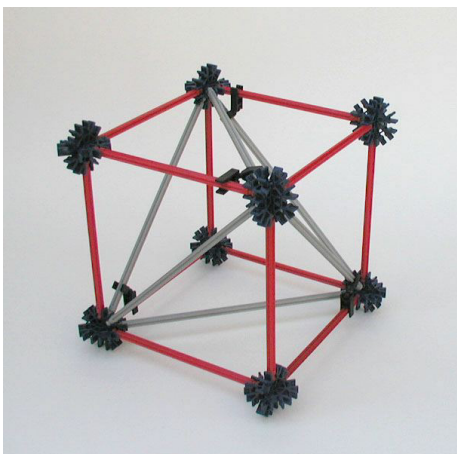


Fig. 24 : Un tétraèdre dans un cube.

Il est déjà acquis que c'est impossible avec les pièces de type a, b, c, d (baguettes) et j, k (connecteurs) de la figure 1. Mais si on dispose aussi de rotules (pièce de type h dans la même figure), cela ne présente plus grande difficulté, puisque les rotules permettent de construire n'importe quel angle dans n'importe quelle situation !

La manière la plus simple de procéder reste de partir d'un cube, et de former un tétraèdre à partir de 6 diagonales (une par face du cube) bien orientées, c'est-à-dire choisies de telle sorte qu'elles se rassemblent par groupe de 3 en 4 sommets bien choisis du cube ou encore, de manière équivalente, de telle sorte que les diagonales situées dans des faces opposées soient « tournées de 90° ».

Si, dans un cube suffisamment grand, on réalise ainsi *les deux seuls* tétraèdres *distincts* de ce type, on obtient une figure assez élaborée, appelée parfois *Stella Octangula*. On y visualise l'intersection des *diagonales* de chaque face du cube, et l'octaèdre, né de la dualité, devient ainsi vraiment l'étoile au cœur du cube.

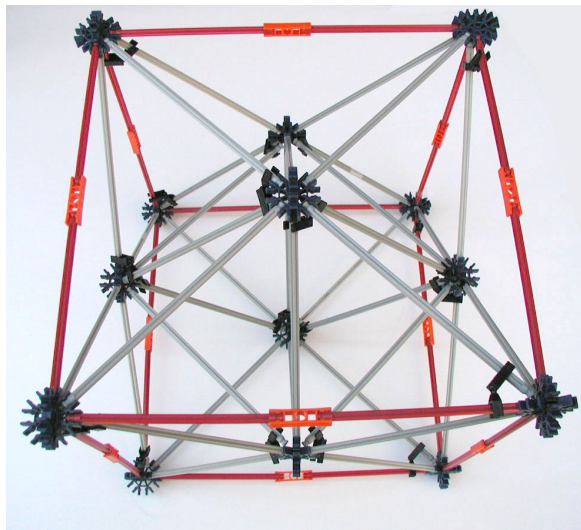


Fig. 25 : La Stella Octangula dans un cube.

Débarassée du cube qui l'a fait naître, l'étoile se révèle non-convexe.

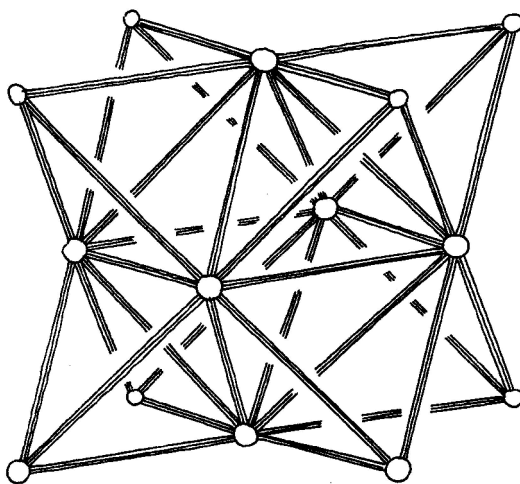


Fig. 26 : La Stella Octangula est un polyèdre non-convexe.

VERS LA THÉORIE DES GROUPES

Préambule

« ... Les élèves doivent avoir toutes les occasions de se familiariser avec un matériel géométrique riche, d'acquérir une connaissance sensorielle multiple : visuelle, tactile, rythmique. »

Ainsi s'exprimait Paul LIBOIS qui nous a montré comment travailler naturellement en compagnie de THALÈS, d'EUCLIDE et de GALILÉE (N. Lanciano et al. [1998]). La géométrie est une activité de la vie de tous les jours ; elle se perçoit en regardant, en observant, en touchant, en manipulant, ...

Pourquoi parler de groupes dans une étude qui traite de géométrie naturelle ?

Dans l'esprit de LIBOIS, la géométrie ne peut s'acquérir que de façon naturelle. Comme il nous l'a enseigné, nous allons tenter de montrer que même la notion de groupe, qui pourrait sembler abstraite, s'acquiert par la manipulation, le toucher, l'observation d'objets géométriques familiers.

LIBOIS disait encore : « S'il est vrai que l'"espace" est une "figure géométrique", figure prolongée dans toute son étendue, il est également vrai que chaque figure – suffisamment harmonieuse – devient un espace, et que le nombre d'espaces devient infini. » C'est dans ce même sens, dans ce qui suit, que nous utiliserons le mot « figure », qu'elle soit polygone ou polyèdre ; c'est un espace au sens large, c'est-à-dire un ensemble concrétisé, organisé, structuré (P. Libois [1966]).

Et lorsque nous parlons, par exemple, des permutations qui conservent globalement un cube, nous entendons par là des permutations d'un ensemble structuré métriquement, c'est-à-dire des isométries.

Le lecteur trouvera peut-être la première activité proposée trop simple et trop longue. Or elle poursuit de multiples buts. Non seulement elle vise à familiariser l'élève avec le concept de groupe, mais surtout à le convaincre que l'ensemble de toutes les permutations qui conservent une structure possède naturellement les propriétés qui en font un groupe. Les groupes sont nés dans le contexte des permutations et c'est pour cela qu'ils sont définis avec les propriétés qu'on leur connaît. L'établissement de la table n'est pas une finalité en soi. Il est bien plus fondamental de réaliser qu'à un même ensemble de points du plan (ou de l'espace) sont associés des

groupes différents selon la structure définie sur ces points. Ainsi, par exemple, le carré n'a pas le même groupe que le parallélogramme. Il est très important de se rendre compte que ce type d'étude rejoint celle proposée par KLEIN dans le *programme d'Erlangen* [1872], à savoir : « *Étant donnés une multiplicité¹ et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.* » C'est cela faire de la géométrie au sens moderne.

Cette première activité est aussi l'occasion de mettre en place des stratégies et une méthode qui vont permettre de découvrir des groupes d'isométries de figures plus complexes, pour lesquelles le risque est grand de ne pas recenser toutes les permutations voulues. Elle vise également à amener l'idée que c'est parce qu'il y a une structure de groupe qu'il est relativement simple d'opérer le recensement et d'être certain d'avoir identifié toutes les isométries cherchées. L'élève peut ainsi mesurer la puissance de l'outil groupe, qui devient alors tout autre chose qu'une simple définition dans un cahier.

1 Groupes diédriques

De quoi s'agit-il ?

À partir de manipulations de polygones (un carré, un pentagone, un hexagone), découvrir toutes les isométries qui conservent ces figures. Faire apparaître peu à peu une structure au sein de ces isométries.

Enjeux

Analyser en termes d'isométries des manipulations élémentaires de figures. Faire émerger le concept de *groupe* de manière naturelle.

Compétences

Organiser des propriétés d'un ensemble de figures en termes de structure de groupe.

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste : le rôle des structures dans l'élaboration théorique des mathématiques.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Du matériel de dessin.

Des photocopies sur transparents des documents fournis en annexe (fiches 15 à 19, aux pages 199 à 203).

Prérequis

Les notions de déplacement et d'antidéplacement, de symétrie orthogonale, de symétrie centrale et de rotation.

¹ C'est-à-dire un ensemble de points.

1.1 Les isométries du carré

*Comment s'y
prendre ?*

Le professeur fournit à chaque groupe d'élèves deux transparents : le premier (figure 1) représente un vitrail où le même motif est reproduit toujours dans le même sens, mais dont le carreau du milieu est absent.

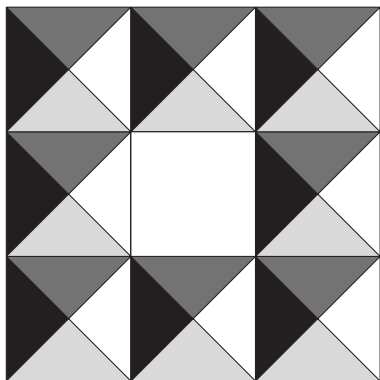


Fig. 1

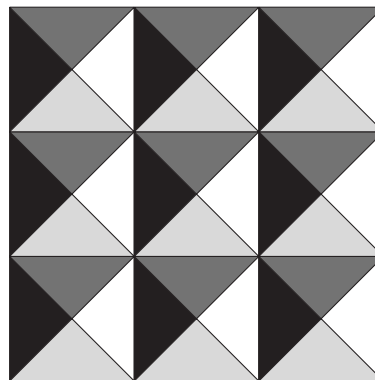


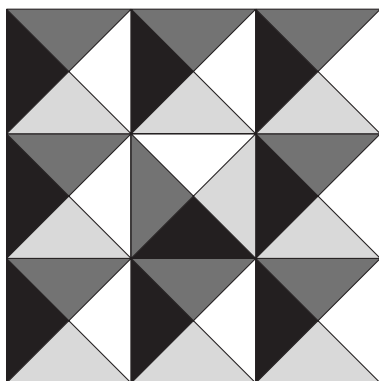
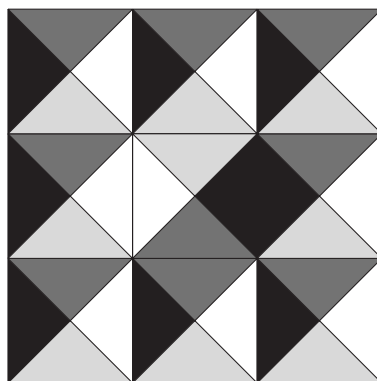
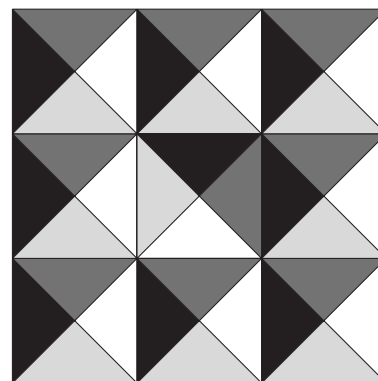
Fig. 2

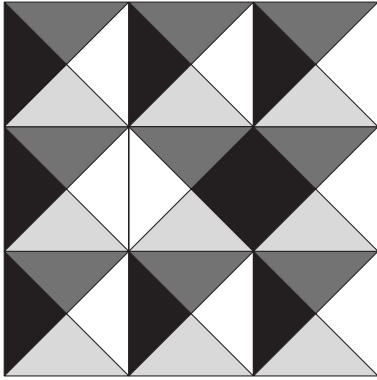
Le carreau du milieu se trouve sur un autre transparent, ce qui permet de reconstituer le vitrail complet, comme le montre la figure 2.

Ce deuxième transparent, obtenu par photocopie de la fiche 17 à la page 201, doit être découpé de manière à ne faire apparaître que le dessin du carreau central, l'intitulé de la fiche devant être éliminé pour éviter qu'il ne serve de repère.

Placer le carreau central dans différentes positions de manière à constituer d'autres vitraux, et déterminer le nombre de possibilités.

En partant de la position initiale où le vitrail présente les neuf carreaux dans la même position (figure 2), on obtient trois autres figures en faisant subir au transparent du carreau central une rotation d'un quart de tour dans le sens trigonométrique ($\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$), puis d'un demi-tour ($\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$), et enfin de trois quarts de tour ($\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$). Après quatre rotations d'un quart de tour, on a reconstitué la configuration initiale.

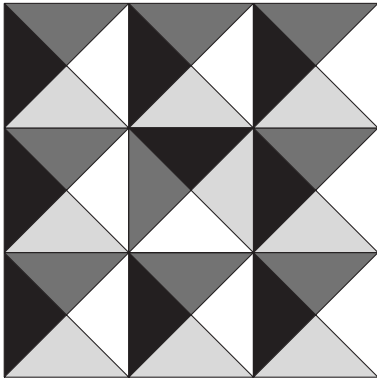
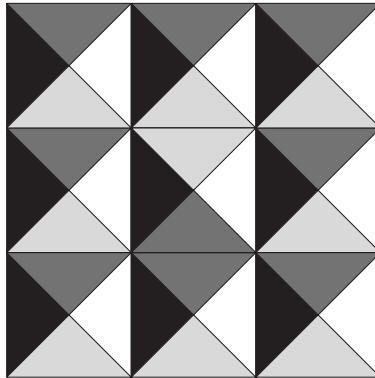
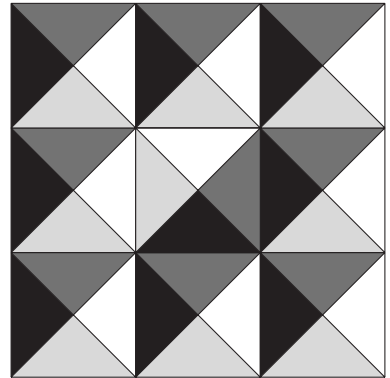
Fig. 3 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$ Fig. 4 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$ Fig. 5 : $\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$

Fig. 6 : S_1

Au départ de la même position initiale du vitrail mais en retournant le carreau central, on obtient une nouvelle configuration. Plaçons-nous dans l'hypothèse où ce retournement est celui qui produit le vitrail de la figure 6, il correspond à la symétrie par rapport à l'axe médian vertical (notée S_1). Si les élèves n'évoquent pas spontanément la possibilité de retourner le carreau, et si le transparent n'est pas retourné de manière fortuite au cours des manipulations, le professeur peut relancer la discussion en montrant la figure 6 et en posant une question supplémentaire.

Par quel mouvement du transparent peut-on obtenir cette figure ?

Après avoir retourné le transparent, on peut encore lui faire subir les rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour. Les vitraux ainsi obtenus sont illustrés par les figures 7, 8 et 9.

Fig. 7 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}} \circ S_1$ Fig. 8 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ S_1$ Fig. 9 : $\mathcal{R}_{\frac{3}{4}} \circ S_1$

Nous notons $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}} \circ S_1$ le mouvement composé de la rotation d'un quart de tour effectuée après le retournement S_1 . D'une manière générale, le symbole « $\circ$ » est celui de la composition de deux transformations, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ (« $\mathcal{T}_2$ après $\mathcal{T}_1$ ») étant le résultat de la composition² de la transformation $\mathcal{T}_1$ suivie de la transformation $\mathcal{T}_2$.

Pour faciliter le déroulement de la suite de l'activité, il est indispensable de garder dans la classe la trace de cette première expérience (figures 2 à 9). Ainsi, il sera toujours possible de comparer aisément les configurations obtenues par d'autres manipulations du carreau central avec les huit situations qui viennent d'être répertoriées.

² Les raisons qui font écrire la composition des transformations dans cet ordre sont analogues à celles qui dictent l'écriture de la composition des fonctions : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Récapitulons dans la figure 10 les huit façons de placer le carreau central du vitrail :

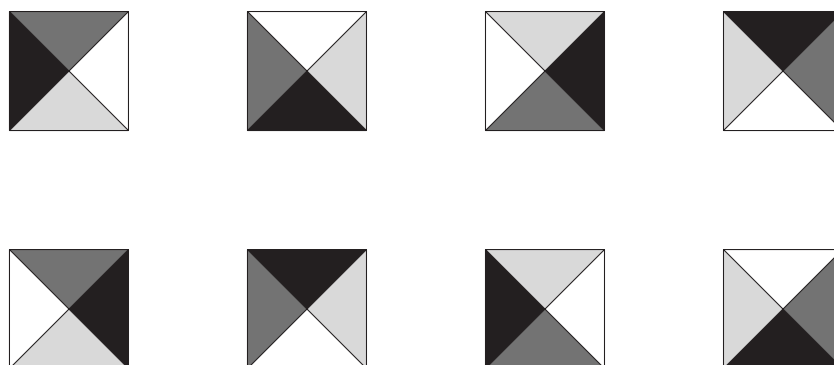


Fig. 10

Cette première approche met l'accent sur la comparaison entre la position initiale du carreau et sa position finale, celle dans laquelle il est remplacé. Chacune des sept positions obtenues à partir de la position initiale correspond cependant à un mouvement du carreau central dont nous gardons la trace (figures 3 à 9 avec leur légende).

Les élèves essaieront probablement de retourner le transparent d'une autre manière. Ils constateront, par exemple, que le retournement qui correspond à la symétrie par rapport à l'axe médian horizontal du carreau central initial produit le même vitrail que celui de la figure 8. D'autres tentatives produiront toujours un vitrail déjà obtenu.

À ce stade de l'activité, les manipulations du carreau central conduiront sans doute les élèves à évoquer les symétries du carré. Le professeur relance alors la réflexion en posant la question suivante, qui a également pour but d'organiser les comparaisons.

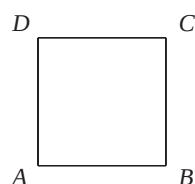


Fig. 11

Quelles sont les isométries qui appliquent le carré sur lui-même ? Peut-on établir une correspondance entre ces isométries et les positions du carreau central répertoriées ci-dessus ?

Le travail est de clarifier le lien entre les mouvements du carreau et les isométries du carré, sans les couleurs. Il s'agit donc bien d'un premier processus d'abstraction. Contrairement au carré, dont les sommets ne sont pas nommés, le carreau n'est jamais sa propre image par une des isométries répertoriées. Le rôle du carreau de vitrail est de permettre d'identifier les différents mouvements sans qu'il soit nécessaire de définir un codage pour désigner les sommets du carré.

Nous proposons de décrire chacune des isométries du carré, d'associer à chacune d'elles l'image du carré de la figure 11, et d'établir le lien avec les différentes façons de placer le carreau central du vitrail (figure 10).

Pour cela, notons

- A le coin « noir, gris-clair »,
- B le coin « gris-clair, blanc »,
- C le coin « blanc, gris-foncé »,
- D le coin « gris-foncé, noir »,

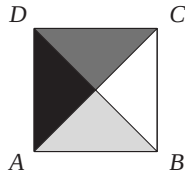


Fig. 12

du carreau du vitrail dans sa position initiale. Les élèves relèveront les rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour ainsi que la symétrie d'axe médian vertical qui ont déjà été évoquées lors des manipulations du carreau de vitrail.

Les figures 13 à 15 montrent, de gauche à droite, le carré dans sa position initiale avec son centre de rotation, l'image de ce carré par la rotation indiquée, le carreau de vitrail dans sa position initiale, et finalement l'image de ce carreau par cette même rotation.

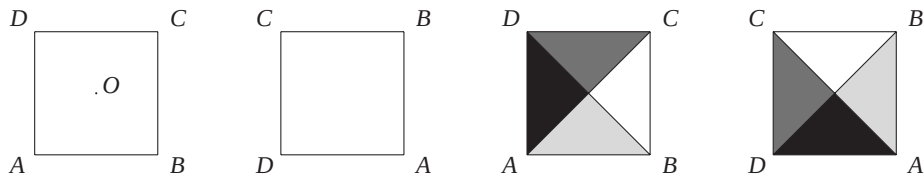


Fig. 13 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$

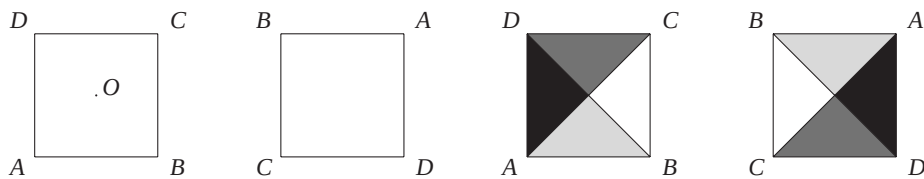


Fig. 14 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$

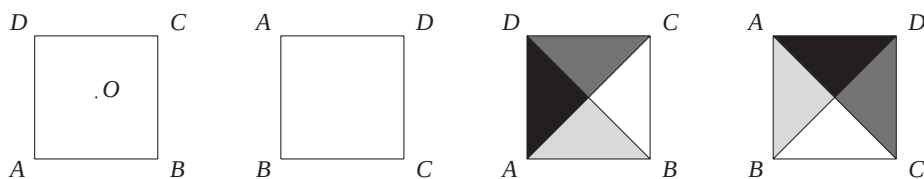


Fig. 15 : $\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$

Le carré est une figure suffisamment familière aux élèves pour que les axes de symétries leur apparaissent clairement : il s'agit des médianes et des diagonales, notées respectivement m_1 et m_2 , d_1 et d_2 (figure 16).

Il y a donc quatre symétries qui conservent le carré : en sélectionnant les axes à partir de m_1 dans l'ordre trigonométrique, nous notons :

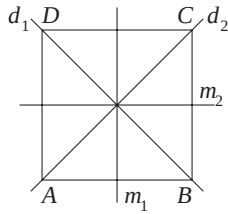


Fig. 16

- $\mathcal{S}_1$ la symétrie d'axe m_1 ,
 $\mathcal{S}_2$ la symétrie d'axe d_1 ,
 $\mathcal{S}_3$ la symétrie d'axe m_2 ,
 $\mathcal{S}_4$ la symétrie d'axe d_2 .

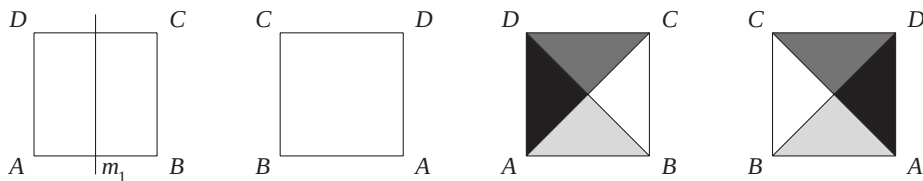
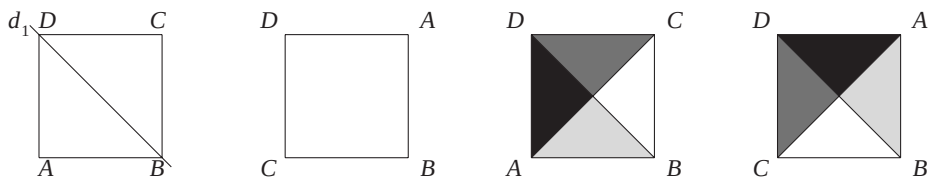
Ces différentes symétries auront sans doute déjà été évoquées lors des manipulations du carreau transparent. Certains élèves relèveront peut-être la symétrie centrale par rapport au centre du carré, mais cette symétrie est identique à la rotation d'un demi-tour. Nous préférons nous exprimer en termes de rotation et privilégier la notation $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$ à $\mathcal{S}_O$ pour désigner cette isométrie, car elle correspond au mouvement effectué avec le transparent. Par ailleurs, l'emploi du terme « symétrie » nous paraît source de confusion dans ce contexte, car il s'agit bien d'une rotation et donc d'un déplacement, contrairement aux symétries axiales qui sont des retournements du plan.

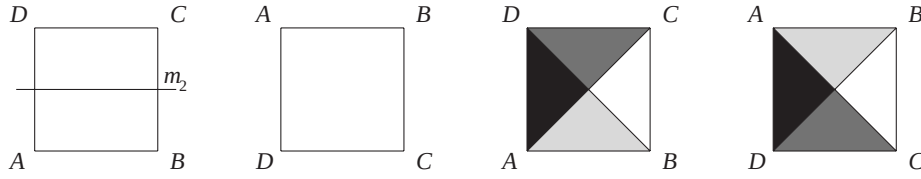
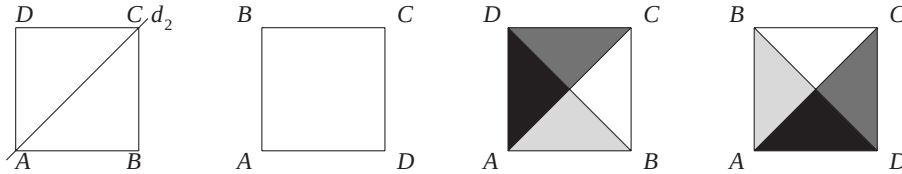
Nous trouvons donc sept transformations qui conservent le carré.

Si la symétrie $\mathcal{S}_1$ celle dont nous avons supposé au départ qu'elle avait été utilisée par les élèves, est clairement identifiée au retournement du transparent, il n'est pas certain que tous les élèves soient convaincus que les autres symétries qui viennent d'être mises en évidence sont identiques à des transformations du carré déjà décrites précédemment. Il s'agit donc à présent d'identifier chacune de ces symétries avec l'un des mouvements du carreau de vitrail.

Quels sont les mouvements du carreau de vitrail qui ont le même effet que les symétries $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$?

Les figures 17 à 20 montrent, de gauche à droite, le carré dans sa position initiale avec un axe de symétrie, l'image de ce carré par la symétrie dont l'axe est représenté, le carreau de vitrail dans sa position initiale, et finalement l'image de ce carreau par cette même symétrie.

Fig. 17 : $\mathcal{S}_1$ Fig. 18 : $\mathcal{S}_2 = \mathcal{R}_{\frac{1}{4}} \circ \mathcal{S}_1$

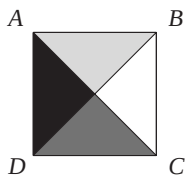
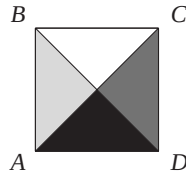
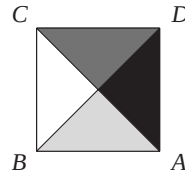
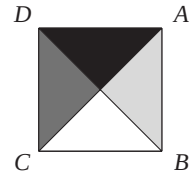
Fig. 19 : $S_3 = \mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ S_1$ Fig. 20 : $S_4 = \mathcal{R}_{\frac{3}{4}} \circ S_1$

La comparaison avec la position du carreau central dans les figures 7, 8 et 9 permet d'identifier les symétries d'axe d_1 , m_2 et d_2 à des composées de S_1 avec une rotation d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour. Chacune des symétries est ainsi exprimée comme composée de la symétrie S_1 avec une rotation.

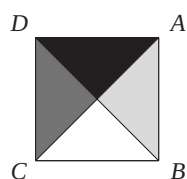
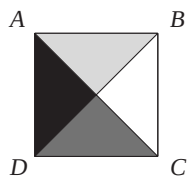
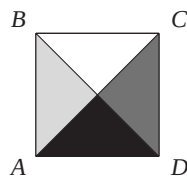
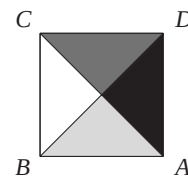
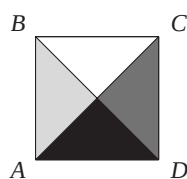
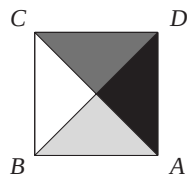
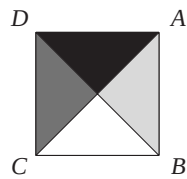
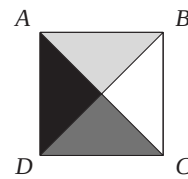
Reprenons le transparent sur lequel figure le carreau central du vitrail et plaçons-le dans sa position initiale. Au début de l'activité, nous avons tout d'abord fait tourner ce transparent (figures 3 à 5), puis nous l'avons retourné par un mouvement qui correspond à la symétrie S_1 , d'axe m_1 (figure 6). C'est en faisant tourner le transparent ainsi retourné d'un quart de tour, d'un demi-tour et de trois quarts de tour que nous avons obtenu les figures 7 à 9. Nous venons de montrer que par ce moyen, nous avons exhibé toutes les symétries opérées sur le carreau. Et si nous avions retourné le transparent par un mouvement correspondant à la symétrie d'axe m_2 (ou d_1 , ou d_2) ?

Peut-on retrouver chacune des symétries comme composée de l'une quelconque d'entre elles avec une ou des rotations ?

Retournons le carreau central par la symétrie d'axe m_2 , puis faisons le tourner d'un quart de tour, d'un demi-tour, puis de trois quarts de tour. Nous identifions ensuite les symétries obtenues par comparaison avec les figures 17 à 20.

Fig. 21 : S_3 Fig. 22 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}} \circ S_3 = S_4$ Fig. 23 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ S_3 = S_1$ Fig. 24 : $\mathcal{R}_{\frac{3}{4}} \circ S_3 = S_2$

Même si le mouvement paraît moins naturel, on peut imaginer de retourner le carreau central par la symétrie d'axe d_1 ou d_2 , puis de lui faire subir les trois rotations. Nous identifions également les symétries obtenues.

Fig. 25 : $\mathcal{S}_2$ Fig. 26 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}} \circ \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$ Fig. 27 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_4$ Fig. 28 : $\mathcal{R}_{\frac{3}{4}} \circ \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1$ Fig. 29 : $\mathcal{S}_4$ Fig. 30 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}} \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_1$ Fig. 31 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_2$ Fig. 32 : $\mathcal{R}_{\frac{3}{4}} \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3$

Nous sommes à présent convaincus que toutes les symétries du carré peuvent être obtenues en composant l'une quelconque d'entre elles avec $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$, $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$.

1.2 La table de composition et la structure de groupe

Comment s'y prendre ?

À ce stade de l'activité, le professeur peut demander de consigner les résultats obtenus dans un tableau à double entrée. Les transformations du plan qui conservent le carré, encore appelées *isométries* du carré, sont reprises en têtes de colonnes et en têtes de lignes.

Dresser un tableau de composition des isométries du carré.

Une motivation à dresser ce tableau est de vérifier qu'il n'y a pas d'isométrie qui n'aurait pas été trouvée jusqu'à présent mais qu'on pourrait découvrir par composition. En effet, la composée de deux isométries du carré est évidemment une isométrie du carré (quand on effectue successivement deux mouvements qui appliquent le carré sur lui-même, le mouvement composé applique aussi le carré sur lui-même).

