CREM

Nivelles, le 31 août 2002

VERS UNE GÉOMÉTRIE NATURELLE

Recherche N^o 72/01 financée par le Ministère de la Communauté Française,
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique,
Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation
et du Pilotage interréseaux

Rapport de fin d'année, deuxième partie

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.

5 rue Émile Vandervelde B-1400 Nivelles Belgique

Tél. +32–(0)67 21.25.27 Fax. +32–(0)67 21.22.02 Cpte 068-2179326-54

rouche@amm.ucl.ac.be

Préambule commun aux deux premiers chapitres

Les activités reprises dans ces chapitres ont été conçues pour les élèves des enseignements maternel et primaire. Elles ont été expérimentées à tous les niveaux de l'enseignement fondamental. Leur objectif principal est de familiariser les enfants à un type de représentation plane d'objets de l'espace : la perspective dite isométrique[1]. Aucune règle théorique n'est explicitement donnée aux enfants ; c'est au travers de multiples expériences qu'ils maîtrisent, chacun à leur niveau, ce type de représentation.

Ce premier chapitre contient les activités destinées à l'enseignement maternel. Celles-ci sont essentiellement basées sur des manipulations et des constructions à partir d'objets de l'espace. Dans l'univers des jeunes enfants, le cube est un objet familier, il nous semble donc tout à fait approprié à une première approche de la géométrie dans l'espace.

Le deuxième chapitre concerne les élèves de l'enseignement primaire. Il comporte trois sections. La première reprend des activités de manipulation de cubes. À tout âge, les manipulations doivent constituer un point de départ et la présence de l'objet réel s'avère un recours utile dans bien des situations problématiques. La deuxième section introduit un premier type de représentation plane sous la forme de gabarits[2] de cubes. Les assemblages de gabarits donnent aux enfants l'occasion d'expérimenter le passage du plan à l'espace et réciproquement. Enfin la dernière section est consacrée au dessin sur papier pointé triangulaire[2] que nous trouvons pratique pour les représentations de cubes, puisqu'il permet d'effectuer des dessins corrects à main levée et sans aucune mesure.

Ces activités peuvent s'étaler sur l'ensemble du cursus primaire ou se concentrer sur un même niveau. L'enseignant veillera toutefois à ce que chaque enfant expérimente les trois phases d'apprentissage correspondant aux trois sections décrites ci-dessus, à savoir les constructions, les assemblages de gabarits et les dessins.

Certaines sections de ces deux chapitres ne comportent pas d'échos des classes car elles ont été considérablement remaniées après une première expérimentation et n'ont pas encore été présentées aux élèves dans leur nouvelle version.

[1] Il s'agit de la forme de projection parallèle dans laquelle le coefficient de réduction des longueurs est le même dans les trois directions orthogonales principales.

[2] Voir la description du matériel ci-après.

Description du matériel utilisé

Les cubes

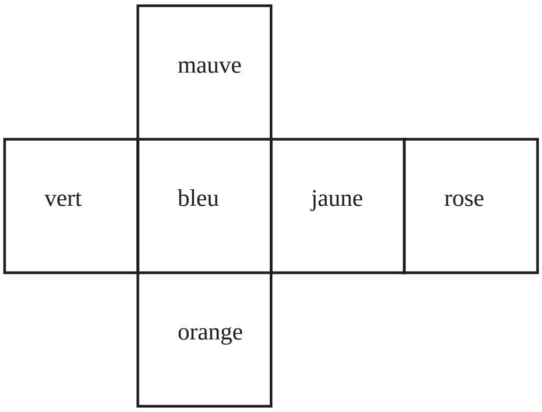


Fig. 1

En maternelle, nous utilisons deux types de cubes : des cubes en bois unis de huit couleurs différentes et des cubes multicolores ayant chacun une face verte, une bleue, une jaune, une rose, une orange et une mauve. Les couleurs doivent être placées comme sur la figure 1.

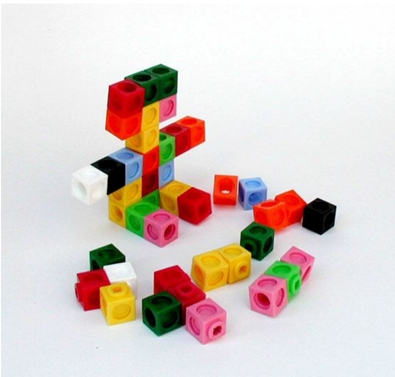


Fig. 2

En primaire, nous utilisons en plus ce que l'on appelle des « multicubes », c'est-à-dire des petits cubes plastiques emboîtables de 2 centimètres d'arête (figure 2).