Il s'agit de noter dans chaque case du tableau le résultat de la composée de l'isométrie notée en haut de la colonne suivie de celle notée au début de la ligne.

$\circ$	i_1
i_2	$i_2 \circ i_1$

$\circ$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	?	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$

La première ligne du tableau ainsi présenté fait apparaître une « isométrie manquante » et permet d'introduire de manière naturelle la *transformation identique*, que l'on appelle encore *identité*. Elle apparaît ici comme la composée $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}} \circ \mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$, donc comme la rotation d'un tour. Cette transformation ramène le carré dans sa position initiale. Si on ne considère que l'état initial et l'état final de la figure, elle consiste donc à « ne pas bouger ». Mais l'élaboration du tableau montre qu'elle doit être prise en compte en tant qu'isométrie du carré pour que la composée de deux isométries du carré soit toujours une isométrie du carré. On dit alors que l'ensemble des isométries du carré (ou de toute autre figure) est *stable pour la composition*. Il y a donc huit isométries du carré, correspondant chacune à une des huit positions du carreau de vitrail, l'identité étant celle qui correspond à la position initiale.

On recommence alors un nouveau tableau où l'identité, notée I , est ajoutée aux isométries en têtes de colonnes et en têtes de lignes.

On comprend facilement que l'identité joue un rôle particulier dans la composition, puisqu'en la composant avec une isométrie t quelconque, on a toujours $t \circ I = t = I \circ t$.

Les quatre premières lignes de ce tableau seront complétées sans peine, il suffit de reprendre tous les résultats des manipulations qui précèdent. Les quatre dernières lignes fourniront l'occasion d'une discussion sur la non-commutativité de la composition des isométries. Au moment de noter le résultat de la composée $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$, certains élèves indiqueront spontanément $\mathcal{S}_2$ qui est le résultat connu de $\mathcal{R}_{\frac{1}{4}} \circ \mathcal{S}_1$. Il convient alors de les inviter à s'interroger sur la validité de ce résultat.

Le résultat de la composition reste-t-il inchangé si on effectue d'abord la rotation, puis la symétrie ?

Un recours au transparent sera sans doute nécessaire pour clarifier cette question. Partons du carreau dans sa position initiale, faisons-le tourner d'un quart de tour, puis retournons le transparent par un mouvement qui correspond à la symétrie $\mathcal{S}_1$. La figure 33 montre la succession des images obtenues. Cette manipulation amène le carreau de vitrail dans la même position que celle obtenue en effectuant $\mathcal{S}_4$, c'est-à-dire $\mathcal{R}_{\frac{3}{4}} \circ \mathcal{S}_1$ (figure 9). Ceci devrait suffire à convaincre chacun que la composition n'est pas commutative.

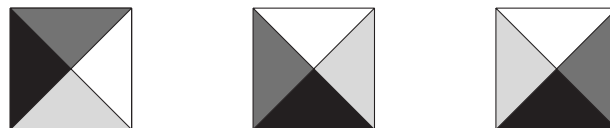


Fig. 33 : $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{R}_{\frac{1}{4}} = \mathcal{S}_4 = \mathcal{R}_{\frac{3}{4}} \circ \mathcal{S}_1$

La question de la commutativité peut amener celle de l'associativité et celle de l'isométrie inverse.

La composition des isométries d'une figure est-elle associative ?

Autrement dit, quand on effectue successivement trois isométries d'une figure (ou plus), peut-on les associer de différentes manières ? En réalité, quand on effectue plusieurs isométries à la suite, on ne se préoccupe pas d'identifier les étapes intermédiaires. On compare la position initiale et la position finale de la figure, le résultat de la composition est l'isométrie qui applique l'une sur l'autre. Si on remplace deux isométries de la suite par leur composée, cela ne change évidemment rien au résultat final. Par exemple, en manipulant les transparents, on constate (figure 34) que, pour le carré,

$$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{R}_{\frac{3}{4}}.$$

Si on remplace les deux premières isométries par leur composée,

$$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ (\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_4) = \mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{R}_{\frac{1}{4}} = \mathcal{R}_{\frac{3}{4}},$$

on passe directement de la première image à la troisième.

Si on remplace les deux dernières isométries par leur composée,

$$(\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_1) \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{R}_{\frac{3}{4}},$$

on passe directement de la deuxième image à la quatrième.



Fig. 34 : $\mathcal{R}_{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_4 = \mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$

Après avoir effectué une isométrie, peut-on en trouver une autre, appelée l'*inverse* de la première, qui ramène la figure dans sa position initiale ?

Il est facile de voir que

l'identité, les symétries et la rotation d'un demi-tour sont leur propre inverse ;

la rotation d'un quart de tour et la rotation de trois quarts de tour sont inverses l'une de l'autre ;

toute isométrie commute avec son inverse.

On tiendra compte de ces divers résultats pour dresser le tableau de composition des isométries du carré.

$\circ$	I	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
I	I	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	I	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$
$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	I	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$
$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	I	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$
$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	I	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$
$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	I	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$
$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	I	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$
$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	I

La structure de ce tableau suscite de nombreuses observations. Lesquelles ? Comment les interpréter ?

On voit tout d'abord se dessiner quatre « blocs » :

$\circ$	I	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
I	I	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	I	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$
$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	I	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$
$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	I	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$
$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	I	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$
$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	I	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$
$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	I	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$
$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{R}_{\frac{3}{4}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$	$\mathcal{R}_{\frac{1}{4}}$	I

Schématisons le découpage en sous-tableaux de la manière suivante :

$\circ$	Rotations	Symétries
Rotations	I	II
Symétries	III	IV

I : Le sous-tableau I montre qu'en composant des rotations, on n'obtient que des rotations, l'identité étant assimilée à la rotation d'angle nul, ou à la rotation d'un tour. Ce résultat n'est pas étonnant, puisque les rotations sont obtenues sans retourner le transparent, alors que les symétries correspondent à un retournement du transparent.

II : Le sous-tableau II montre qu'en effectuant une rotation après une symétrie, on obtient toujours une symétrie (résultat attendu puisque le transparent a été retourné une fois).

Le fait que les quatre symétries apparaissent une seule fois dans chaque colonne de ce sous-tableau confirme le fait que toutes les symétries peuvent être obtenues en composant l'une quelconque d'entre elles avec les différentes rotations (la rotation après la symétrie).

Le fait que les quatre symétries apparaissent une fois dans chaque ligne de ce sous-tableau montre qu'il n'est pas possible de retrouver la même symétrie en effectuant une même rotation après des symétries différentes.

III : Le sous-tableau III s'étudie de manière analogue au tableau II. Il montre qu'en effectuant une symétrie après une rotation, on obtient toujours une symétrie (résultat également attendu pour la même raison).

Le fait que les quatre symétries apparaissent une fois dans chaque ligne de ce sous-tableau montre que toutes les symétries peuvent également être obtenues en effectuant l'une quelconque d'entre elles après les différentes rotations.

Le fait que les quatre symétries apparaissent une fois dans chaque colonne de ce sous-tableau montre qu'il n'est pas possible de retrouver la même symétrie en effectuant des symétries différentes après une même rotation.

IV : Le sous-tableau IV montre que la composée de deux symétries est toujours une rotation. La composée d'une symétrie avec elle-même est l'identité, la composée de deux symétries différentes est une autre rotation. Là encore, le résultat est attendu puisque chaque symétrie correspond à un retournement du transparent, et après avoir été retourné deux fois, celui-ci est revenu dans une position qu'il aurait pu atteindre sans avoir été retourné.

On peut encore commenter le fait que dans chaque ligne et dans chaque colonne de ce tableau, on ne trouve jamais deux fois la même isométrie.

De ce découpage de la table de composition en quatre sous-tableaux, il ressort que les isométries du carré se répartissent naturellement en deux sous-ensembles :

- l'identité et les rotations qui composent l'ensemble des déplacements, noté D ,
- les symétries qui composent l'ensemble des antidéplacements, noté A .

Pour éviter toute ambiguïté, nous appelons « antidéplacements » plutôt que « retournements » les isométries qui changent l'orientation, tant dans le plan que dans l'espace. S'il est vrai que dans le plan, les antidéplacements coïncident avec les « retournements » de la figure, ce n'est plus le cas dans l'espace où le « retournement » correspond à la rotation de $\frac{1}{2}$ tour, c'est-à-dire à un déplacement.

En utilisant ces vocables, on peut énoncer :

- la composée de deux déplacements est un déplacement,
- la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement,
- la composée de deux antidéplacements est un déplacement.

Le fait que chacune des isométries apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne peut être interprété comme suit : si on compose deux isométries différentes avec une même troisième isométrie, on obtient des résultats différents et réciproquement.

En général, pour trois transformations t , p et q :

$$p \neq q \Rightarrow t \circ p \neq t \circ q \text{ mais aussi } t \circ p \neq t \circ q \Rightarrow p \neq q \text{ et } t \circ p = t \circ q \Rightarrow p = q.$$

De même

$$p \neq q \Rightarrow p \circ t \neq q \circ t \text{ mais aussi } p \circ t \neq q \circ t \Rightarrow p \neq q \text{ et } p \circ t = q \circ t \Rightarrow p = q.$$

Ce tableau de composition des isométries du carré est encore appelé *table de groupe*. On y voit les propriétés de la composition des isométries du carré.

Propriétés de la composition des isométries du carré

1. La composée de deux isométries du carré est une isométrie du carré.
2. La composition des isométries du carré est associative. Cela signifie que, si on souhaite composer trois isométries, on peut les associer de manières différentes sans changer le résultat. En général, pour trois transformations t , p et q :

$$(p \circ q) \circ t = p \circ (q \circ t).$$

3. L'identité I est neutre pour la composition. Cela signifie que si on la compose avec n'importe quelle isométrie, le résultat est cette même isométrie :

$$t \circ I = t = I \circ t.$$

4. Chaque isométrie possède une inverse (notée t^{-1}), c'est l'isométrie avec laquelle il faut la composer pour obtenir l'identité :

$$t \circ t^{-1} = I = t^{-1} \circ t.$$

Ces quatre propriétés peuvent être résumées en disant que l'ensemble des isométries du carré forme un *groupe* pour la composition.

Les implications

$$t \circ p = t \circ q \Rightarrow p = q \text{ et } p \circ t = q \circ t \Rightarrow p = q$$

évoquées ci-dessus et qui fournissent les règles de simplification sont une conséquence de la structure de groupe. On peut les démontrer de la manière suivante :

$$t \circ p = t \circ q \Rightarrow t^{-1} \circ t \circ p = t^{-1} \circ t \circ q \Rightarrow p = q,$$

$$p \circ t = q \circ t \Rightarrow p \circ t \circ t^{-1} = q \circ t \circ t^{-1} \Rightarrow p = q.$$

L'ensemble des rotations laissant le carré invariant forme aussi un groupe, puisque la composée de deux rotations est une rotation. On dit que c'est un *sous-groupe* du groupe des isométries du carré. Il est d'indice 2, car il contient la moitié des éléments du groupe. Notons qu'il suffit de vérifier que l'ensemble des rotations est stable pour la composition pour pouvoir déduire qu'il s'agit d'un sous-groupe.

La notion de groupe, née dans le contexte des groupes de permutations, est particulièrement claire dans le cadre des isométries d'une figure, puisque les propriétés qui caractérisent la structure sont évidentes de par la nature même des éléments (les isométries) et de la loi de composition. Une discussion avec les élèves sur la question suivante fera sans doute apparaître le caractère paradigmatique de l'exemple du carré.

Retrouve-t-on les mêmes propriétés (1 à 4) pour la composition des isométries d'une figure quelconque ?

On peut soumettre à la classe quelques figures simples comme celles présentées ci-dessous (en annexe à la page 202) et demander d'établir leurs tables de groupe. Les élèves seront sans doute étonnés de voir que deux figures aussi différentes que les figures 35 et 36 ont la même table de groupe. Le groupe de la figure 37 est identique au sous-groupe des rotations du carré. Quant à la figure 38, elle a le même groupe que le carré.

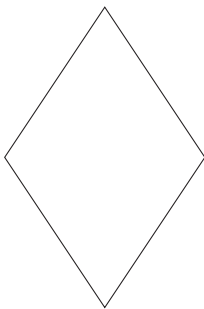


Fig. 35

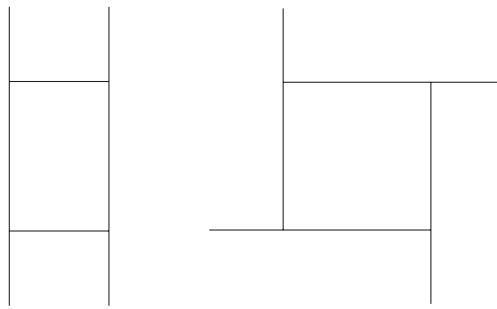


Fig. 36

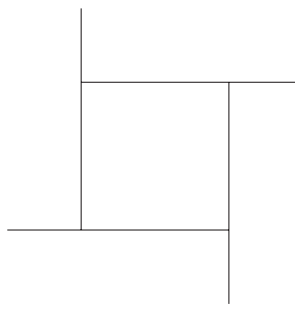


Fig. 37

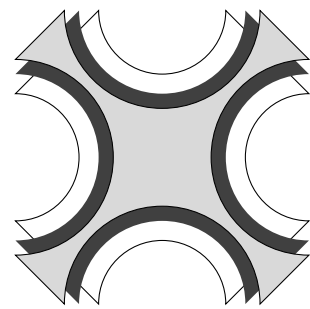


Fig. 38

L'étude des groupes du pentagone et de l'hexagone permettra au professeur qui le souhaite d'entreprendre une démarche de généralisation et d'aborder le groupe du n -gone.

Le pentagone et l'hexagone des figures 39 et 40 (en annexe à la page 203), photocopiés sur transparents, permettront les manipulations nécessaires.

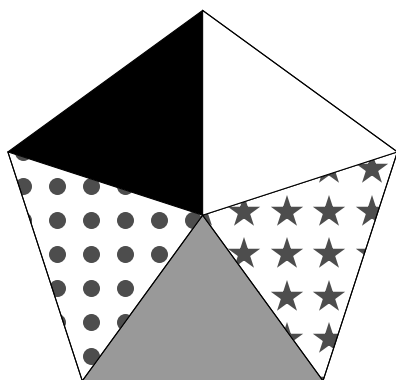


Fig. 39

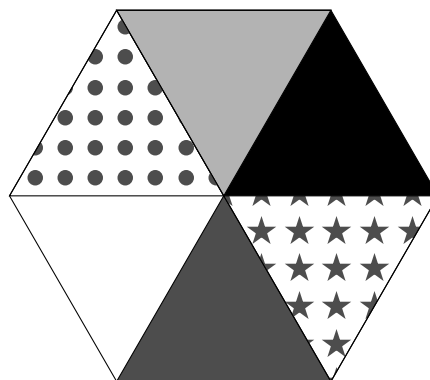


Fig. 40

Le pentagone

L'identité, les rotations de $\frac{1}{5}$ de tour, $\frac{2}{5}$ de tour, $\frac{3}{5}$ de tour, $\frac{4}{5}$ de tour sont les cinq déplacements qui conservent le pentagone. On dit qu'un pentagone est invariant pour une rotation d'ordre 5. Les antidéplacements sont les cinq symétries dont les axes sont les droites joignant un sommet au milieu du côté opposé. Le groupe des isométries du pentagone contient donc 10 éléments.

L'hexagone

L'identité, les rotations de $\frac{1}{6}$ de tour, $\frac{1}{3}$ de tour, $\frac{1}{2}$ de tour, $\frac{2}{3}$ de tour et $\frac{5}{6}$ de tour sont les six déplacements qui conservent l'hexagone. On dit qu'un hexagone est invariant pour une rotation d'ordre 6. Les antidéplacements sont les six symétries dont les axes sont, soit les droites joignant deux sommets opposés, soit les milieux de deux côtés opposés. Le groupe des isométries de l'hexagone est donc un groupe à 12 éléments.

1.3 Dénombrement des isométries d'une figure

Comment s'y prendre ?

C'est notamment par un procédé de dénombrement qu'on peut acquérir la certitude qu'il n'y a que huit isométries qui conservent le carré.

Choisissons un sommet du carré, soit A . Il peut occuper *quatre* positions différentes.

Ayant décidé d'une position pour ce sommet A , considérons un de ses voisins, B par exemple. Ce dernier ne peut occuper que *deux* positions différentes pour rester voisin de A . En effet, s'il y a *a priori* trois emplacements possibles, il faut exclure de placer B de telle sorte que le côté AB devienne une diagonale du carré, AB doit rester un côté.

Faisons donc occuper au sommet B une des deux positions convenables et considérons à présent le voisin de B autre que A , soit C . Il est facile de se convaincre que C ne peut occuper qu'une seule position puisque AC doit

rester une diagonale. La position du quatrième sommet D est dès lors fixée également.

Ainsi, il y a $4 \times 2 = 8$ isométries du carré. Un raisonnement similaire montre qu'il n'y a que 10 isométries qui conservent le pentagone, et 12 pour l'hexagone.

1.4 Les générateurs du groupe

Comment s'y prendre ?

Le groupe du carré

Nous avons vu que toutes les symétries du carré sont le résultat de la composition de l'une quelconque d'entre elles avec les différentes rotations. Cette considération amène la question suivante.

Combien de transformations du carré sont nécessaires pour les obtenir toutes par composition ?

Après le travail effectué sur les symétries, la question se pose évidemment pour les rotations. Reprenons le transparent représentant le carreau de vitrail. Faisons-lui subir tout d'abord une rotation d'un quart de tour dans le sens trigonométrique. Si nous faisons suivre cette première rotation d'une seconde rotation, également d'un quart de tour, le carreau a tourné d'un demi-tour. Si une troisième rotation d'un quart de tour est effectuée ensuite, le carreau a effectué une rotation de trois quarts de tour. Après une quatrième rotation d'un quart de tour, le carreau est revenu dans sa position initiale.

Notons r la rotation d'un quart de tour dans le sens trigonométrique. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} r &= \mathcal{R} \frac{1}{4}, \\ r \circ r &= r^2 = \mathcal{R} \frac{1}{2}, \\ r \circ r \circ r &= r^3 = \mathcal{R} \frac{3}{4}, \\ r \circ r \circ r \circ r &= r^4 = I. \end{aligned}$$

Nous avons encore $r^5 = r$, $r^6 = r^2$, ...

D'autre part, si nous effectuons une rotation d'un quart de tour dans le sens opposé au sens trigonométrique (nous noterons cette isométrie r^{-1}), nous remarquons que le résultat obtenu est le même que pour une rotation de trois quarts de tour. Nous écrivons donc $r^{-1} = r^3$ et nous pouvons encore constater que $r^{-2} = r^2$ et $r^{-3} = r$.

Notons s une quelconque symétrie. Les quatre symétries du carré sont alors

$$s, r \circ s, r^2 \circ s \text{ et } r^3 \circ s.$$

Ceci démontre que la rotation d'un quart de tour r et une symétrie s suffisent à engendrer toutes les isométries du carré. C'est pourquoi on les appelle *générateurs* du groupe. Nous avons obtenu les différentes symétries en effectuant une, deux ou trois rotations r après la symétrie s .

À quelles isométries du carré correspondent $s \circ r$, $s \circ r^2$ et $s \circ r^3$?

Il s'agit évidemment de symétries, puisque ce sont des composées d'un déplacement et d'un antidéplacement. Les résultats du travail déjà effectué sur les transparents, consignés dans le tableau de la page 144 permettent de voir que toute symétrie qui conserve le carré vérifie les relations $s \circ r = r^3 \circ s$, $s \circ r^2 = r^2 \circ s$ et $s \circ r^3 = r \circ s$.

Notons encore que $s \circ s = I$, et qu'il en va de même pour toutes les symétries. On a donc aussi :

$$(r \circ s) \circ (r \circ s) = I, (r^2 \circ s) \circ (r^2 \circ s) = I, (r^3 \circ s) \circ (r^3 \circ s) = I.$$

Une telle isométrie, qui est sa propre inverse, est appelée *involution*. Outre les symétries, la rotation d'un demi-tour (r^2) est aussi une involution.

Les élèves sont à présent en mesure de calculer toutes les composées de deux isométries du carré.

Dresser la table de groupe des isométries du carré en fonction des générateurs.

Les isométries du carré sont notées sous les formes I , r , r^2 , r^3 , s , $r \circ s$, $r^2 \circ s$ et $r^3 \circ s$. Les élèves préparent un tableau à double entrée qui reprend ces isométries horizontalement et verticalement. Chaque case contient le résultat de la composée de l'isométrie notée en haut de la colonne, suivie de celle notée au début de la ligne. Ces composées doivent être notées sous l'une des formes qui apparaissent dans les entrées du tableau. On peut le compléter en reprenant les résultats de la table de groupe de la page 144, ou encore en utilisant les propriétés qui viennent d'être établies. Par exemple

à la 6^{ème} ligne, 2^{ème} colonne :

$$r \circ s \circ r = r \circ r^3 \circ s = r^4 \circ s = I \circ s = s,$$

à la 8^{ème} ligne, 6^{ème} colonne :

$$r^3 \circ s \circ r \circ s = r^3 \circ s \circ s \circ r^3 = r^3 \circ I \circ r^3 = r^6 = r^2.$$

Voici le tableau complété :

$\circ$	i_1
i_2	$i_2 \circ i_1$

$\circ$	I	r	r^2	r^3	s	$r \circ s$	$r^2 \circ s$	$r^3 \circ s$
I	I	r	r^2	r^3	s	$r \circ s$	$r^2 \circ s$	$r^3 \circ s$
r	r	r^2	r^3	I	$r \circ s$	$r^2 \circ s$	$r^3 \circ s$	s
r^2	r^2	r^3	I	r	$r^2 \circ s$	$r^3 \circ s$	s	$r \circ s$
r^3	r^3	I	r	r^2	$r^3 \circ s$	s	$r \circ s$	$r^2 \circ s$
s	s	$r^3 \circ s$	$r^2 \circ s$	$r \circ s$	I	r^3	r^2	r
$r \circ s$	$r \circ s$	s	$r^3 \circ s$	$r^2 \circ s$	r	I	r^3	r^2
$r^2 \circ s$	$r^2 \circ s$	$r \circ s$	s	$r^3 \circ s$	r^2	r	I	r^3
$r^3 \circ s$	$r^3 \circ s$	$r^2 \circ s$	$r \circ s$	s	r^3	r^2	r	I

C'est la table de groupe des isométries³ du carré exprimées en fonction des générateurs.

Quels sont les générateurs des groupes du pentagone et de l'hexagone ?

Le groupe du pentagone

Par analogie avec le carré, on peut penser que la rotation r de $\frac{1}{5}$ de tour et une symétrie quelconque s sont les générateurs du groupe. Les élèves vérifieront que les cinq symétries sont $s, r \circ s, r^2 \circ s, r^3 \circ s$ et $r^4 \circ s$. Les relations $r^5 = I, r^6 = r, \dots$ ainsi que $r \circ s = s \circ r^4, r^2 \circ s = s \circ r^3, r^3 \circ s = s \circ r^2$ et $r^4 \circ s = s \circ r$ (en général $r^i \circ s = s \circ r^{5-i}$) permettent d'établir la table du groupe, qui contient 10 éléments. On dit que le groupe du pentagone est d'ordre 10.

Le groupe de l'hexagone

La rotation r de $\frac{1}{6}$ de tour et une symétrie quelconque s sont les générateurs du groupe. Les élèves devront s'assurer que les six symétries sont $s, r \circ s, r^2 \circ s, r^3 \circ s, r^4 \circ s$ et $r^5 \circ s$. Les relations $r^6 = I, r^7 = r, \dots$ ainsi que $r \circ s = s \circ r^5, r^2 \circ s = s \circ r^4, r^3 \circ s = s \circ r^3, r^4 \circ s = s \circ r^2$ et $r^5 \circ s = s \circ r$ (en général $r^i \circ s = s \circ r^{6-i}$) permettent à nouveau d'établir la table du groupe. Le groupe de l'hexagone est d'ordre 12.

Prolongement possible

Montrer que le groupe du carré est aussi engendré par deux involutions bien choisies, par exemple s et $r \circ s$.

1.5 Le groupe du n -gone ou groupe diédrique

Comment s'y prendre ?

On a pu constater que les groupes d'isométries de tous les polygones réguliers ont une structure similaire. Cette dernière activité de synthèse consiste à mettre cette structure en évidence. Le groupe du n -gone contient n déplacements, engendrés par une rotation r de $\frac{1}{n}$ de tour (dans un sens ou dans l'autre), et n symétries de la forme $s, r \circ s, \dots, r^i \circ s, \dots, r^{n-1} \circ s$. Le groupe du n -gone est donc d'ordre $2n$. Les relations $r^n = I, r^{n+1} = r, \dots$ ainsi que $r \circ s = s \circ r^{n-1}, r^2 \circ s = s \circ r^{n-2}, \dots, r^i \circ s = s \circ r^{n-i}, \dots, r^{n-1} \circ s = s \circ r$ permettent d'établir la table de ce groupe, qu'on appelle *groupe diédrique*. Comme dans le groupe du carré, l'ensemble des déplacements forme un sous-groupe d'indice 2. Tout groupe diédrique peut également être engendré par deux involutions bien choisies, par exemple s et $r \circ s$.

³ Les Anglo-Saxons parlent de « group of symmetries », donnant au vocable « symmetry » un sens plus large, incluant les rotations. Nous avons préféré le mot « isométrie » pour éviter toute confusion, le terme « symétrie » désignant dans ce texte une symétrie orthogonale.

2 Groupes de polyèdres

De quoi s'agit-il ?

À partir de manipulations de polyèdres (un tétraèdre, un cube, un dodécaèdre, un cuboctaèdre...), compter et découvrir des isométries qui conservent globalement ces solides, c'est-à-dire qui les laissent invariants. Utiliser la structure de groupe pour les découvrir toutes.

Enjeux

Analyser en termes d'isométries des manipulations élémentaires de solides. Découvrir les propriétés de symétrie de quelques polyèdres réguliers et semi-réguliers tout en étudiant leurs *groupes d'isométries*.

Compétences

Organiser des propriétés d'un ensemble de figures en termes de structure de groupe.

Intégrer le savoir dans une culture scientifique et humaniste : le rôle des structures dans l'élaboration théorique des mathématiques.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel

Quelques polyèdres en tiges, en plexiglas ou en carton. Des développements de polyèdres, destinés à la construction de polyèdres en carton, sont fournis en annexe (fiches 22 à 27, aux pages 206 à 211).

Prérequis

La section 1 de ce chapitre, ou toute autre activité qui conduit à

- savoir que l'ensemble des isométries qui conservent une figure est un groupe pour la loi de composition ;
- connaître les propriétés d'un groupe.

Les isométries de l'espace ; les permutations d'un ensemble.

2.1 Les polyèdres réguliers

Comment s'y prendre ?

Nous n'envisagerons ici que des polyèdres convexes.

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones convexes réguliers isométriques et qui a le même nombre de polygones autour de chaque sommet.

Combien y a-t-il de polyèdres réguliers ?

Une discussion au sein de la classe fera prendre conscience qu'en un sommet d'un polyèdre régulier, il y a au moins trois faces, nécessairement non coplanaires. Par conséquent, la somme des angles des différentes faces en ce sommet doit être strictement inférieure à 360° .

Les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60° , ceux du carré 90° , ceux du pentagone 108° et ceux de l'hexagone 120° . Il est inutile d'aller au-delà de cette valeur puisque $3 \times 120^\circ = 360^\circ$; trois hexagones placés en un sommet sont coplanaires.

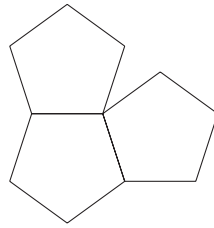


Fig. 41

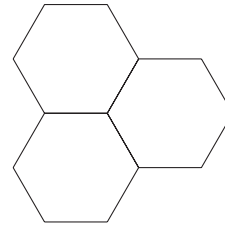


Fig. 42

Les figures 41 et 42 montrent bien qu'en plaçant trois pentagones en un sommet, on peut commencer à construire un polyèdre, tandis qu'avec trois hexagones, on amorce un pavage du plan. Les élèves passent en revue ces différents polygones réguliers et voient combien on peut en placer en chaque sommet. Le tableau ci-dessous répertorie de manière exhaustive les différents cas.

polygones en chaque sommet	somme des angles
3 triangles équilatéraux	$3 \times 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$
4 triangles équilatéraux	$4 \times 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$
5 triangles équilatéraux	$5 \times 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$
6 triangles équilatéraux	$6 \times 60^\circ = 360^\circ$
3 carrés	$3 \times 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$
4 carrés	$4 \times 90^\circ = 360^\circ$
3 pentagones	$3 \times 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$
4 pentagones	$4 \times 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$
3 hexagones	$3 \times 120^\circ = 360^\circ$

C'est d'une manière analogue que Luca PACIOLI démontre dans la *Divine proportion* qu'il ne peut y avoir plus de cinq polyèdres réguliers. Nous reproduisons cette démonstration en annexe à la page 204.

Tous les polyèdres réguliers possibles existent ; on peut les construire à partir de leurs développements, fournis en annexe aux pages 206 à 210.

Avec trois triangles équilatéraux en chaque sommet, on obtient le *tétraèdre régulier* qui compte quatre faces.

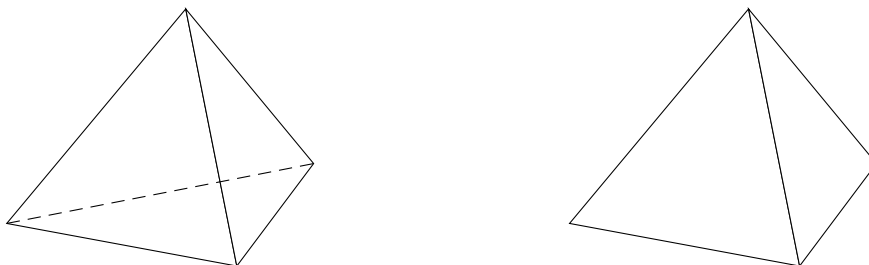


Fig. 43 : Le tétraèdre régulier

Le polyèdre construit en plaçant quatre triangles équilatéraux en chaque sommet est l'*octaèdre régulier*. Il comporte huit faces triangulaires. On

peut le voir comme deux pyramides construites symétriquement par rapport à une même base carrée.

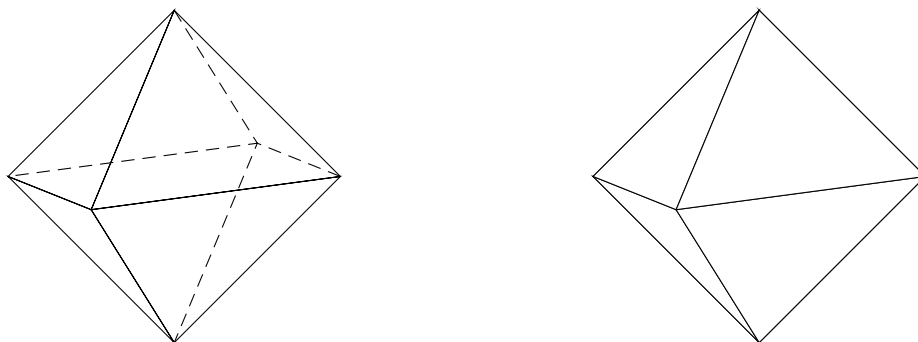


Fig. 44 : L'octaèdre régulier

Il y a cinq triangles équilatéraux en chaque sommet de l'icosaèdre régulier, qui comporte vingt faces.

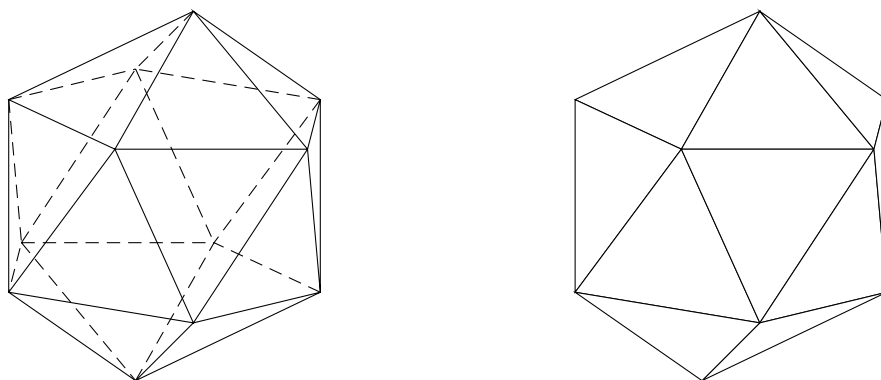


Fig. 45 : L'icosaèdre régulier

Avec trois faces carrées en chaque sommet, on obtient l'hexaèdre régulier qu'on appelle habituellement *cube*. Il compte six faces.

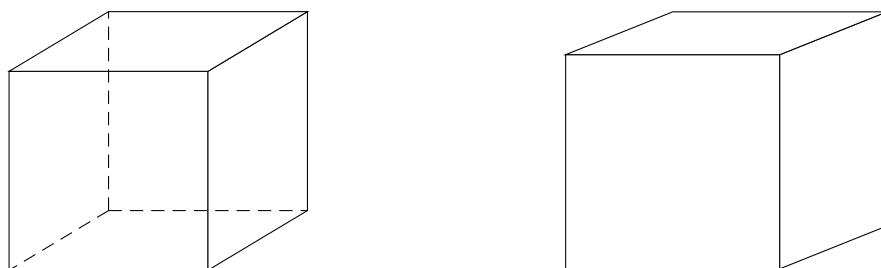


Fig. 46 : L'hexaèdre régulier ou cube

Le dodécaèdre régulier comporte douze faces pentagonales, trois en chaque sommet.

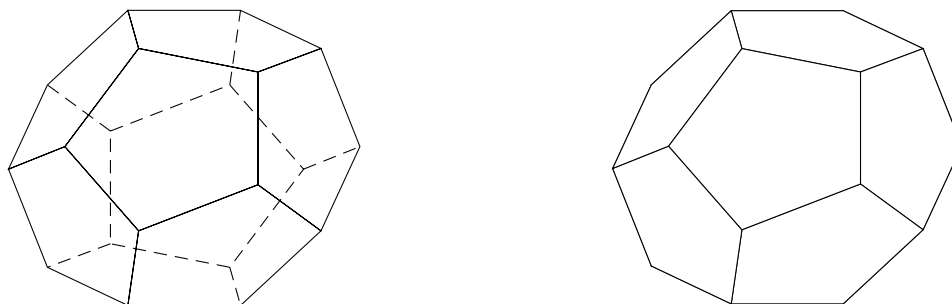


Fig. 47 : Le dodécaèdre régulier

Un peu d'histoire...

Platon

Ces cinq polyèdres réguliers sont aussi appelés *solides platoniciens*. PLATON (427-347 av. J.-C.) est né dans une famille distinguée d'Athènes. Il a eu très tôt des ambitions politiques, mais ce qui est arrivé à Socrate l'a convaincu qu'il n'y avait pas de place en politique pour un homme de conscience. Il a voyagé en Égypte et a rencontré les Pythagoriciens dans le sud de l'Italie. Ceux-ci l'ont fortement influencé. Vers 387, il fonde à Athènes son Académie qui, sous de multiples aspects ressemble à nos universités. PLATON et ses disciples ont étudié la géométrie des solides ; on pense même qu'ils ont démontré de nouveaux théorèmes. Ils savaient, entre autres, qu'il ne pouvait y avoir qu'au plus cinq polyèdres réguliers. Les Pythagoriciens n'ignoraient pas qu'on pouvait former trois de ces solides au moyen de 4, 8, 20 triangles équilatéraux, le cube avec des carrés et le dodécaèdre avec 12 pentagones mais la preuve qu'il ne pouvait pas y en avoir plus que cinq est probablement due à THÉÉTÈTE (env. 415 - env. 396 av. J.-C.) qui appartenait à l'école platonicienne.

Voici en quels termes PLATON décrit ces solides dans *Le Timée*.

... Quatre de ces triangles équilatéraux, réunis selon trois angles plans, donnent naissance à un seul et même angle solide qui a une valeur venant à la suite⁴ de celle de l'angle plan le plus obtus. Et quand sont formés quatre angles de ce type, on a la première espèce de solide qui a la propriété de diviser en parties égales et congruentes la surface de la sphère dans laquelle elle est inscrite. La seconde espèce est composée des mêmes triangles. ... Ceux-ci forment un angle solide unique, fait de quatre angles plans. Quand on construit six angles solides de cette sorte, le corps de la deuxième espèce se trouve achevé. La troisième espèce est formée par le groupement ... de douze angles solides, dont chacun est compris entre cinq triangles plans équilatéraux, et elle a vingt bases qui sont vingt triangles équilatéraux. ... Six de ces figures⁵, en s'accolant, donnent naissance à huit angles solides, dont chacun est constitué par l'union harmonique de trois angles plans. Et la figure ainsi obtenue est la figure cubique, laquelle a pour base six surfaces quadrangulaires à côtés égaux. Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il en a dessiné l'arrangement final.

Cette description (reprise en annexe à la page 205) fait partie de la théorie atomiste platonicienne. PLATON associe les quatre premiers polyèdres aux quatre éléments de l'univers dont ils constituent en quelque sorte les « atomes ». Le cube est attribué à la terre, le tétraèdre est le germe du feu, l'octaèdre est l'élément de l'air et l'icosaèdre celui de l'eau. Quant au dodécaèdre, il est le modèle pour l'univers tout entier.

L'une des œuvres, sans doute la plus connue, de PLATON est *La république*, dans laquelle il insiste notamment sur l'importance des mathématiques. Voici ce qu'il écrit à ce sujet.

... Il conviendrait donc de rendre cette science obligatoire et de persuader ceux qui sont destinés à remplir les plus hautes fonctions de l'État d'en entreprendre l'étude et de s'y appliquer...

2.2 Les isométries du tétraèdre régulier

Comment s'y prendre ?

Le professeur fournit à chaque groupe d'élèves un tétraèdre régulier, ou leur demande d'en fabriquer un, par exemple à partir d'un développement photocopié sur carton léger.

Quelles sont toutes les isométries qui conservent le tétraèdre régulier.

Détaillons quelque peu cette consigne très générale.

La structure de groupe

Tout comme pour le carré, que l'on a étudié à la section 1, l'ensemble des isométries qui conservent le tétraèdre régulier forme un groupe pour la composition. En effet, les propriétés qui caractérisent la structure de groupe se dégagent naturellement dès qu'on s'intéresse aux permutations qui conservent globalement une figure.

1. La composée de deux isométries qui conserve un tétraèdre est une isométrie qui conserve ce même tétraèdre.
2. Comme toutes les compositions de permutations, la composition des isométries du tétraèdre est associative.
3. L'identité I est neutre pour la composition.
4. Chaque isométrie possède naturellement une inverse.

Ces propriétés du groupe ne sont pas liées à la figure mais au contexte, celui des isométries qui conservent une figure. Ce qui dépend de la figure, ce sont les éléments du groupe, leur nombre, leur nature...

⁴ L'angle plat n'était pas considéré comme un angle. Pour décrire l'« angle solide » de 180° , les Grecs parlaient donc de l'angle ayant une valeur immédiatement supérieure à celle de l'angle plan le plus obtus.

⁵ Des carrés, que PLATON appelle des figures quadrangulaires équilatérales.

Dénombrement

Lorsqu'on demande de répertorier les isométries du carré, il n'est pas très difficile de les trouver toutes et d'être convaincu qu'il n'y en a pas d'autres. Dès que le problème est plus compliqué, s'il s'agit comme ici de trouver celles qui conservent un tétraèdre régulier, il est très probable que les élèves ne les trouveront pas facilement toutes (bien que le nombre de sommets soit le même que dans le carré). Connaître à l'avance le nombre de ces isométries donnerait des indications précieuses pour les découvrir. En effet l'élève sait dès lors, à chaque étape du travail d'investigation, le nombre de celles qui lui manquent. En confrontant ce nombre avec le nombre de sommets, ou d'arêtes, ou de faces, il peut repérer des coïncidences qui guident sa recherche. De plus, dès qu'il aura identifié autant d'isométries que prévu, il sera certain d'avoir terminé. C'est pourquoi la première question est axée sur le nombre de ces isométries, indépendamment de leur nature.

Combien y a-t-il d'isométries qui conservent le tétraèdre régulier ?

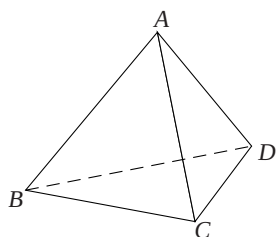


Fig. 48

Commençons le comptage comme nous l'avons fait pour le carré et choisissons un sommet du tétraèdre, soit A . Il peut occuper *quatre* positions différentes. Ayant décidé d'une position pour ce sommet A , considérons un de ses voisins, B par exemple. Ce dernier peut occuper n'importe laquelle des *trois* positions restantes, il sera toujours voisin de A . En effet, dans un tétraèdre régulier, chaque sommet est relié à chacun des autres sommets par une arête. Chaque paire de sommets détermine une arête, il n'y a pas de diagonale comme dans le carré. Le point C , voisin de A et B , peut occuper n'importe laquelle des *deux* positions restantes puisque chacune de ces deux positions est le sommet d'un triangle équilatéral construit sur l'arête AB . Le sommet D occupe alors la seule place qui est encore libre.

Il y a donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ isométries qui conservent le tétraèdre régulier, c'est-à-dire autant que de permutations des sommets $ABCD$. Rappelons qu'une *permutation* des sommets A, B, C et D est une application qui envoie tout sommet sur un sommet, de telle manière qu'aucun sommet ne soit jamais l'image de deux sommets différents. Il s'agit donc d'une bijection de l'ensemble des sommets sur lui-même.

Déplacements et antidéplacements

Le travail effectué sur les polygones peut amener l'idée que, parmi ces 24 isométries, il y a des déplacements et des antidéplacements. Encore faut-il que les élèves soient conscients qu'il existe des antidéplacements dans l'espace à trois dimensions. Le professeur peut provoquer cette prise de conscience par une question.

Voici deux trièdres isométriques (figure 49). Peut-on, en le déplaçant, faire coïncider celui de gauche avec celui de droite ?



Fig. 49

On le voit, c'est impossible, l'un de ces trièdres est l'image de l'autre dans un miroir. Tout comme dans le plan, il y a dans l'espace des figures isométriques qui n'ont pas la même orientation⁶. Le professeur peut évoquer à ce propos la règle du tire-bouchon.

Rappelons que, si l'image d'une figure par une isométrie est une figure de même orientation, on dit que cette isométrie est un *déplacement* ; sinon on dit qu'il s'agit d'un *antidéplacement*.

Les translations et les rotations sont des déplacements dans le plan comme dans l'espace.

Dans le plan, nous avons vu que les symétries orthogonales, par rapport à un axe, sont des antidéplacements, tandis que la symétrie centrale, qui correspond à la rotation d'un demi-tour, est un déplacement. Qu'en est-il des antidéplacements de l'espace ? Le travail de recherche des isométries des polyèdres va nous les faire découvrir peu à peu.

De par la définition même des déplacements et antidéplacements, on peut dire que

la composée de deux déplacements est un déplacement (la composée de deux isométries qui conservent l'orientation conserve l'orientation) ;

la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement (la composée d'une isométrie qui conserve l'orientation avec une isométrie qui change l'orientation change l'orientation) ;

la composée de deux antidéplacements est un déplacement (la composée de deux isométries qui changent l'orientation conserve l'orientation) ;

Comme l'ensemble des isométries qui conservent globalement une figure forme groupe, il suffit de mettre en évidence un seul antidéplacement pour pouvoir affirmer qu'il y a autant d'antidéplacements que de déplacements. En effet, en composant chacun des déplacements avec ce même antidéplacement, on obtient chaque fois un antidéplacement différent.

Revenons au groupe des isométries qui conservent le tétraèdre régulier. Dans un premier temps, essayons d'identifier 12 déplacements. Ensuite, si nous trouvons un antidéplacement, nous découvrirons les 12 antidéplacements par composition de cet antidéplacement avec les 12 déplacements.

Déplacements

Quelles sont les rotations qui conservent le tétraèdre régulier ?

⁶ Pour plus de précision sur les problèmes d'orientation, voir CREM [2001a], sixième partie.

Chaque élève doit manipuler le tétraèdre de manière à l'amener dans diverses positions particulières par rapport à lui-même, de façon à mieux percevoir les différents axes de rotations. Chacun effectue librement ces observations, mais, si nécessaire, le professeur peut suggérer quelques mouvements adéquats pour guider la recherche.

Nous avons coloré différemment chacune des faces du tétraèdre pour mieux visualiser les mouvements et mettre en évidence les problèmes liés à l'orientation. La couleur des faces ne doit évidemment pas être prise en compte quand on parle des isométries qui conservent globalement le tétraèdre (seule l'identité conserve le tétraèdre coloré).

Au départ, le tétraèdre est déposé sur la table. En faisant bouger lentement le sommet du dessus vers l'avant, de manière à amener la hauteur issue de ce sommet dans l'axe du regard, on voit apparaître clairement un axe de rotation d'ordre 3.

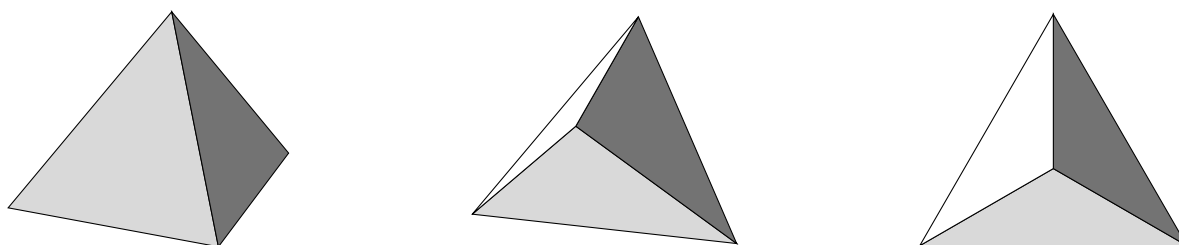


Fig. 50 : Rotations d'ordre 3

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 3 ?

Ces axes, qui joignent un sommet au centre de la face opposée, sont en même nombre que les sommets. Il y en a donc quatre. Pour chaque axe, il faut compter la rotation de $\frac{1}{3}$ de tour et celle de $\frac{2}{3}$ de tour ; la rotation d'un tour complet qui est la transformation identique ne devra être comptée qu'une seule fois. Nous avons donc identifié $4 \times 2 = 8$ rotations de $\frac{1}{3}$ ou de $\frac{2}{3}$ de tour, et en ajoutant l'identité, nous avons 9 déplacements.

Il faut donc en trouver encore 3. Or, dans un tétraèdre, il y a 4 sommets, 4 faces et 6 arêtes. Les axes de rotation que nous cherchons seraient donc plutôt liés aux arêtes, ou aux paires d'arêtes. Faisons tourner le tétraèdre à partir de sa position initiale, de manière à amener une arête vers soi et faisons le basculer légèrement pour positionner dans l'axe du regard la droite joignant le milieu de cette arête avec le milieu de l'arête située à l'arrière et qui lui est gauche. On voit alors apparaître un axe d'ordre 2.

Une autre façon de faire découvrir les rotations d'ordre 2 est de les obtenir en composant deux rotations de $\frac{1}{3}$ de tour d'axes différents.

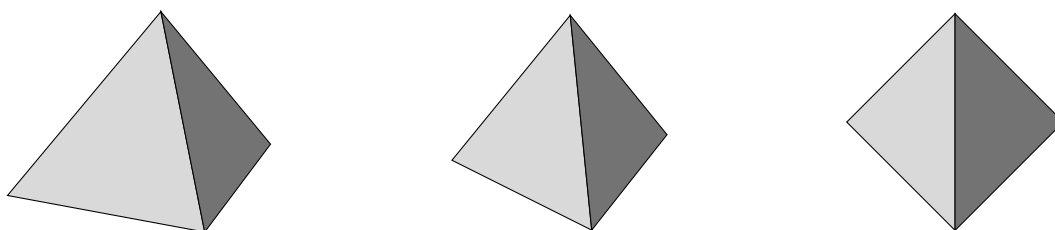


Fig. 51 : Rotations d'ordre 2

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 2 ?

Il y a 3 axes de ce type, autant que de paires d'arêtes gauches. Pour chaque axe, il faut compter la rotation de $\frac{1}{2}$ tour. Les élèves remarqueront peut-être que ce demi-tour a le même effet que la symétrie orthogonale par rapport à l'axe de la rotation. Ceci montre que, dans l'espace, contrairement à ce qui se passe dans le plan, une symétrie orthogonale par rapport à une droite est un déplacement.

Nous avons ainsi identifié 12 déplacements qui conservent le tétraèdre régulier.

Antidéplacements

Quels sont les antidéplacements qui conservent le tétraèdre régulier ?

En plaçant le tétraèdre dans la position de la figure 52, on perçoit clairement que le plan ADM , contenant l'arête AD et le milieu M de l'arête BC , est un plan de symétrie. C'est le plan médiateur de l'arête BC , puisque les points A , D et M sont équidistants des sommets B et C .

Observons l'image du tétraèdre $ABCD$ par la symétrie S_{ADM} par rapport au plan ADM .

S_{ADM}
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

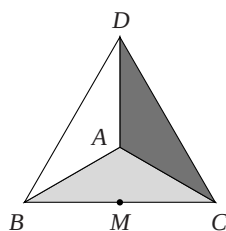


Fig. 52

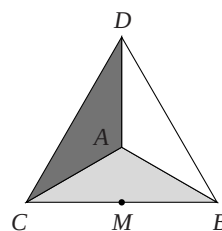


Fig. 53

Le tétraèdre $ABCD$ ne peut être amené à coïncider avec son image $ACBD$ par un déplacement, les deux tétraèdres n'ont pas la même orientation. En effet, si on le regarde avec le sommet A vers soi, on parcourt le triangle BCD du tétraèdre initial dans le sens trigonométrique (figure 52), tandis que dans le tétraèdre image, le triangle BCD est parcouru dans le sens

contraire (figure 53). La symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$ est bien un antidéplacement. Les 12 antidéplacements du tétraèdre réguliers sont dès lors connus. Il suffit de composer $\mathcal{S}_{ADM}$ avec chacune des rotations précédemment décrites pour les obtenir. Étudions-les de plus près.

Nous venons d'identifier la symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$; il y en a d'autres du même type. On peut se demander si les symétries orthogonales par rapport à un plan constituent l'ensemble des antidéplacements qui conservent globalement le tétraèdre régulier.

Combien y a-t-il de plans de symétrie dans le tétraèdre régulier ?

Il y en a autant que d'arêtes, donc 6.

Or, il y a 12 antidéplacements qui conservent le tétraèdre. On peut en déduire que parmi les 12 composées de $\mathcal{S}_{ADM}$ avec chacune des rotations, on en trouve 6 qui sont des symétries planes, et 6 qui sont d'un autre type.

Examinons quelques cas.

Le professeur peut suggérer aux élèves de travailler avec plusieurs tétraèdres dont les faces sont colorées, quelques-uns identiques au tétraèdre de départ (figure 54), et d'autres avec l'autre orientation (figure 55).

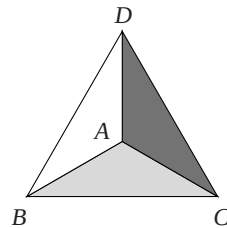


Fig. 54

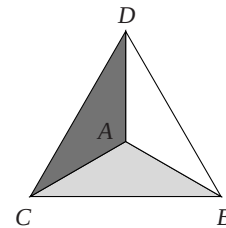


Fig. 55

Grâce à ce matériel, les élèves pourront toujours disposer devant eux le tétraèdre initial, ainsi que ses images successives par les différentes isométries dont nous étudions la composée. Cette manière de procéder permet d'avoir sous les yeux à la fois le tétraèdre initial et le tétraèdre final, et donc de comparer leurs orientations et d'identifier la composée.

Effectuons tout d'abord la composée de la symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$ suivie de la rotation $\mathcal{R}_{A, \frac{1}{3}}$, rotation de $\frac{1}{3}$ de tour d'axe vertical AA' , où A' est le centre de la face BCD .

$\mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

$\mathcal{R}_{A, \frac{1}{3}}$
$A \longrightarrow A$
$C \longrightarrow D$
$B \longrightarrow C$
$D \longrightarrow B$

$\mathcal{R}_{A, \frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow D$
$C \longrightarrow C$
$D \longrightarrow B$

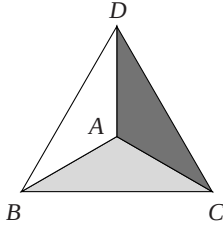


Fig. 56

$$\xrightarrow{\mathcal{R}_{A, \frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}}$$

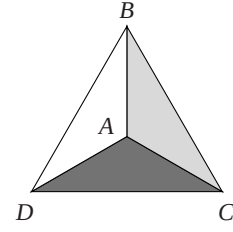


Fig. 57

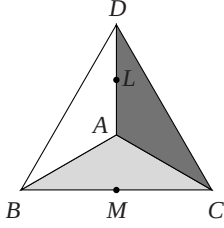


Fig. 58

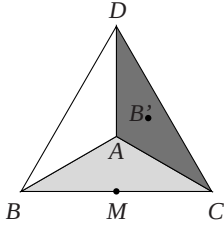


Fig. 59

$\mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

$\mathcal{R}_{ML, \frac{1}{2}}$
$A \longrightarrow D$
$C \longrightarrow B$
$B \longrightarrow C$
$D \longrightarrow A$

$\mathcal{R}_{ML, \frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM} = \mathcal{S}_{BCL}$
$A \longrightarrow D$
$B \longrightarrow B$
$C \longrightarrow C$
$D \longrightarrow A$

Composons à présent la même symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$ avec une autre rotation de $\frac{1}{3}$ de tour, dont l'axe ne passe par aucun des deux points fixes de la symétrie, c'est-à-dire ni par A , ni par D . Prenons par exemple la rotation $\mathcal{R}_{B, \frac{1}{3}}$ de $\frac{1}{3}$ de tour d'axe BB' , où B' est le centre de la face ACD . Il s'agit de la rotation autour de l'axe d'ordre 3 issu du sommet qui est noté B dans la position initiale du tétraèdre, c'est-à-dire le sommet en bas à gauche.

$\mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

$\mathcal{R}_{B, \frac{1}{3}}$
$A \longrightarrow D$
$C \longrightarrow A$
$B \longrightarrow B$
$D \longrightarrow C$

$\mathcal{R}_{B, \frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow D$
$B \longrightarrow A$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow C$

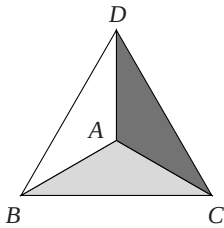


Fig. 60

$$\xrightarrow{\mathcal{R}_{B, \frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}}$$

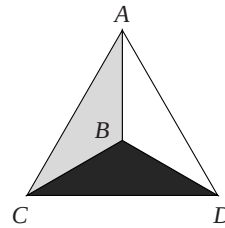


Fig. 61

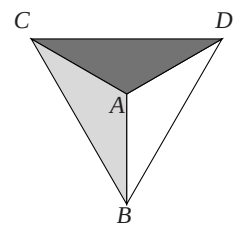


Fig. 62

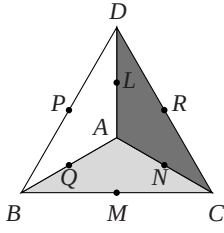


Fig. 63

En faisant ensuite basculer le tétraèdre vers soi, de manière à ramener le sommet A au-dessus, on obtient le tétraèdre de la figure 62, dont l'orientation n'est pas celle du tétraèdre de départ.

La composée $\mathcal{R}_{B, \frac{1}{3}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$ est donc un antidéplacement bien qu'il ne s'agisse pas d'une symétrie plane. Un antidéplacement de ce type, sans point fixe, est appelé *antirotation*. On en trouve 4 en composant $\mathcal{S}_{ADM}$ avec les rotations de $\frac{1}{3}$ et de $\frac{2}{3}$ de tour autour des axes passant par B et C , notées $\mathcal{R}_{B, \frac{1}{3}}$, $\mathcal{R}_{B, \frac{2}{3}}$, $\mathcal{R}_{C, \frac{1}{3}}$ et $\mathcal{R}_{C, \frac{2}{3}}$.

On peut en trouver également en composant une symétrie avec une rotation d'ordre 2. Composons par exemple la symétrie $\mathcal{S}_{ADM}$ avec la rotation $\mathcal{R}_{NP, \frac{1}{2}}$ de $\frac{1}{2}$ tour autour de l'axe passant par les milieux des arêtes AC et BD .

$\mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow A$
$B \longrightarrow C$
$C \longrightarrow B$
$D \longrightarrow D$

$\mathcal{R}_{NP, \frac{1}{2}}$
$A \longrightarrow C$
$C \longrightarrow A$
$B \longrightarrow D$
$D \longrightarrow B$

$\mathcal{R}_{NP, \frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$
$A \longrightarrow C$
$B \longrightarrow A$
$C \longrightarrow D$
$D \longrightarrow B$

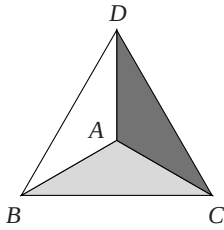


Fig. 64

$$\xrightarrow{\mathcal{R}_{NP, \frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}}$$

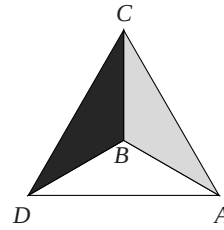


Fig. 65

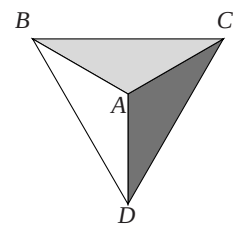


Fig. 66

En faisant ensuite basculer le tétraèdre le long de l'arête CD , de manière à ramener le sommet A au-dessus, on retrouve le tétraèdre de la figure 66, qui n'est pas orienté comme le tétraèdre de départ. La composée $\mathcal{R}_{NP, \frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$ est également une *antirotation*.

Il en va de même pour la composée $\mathcal{R}_{QR, \frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$, tandis que $\mathcal{R}_{ML, \frac{1}{2}} \circ \mathcal{S}_{ADM}$ est la symétrie par rapport au plan BCL .

Les 2 antirotations obtenues par composition avec les rotations de $\frac{1}{2}$ tour portent à 6 le nombre des antirotations et à 12 le nombre des antidéplacements. Nous sommes dès lors convaincus d'avoir identifié toutes les isométries du tétraèdre.

Le groupe du tétraèdre

Les 24 isométries conservant le tétraèdre ont été recensées : 12 rotations et 12 antidéplacements, obtenus en composant une symétrie par rapport à un plan avec les 12 rotations. L'ensemble des 12 rotations qui conservent le tétraèdre est stable pour la composition et forme donc un sous-groupe.

Le groupe des isométries du tétraèdre est identique au groupe des permutations de quatre éléments, par exemple des quatre lettres A, B, C, D . En

effet, il y a 24 permutations des lettres A, B, C, D , correspondant chacune à une isométrie du tétraèdre. Le fait que les lettres A, B, C, D désignent les sommets d'un tétraèdre ne modifie en rien la structure de l'ensemble, puisque dans un tétraèdre, deux sommets déterminent toujours une arête et trois sommets déterminent toujours une face.

On peut se demander si tous les groupes de 24 éléments sont identiques. Les élèves en connaissent déjà un autre : le groupe diédrique du dodécagone.

Comparer le groupe du tétraèdre régulier et celui du dodécagone.