Les gabarits

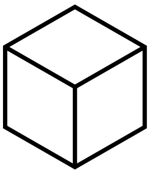


Fig. 3

Ce que nous appelons « gabarit » est en fait le dessin d'un cube en perspective isométrique, découpé dans une plaque magnétique à peindre, ou dans du carton (figure 3).

Nous avons créé pour nos activités deux sortes de gabarits magnétiques : des gabarits unis reprenant les couleurs des multicubes et des gabarits multicolores réalisés en fonction de la place des couleurs du cube multicolore.

Les gabarits magnétiques sont pratiques parce qu'ils adhèrent sur une surface métallique ferromagnétique (idéalement le tableau) et permettent une exploitation collective devant la classe entière.

Les gabarits en carton sont destinés à être manipulés sur la table par chaque enfant.

Le modèle du gabarit magnétique se trouve en annexe à la fiche 1 et le modèle pour créer des gabarits en carton à la fiche 6.

Le papier pointé

Fig. 4

Le papier pointé triangulaire est le support idéal pour représenter des objets en perspective isométrique. Les points qui constituent la trame du papier pointé sont en fait les sommets de triangles équilatéraux.

Remerciements

Pour le chapitre consacré à l'enseignement maternel, nous tenons à remercier Mesdames Colette Brasseur, Brigitte Decelle et Anne-Marie Rahier, institutrices maternelles à l'école fondamentale de la Communauté Française de Mont-Saint-Guibert, pour nous avoir permis d'expérimenter les activités avec une partie de leurs élèves.

Pour le chapitre consacré à l'enseignement primaire, nous remercions d'une part, les institutrices de première et deuxième années de « l'Autre École » à Auderghem et d'autre part, Madame Demessemacker, institutrice de quatrième année et Mademoiselle Bourgeois, institutrice de sixième année à l'Institut des Sœurs Notre-Dame d'Anderlecht pour nous avoir accueillis dans leurs classes.

Un grand merci aussi aux enfants pour leur participation active.

1

Manipulations de cubes à l'école maternelle

1 Jeux et dessins de cubes

De quoi s'agit-il ?

Les enfants réalisent des constructions avec des cubes, puis les dessinent.

Enjeux

Se familiariser avec des cubes et des constructions ;

utiliser et enrichir un vocabulaire relatif au matériel (cube, face, carré, . . .) et à l'organisation spatiale (au-dessus, en dessous, à côté, à gauche, à droite, devant, derrière, contre, entre, . . .) ;

s'initier aux premières représentations par le dessin de cubes et de constructions de cubes.

Compétences.

Se situer et situer des objets dans l'espace réel.

Reconnaître, comparer des solides et des figures, les différencier et les classer.

Relever des régularités.

Organiser selon un critère, des objets réels ou représentés.

De quoi a-t-on besoin ?

Des cubes en bois unis ;

des cubes en bois multicolores ;

du matériel de peinture ;

du matériel de dessin : des feuilles blanches, des crayons de couleurs ou des pastels.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue une vingtaine de cubes unis à chaque enfant et leur demande, dans un premier temps, de réaliser des constructions libres.

Les enfants qui le souhaitent commentent leurs réalisations et l'enseignant les laisse libres de s'exprimer.

Après ce temps de familiarisation avec les cubes, l'enseignant distribue le matériel de dessin et donne la consigne suivante.

Dessinez la construction que vous avez réalisée.

On propose ensuite la même activité avec des cubes multicolores.

Au préalable, l'enseignant propose aux enfants l'activité suivante, qui met l'accent sur le nombre de faces. Il distribue à chacun un cube en bois ou en carton rigide, un matériel de peinture adéquat et leur donne la consigne suivante.

Vous allez peindre votre cube. Utilisez une nouvelle couleur chaque fois que vous changez de face.

Cette activité offre aux enfants l'occasion d'expérimenter les relations « topologiques », premiers critères de perception de l'espace.

L'enseignant distribue ensuite des cubes multicolores et rappelle les consignes données précédemment pour les cubes unis.

Échos des classes

Certains enfants ont dessiné l'objet représenté par la construction, par exemple une chenille ou une maison (figures[1] 1, 2 et 3).