On peut voir facilement que ces deux groupes diffèrent. Par exemple, le groupe du dodécagone contient une rotation d'ordre 12, ce qui n'est pas le cas du groupe du tétraèdre régulier.

2.3 Les isométries du cube

Comment s'y prendre ?

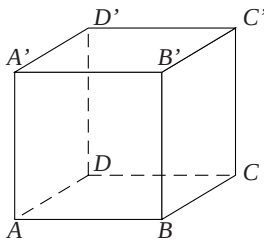


Fig. 67

Le professeur fournit à chaque groupe d'élèves un cube, ou leur demande d'en fabriquer un à partir d'un développement photocopié sur carton léger.

Déterminer toutes les isométries qui conservent le cube.

Dénombrement

Combien y a-t-il d'isométries qui conservent le cube ?

Commençons le raisonnement en choisissant un sommet du cube, soit A . Il peut occuper *huit* positions différentes.

Ayant décidé d'une position pour ce sommet A , considérons un de ses voisins, B par exemple. Ce dernier peut occuper n'importe laquelle des *trois* positions voisines de A , à savoir B, D ou A' . Plaçons-le en B . Le point C , voisin de B , peut occuper l'une des *deux* positions voisines de B qui sont encore libres c'est-à-dire C ou B' . Plaçons-le en C . La position du sommet D est alors déterminée par le fait que $ABCD$ est une face du cube. La sommet A' doit occuper la seule place voisine de A qui est encore libre, et de proche en proche, on constate que la position des sommets restants est déterminée.

Il y a donc $8 \times 3 \times 2 = 48$ isométries qui conservent le cube.

Parmi ces 48 isométries, on peut conjecturer qu'il y a 24 déplacements (24 rotations) et 24 antidéplacements, et que les 24 antidéplacements sont obtenus en composant chacune des rotations avec une symétrie plane, par exemple. Cette conjecture devient vite une certitude car il est aisé d'exhiber une symétrie plane dans le cube.

Déplacements

Quelles sont les rotations qui conservent le cube ?

Les axes d'ordre 4 sont les plus évidents. Il suffit d'amener le cube devant

soi, de manière à ne voir qu'une seule face. On constate alors que la droite qui joint le centre de cette face au centre de la face qui lui est opposée est un axe de rotation d'ordre 4.

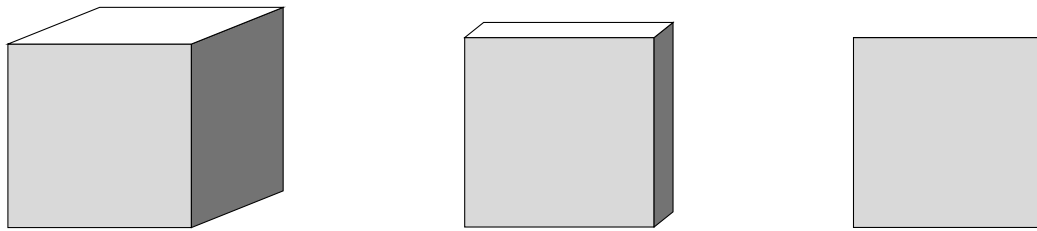


Fig. 68 : Rotations d'ordre 4

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 4 ?

Il y en a autant que de paires de faces opposées, donc 3. Pour chaque axe, il faut compter la rotation de $\frac{1}{4}$ de tour, de $\frac{1}{2}$ tour et celle de $\frac{3}{4}$ de tour ; la rotation d'un tour complet étant la transformation identique ne devra être comptée qu'une seule fois. Nous avons donc identifié $3 \times 3 = 9$ rotations de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$ de tour, et en ajoutant l'identité, nous avons 10 déplacements.

En amenant une arête face à soi, on voit apparaître un axe d'ordre 2, joignant les milieux de deux arêtes opposées.

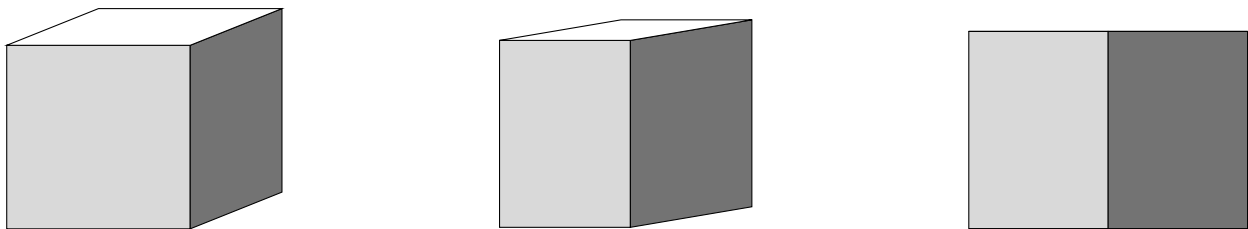


Fig. 69 : Rotations d'ordre 2

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 2 ?

Il y en a autant que de paires d'arêtes opposées, donc 6. Les 6 rotations de $\frac{1}{2}$ tour de ce type porte à 16 le nombre des déplacements déjà répertoriés. Il faut encore en trouver 8.

Ce nombre 8, égal au nombre des sommets, suggère d'amener un sommet face à soi.

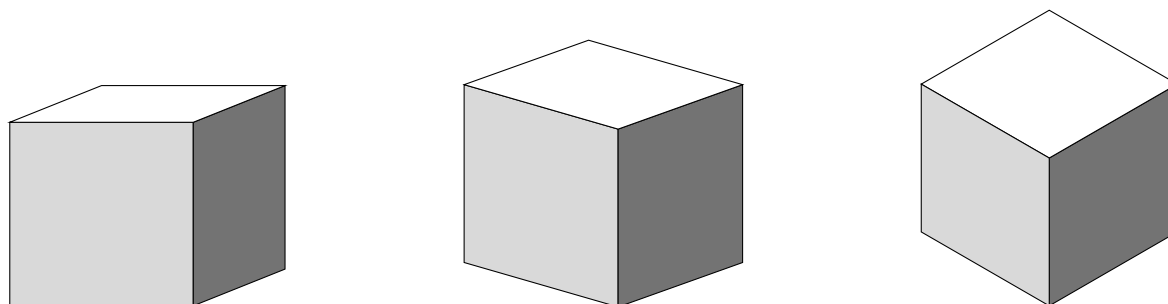


Fig. 70 : Rotations d'ordre 3

C'est ainsi qu'on voit apparaître un axe d'ordre 3.

Une autre façon de découvrir les rotations d'ordre 3 est de les obtenir en composant deux rotations de $\frac{1}{4}$ de tour d'axes différents.

Combien y a-t-il d'axes de rotation d'ordre 3 ?

Il y en a 4, autant que de paires de sommets diamétralement opposés et pour chaque axe, il faut compter la rotation de $\frac{1}{3}$ de tour et celle de $\frac{2}{3}$ de tour, ce qui nous donne $4 \times 2 = 8$ rotations supplémentaires. Nous avons ainsi obtenus les 24 déplacements prévus.

Antidéplacements

Il y a 24 antidéplacements qui conservent le cube. On peut distinguer

des symétries bilatérales par rapport aux plans « médiateurs » des quatre arêtes d'une direction et parallèles à deux faces opposées, il y en a 3 (autant que de directions de face) ;

des symétries bilatérales par rapport à des plans « diagonaux » contenant deux arêtes opposées, il y en a 6 (autant que de paires d'arêtes opposées) ;

la symétrie centrale.

On obtient ainsi 10 symétries, les 14 autres antidéplacements sont des antirotations.

REMARQUE. – Dans l'espace, la symétrie centrale est un antidéplacement, comme le montre l'image du trièdre de la figure 71.

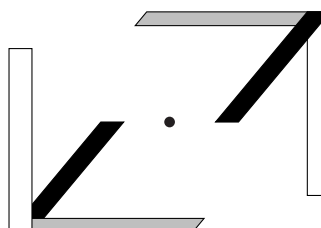


Fig. 71

*Prolongements
Possibles*

Les groupes de déplacements des autres polyèdres réguliers, ou d'un semi-régulier, comme le cuboctaèdre.

L'octaèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre

Leurs groupes d'isométries comportent respectivement 48, 120 et 120 éléments.

Le cube et l'octaèdre ont le même groupe d'isométries. On peut expliquer cela en remarquant que le cube et l'octaèdre sont des polyèdres duaux c'est-à-dire que l'un est obtenu en joignant les centres des faces de l'autre.

Il en va de même pour le dodécaèdre et l'icosaèdre ; quant au tétraèdre, il est son propre dual.

Le cuboctaèdre

Le cuboctaèdre est obtenu à partir du cube en joignant les milieux des arêtes d'une même face, on obtient ainsi en chaque sommet un tétraèdre que l'on enlève du cube initial. Le polyèdre obtenu comporte six faces carrées (ce qui reste des six faces carrées du cube) et huit faces triangulaires (obtenues par troncature).

Le cuboctaèdre de la figure 72 a été dessiné par Leonardo DA VINCI pour illustrer la *Divine proportion* de Luca PACIOLI.

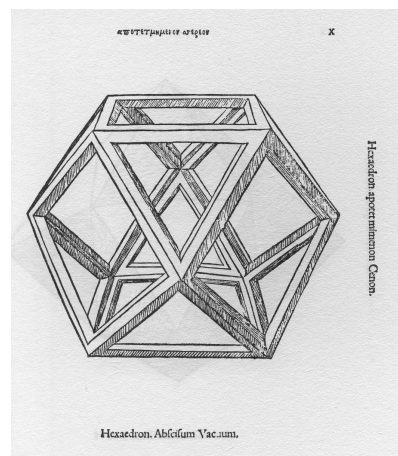


Fig. 72

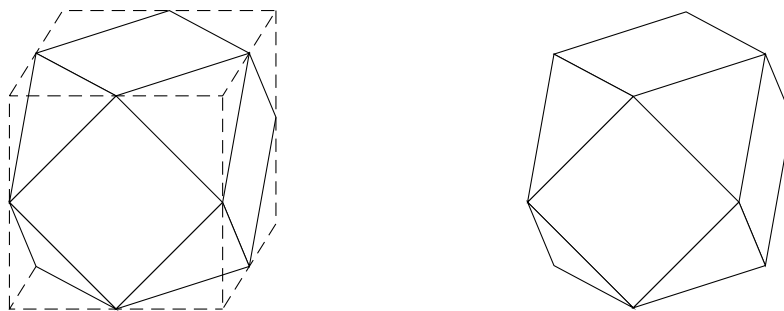


Fig. 73 : Le cuboctaèdre

La figure 73 permet d'imaginer un axe d'ordre 4, les figures 74 et 75 montrent les axes d'ordre 2 et 3.

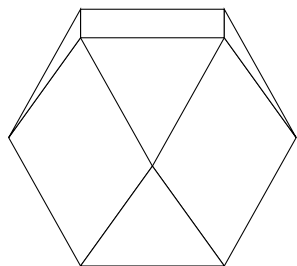


Fig. 74

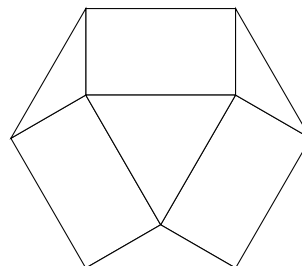


Fig. 75

Les élèves ne seront sans doute pas surpris de constater que le groupe du cuboctaèdre est le même que celui du cube.

Déplacements-antidéplacements

De par la nature même des solides étudiés, tous des polyèdres réguliers ou semi-réguliers, les groupes d'isométries rencontrés jusqu'ici comportent autant de déplacements que d'antidéplacements. Il peut être intéressant de susciter une discussion dans la classe pour savoir s'il en est ainsi pour tous les groupes d'isométries qui conservent un solide de l'espace.

Une manière de répondre à cette question est d'exhiber un solide dont le groupe d'isométries ne comporte que des déplacements. Le cas le plus simple est sans doute la pyramide droite dont la base est un parallélogramme, dont le groupe ne comporte que 2 déplacements.

Quant au groupe de la pyramide dont la base est un triangle isocèle, il est réduit à l'identité et un antidéplacement (une symétrie par rapport à un plan médian).

3 Des équations algébriques aux groupes : un survol historique

Dans les pages qui précèdent, nous avons vu naître la notion de groupe dans un contexte de transformations géométriques. Il est intéressant d'observer que cette notion est née historiquement dans un tout autre contexte, à savoir celui de la résolution par radicaux des équations algébriques. Les pages qui suivent esquissent la théorie correspondante, sans entrer dans les détails. Elles ont pour but principal d'attirer l'attention des lecteurs et peut-être d'éveiller leur intérêt. Pour plus de précisions sur ce que nous n'avons traité ci-après que par allusions, le lecteur pourra se reporter à la bibliographie.

Les problèmes liés aux solutions négatives ou imaginaires des équations sont simplement signalés au passage. Les deux problématiques sont fort liées, comme le montre un extrait de l'*Algèbre* de WALLIS [1685] reproduit dans CREM [2002]. Nous n'aborderons rien de ce qui a trait au symbolisme mathématique.

Notre propos est simplement de montrer comment et dans quel contexte est née la théorie des groupes et cela, sans entrer dans des détails trop techniques.

3.1 Le problème

De l'époque mésopotamienne (1800 av. J.-C. environ) à la Renaissance, l'équation du deuxième degré apparaît sous les trois formes modernisées

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= c, \\ ax^2 &= bx + c, \\ ax^2 + c &= bx, \end{aligned}$$

où a , b et c sont tous positifs. Il ne manque évidemment que le cas $ax^2 + bx + c = 0$, a , b , c tous trois positifs, car une équation doit exprimer une égalité entre deux quantités positives. Durant cette période, il n'était pas concevable que quelque chose soit égal à « moins que rien » (voir par exemple l'extrait de WALLIS cité ci-dessus). Ce type d'équations se résout en utilisant la formule toujours d'actualité et qui « devrait » être connue de nos élèves.

Et au-delà du deuxième degré ?

‘UMAR AL-HAYYĀM (env. 1048 – 1130) donne, dans son *Traité d'algèbre* (voir à ce sujet R. RASHED et B. VAHABZADEH [1999]), une classification complète de toutes les équations jusqu'au degré trois, ainsi qu'une solution générale géométrique des équations du troisième degré, par intersection de courbes coniques. Il avoue cependant

« ... Mais à la démonstration de ces espèces, lorsque l'objet du problème est un nombre absolu, ni moi, ni aucun des hommes de cet art, ne sommes parvenus – peut-être d'autres, qui nous succéderont, sauront-ils le faire – que pour les trois premiers degrés qui sont le nombre, la chose et le carré. »

On voit se développer, dans l'Europe médiévale, des tentatives pour trouver une formule de résolution de l'équation du troisième degré, chez Paolo GERARDI (1328), DARDI DE PISE (fin XIV^{ème} siècle), Luca PACIOLI (fin XV^{ème} siècle).

C'est vers 1510 que Scipione DAL FERRO (1465 – 1528), qui enseigne à l'Université de Bologne dès 1496, découvre la formule qui permet de résoudre l'équation $x^3 + px = q$ où p et q sont bien sûr positifs. Un peu avant sa mort, il confie cette formule à son élève Antonio Maria FIOR.

À l'époque, en Italie, l'obtention d'une « chaire » à l'université dépendait de concours ou « tournois » en l'occurrence ici, mathématiques. FIOR, en possession de la formule de son maître, imagina donc, afin d'assurer sa « carrière académique », de défier un mathématicien qui avait déjà une certaine renommée – et qui constituait ainsi un rival sérieux. Ce mathématicien s'appelait Nicolò FONTANA, plus connu sous le surnom de TARTAGLIA (env. 1500 – 1557). FIOR lui proposa trente problèmes dont six débouchaient évidemment sur une équation du type $x^3 + px = q$.

Piqué au vif, se consacrant à fond à la recherche des solutions demandées, TARTAGLIA finit par trouver, le 12 février 1535, c'est-à-dire huit jours avant l'échéance fixée, non seulement les réponses aux problèmes posés par FIOR, mais en plus, une extension de la formule de résolution au cas $x^3 = px + q$, ignoré par FIOR. Ceci mit définitivement fin aux prétentions de ce dernier. Mais, malheureusement pour lui, TARTAGLIA allait rencontrer Girolamo CARDANO (1501 – 1576).

Celui-ci est en fait un personnage fort bizarre : médecin, mécanicien, mathématicien, joueur, astrologue – il a même tenté de dresser l'horoscope de Jésus. Fâcheuse idée sous l'Inquisition, qui le fait incarcérer en 1570 ! Cependant sa réputation scientifique lui permet de se retrouver quelques mois plus tard à Rome, avec une pension papale !

CARDAN, ayant appris que TARTAGLIA connaissait les formules de résolution des cas $x^3 + px = q$ et $x^3 = px + q$, le pria de les lui communiquer. Après un premier refus, TARTAGLIA fut finalement contraint, par certaines circonstances, à confier les formules à CARDAN qui promit de les garder

secrètes. Il les publiera pourtant en 1545, dans son *Ars Magna* [1545], en citant tout de même le nom de TARTAGLIA. Cela mit cependant fin aux « bonnes » relations entre les deux compères !

CARDAN poursuivit ses recherches, aidé par son élève Ludovico FERRARI (1522 – 1565), ce qui aboutit à une formule pour résoudre l'équation du quatrième degré.

Dans la résolution de l'équation du troisième degré, il apparaissait parfois une racine carrée d'un nombre négatif, ce qui posait évidemment problème à l'époque. Ainsi, par exemple, pour résoudre l'équation $x^3 = 51x + 104$, dont une solution est $x = 8$, la formule dite « de Cardan » conduit à l'équation auxiliaire, en notation moderne, $u^2 - 104u + 17^3 = 0$. On constate que le degré de cette dernière équation n'est plus que deux ! On calcule le discriminant qui vaut -2209 , ce qui conduit aux solutions (toujours en notation moderne) $u_1 = 52 + 47i$, $u_2 = 52 - 47i$. La formule de « Tartaglia-Cardan » nous enseigne alors qu'une solution de l'équation du troisième degré est $\sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2} = 4 + i + 4 - i = 8$. En fermant les yeux au bon moment, tout va pour le mieux ! C'est Raphaël BOMBELLI (1526 – 1572) qui le premier, donnera une définition des opérations (addition, soustraction, multiplication) sur ces quantités « imaginaires », sous une forme proche de celle que nous connaissons.

Et au-delà du quatrième degré ?

Les succès remportés durant la Renaissance ont incité les mathématiciens à rechercher des formules permettant de résoudre des équations de degré cinq ou plus. En fait, il est toujours possible de résoudre une équation de degré 2, 3 ou 4 en se ramenant, par un changement de variable, à une équation de degré moindre. Une idée assez naturelle est donc d'essayer d'appliquer cette même méthode aux équations de degrés 5, 6, ... Très vite, on s'aperçoit que pour résoudre de telles équations, les calculs intermédiaires semblent toujours faire appel à une équation de degré supérieur à celui de l'équation de départ.

L'italien P. RUFFINI (1765 – 1822) démontre, de manière imparfaite, qu'on ne peut résoudre, à l'aide d'une formule, une équation de degré supérieur à quatre.

N. ABEL (1802 – 1829), de nationalité norvégienne, pense avoir trouvé une solution générale de l'équation du cinquième degré. Mais il y a une erreur dans son raisonnement, erreur qu'il finit par déceler et qui le conduit à démontrer l'impossibilité de trouver une formule algébrique qui donne la solution générale de l'équation du cinquième degré.

3.2 La « solution » du problème

C'est Évariste GALOIS (1811 – 1832) qui, partant d'une idée de LAGRANGE, finit par régler définitivement ce problème en démontrant qu'il n'existe pas de formule algébrique donnant la solution générale d'une équation de degré n où $n > 4$. Ce faisant, il introduit la théorie des groupes (voir GALOIS [sans date]).

Nous nous étendrons peu sur la vie de GALOIS, ce mathématicien incompris de beaucoup de ses contemporains. La France, dans laquelle il a vécu, était fort bouleversée politiquement. GALOIS, au tempérament jeune et fougueux, eut sans doute le tort de se montrer trop contestataire, peut-être un brin « anarchiste ». . . Il finit par mourir à vingt-et-un ans dans un duel. . .

Nous préférons donner une idée de la façon dont il montre, grâce à la théorie des groupes, l'impossibilité de résoudre par une formule contenant des radicaux toute équation algébrique polynomiale de degré supérieur à quatre.

C'est dès 1829 que GALOIS présente à l'Académie Française des Sciences de Paris son *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*. Il le représentera encore en 1830 et le 17 janvier 1831. Enfin, S. D. POISSON (1781 – 1840) et S. F. LACROIX (1765 – 1843) remettent un

rapport en ces termes : « Quoi qu'il en soit, nous avons fait tous nos efforts pour comprendre la démonstration de M. Galois. Les raisonnements ne sont ni assez clairs ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude... » Heureusement, de nos jours, les idées de GALOIS sont tout à fait comprises par les mathématiciens.

Groupe

GALOIS a l'idée d'associer à une équation un ensemble de permutations de ses racines qui rend invariable – non seulement par la forme, mais aussi par la valeur – une certaine fonction de ces mêmes racines.

Les groupes sont nés ! En effet, si on considère deux permutations qui rendent cette fonction invariable, la composée rend également ladite fonction invariable (loi **interne**). La loi est **partout définie**, puisqu'on peut toujours composer deux permutations des racines de l'équation. La composée de permutations est naturellement **associative**. La permutation identique joue le rôle de **neutre**. Toute permutation étant une bijection, elle possède donc une **inverse**.

Ainsi, l'ensemble des permutations que GALOIS associe aux racines est un **groupe de permutations**, groupe avec le sens que nous donnons aujourd'hui à ce mot. On voit clairement que, dans un contexte de « permutations d'objets conservant quelque chose », la structure de groupe est naturelle. C'est parce que GALOIS s'est intéressé aux permutations dans ce contexte que le concept de groupe est né. Par la suite, on a retrouvé ces mêmes propriétés pour des ensembles de nombres munis d'une opération et la notion de « groupe abstrait », de « structure de groupe » s'est dégagée...

En fait, la proposition I du premier mémoire de GALOIS s'énonce comme suit

« THÉORÈME. Soit une équation donnée dont $a, b, c, \dots$ sont les m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres $a, b, c, \dots$ qui jouira de la propriété suivante :

1° Que toute fonction des racines, invariable [*] par les substitutions⁷ de ce groupe, soit rationnellement connue ;

2° Réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable rationnellement, soit invariable par les substitutions.

(Dans le cas des équations algébriques, ce groupe n'est autre chose que l'ensemble des $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$ permutations possibles sur les m lettres, puisque, dans ce cas, les fonctions symétriques sont seules déterminables rationnellement.) »

Le symbole [*] renvoie à la note de bas de page ainsi libellée : « Nous appelons ici invariable non-seulement une fonction dont la forme est invariable par les substitutions des racines entre elles, mais encore celle dont la valeur numérique ne varierait pas par ces substitutions. Par exemple, si $Fx = 0$ est une équation, Fx est une fonction des racines qui ne varie par aucune permutation.

Quand nous disons qu'une fonction est rationnellement connue, nous voulons dire que sa valeur numérique est exprimable en fonction rationnelle des coefficients de l'équation et des quantités adjointes. »

Lorsque GALOIS parle, comme ci-dessus, de quantités adjointes, il entend une ou toutes les racines d'une équation auxiliaire ou encore la valeur numérique d'une fonction des racines. Il examine alors comment évolue le groupe de permutations des racines, après adjonction de ces quantités, et constate que deux choses peuvent se produire, à savoir que le groupe de l'équation n'est pas changé ou qu'au contraire, il se partage en p groupes (que nous appellerions plutôt sous-groupes)...

⁷ GALOIS utilise le mot *substitution* dans le sens actuel de *permutation*.

Permutations paires

GALOIS, dans le courant de son mémoire, constate qu'on peut ne considérer que des groupes qui ne contiennent que des **permutations paires**.

En fait, toute permutation peut se décomposer en cycles et tout cycle, en transpositions. Une transposition est une permutation qui « échange exactement deux objets et laisse fixes tous les autres ». La parité du nombre de transpositions ne dépend pas de la décomposition en question. Si ce nombre est pair, la permutation est dite paire, sinon, impaire. Ainsi, par exemple,

$$\begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & b \\ b & \longrightarrow & c \\ c & \longrightarrow & d \\ d & \longrightarrow & a \end{array}$$

peut encore s'écrire $(abcd)$ qui est un cycle. Ou encore,

$$\begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & b \\ b & \longrightarrow & c \\ c & \longrightarrow & a \\ d & \longrightarrow & d \end{array}$$

peut s'écrire $(abc)(d)$ ou, plus simplement (abc) ; on n'écrit pas les lettres qui ne « bougent » pas. Autre exemple :

$$\begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & b \\ b & \longrightarrow & c \\ c & \longrightarrow & a \\ d & \longrightarrow & e \\ e & \longrightarrow & f \\ f & \longrightarrow & g \\ g & \longrightarrow & d \end{array}$$

s'écrit $(abc)(defg)$; elle est ainsi composée de deux cycles.

On voit facilement que ces permutations peuvent alors se décomposer en transpositions, de la manière suivante

$$\begin{array}{lll} (abcd) & = & (ad) \circ (ac) \circ (ab) & 3 \text{ transpositions : permutation impaire.} \\ (abc) & = & (ac) \circ (ab) & 2 \text{ transpositions : permutation paire.} \\ (abc)(defg) & = & (ac) \circ (ab) \circ (dg) \circ (df) \circ (de) & 5 \text{ transpositions : permutation impaire.} \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{Sym}(m)$ (*symétrique m*), qui comporte les $m!$ permutations de m lettres, comprend $\frac{m!}{2}$ permutations paires et autant de permutations impaires. L'ensemble des $\frac{m!}{2}$ permutations paires forme le sous-groupe (d'indice 2) de $\mathcal{Sym}(m)$, qu'on appelle sous-groupe *alterné n*, noté $\mathcal{Alt}(m)$.

Sous-groupe normal

GALOIS parle, lui, de *décomposition propre*. Écoutons-le.

« ... En d'autres termes, quand un groupe G en contient un autre H , le groupe G peut se partager en groupes⁸, que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution⁹;

⁸ Nous dirions, nous, en langage moderne, en « éléments d'une partition ». Il s'agit évidemment de ce que nous appelons classes latérales gauches et droites, qui ne sont pas des groupes au sens moderne du terme.

⁹ Voir une note précédente, en ce qui concerne le vocable « substitution ». Quant à la notation, nous écririons, de nos jours, $G = H + Hs + Hs' + \dots$

en sorte que

$$G = H + HS + HS' + \dots$$

Et aussi il peut se décomposer en groupes qui ont tous les mêmes substitutions, en sorte que

$$G = H + TH + T'H + \dots$$

Ces deux groupes de décompositions ne coïncident pas ordinairement. Quand ils coïncident, la décomposition est dite *propre*. »

Nous disons également, de nos jours, que le sous-groupe H est alors un **sous-groupe normal**.

Groupe simple

Tout groupe qui n'a pas de sous-groupe normal, autre que l'identité et lui-même, est dit **simple**. Ces groupes ont acquis une grande importance en théorie des groupes. En effet, en 1854, CAYLEY, annonce, dans le *Philosophical Magazine*, vol. 7, son intention de classer tous les groupes abstraits d'ordres donnés. Au fur et à mesure que les travaux sur le sujet avancent, on se rend de plus en plus compte que le problème est pratiquement sans espoir. Certains mathématiciens, qui traitaient la question, ont alors l'idée de l'attaquer d'une autre manière en remarquant que les groupes simples sont fondamentaux pour aborder le problème de CAYLEY (M. BALLIEU [1972]). On peut les voir comme le « matériau de base » qui va servir à construire n'importe quel groupe fini. Commence alors une tentative de classification de tous les groupes simples finis, tentative qui aboutit dans le courant des années dix-neuf cent quatre-vingt à ce qu'on nomme parfois le « *enormous theorem* », dont la démonstration est l'œuvre de nombreux mathématiciens et comporte plus de quinze mille pages. Voici son énoncé tel qu'on le trouve notamment dans R. SOLOMON [1995].

Soit G un groupe simple fini, alors G est l'un des groupes suivants :

1. un groupe cyclique d'ordre premier Z_p ;
2. un groupe alterné A_n , $n \geq 5$;
3. un groupe linéaire classique $\text{PSL}(n, q)$, $\text{PSU}(n, q)$, $\text{PSp}(2n, q)$ ou $\text{P}\Omega^\epsilon(n, q)$;
4. un groupe *twisted* de type Lie (il y en a dix « familles ») ;
5. un groupe simple sporadique (Mathieu, Janko, Conway, ...)

Mais lisons encore un peu le texte de GALOIS,

« Il est aisé de voir que, quand le groupe d'une équation n'est susceptible d'aucune décomposition propre¹⁰, on aura beau transformer cette équation, les groupes des équations transformées auront toujours le même nombre de permutations.

Au contraire, quand le groupe d'une équation est susceptible d'une décomposition propre¹¹, en sorte qu'il se partage en M groupes de N permutations, on pourra résoudre l'équation donnée au moyen de deux équations : l'une aura un groupe de M permutations, l'autre un de N permutations. »

C'est entre autres parce qu'à partir de $n = 5$, $\text{Alt}(n)$ est un groupe simple, que la théorie de GALOIS règle définitivement, par la négative, le problème de la solution des équations algébriques par radicaux.

¹⁰ Ce qui se traduit, en langage moderne, par « est un groupe simple ».

¹¹ C'est-à-dire « n'est pas un groupe simple ».

LES CONIQUES DÉCOUVERTES PAR LA VUE

« L'ellipse, je me propose de l'appeler ligne en œuf, puisqu'elle est identique à un œuf. »

« En fait, je suis d'avis que, même en l'absence de texte, la vue de la figure devrait suffire pour faire comprendre. »

DÜRER

« Théorème, du grec *theorema*, sujet de contemplation, de méditation. »

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une découverte des trois types de coniques, de leur définition en termes de foyers et directrices, et de leurs axes de symétrie. Nous arrivons aussi pour l'ellipse à sa définition dite *du jardinier*, et pour l'hyperbole à sa définition s'appuyant sur la différence des distances de chaque point de la courbe aux foyers.