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

D'autres ont représenté les cubes multicolores et ont tenté une approche de la perspective en dessinant toutes ou certaines faces colorées du cube dans un carré ou un cercle (figures 4, 5 et 6).

[1] La présente étude étant imprimée en noir et blanc, nous avons substitué aux couleurs des nuances de gris.

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

On parle ici de *réalisme intellectuel*. Cette expression renvoie à un mode de représentation qui consiste à dessiner non pas ce que l'on voit de l'objet selon un certain point de vue, mais tout ce qui appartient à l'objet, en y mélangeant les points de vue.

2 Rythmes de couleurs

De quoi s'agit-il ?

Les enfants complètent un début de construction avec des cubes en respectant un rythme de couleurs.

Enjeux

Imaginer et réaliser des constructions d'objets ;

expérimenter l'horizontale et la verticale ;

utiliser et enrichir un vocabulaire relatif aux couleurs et à l'ordre (avant, après, premier, dernier, ...) ;

créer, reconnaître et reproduire un rythme de couleurs, ce qui développe une forme de structuration spatio-temporelle.

Compétences. – Voir les compétences de l'activité 1 à la page 14.

De quoi a-t-on besoin ?

Par enfant, une vingtaine de cubes unis de couleurs différentes.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant réalise avec des cubes un début de construction rectiligne faisant apparaître un rythme dans les couleurs (par exemple, un train avec un cube vert, un jaune, un vert, ..., voir figure 7).

Il donne ensuite la consigne suivante.

Continuez la construction en respectant le même ordre de couleurs.

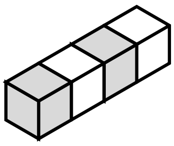


Fig. 7

Les constructions doivent, par nécessité, prendre des positions verticales et horizontales. Il est donc utile de proposer aux enfants de réaliser aussi des constructions de tours, comme le montre par exemple la figure 8.

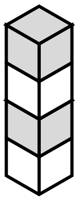


Fig. 8

Les enfants doivent découvrir la règle qui a permis le début de la construction, afin de la poursuivre. On varie la complexité des rythmes en fonction de l'âge et des capacités des enfants, en augmentant le nombre de cubes ou de couleurs différentes dans une structure.

On peut aussi proposer aux enfants de créer eux-mêmes une construction reproduisant un rythme de couleurs et ainsi d'établir une règle et de la respecter.

L'enseignant peut, pour les plus grands, dépasser la structure rectiligne et proposer une organisation dans deux directions de l'espace. On commence avec des cubes de deux couleurs différentes, ce qui donne, par exemple, la figure 9.

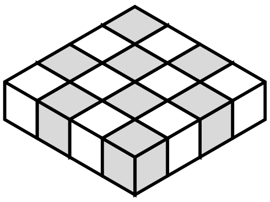


Fig. 9

Les enfants doivent, dans ce cas, tenir compte des règles de développement dans deux directions. On augmente progressivement le nombre de cubes ou de couleurs dans la structure.

Échos des classes

Les plus jeunes enfants sont absorbés par leur activité de construction et ne respectent pas la consigne de succession des couleurs. Ils se justifient en disant : « je fais aussi un train », ... Ils se limitent alors à une reproduction de la structure spatiale.

À partir de quatre ou cinq ans, ils commencent à respecter l'ordre des couleurs proposé. Et quand il s'agit de créer, les plus grands font parfois apparaître des constructions plus complexes.

3 Constructions à partir d'un modèle

De quoi s'agit-il ?

Les enfants reproduisent une construction en cubes à partir d'un modèle.

Enjeux

Reproduire une structure spatiale ;

respecter une consigne de construction.

Compétences. – Voir les compétences de l'activité 1.

De quoi a-t-on besoin ?

Une vingtaine de cubes unis par enfant.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant réalise une construction avec quatre cubes unis, chacun d'une couleur différente. Il distribue aux enfants une vingtaine de cubes parmi lesquels doivent se trouver les quatre couleurs utilisées par l'enseignant, car il est important qu'ils puissent s'y référer s'ils en éprouvent le besoin. Il ne faut cependant pas attirer leur attention sur les couleurs utilisées, car seule la forme de la construction doit être respectée.

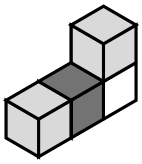


Fig. 10

L'enseignant laisse les enfants observer le modèle et leur donne la consigne suivante.