Cet exposé résulte du projet d'étudier les sections d'un cône par un plan à l'aide de courbes de niveau. Une fois celles-ci dessinées, l'essentiel de la démarche consiste à les regarder et à commenter ce que l'on voit. En particulier nous ne recourons à aucune équation. Ajoutons, pour être tout-à-fait clair et honnête, que les coniques ainsi redécouvertes ne sont pas les sections du cône lui-même, mais bien les projections orthogonales de celles-ci sur un plan horizontal.

Dans son ouvrage intitulé *Underweysung der messung*, A. DÜRER étudiait déjà les sections coniques à l'aide de projections orthogonales et de courbes de niveau (voir A. DÜRER, [1525]). Son objectif était de donner une construction des sections elles-mêmes, et non d'en établir les propriétés. Curieusement, et bien que sa construction de l'ellipse soit sans défaut dans son principe, il aboutit à la constatation erronée que l'ellipse a la forme d'un œuf. Il était donc persuadé qu'elle n'a qu'un axe de symétrie (comme quoi, le regard peut être trompeur !). Le lecture de DÜRER, dont par ailleurs les figures ont inspiré les nôtres, peut être un complément intéressant à la présente étude.

2 Un cône vu de face et du dessus

Sur la figure 1, le segment TU schématise une tablette horizontale, vue par un observateur dont les yeux se trouvent à sa hauteur. C'est à cause de cette circonstance que la tablette est vue comme un segment. Sur cette tablette, on a dessiné, schématiquement aussi, un cône SAB en équilibre sur son sommet S . Ce cône, vu de face, a l'apparence d'un triangle isocèle. La figure 1 montre aussi le cône vu du dessus : il apparaît alors comme un cercle. On prendra garde que la vue du dessus du cône

est celle qui apparaît au dessous sur la figure. Pour éviter toute méprise, nous dirons dorénavant que la vue de face est une projection sur un plan vertical, et la vue du dessus une projection sur un plan horizontal (celui de la tablette).

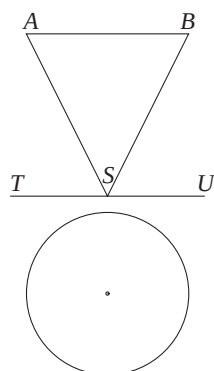


Fig. 1

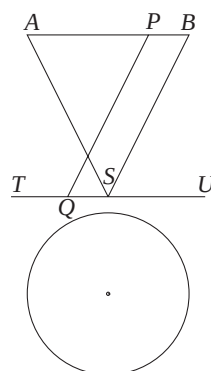


Fig. 2

La figure 2 montre le même objet, avec en plus un plan QP qui coupe le cône. Ce plan est également vu comme un segment. Il est parallèle à la génératrice SB du cône.

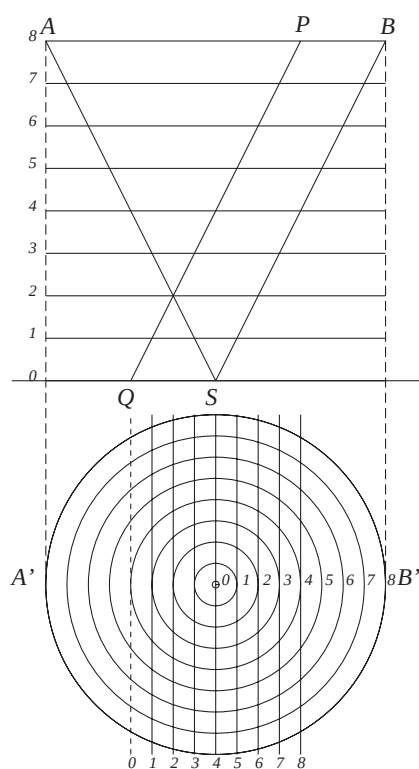


Fig. 3

Notre idée est d'explorer cette situation à l'aide de courbes de niveau. Sur la figure 3, nous avons dessiné des plans horizontaux « équidistants » numérotés de 1 à 8 selon leur niveau. Chacun d'eux est aussi vu sur le plan vertical comme un segment de droite horizontale.

Les intersections de ces plans avec le cône sont des courbes de niveau du cône. Sur le plan horizontal, elles apparaissent comme des cercles concentriques dont les rayons sont en progression arithmétique. Ce fait est dû à ce que les génératrices du cône sont des droites. Les intersections de ces plans avec le plan PQ sont des courbes de niveau de ce plan. Elles apparaissent sur le plan horizontal comme des droites parallèles équidistantes. La droite du niveau 0 est représentée en trait pointillé.

Pour faciliter le va-et-vient entre les projections verticale et horizontale, on joint souvent par une ligne de rappel les points qui se correspondent de l'une à l'autre. Ainsi, sur la figure 3, nous avons relié par une ligne en trait interrompu les points A et A' , ainsi que B et B' .

Une courbe de niveau du cône et une courbe de niveau du plan ne peuvent se couper que si elles sont au même niveau. Leurs points d'intersection appartiennent à la fois au plan et au cône. Ce sont donc des points non seulement des deux courbes de niveau, mais aussi de la figure d'intersection du cône et du plan.

Ci-dessous, lorsque nous évoquerons les courbes (ou les droites, ou les cercles) de niveau, il s'agira des courbes qui appartiennent au plan horizontal. C'est de la même façon que l'on appelle courbes de niveau les courbes qui sont dessinées sur une carte, et non les courbes qui leur correspondent sur le terrain.

3 La parabole

En travaillant sur la figure 3, déterminons quelques points d'intersection du cône et du plan. Sur la figure 4, les projections de ces points sur le plan horizontal sont marquées d'un point noir. Elles esquissent une courbe, qui serait une courbe continue si tous les points de la section y étaient représentés.

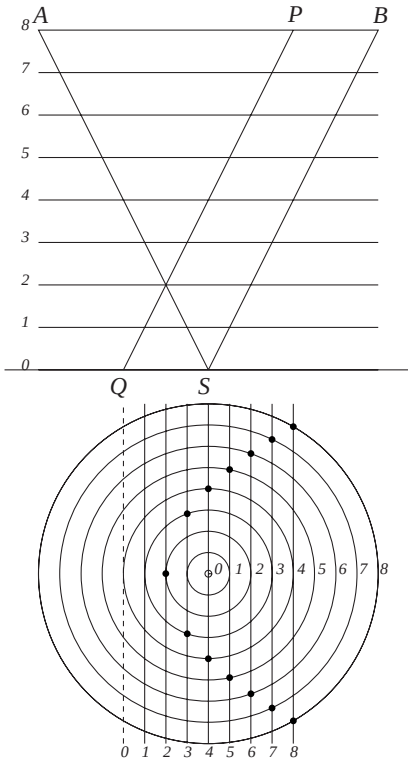


Fig. 4

Cette courbe possède un axe de symétrie passant par le centre des cercles et perpendiculaire aux droites de niveau. L'existence de cette symétrie n'est pas étonnante, puisque la configuration formée par le cône et le plan de section possède un plan de symétrie frontal passant par le sommet du cône.

Étant donné que l'inclinaison du plan de section est la même que celle d'une génératrice du cône, l'écart entre deux droites de niveau successives est égal à l'écart (la différence des rayons) entre deux cercles de niveau successifs. De ce fait, chacun des points de la courbe est à égale distance du centre des cercles et de la droite de niveau 0. Cette propriété caractérise la courbe. En effet, tout point qui n'y satisfait pas appartient à deux courbes de niveaux différents, et donc ne peut pas être vu dans le plan horizontal comme un point d'intersection.

Une courbe ainsi définie porte le nom de *parabole*. Par définition, le centre des cercles est son *foyer*, et la droite de niveau 0 est sa *directrice*. Si on remplace le cône que nous avons dessiné par un cône de hauteur infinie, alors la parabole devient une courbe non bornée.

Si nous recommençons la même construction avec n'importe quel plan parallèle au plan QP , nous obtenons encore dans le plan horizontal une parabole possédant le même foyer, mais une autre directrice.

4 L'ellipse

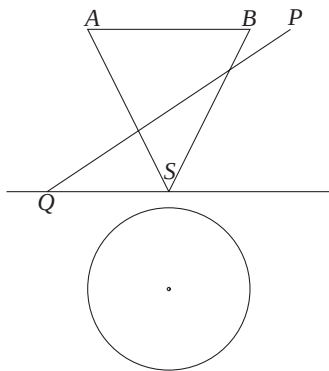


Fig. 5

Cherchons maintenant à voir ce qui se passe si nous considérons un plan de section qui ne soit plus parallèle à SB . Examinons donc un cône et un plan disposés comme sur la figure 5, de sorte que leur intersection forme une courbe bornée (l'inclinaison de QP est plus petite que celle de SB). Cette courbe forme une boucle, c'est-à-dire qu'elle se referme sur elle-même. Étudions, dans ce cas-ci aussi, la projection de la courbe sur le plan horizontal. La figure 6 montre quelques points de cette courbe.

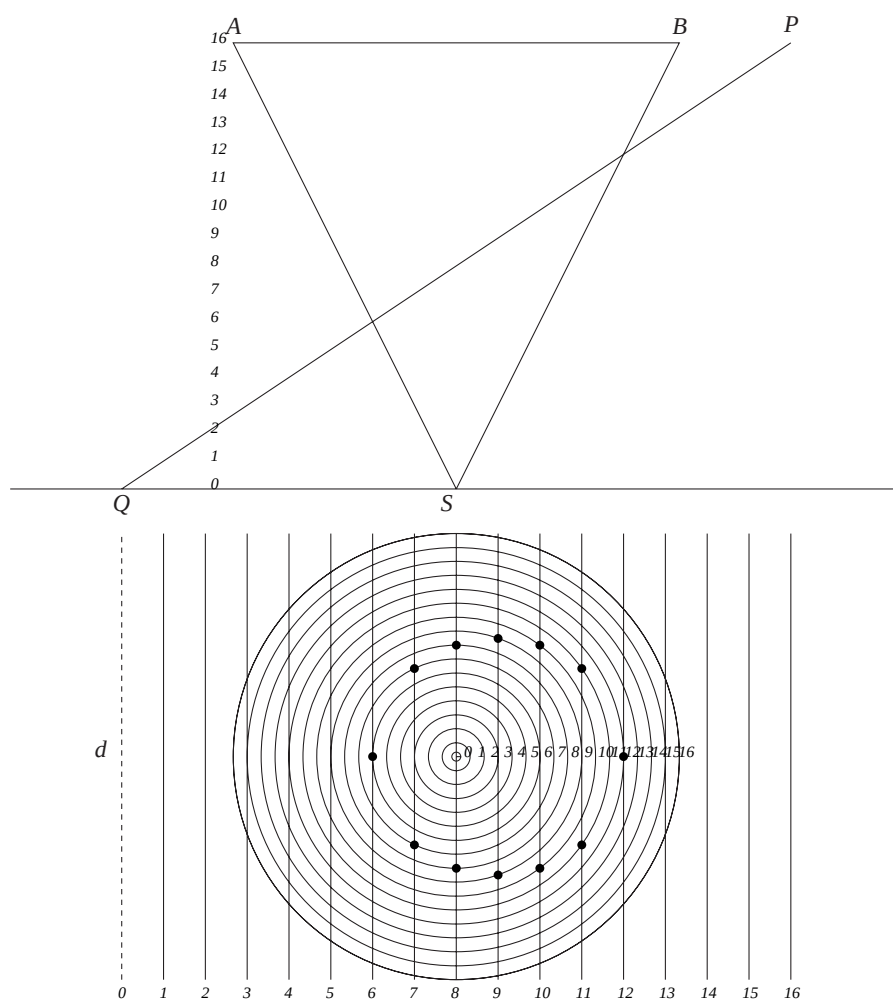


Fig. 6

Montrons que, pour chaque point de celle-ci, sa distance au centre des cercles est dans un rapport constant avec sa distance à la droite de niveau 0. Ce rapport est constant en raison du fait que tout point de la courbe est à l'intersection d'une droite et d'un cercle portant le même numéro. En effet, dans le plan horizontal, en partant d'un point quelconque, il faut franchir autant de cercles pour aller jusqu'au centre que de droites pour aller jusqu'à la droite de niveau 0. Le rapport en question est égal au rapport de l'écart entre deux cercles successifs et l'écart entre deux droites de niveau successives. Il est inférieur à l'unité du fait des inclinaisons respectives de QP et de SB .

Une telle courbe s'appelle *ellipse*. Le centre des cercles concentriques porte ici aussi le nom de *foyer* de l'ellipse, et la droite de niveau 0 porte le nom de *directrice*.

Comme la parabole, l'ellipse possède un axe de symétrie : c'est la droite qui passe par le foyer et qui est perpendiculaire à la directrice. Nous verrons plus tard qu'elle en possède un second.

Enfin, on réalise sans peine aussi que *toute* intersection bornée du cône par un plan se voit en projection, sur le plan horizontal, comme une ellipse dont le centre des cercles est encore un foyer, et dont la droite de niveau 0, variable selon le plan de section choisi, est une directrice.

5 Vers l'hyperbole

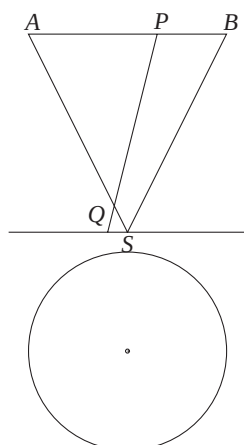


Fig. 7

Inclinons maintenant le plan de section différemment, comme sur la figure 7. La courbe d'intersection apparaît alors comme non bornée dès que l'on envisage un cône de hauteur infinie. Cette courbe se projette sur une courbe elle-même non bornée, celle que suggère la figure 8.

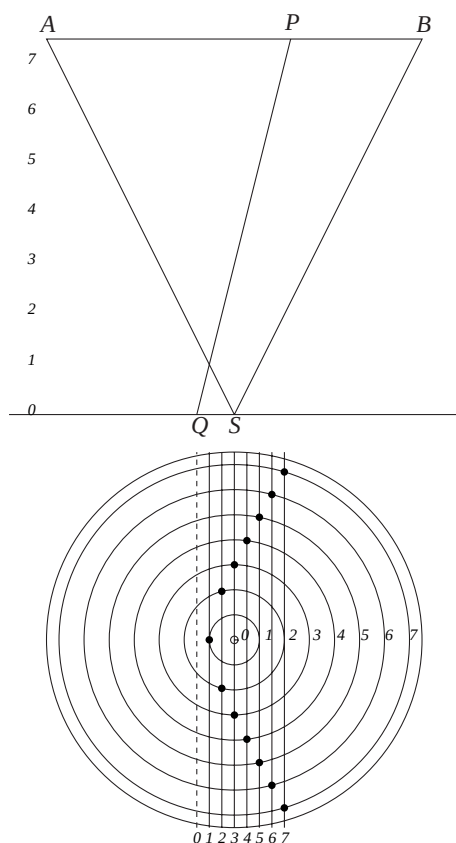


Fig. 8

Ceci dit, nous pouvons transposer à cette figure une des observations que nous avons faites à propos de l'ellipse. Pour chaque point de la courbe, le rapport de sa distance au foyer à sa distance à la directrice est constant, mais supérieur à 1. La courbe trouvée porte le nom de *branche d'hyperbole*. Pourquoi *branche*? Le lecteur que la chose intrigue ne tardera à avoir la réponse. Remarquons que la courbe obtenue possède un axe de symétrie, mais certainement pas deux. Nous reviendrons plus tard sur cette question de la symétrie.

6 L'hyperbole

Considérons maintenant, comme sur la figure 9, un deuxième cône de même sommet que le premier mais orienté vers le bas. On peut lui faire correspondre les mêmes cercles de niveau que pour le cône de départ (voir figure 8), à condition d'affecter chaque niveau d'un signe moins.

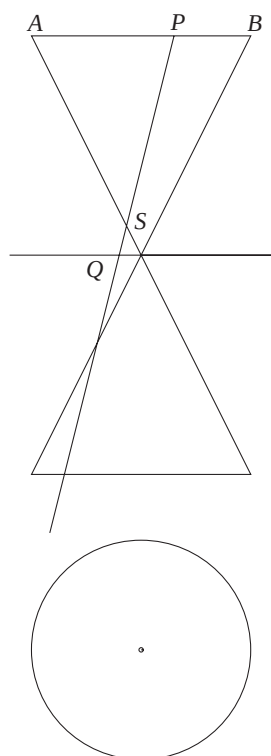


Fig. 9

Pour nous conformer au vocabulaire mathématique en usage, nous appellerons dorénavant *nappe d'un cône* ce que nous appelions jusqu'ici *cône* ; et nous appellerons *cône* l'ensemble des deux nappes opposées par le sommet, telles qu'on les voit sur la figure 9. Ceci dit, on voit sur la figure 9 que le plan QP coupe les deux nappes du cône. Étudions donc la projection sur le plan horizontal de la section du cône entier.

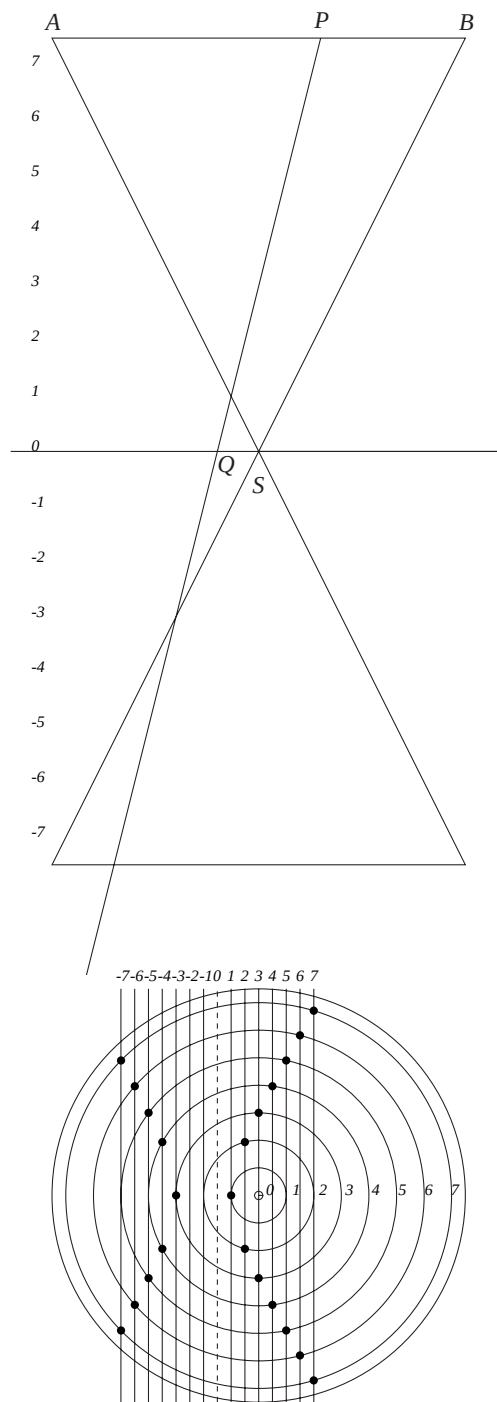


Fig. 10

La figure 10 montre la section complète. Elle est formée de deux courbes qui, considérées ensemble, constituent ce que l'on appelle une *hyperbole*. Ainsi, l'hyperbole comprend deux branches. On soupçonne qu'elle possède un deuxième axe de symétrie : nous regarderons cela ci-après.

Il est aisé de voir que l'hyperbole est le lieu des points dont les rapports des distances au foyer et à la directrice possède une valeur constante supérieure à 1.

7 L'ellipse a-t-elle deux axes de symétrie ?

Nous avons remarqué ci-dessus que l'ellipse a un axe de symétrie passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice. Mais en regardant la figure 6, on a l'impression qu'elle possède un deuxième axe de symétrie perpendiculaire au premier et passant à droite du foyer. Il s'agirait d'un axe que DÜRER n'aurait pas vu ! Qu'en est-il exactement ?

Mis à part le fait que l'ellipse nous donne l'impression d'avoir un deuxième axe de symétrie, nous ne voyons sur la figure aucun autre élément de symétrie par rapport à cet axe, sauf toutefois le réseau de lignes de niveau du plan de section. Peut-être, pour y voir plus clair, serait-il utile de compléter la figure pour y faire apparaître de nouvelles symétries ?

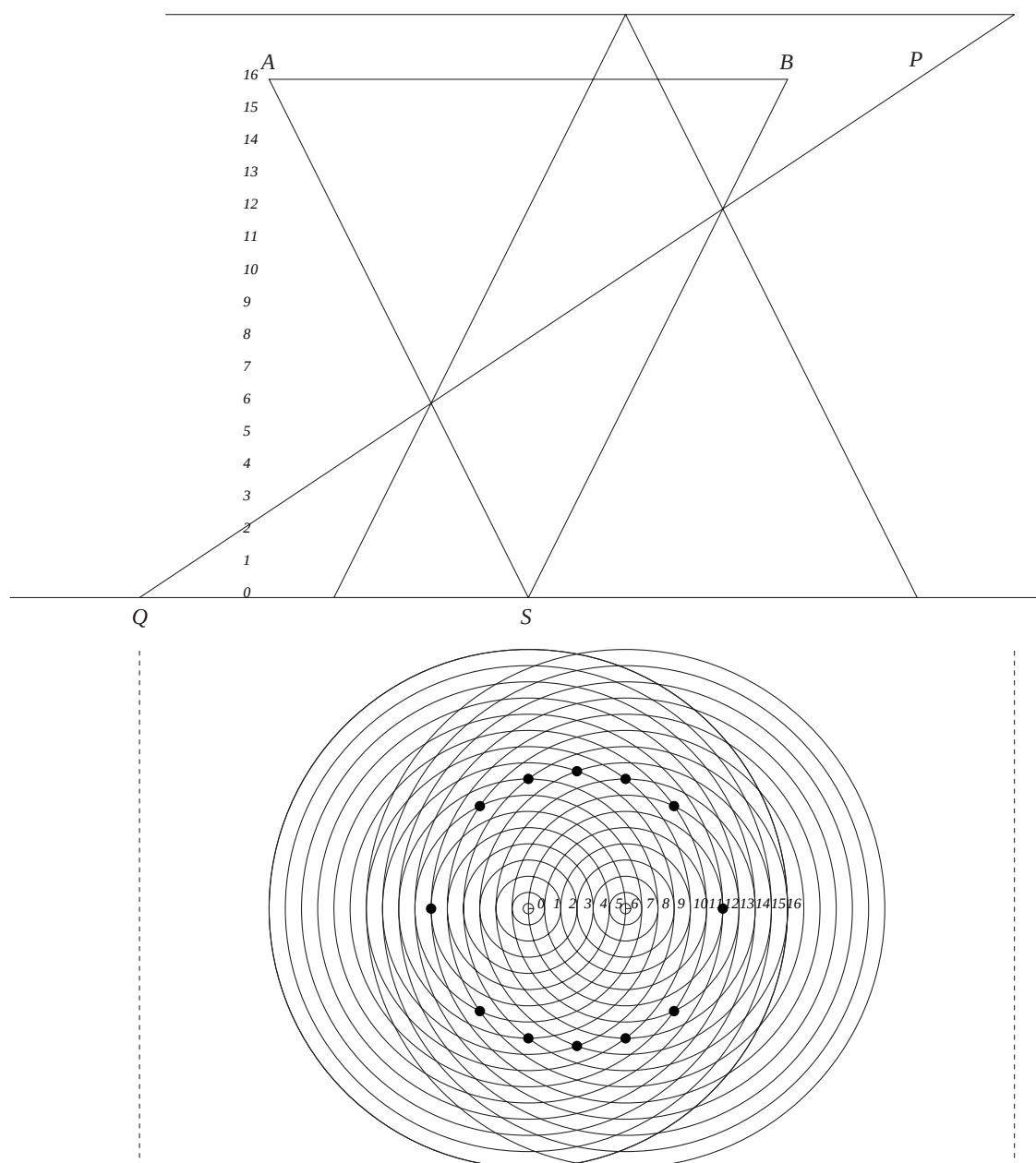


Fig. 11

Ce que nous allons proposer ne viendra sans doute pas à l'idée de tout le monde, car c'est un peu comme l'œuf de COLOMB. Mais c'est à force de se voir expliquer des œufs (!) de COLOMB qu'on finit par avoir assez d'imagination pour en dénicher soi-même.

Ceci dit, nous avons devant nous un cône, un plan et la section du cône par le plan. Serions-nous capables de trouver un deuxième cône qui, coupé par le même plan, aurait la même courbe d'intersection ? La figure 11 montre comment on peut réaliser cela.

Il faut que le deuxième cône (il n'est utile ici d'en dessiner qu'une seule nappe) soit identique au premier et que son axe soit vertical, comme était l'axe du premier. Et pour le positionner, il suffit de s'assurer qu'il a bien pour intersection avec le plan, la même courbe que le premier.

Nous avons dessiné les courbes de niveau du deuxième cône. La vue sur le plan horizontal fait apparaître un nouveau foyer de l'ellipse (projection du sommet du nouveau cône), et une nouvelle directrice (la vue sur le plan horizontal de l'intersection du plan de section avec le plan horizontal passant par le sommet du nouveau cône). Pour ne pas surcharger la figure, nous n'y avons pas reporté les lignes du niveau du plan de section.

La figure 11 fait effectivement apparaître pour l'ellipse un deuxième axe de symétrie, perpendiculaire au premier et passant par le point milieu des deux foyers. Ce point est appelé le *centre* de l'ellipse.

Mais cette figure nous montre encore autre chose, à savoir que l'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances aux deux foyers possède une valeur donnée constante. En effet, lorsqu'on passe d'un plan de niveau au suivant, par exemple en montant, le rayon du cercle de niveau du premier cône augmente d'une unité, tandis que celui du second diminue d'une unité. Sur notre figure, la somme constante des distances aux deux foyers vaut 18 fois la différence des rayons de deux cercles successifs.

8 Et l'hyperbole ?

Comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, l'hyperbole de la figure 10 semble bien avoir elle aussi un deuxième axe de symétrie. Qu'en est-il ?

La figure 12 montre comment l'introduction d'un deuxième cône identique au premier fait apparaître pour l'hyperbole un deuxième foyer, une deuxième directrice et un nouvel axe de symétrie. Le point milieu entre les foyers s'appelle ici aussi *centre* de l'hyperbole.

Enfin, on voit aussi sur la figure 12 que l'hyperbole est le lieu des points pour lesquels la valeur absolue de la différence des distances aux deux foyers est constante. Ceci est dû au fait que, lorsqu'on passe d'un plan de niveau au suivant, par exemple en montant, le rayon du cercle de niveau du premier cône augmente d'une unité, et en même temps celui du second augmente aussi d'une unité. Sur notre figure, la différence constante des distances aux deux foyers vaut, en valeur absolue, 2 fois la différence des rayons de deux cercles successifs.

Au terme de notre parcours, nous constatons que les projections sur un plan horizontal de *toutes* les sections possibles d'un cône par un plan sont des coniques admettant un même foyer : celui-ci est la projection du sommet du cône sur le plan horizontal. Ce qui varie d'un cas à l'autre, ce sont les positions d'un éventuel deuxième foyer et de la ou des directrices.

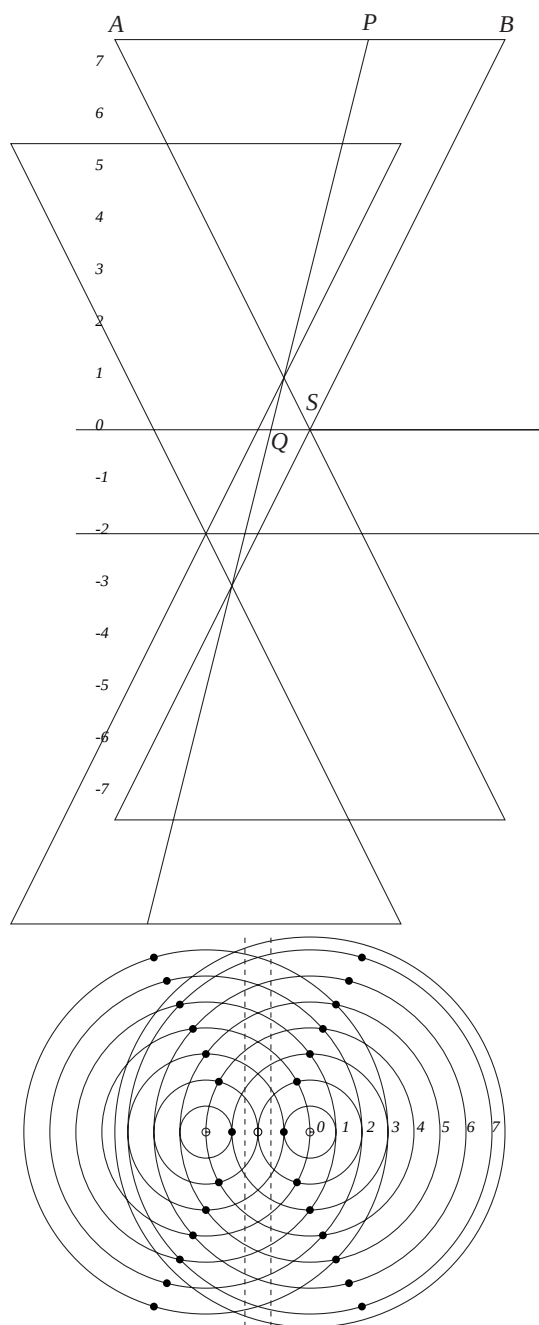
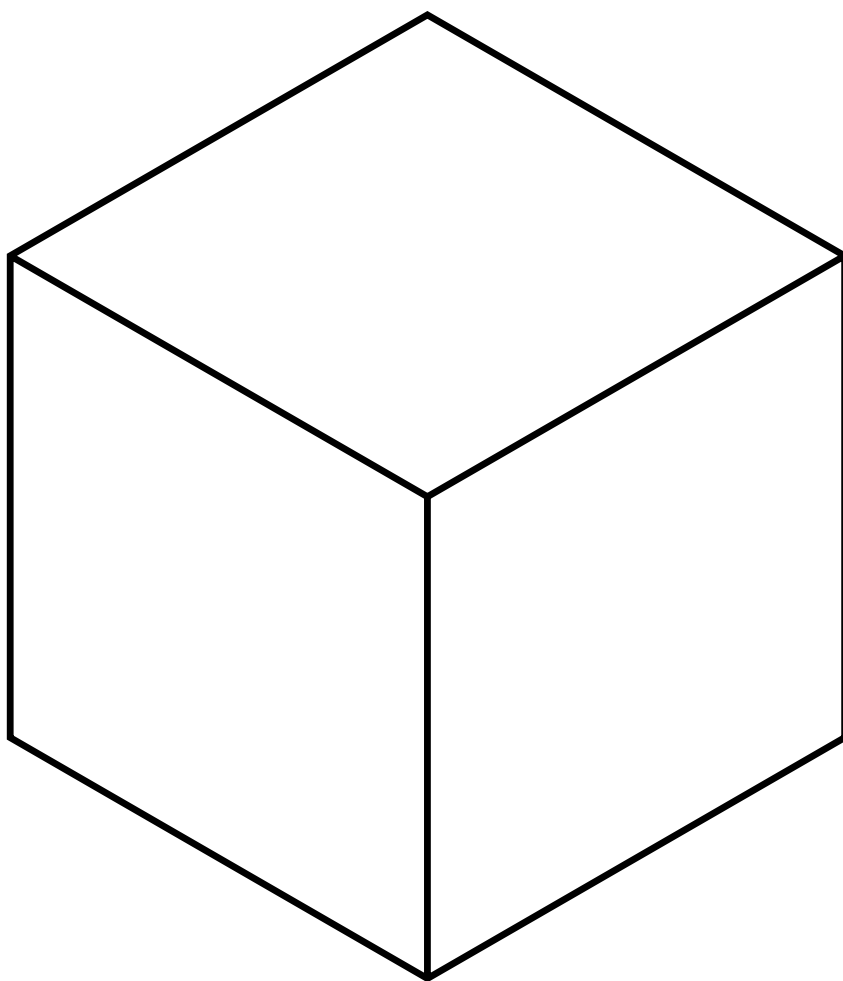
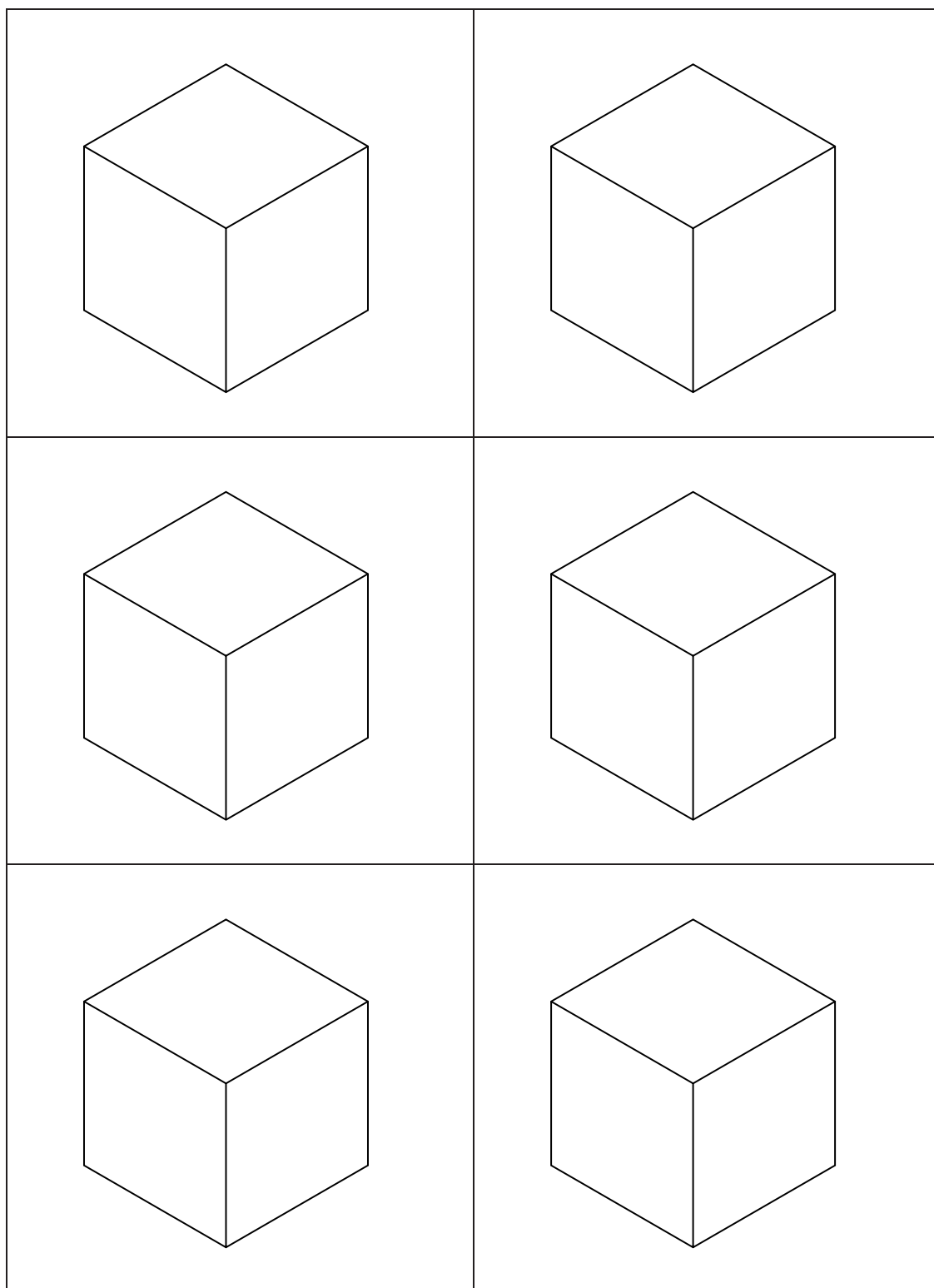


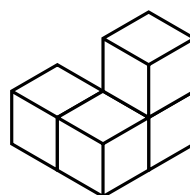
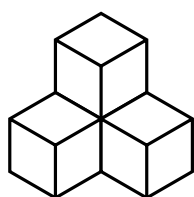
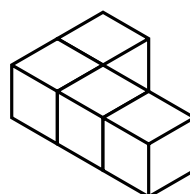
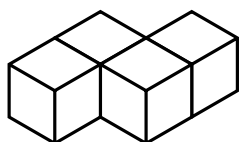
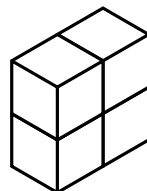
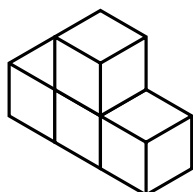
Fig. 12

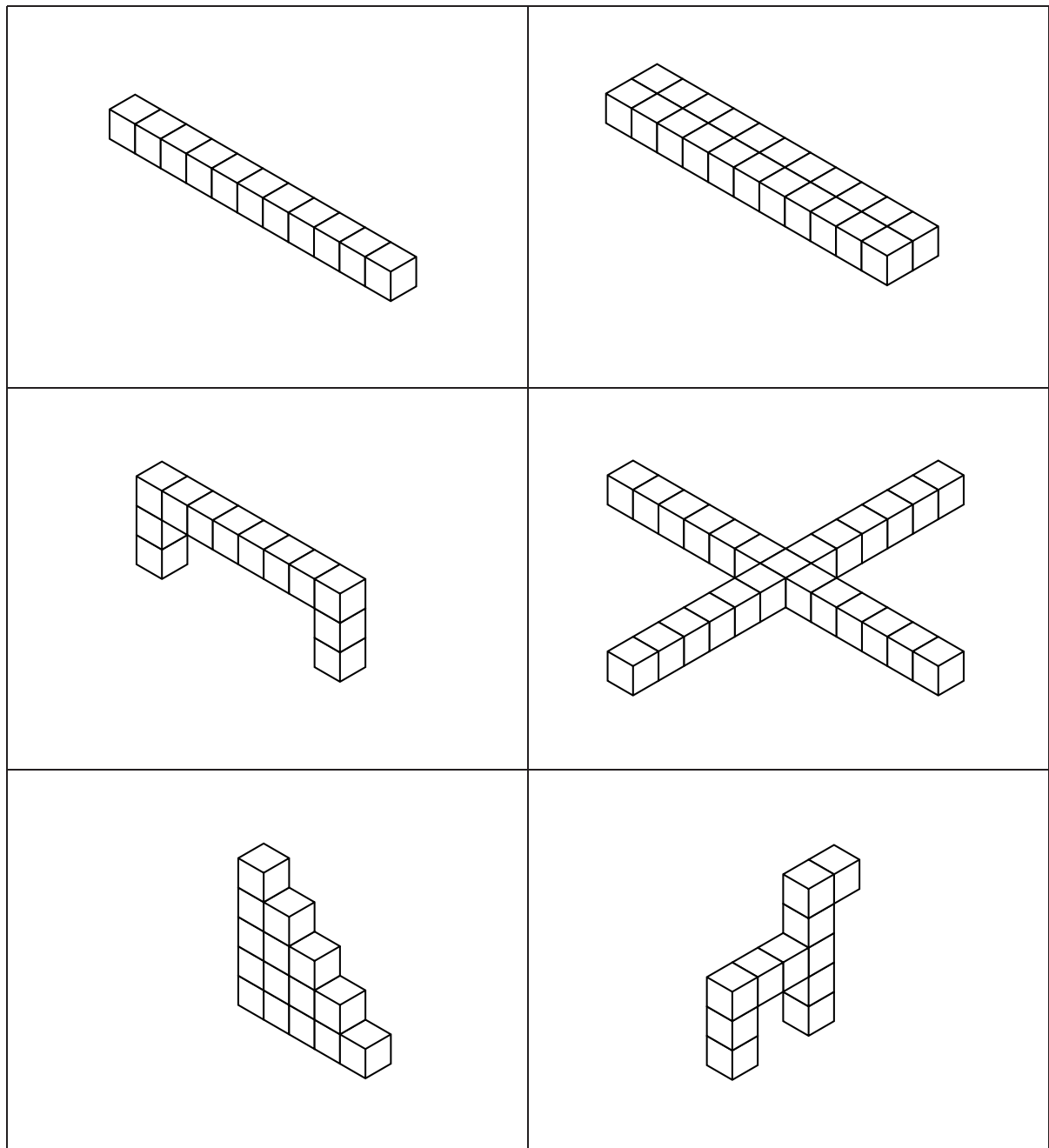
ANNEXE

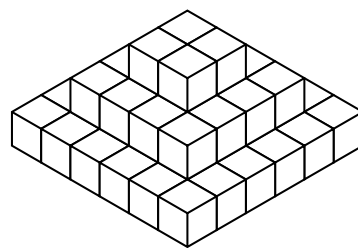
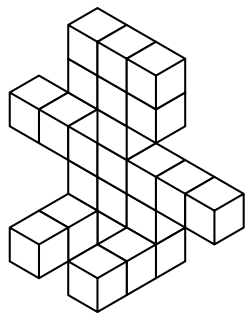
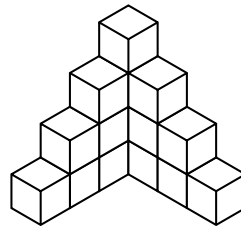
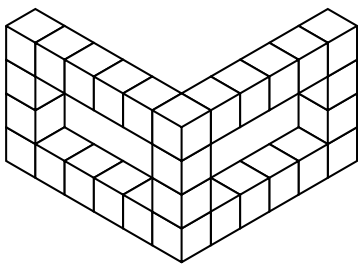
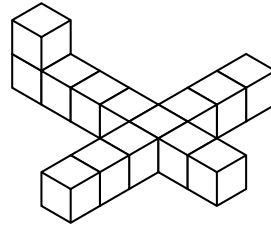
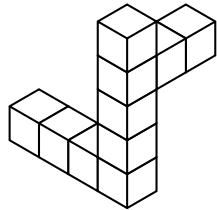
FICHES À PHOTOCOPIER

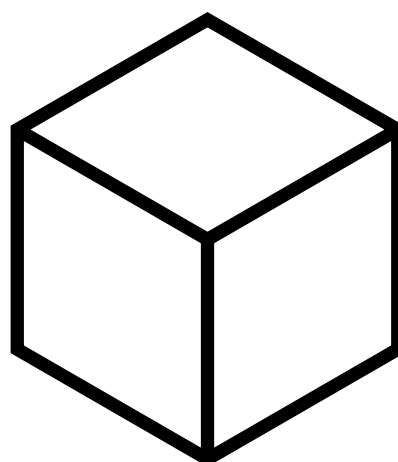
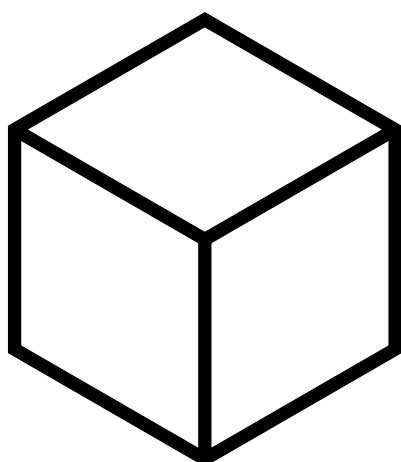
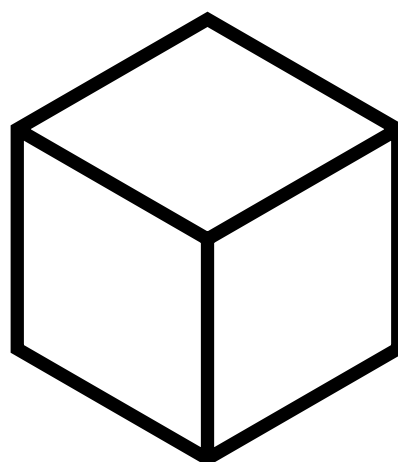
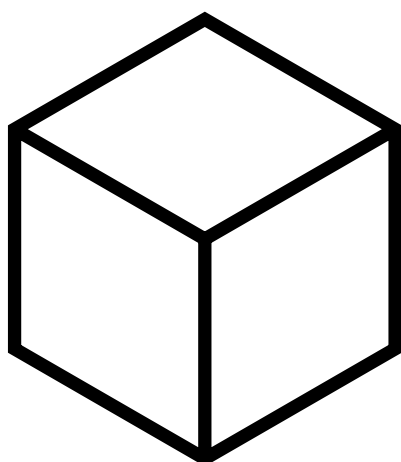
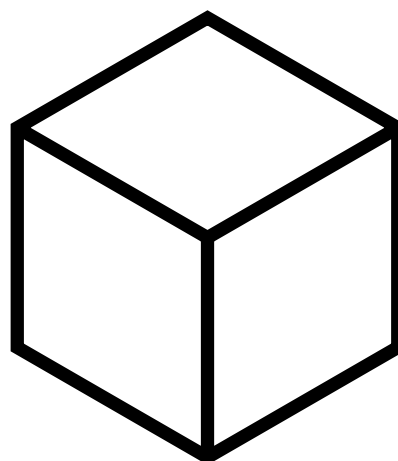
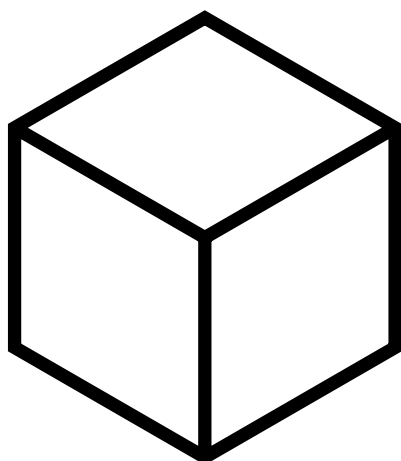


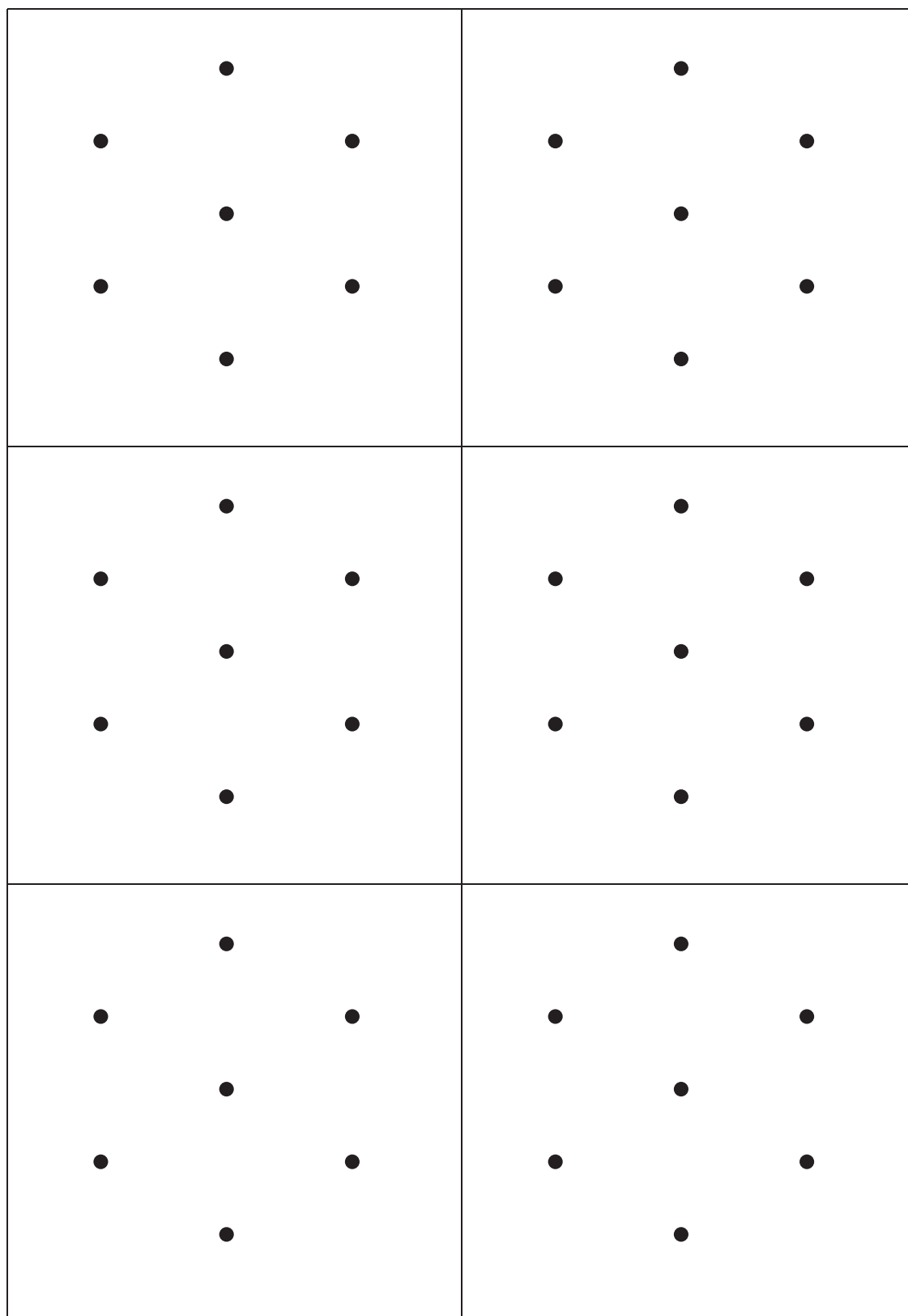


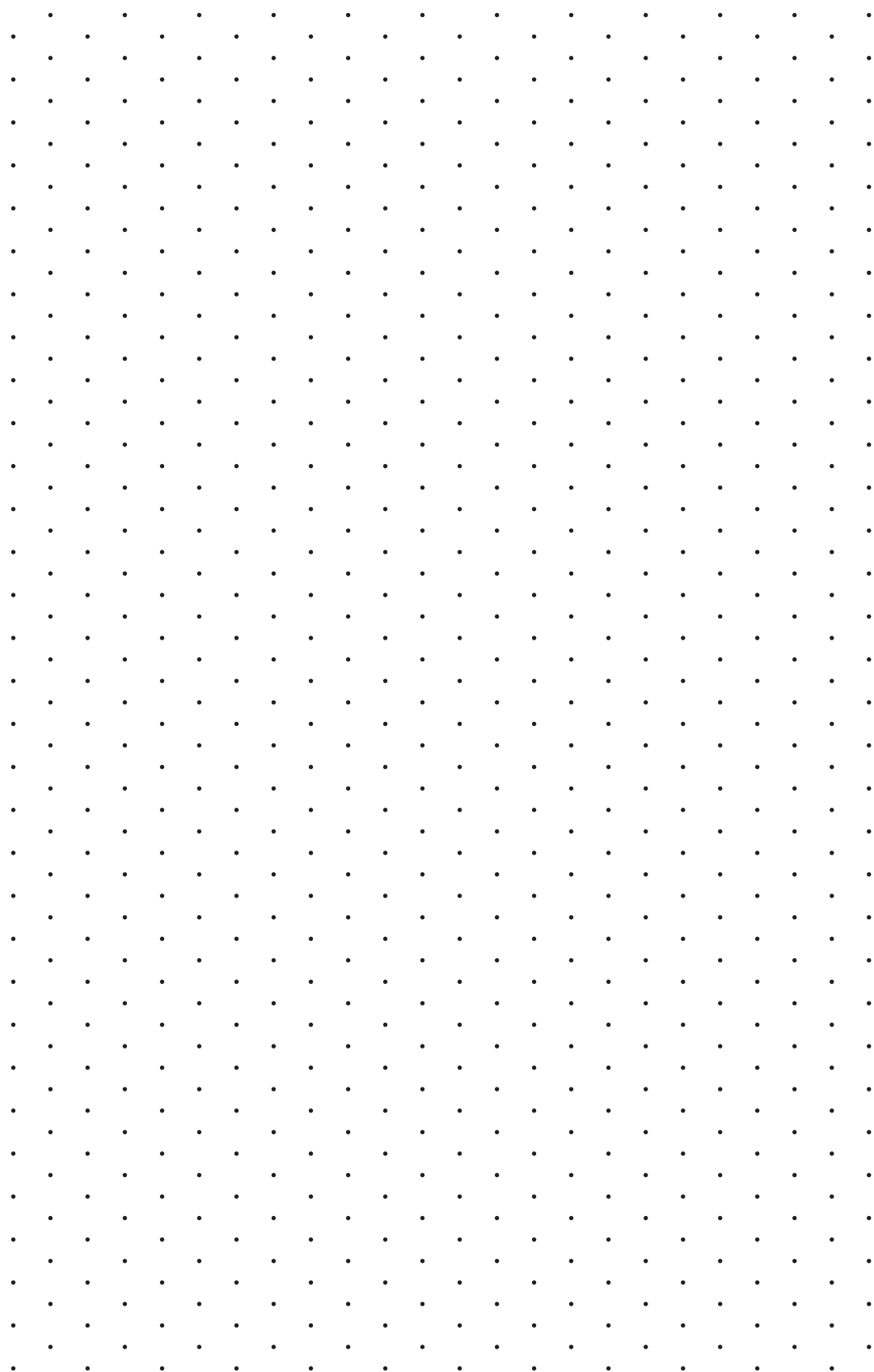




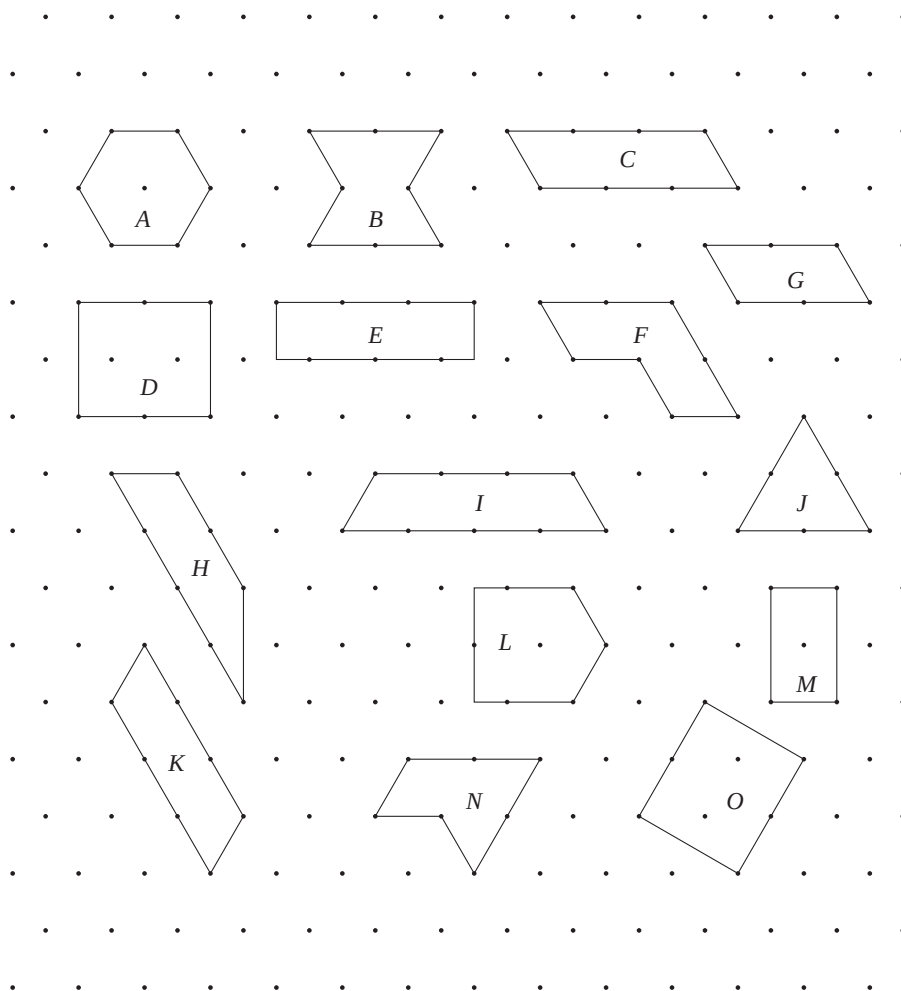




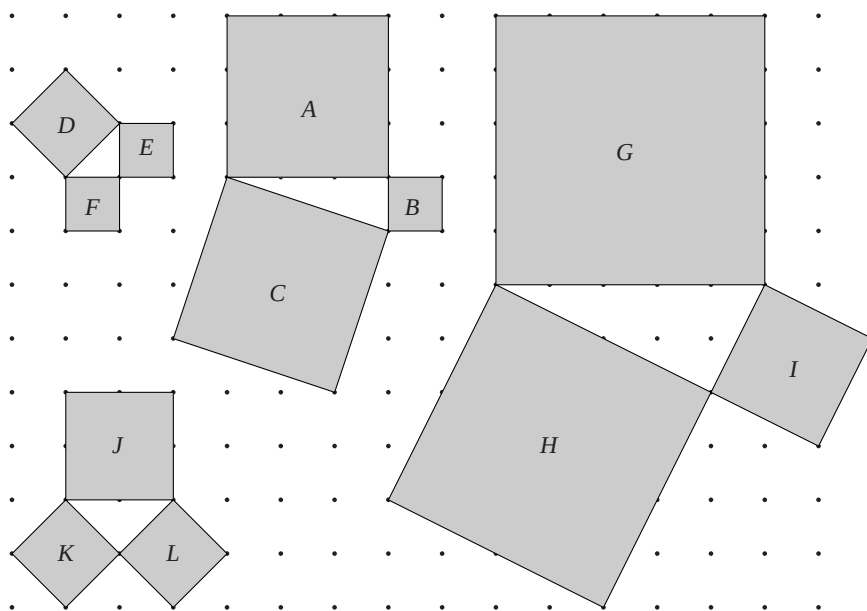




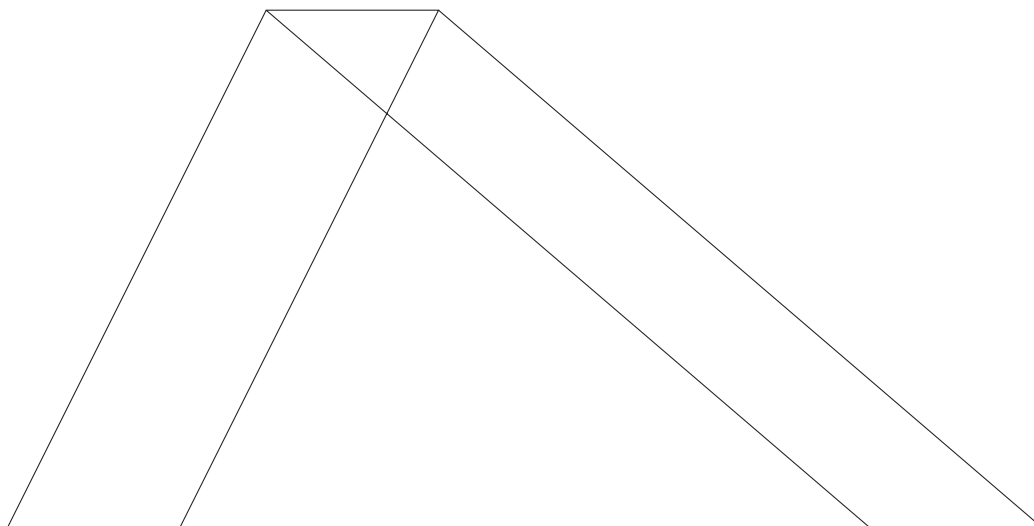
1. Quelles sont les figures qui ont même aire ?
2. Quelles sont celles qui ont le même périmètre ?