Réalisez la même construction (par exemple, celle de la figure 10).

L'enseignant vérifie les réalisations des enfants avant de passer à un autre modèle. Selon l'âge et le niveau des enfants, le nombre de cubes est progressivement augmenté et les structures sont de plus en plus complexes.

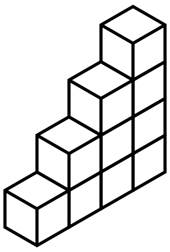


Fig. 11

L'enseignant peut également demander aux enfants de respecter une consigne orale de construction.

Sans modèle sous les yeux, l'enseignant leur propose par exemple de réaliser la plus haute tour possible ou le plus long train et ainsi aborde les notions de verticalité et d'horizontalité.

Il est aussi possible de demander aux enfants de réaliser un escalier. Ils doivent alors s'arranger pour que l'escalier monte régulièrement d'une marche de même hauteur (voir figure 11).

Prolongement possible

On peut proposer aux enfants de s'asseoir deux par deux, côte à côte. L'un réalise une construction et son voisin la reproduit. Ils confrontent leurs réalisations pour vérifier si elles sont identiques. On inverse ensuite les rôles.

2

Manipulations de cubes à l'école primaire

1 Constructions

De quoi s'agit-il ?

Les élèves manipulent des cubes et réalisent des constructions d'après une consigne, d'après un modèle donné à trois dimensions, d'après un assemblage de gabarits réalisé par l'enseignant.

Enjeux

Créer des objets en assemblant des cubes ;

utiliser et enrichir un vocabulaire relatif au matériel (cube, face, ...) et à l'organisation spatiale (au-dessus, en dessous, à gauche, à droite, devant, derrière, ...) ;

différencier les constructions et reconnaître les objets identiques ;

reproduire une structure spatiale à partir d'un modèle à trois dimensions ;

prendre conscience que seules trois faces sont visibles lorsqu'on observe un cube posé sur une table ;

reconnaître dans un gabarit le dessin d'un cube ;

passer d'une représentation plane (gabarit) à une réalisation à trois dimensions.

Compétences

Se situer et situer des objets.

Reconnaître, comparer des solides, les différencier.

Construire des solides [...].

Associer un solide à sa représentation dans le plan.

De quoi a-t-on besoin ?

Des multicubes ;

des cubes multicolores ;

des gabarits de cubes magnétiques unis et multicolores ;

des fiches 2 à 5 en annexe ;

des crayons de couleurs.

1.1 Constructions avec trois et quatre cubes

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue les multicubes aux enfants qui, dans un premier temps, les manipulent librement afin de se familiariser avec le matériel.

On leur donne ensuite la consigne suivante.

> Réalisez des constructions différentes avec trois cubes (puis avec quatre cubes).

On peut aider les enfants en leur proposant de réaliser une construction avec trois cubes, puis d'en construire une deuxième sans démonter la première afin de pouvoir les comparer. Spontanément, certains enfants considèrent les constructions de la figure 1 (ou celles de la figure 2) comme différentes.

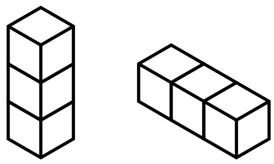


Fig. 1

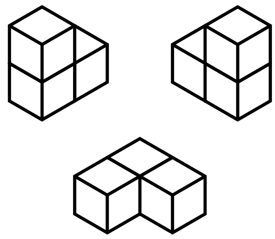


Fig. 2

Il faut donc établir un critère de différenciation facile. On admet que deux constructions sont « les mêmes » lorsqu'on peut les placer l'une à côté de l'autre pour les voir de la même façon. Ainsi, suivant ce critère, la figure 2 représente trois objets identiques dans des positions différentes.

Il faudra aussi pour certains enfants préciser que les couleurs des cubes n'ont pas d'importance et que les constructions doivent seulement avoir des formes différentes.

On poursuit l'activité par les constructions de quatre cubes. L'ajout d'un quatrième cube permet d'introduire une troisième direction dans certaines constructions (figure 3).

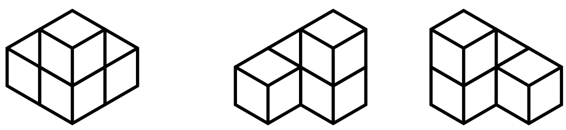


Fig. 3

On encourage les enfants à trouver un maximum de possibilités.