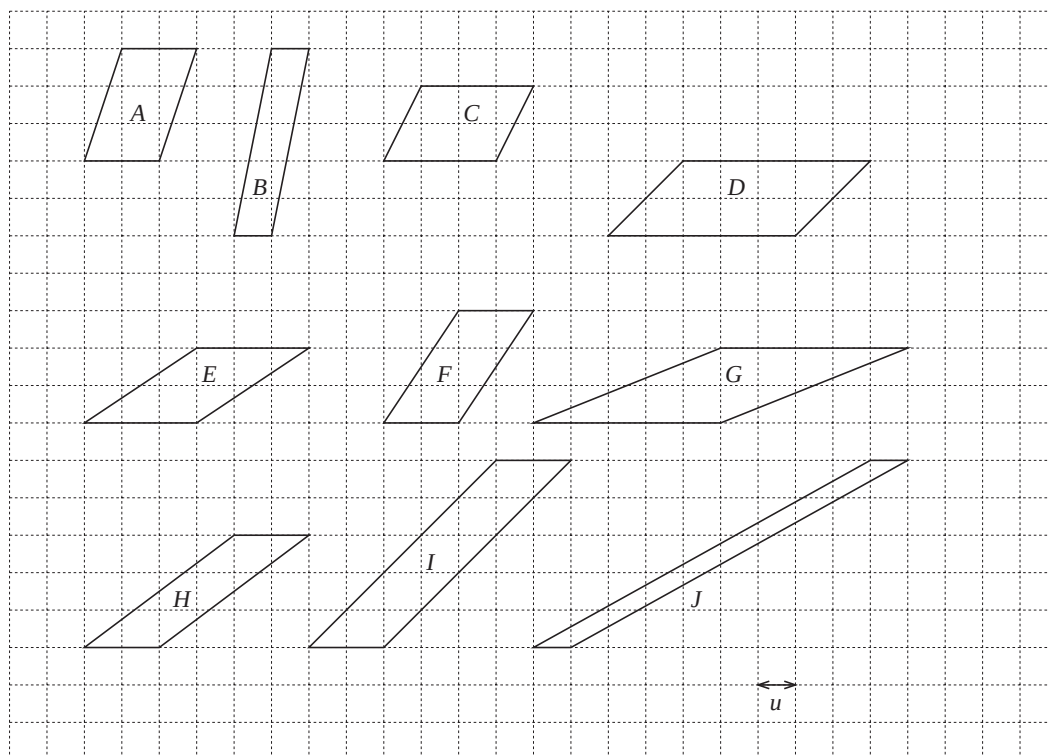
Y-a-t-il une relation entre les aires des carrés construits autour d'un même triangle ?



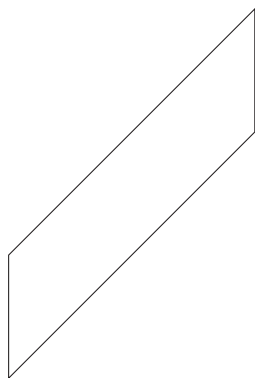
Ces deux parallélogrammes ont-ils la même aire ?



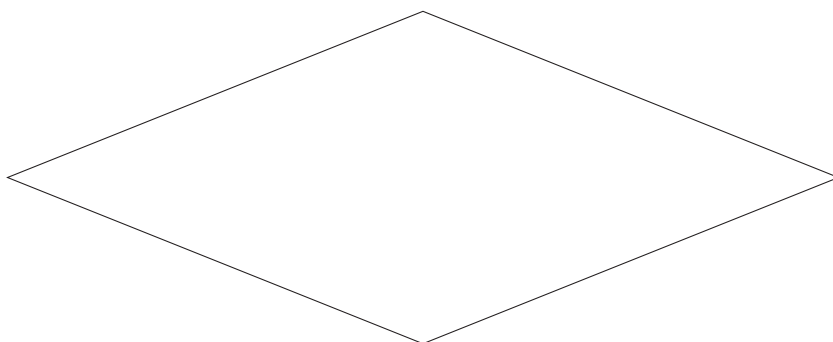
Pour chaque parallélogramme, dessiner un rectangle de même aire.



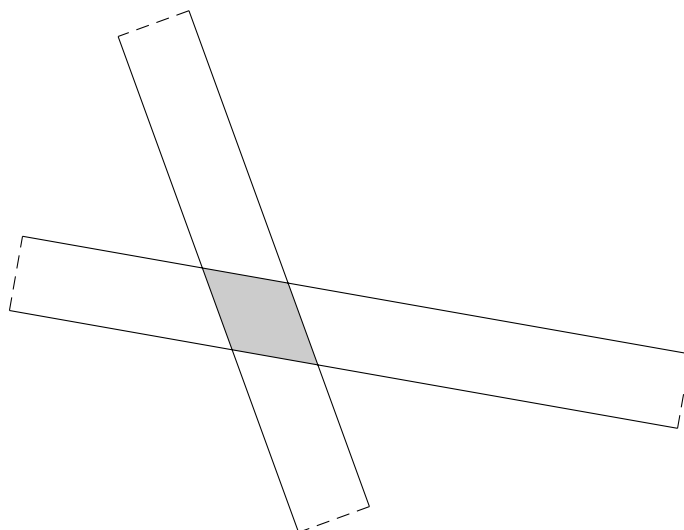
Est-il possible de dessiner deux rectangles distincts qui ont même aire que le parallélogramme de la figure ci-dessous ?

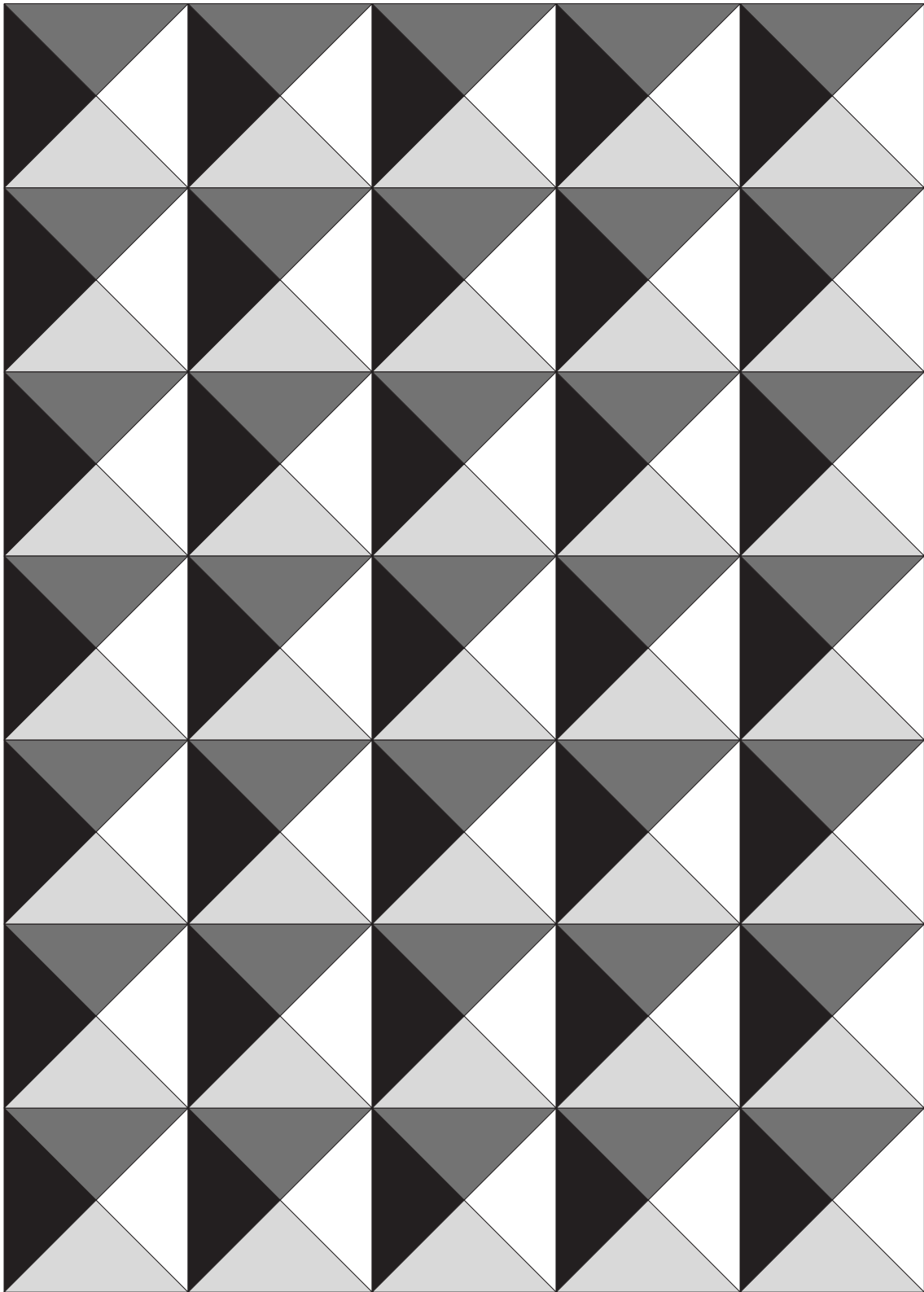


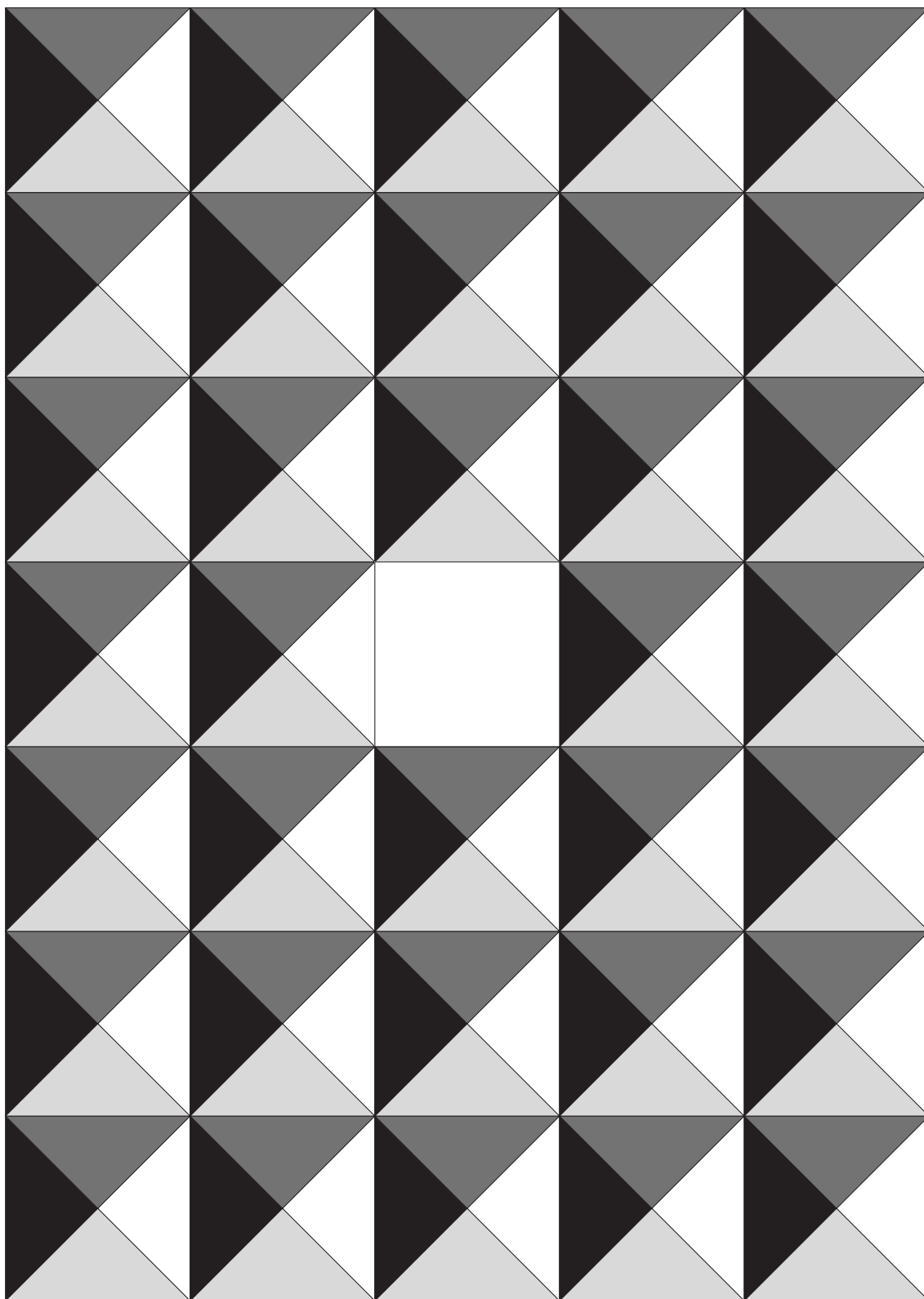
Est-il possible de dessiner deux rectangles distincts qui ont même aire que le losange ci-dessous ?
Imaginer des réponses avant de dessiner.

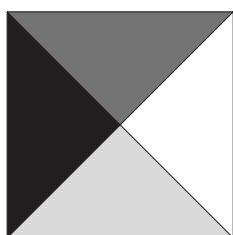


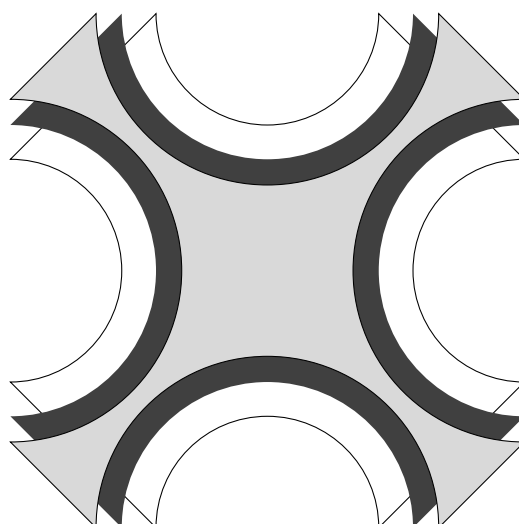
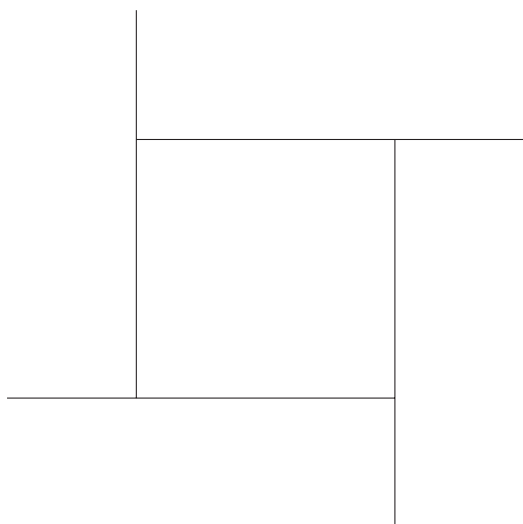
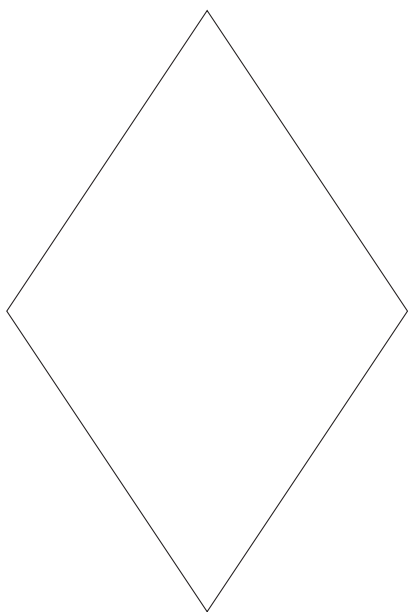
On croise deux bandes de papier de même largeur comme sur la figure. Quelle est la nature du quadrilatère qui se forme à l'intersection des deux bandes ?

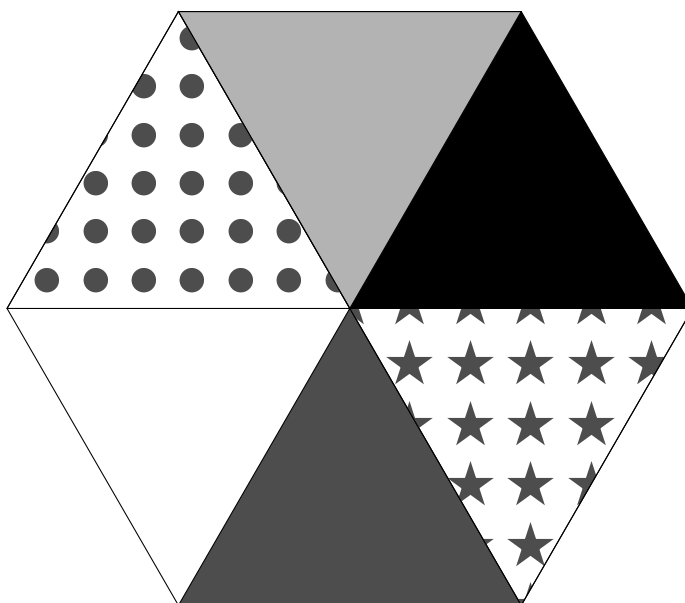
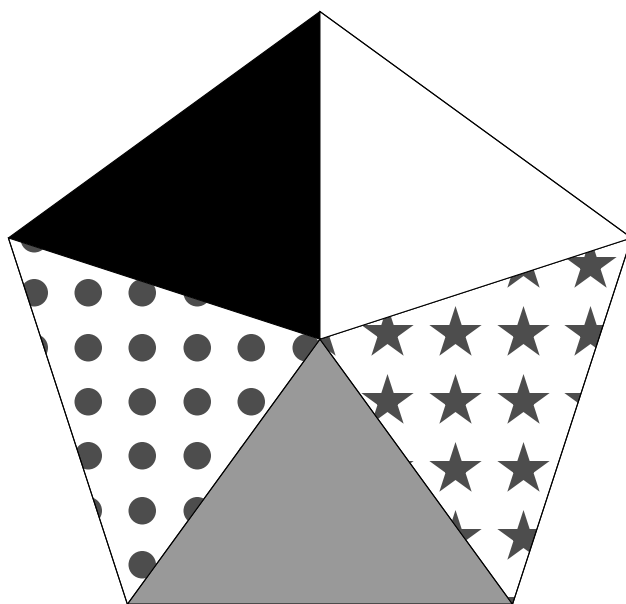












¶ Comment il ne peut exister plus de cinq corps réguliers.

Il convient maintenant de démontrer pourquoi il ne peut exister, dans la nature, plus de cinq corps ainsi formés, c'est-à-dire dont toutes les bases soient égales entre elles, d'angles solides et plans égaux, et semblablement de côtés égaux. Ceci est évident puisque, pour constituer chaque angle solide, la rencontre d'au moins 3 angles plans est nécessaire, deux angles plans, à eux seuls, ne pouvant constituer un angle solide. Parce que les 3 angles de tout hexagone équilatère sont égaux à 4 angles droits, et que dans l'heptagone, c'est-à-dire dans la figure de 7 côtés, et généralement dans toute figure d'un plus grand nombre de côtés, équilatère et équiangle, les 3 angles sont toujours supérieurs à 4 droits; que, d'autre part, il est prouvé par la 32^o du I^{er}¹ que chaque angle solide est inférieur à 4 droits, comme l'atteste aussi la 21^o du XI^o², pour ces raisons il est impossible que les 3 angles de l'hexagone, ou de l'heptagone, et généralement de quelque figure d'un plus grand nombre de côtés, équilatères et équiangles, puissent former un angle solide. Ceci prouve donc qu'aucune forme solide, équilatère et d'angles égaux, ne peut être formée de surfaces hexagonales ou de plus de côtés, puisque les 3 angles de l'hexagone équilatère et équiangle étant supérieurs à un angle solide, il s'ensuit que 4 ou davantage excéderont d'autant plus le dit angle solide. Ceci dit, si les 3 angles du pentagone équilatère et équiangle sont manifestement inférieurs à 4 droits, 4 de ces angles seraient supérieurs à 4 droits. Donc, des 3 angles d'un pentagone équilatère et équiangle, on peut former l'angle solide, mais de 4 de ses angles, ou plus, il serait impossible de former un angle solide. C'est pourquoi un seul corps est formé par des pentagones équilatères et équiangles; il est dit par les philosophes dodécaèdre ou encore corps des 12 pentagones, et les angles des pentagones, trois par trois, forment et contiennent tous les angles solides de ce corps. La raison qui a été donnée pour le pentagone existe de même pour les figures quadrilatères de côtés et d'angles égaux. Toute figure quadrangulaire, si elle est de côtés et d'angles égaux est, par définition, un carré dont les angles sont droits ainsi que le démontre la 32^o du I^{er}. De 3 angles d'une telle figure plane, il est donc possible de former un angle solide, mais de 4 ou davantage cela est impossible. Pour cette raison, avec cette figure plane, à la condition qu'elle soit équilatère et d'angles égaux, on peut former un solide, que nous appelons cube, et ce corps est constitué par 6 surfaces carrées, 12 côtés et 8 angles solides. Dans les triangles équilatères, 6 de leurs angles sont égaux à 4 droits selon la 32^o du I^{er}; donc moins de 6 feront moins de 4 droits, et plus de 6 seront supérieurs à 4 droits. Par conséquent, de 6 angles, ou plus, de semblables triangles, on ne peut pas constituer l'angle solide, mais on peut en former de 5 ou de 4 ou de 3 de ces angles. Sachant que 3 angles du triangle équilatère constituent un angle solide il sera possible d'en former le corps de 4 bases triangulaires, de côtés égaux, dit tétraèdre. Lorsque se réuniront 4 semblables triangles il se formera le corps de 8 bases, dit octaèdre. Si 5 triangles équilatères constituent un angle solide, on pourra obtenir alors, avec ses 20 bases triangulaires et de côtés égaux, le corps dit icosaèdre. Voilà la raison pour laquelle les corps réguliers sont de ce nombre et pourquoi ils sont ainsi. Pourquoi encore ils ne peuvent être davantage, ce qui se trouve pleinement démontré par ce que nous avons dit.

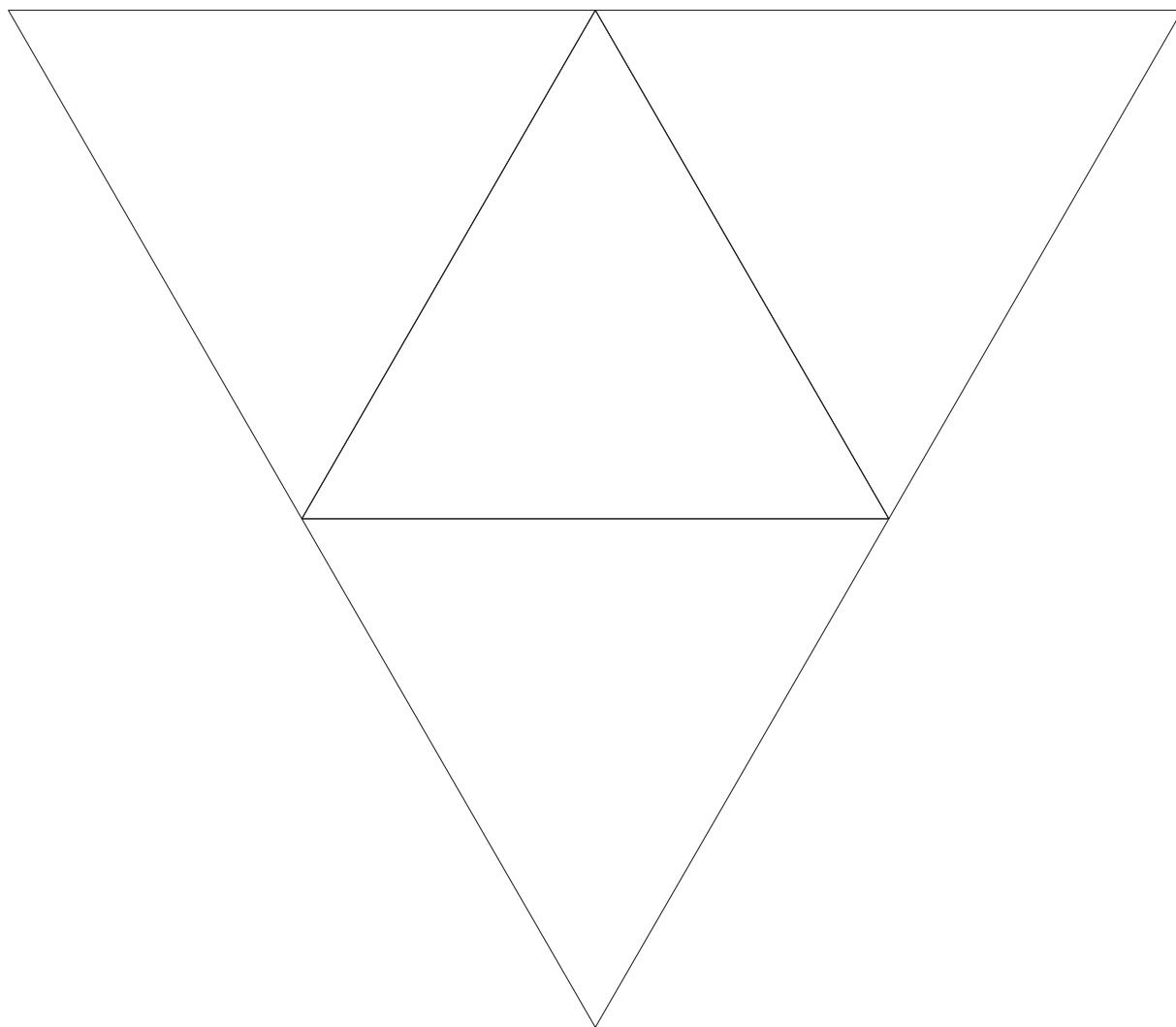
¹ Il s'agit d'une référence aux *Éléments* d'EUCLIDE : proposition 32 du livre I.

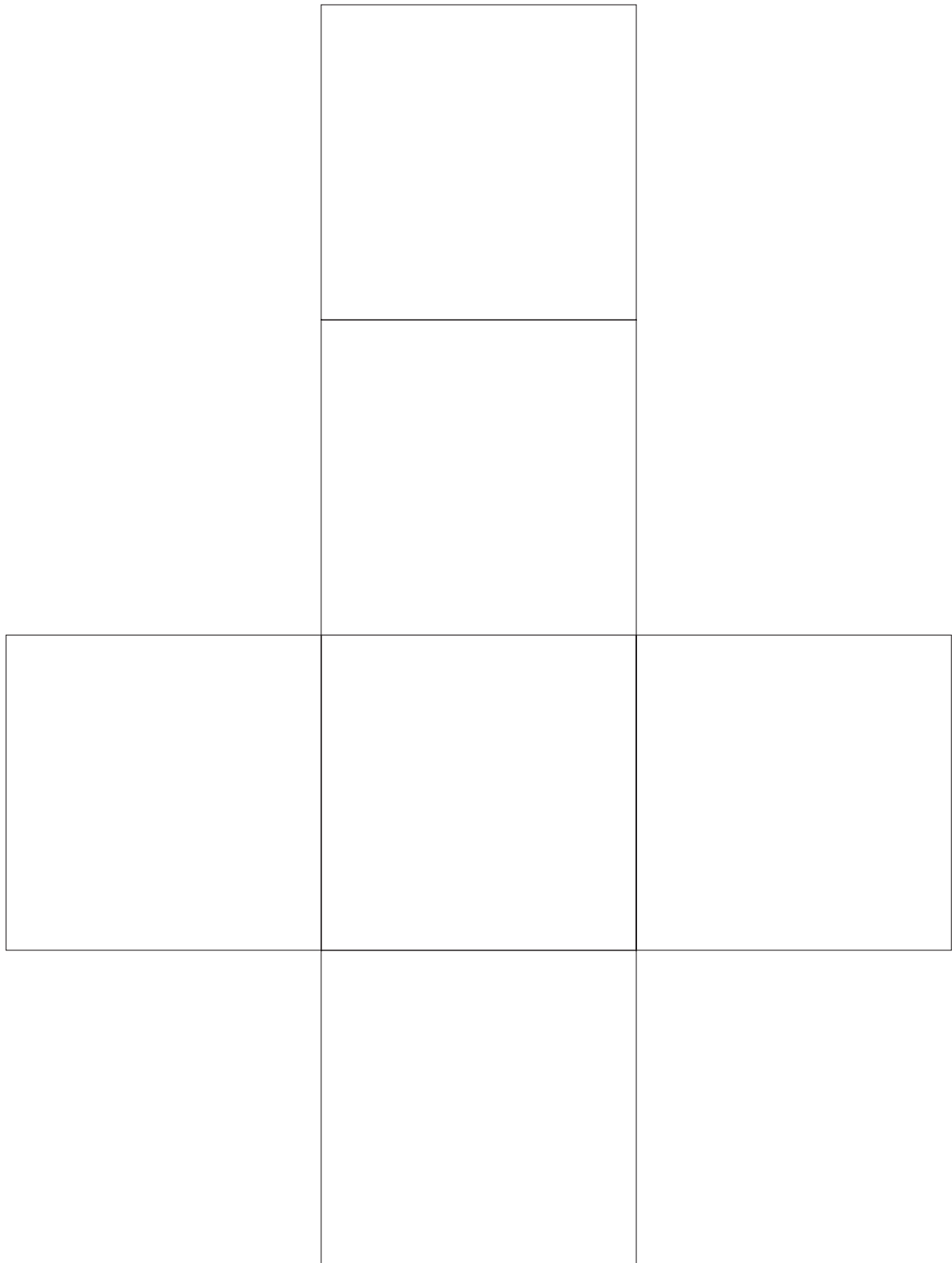
² Voir note précédente.

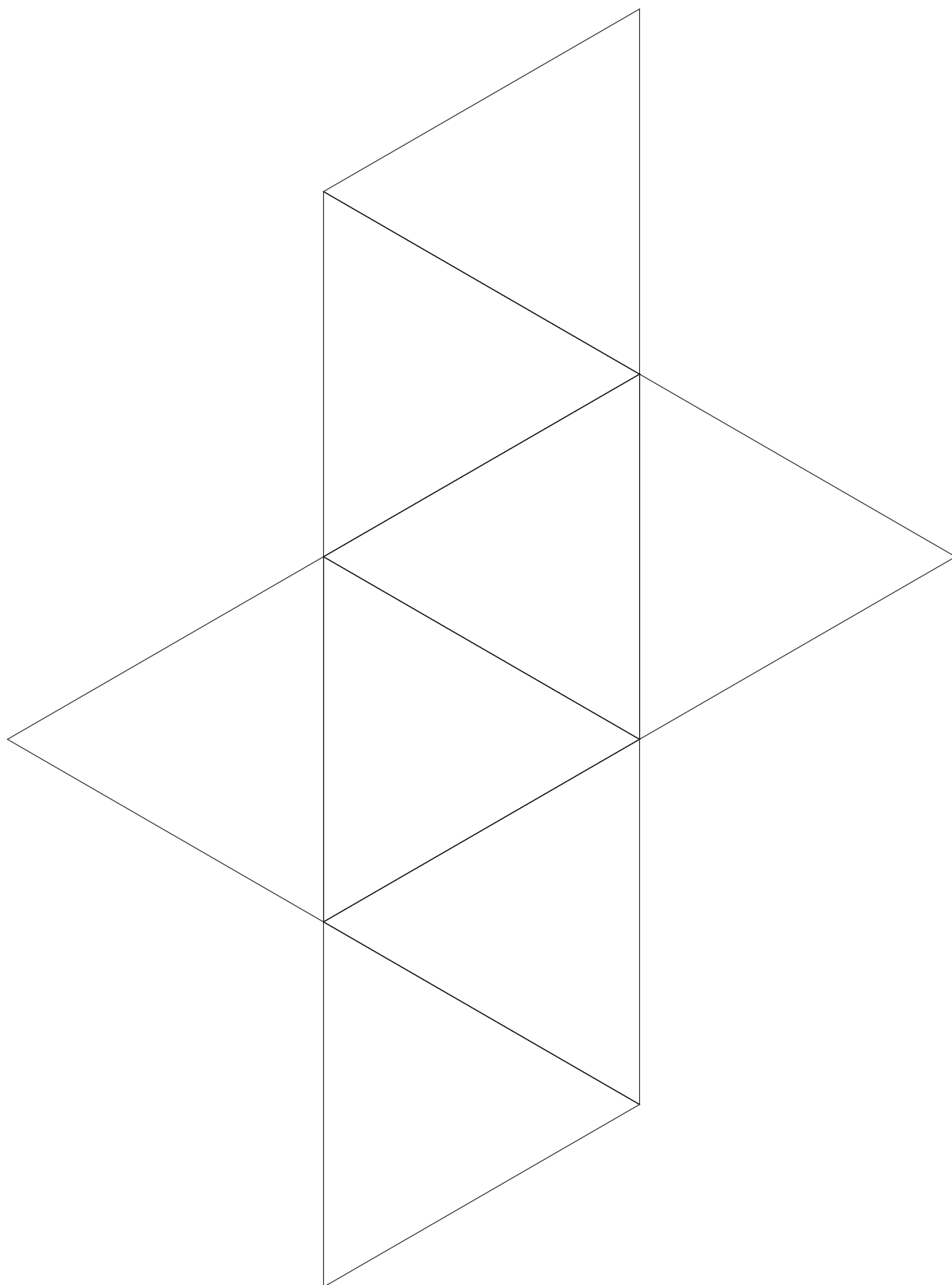
... Quatre de ces triangles équilatéraux, réunis selon trois angles plans, donnent naissance à un seul et même angle solide qui a une valeur venant à la suite³ de celle de l'angle plan le plus obtus. Et quand sont formés quatre angles de ce type, on a la première espèce de solide qui a la propriété de diviser en parties égales et congruentes la surface de la sphère dans laquelle elle est inscrite. La seconde espèce est composée des mêmes triangles. ... Ceux-ci forment un angle solide unique, fait de quatre angles plans. Quand on construit six angles solides de cette sorte, le corps de la deuxième espèce se trouve achevé. La troisième espèce est formée par le groupement ... de douze angles solides, dont chacun est compris entre cinq triangles plans équilatéraux, et elle a vingt bases qui sont vingt triangles équilatéraux. ... Six de ces figures⁴, en s'accolant, donnent naissance à huit angles solides, dont chacun est constitué par l'union harmonique de trois angles plans. Et la figure ainsi obtenue est la figure cubique, laquelle a pour base six surfaces quadrangulaires à côtés égaux. Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il en a dessiné l'arrangement final.

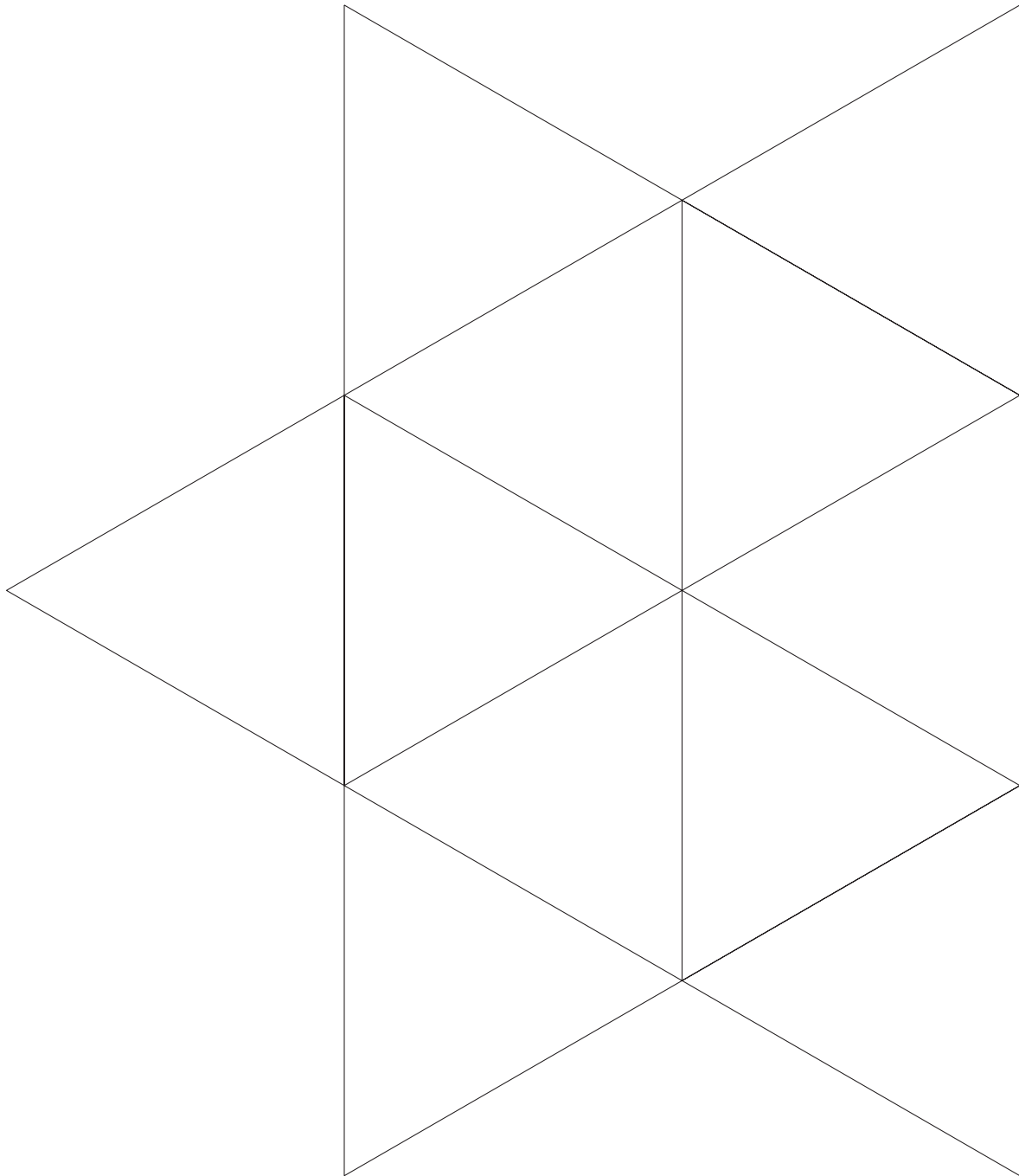
³ L'angle plat n'était pas considéré comme un angle. Pour décrire l'« angle solide » de 180° , les Grecs parlaient donc de l'angle ayant une valeur immédiatement supérieure à celle de l'angle plan le plus obtus.

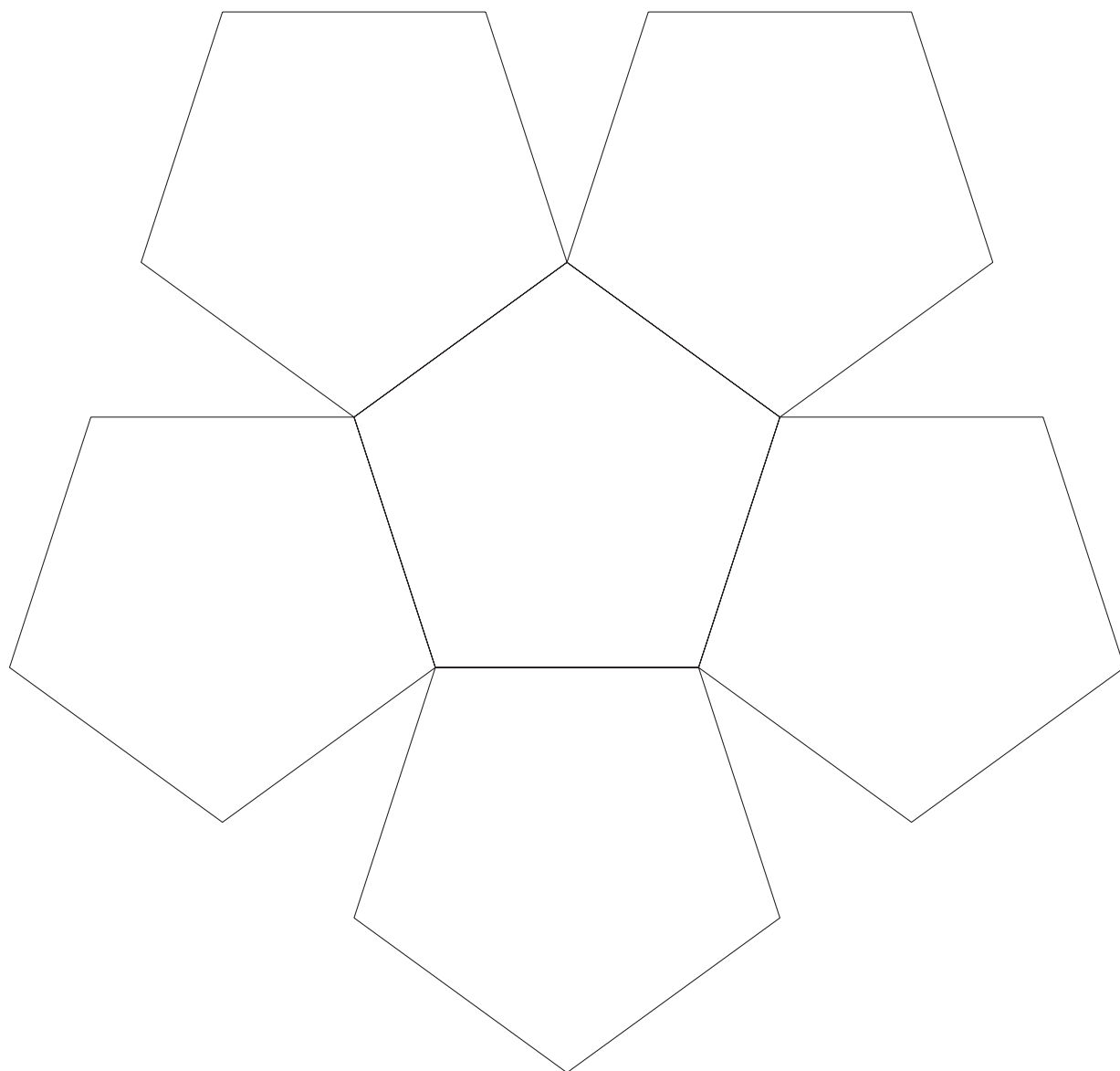
⁴ Des carrés, que PLATON appelle des figures quadrangulaires équilatérales.

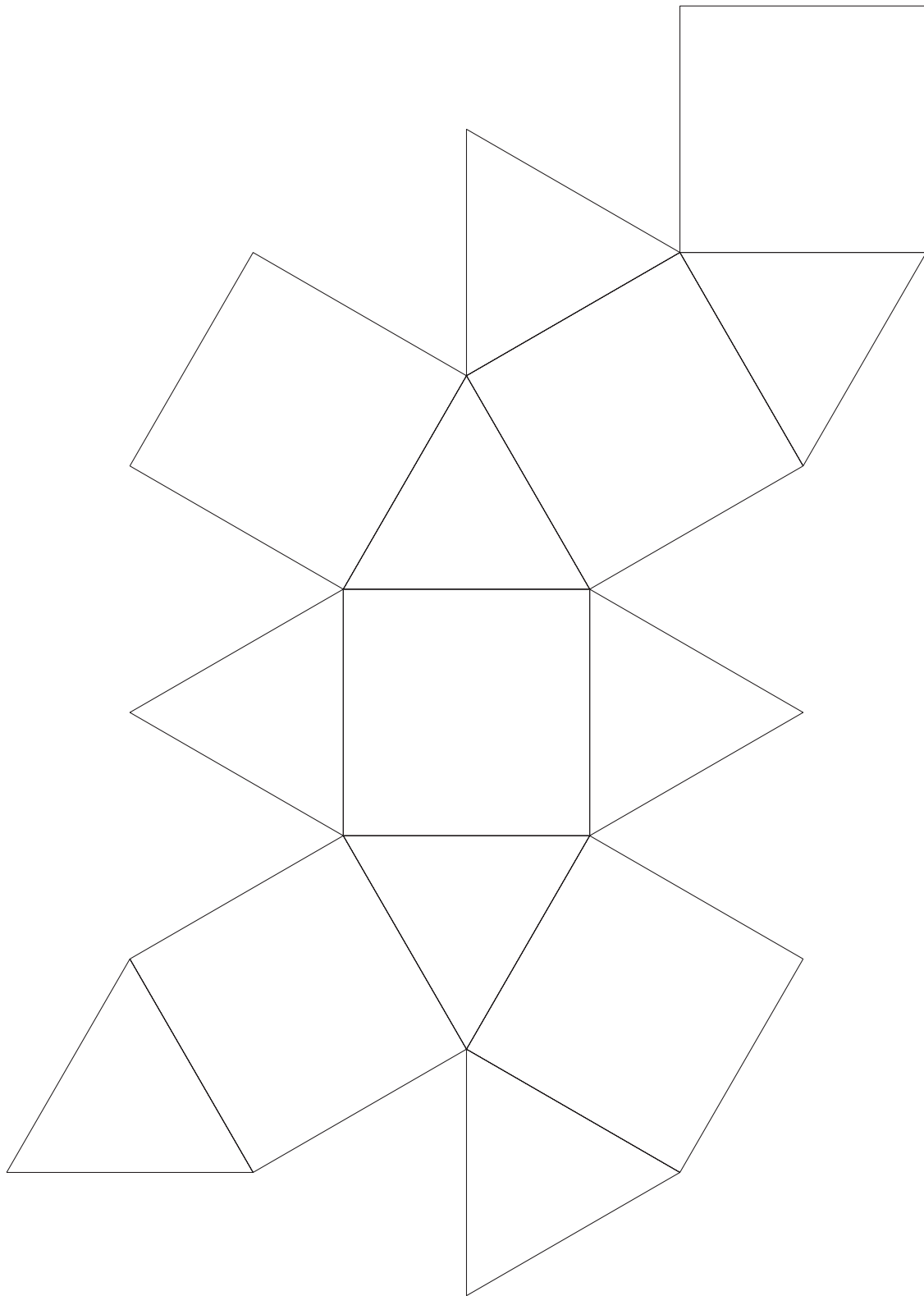












BIBLIOGRAPHIE

- APOSTOL T. [1967], *Calculus*, volume 1, Wiley, New York.
- ARNAULD A. [1667], *Nouveaux élémens de géométrie*, Charles Savreux, Paris. Rééd. IREM de Dijon.
- AUDIBERT G. [1990], *La perspective cavalière*, Publication de l'APMEP n° 75.
- BALLIEU M. [1972], *Groupes simples finis dont l'ordre est divisible par peu de facteurs premiers*, Mémoire de licence, Université Libre de Bruxelles.
- BARBIN E. [1991], Méthode cartésienne et figure géométrique dans les éléments de géométrie de Lamy, *La figure et l'espace, Actes du 8e colloque Inter-IREM*, IREM de Lyon.
- BARUK S. [1992], *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Seuil, Paris.
- BONNEFOND G., D. DAVIAUD et B. REVRANCHE [1993], *Pythagore - Mathématiques 3^e*, Hatier, Paris.
- BRUNHES J. [1934], *Géographie, cours moyen*, Mame, Tours.
- BUEKENHOUT F. et J. DOYEN [1982], *Ensembles structurés et groupes de symétries*, Université Libre de Bruxelles.
- CALLAHAN J. et K. HOFFMAN [1995], *Calculus in Context*, W.H. Freeman, New York.
- CARDANO G. [1545], *Ars Magna or the Rules of Algebra*, Dover, New York. Rééd. 1993.
- CAVALIERI B. [1635], *Geometria degli indivisibili*, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1966. A cura di L. Lombardo-Radice.
- CONNES A. [2002], Symétries, *Pour la Science*, n° 292. Belin, Paris.
- CREM [2001a], *Formes et Mouvements*, Lismont, L. et Rouche, N. coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.
- CREM [2001b], *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à dix-huit ans*, Lismont, L. et Rouche, N. coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.
- CREM [2002], *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur pour l'enseignement des mathématiques*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles. Rapport final juin 2002.
- DAHAN-DALMENICO A. et J. PEIFFER [1986], *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Seuil, Paris.
- DESMARETS A., B. JADIN, N. ROUCHE et P. SARTIAUX [1997], *Oh, moi les math. ...*, Talus d'Approche, Mons.
- D'HOMBRES J. et AL. [1987], *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris.
- DÜRER A. [1525], *Underweysung der Messung*, Seuil, Paris. Rééd. 1995. Traduction française par Jeanne PEIFFER sous le titre *Géométrie*.
- ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS [1997], *Dictionnaire des mathématiques*, Albin Michel, Paris.

- ERMEL [1982], *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*, cycle moyen, tome 3, SERMAP-Hatier, Paris.
- EUCLIDE [sans date], *The thirteen books of the Elements*, Dover, New York. Rééd. 1956. Transl. by Sir Thomas L. HEATH.
- EVES H. [1983], *Great Moments in Mathematics (Before 1650)*, Mathematical Association of America, Providence, RI.
- FAUVEL J. et J. GRAY [1990], *The History of Mathematics : A Reader*, MacMillan Press, Open University.
- FESEC [1996a], *Document d'accompagnement du programme de mathématiques, 2^e degré de transition, 3^e année*, Licap, Bruxelles. Référence de l'ouvrage : 1996/0279/041 A.
- FESEC [1996b], *Document d'accompagnement du programme de mathématiques, 2^e degré de transition, 3^e année*, Licap, Bruxelles. Référence de l'ouvrage : 1996/0279/041 B.
- GALILEO GALILEI [1665], *Dialogues concerning Two New Sciences*, Dover, New York. Rééd. 1954. Transl. by H. CREW and A. DE SALVIO.
- GALOIS E. [sans date], *Écrits et mémoires mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris. Rééd. 1962. Édition critique intégrale par R. BOURGNE et J.-P. AZRA.
- GALOIS E. [sans date], *Œuvres mathématiques*, Jacques Gabay, Paris. Rééd. 1989. Publiées en 1846 dans le Journal de LIOUVILLE.
- GEM [1996], *Mathématique de question en question 3*, Didier Hatier, Bruxelles.
- GILBERT T. [1987], *La perspective en questions*, Ciaco, Louvain-la-Neuve.
- GRÉGOIRE M. [1992], Comment mesurer la pyramide ?, *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Commission inter-IREM, Épistémologie et Histoire des Mathématiques, ICME Québec.
- GUILLAUME P. [1979], *La psychologie de la forme*, Flammarion, Paris.
- GUIRAUD J. et P. LISON [1976], *Systématique des figures réversibles*, Centre de Psychologie Expérimentale et Comparée, Université Catholique de Louvain.
- HADAMARD J. [1898], *Leçons de géométrie*, vol. II (Géométrie de l'espace), Jacques Gabay, Paris. Rééd. 1988.
- HENDERSON D. W. [1993], *Experiencing Geometry on Plane and Sphere*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- HERZ-FISCHLER R. [1990], Dürer's Paradox or why an ellipse is not egg-shaped, *Mathematics Magazine*, 63, p. 75–85.
- HOLME A. [2002], *Geometry, our Cultural Heritage*, Springer Verlag, Berlin.
- JOHNSON D. L. [2001], *Symmetries*, Springer-Verlag, London.
- JOSEPH J. [1991], *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics)*, Penguin Books, London.
- KLEIN F. [1872], *Le programme d'Erlangen (Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes)*, Jacques Gabay, Paris. Rééd. 1974.
- KLINE M. [1972], *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press.
- LANCIANO N. et AL. [1998], *Geometria in città*, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.
- LAVENDHOMME R. [1982], Note sur l'écriture mathématique, *Analytica*, 27, p. 53–56.
- LIBOIS P. [1966], *Introduction à la géométrie*, Presses Universitaires de Bruxelles.

- LIBRI G. [1838-1841], *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, G. Olms, Hildesheim. Rééd. 1967.
- MACH E. [1922], *L'analyse des sensations, le rapport du physique au psychique*, Jacqueline Chambon, Nîmes. Rééd. 1996. Traduit de l'édition originale allemande *Analyse der Empfindungen* par F. EGGERS et J.-M. MONNOYER.
- MAHAMMED N. [1995], *Sur la résolution des équations algébriques*, IREM de Lille.
- MERLEAU-PONTY M. [1945], *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris.
- NELSEN R. B. [1993], *Proofs without Words*, Mathematical Association of America, Providence, RI.
- NOËL G., F. POURBAIX et P. TILLEUIL [1997], *L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire*, Université de Mons-Hainaut.
- PACIOLI L. [1509], *Divina proportion*, Librairie du Compagnonnage. Rééd. 1988.
- PASSMAN D. [1968], *Permutation Groups*, W. A. Benjamin, New York.
- RADLOFF I. [2002], Évariste Galois: Principles and Applications, *Historia Mathematica*, 29(2), p. 114–137.
- RASHED R. et B. VAHABZADEH [1999], *Al-Khayyam mathématicien*, Blanchard, Paris.
- ROTHMAN T. [1982], Évariste Galois, *Pour la Science*, n° 56. Belin, Paris.
- ROUCHÉ E. et C. DE COMBEROUSSE [1932], *Éléments de géométrie*, Gautier-Villars, Paris.
- ROUCHE N. [1992], *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier, Bruxelles.
- SCHNEIDER M. [1988], *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*, Thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.
- SESIANO J. [1999], *Une introduction à l'histoire de l'algèbre*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- SOLOMON R. [1995], On Finite Simple Groups and Their Classification, *Notices of the AMS*, 42(2), p. 231–239.
- LOCHER, J. L., coordinateur [1976], *Le monde de M. C. Escher*, Chêne, Paris.
- TIGNOL J.-P. [1988], *Galois' Theory of Algebraic Equations*, Longman, Harlow.
- TILLEUIL P. [2001], *Les équations de plans et de droites*, Guide méthodologique de la FESeC (Mathématiques).
- TITS J. [1985], Symétries, *La Vie des Sciences, Comptes rendus, série générale*, tome 2 (1). Académie des Sciences.
- VERSCHRAEGEN R. [1971], *Dessin scientifique*, Van In, Lier.
- WALLIS J. [1685], *Algebra*, in D. E. SMITH, *A Source Book in Mathematics* (1959), Dover, New York.
- WALLON H. [1970], *De l'acte à la pensée, essai de psychologie comparée*, Flammarion, Paris.
- WEYL H. [1953], *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton University Press.
- WEYL H. [1980], *Symmetry*, Princeton University Press.
- WIELANDT H. [1964], *Finite Permutations Groups*, Academic Press, New York.
- WITTMANN E. [1998], *Géométrie élémentaire et réalité*, Didier-Hatier, Bruxelles. Traduction de Ch. Bouckaert et M. Citta-Vanthemsche.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	1
INTRODUCTION	3
1 Un exemple d'argumentation géométrique proche du sens commun	3
1.1 L'exemple	3
1.2 Analyse de l'exemple	5
1.3 L'exemple regardé avec du recul	5
2 Qu'est-ce qui caractérise en général la géométrie naturelle ?	6
2.1 Des notions familières	6
2.2 Des propriétés connues ou aisément reconnaissables	7
2.3 Des objets déplaçables	7
2.4 Des symétries de deux ordres	8
2.5 Des preuves par l'exemple	8
3 Nécessité et fonction de la géométrie naturelle	9
PRÉAMBULE COMMUN AUX DEUX PREMIERS CHAPITRES	11
Chapitre 1. Manipulations de cubes à l'école maternelle	14
1 Jeux et dessins de cubes	14
2 Rythmes de couleurs	16
3 Constructions à partir d'un modèle	17
Chapitre 2. Manipulations de cubes à l'école primaire	19
1 Constructions	19
1.1 Constructions avec trois et quatre cubes	20
1.2 Constructions à partir d'un modèle.	22
1.3 Positionner le cube multicolore	23
1.4 Constructions à partir d'assemblages de gabarits	24
2 Manipulations de gabarits de cubes	25
2.1 Assembler deux gabarits à l'aide des cubes	26

2.2	Assemblages de gabarits de cubes à partir de constructions données	28
3	Dessins de cubes et de constructions	31
3.1	Dessin d'un cube sur papier pointé (7 points)	34
3.2	Dessins de cubes sur papier pointé à l'aide d'assemblages de gabarits	35
3.3	Dessins de cubes sur papier pointé à partir de constructions	36
3.4	Dessins de cubes sur papier pointé par des enfants assis face à face	38
Chapitre 3.	Voir dans l'espace	39
1	Explorer les objets par la vue et le toucher	39
2	Reconnaître l'identité de deux objets	39
3	Voir à plat ou en relief	41
4	Un seul dessin, plusieurs objets représentés	43
5	Les figures impossibles	45
6	Plusieurs systèmes de représentation	47
7	Voir bien ou mal	48
7.1	Distance de l'objet	48
7.2	Orientation de l'objet	49
7.3	Orientation de l'observateur	50
8	Qu'est-ce que voir dans l'espace ?	50
9	La vision dans l'espace et la pensée	52
10	Comment apprendre ?	53
Chapitre 4.	L'aire comme recouvrement d'une figure	57
1	Aires et périmètres	57
2	Démontrer le théorème de Pythagore	63
3	Aire du parallélogramme	66
4	Démontrer le théorème de Thalès	71
Chapitre 5.	Quadrature des figures rectilignes planes	75
1	Introduction	75
2	Des rectangles et des carrés de même aire	76
3	Une propriété intéressante	78
4	Quadrature du rectangle	79
5	Généralisation aux figures rectilignes planes	84

Chapitre 6. Parallélisme et perpendicularité à trois dimensions	87
1 Introduction	87
2 Droites et plans : premières formes dans l'espace	87
3 Notions de droites et plans parallèles et perpendiculaires	88
4 Droite perpendiculaire à un plan	91
5 Perpendiculaire commune à deux droites gauches	92
6 Projections parallèles	93
7 Section plane d'un cylindre	94
Chapitre 7. Volumes et aires	96
1 Le principe de CAVALIERI, pourquoi, comment ?	96
1.1 Quelques faits intrigants	96
1.2 Équidécomposabilité des surfaces et des solides	97
1.3 Principe de CAVALIERI	97
2 Comparer des volumes	100
2.1 Comparer les volumes de pyramides et de prismes	100
2.2 Comparer les volumes de cônes et de cylindres	105
2.3 Comparer les volumes d'une demi-sphère, d'un cône inscrit et d'un cylindre cironscrit à la demi-sphère	106
3 Calculer des volumes	108
4 Aires de solides	109
4.1 Aire latérale d'un cône	109
4.2 Aire d'une sphère	111
5 Les moyens élémentaires d'étude des aires et des volumes	113
Chapitre 8. Monter et démont(r)er en géométrie dans l'espace	115
1 Introduction	115
2 Les premières maquettes	119
2.1 La construction d'un cube	120
2.2 Il n'y a pas que le cube...	124
Chapitre 9. Vers la théorie des groupes	133
1 Groupes diédriques	134
1.1 Les isométries du carré	135
1.2 La table de composition et la structure de groupe	141
1.3 Dénombrement des isométries d'une figure	148
1.4 Les générateurs du groupe	149
1.5 Le groupe du n -gone ou groupe diédrique	151

2	Groupes de polyèdres	152
2.1	Les polyèdres réguliers	152
2.2	Les isométries du tétraèdre régulier	156
2.3	Les isométries du cube	164
3	Des équations algébriques aux groupes : un survol historique	168
3.1	Le problème	169
3.2	La « solution » du problème	170
Chapitre 10. Les coniques découvertes par la vue		174
1	Introduction	174
2	Un cône vu de face et du dessus	174
3	La parabole	176
4	L'ellipse	176
5	Vers l'hyperbole	178
6	L'hyperbole	178
7	L'ellipse a-t-elle deux axes de symétrie ?	180
8	Et l'hyperbole ?	181
Fiches à photocopier		183
BIBLIOGRAPHIE		212