À la fin de l'activité, on donne la consigne suivante.

Comparez vos réalisations. Regroupez celles qui sont identiques.

Cette consigne les amène à placer leurs constructions respectives côte à côte dans des orientations similaires. Si les éléments de la figure 4 sont présents simultanément dans les constructions des enfants, leur comparaison risque d'être un peu délicate. En effet, ces objets sont isométriques mais ne sont pas les mêmes, puisqu'on ne peut pas les positionner pour les voir de la même façon. Ils sont, en fait, les images l'un de l'autre dans un miroir. On dit qu'ils sont énantiomorphes.

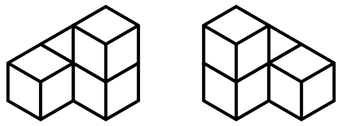


Fig. 4

Lorsque les enfants ont terminé leurs comparaisons, on obtient un ensemble de constructions dont toutes les possibilités sont reprises à la figure 5.

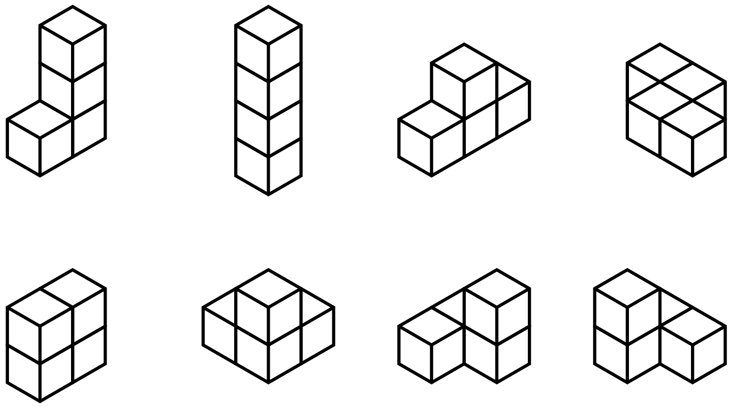


Fig. 5

Certains enfants terminent l'activité en réalisant les constructions qui leur manquent.

Échos des classes

Les enfants ont accordé beaucoup d'importance à la position des constructions sur la table : pour certains, une tour (verticale) de trois cubes n'est pas la même chose qu'un train (horizontal) de trois cubes (figure 6).

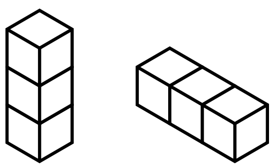


Fig. 6

À travers leurs propos, on sent la prégnance de l'horizontale et de la verticale, qui interfère avec leur vision globale de l'objet dans l'espace.

Le fait le plus significatif est sans doute la découverte des trois constructions qui occupent les trois directions de l'espace. En effet, beaucoup d'enfants ont obtenu en premier lieu les cinq constructions de la figure 7. Il leur a fallu un certain temps pour « sortir dans la troisième dimension » ; c'est-à-dire assembler leurs cubes dans les trois directions de l'espace (figures 8 et 9).

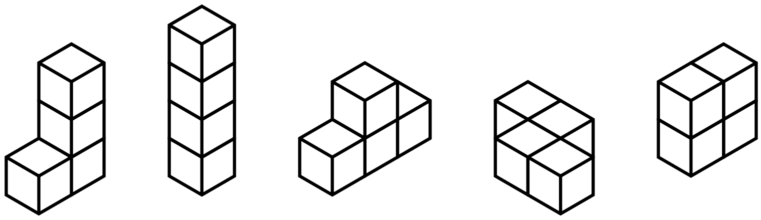


Fig. 7

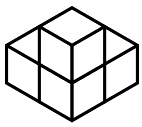


Fig. 8

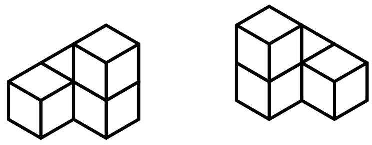


Fig. 9

1.2 Constructions à partir d'un modèle.

Comment s'y prendre ?

Les enfants sont assis deux par deux. L'un des deux réalise une construction avec quatre cubes unis de couleurs différentes, l'autre enfant reçoit la consigne suivante.

> Reproduisez la construction de votre camarade en ayant celle-ci sous les yeux.

L'enseignant augmente la difficulté en passant à six cubes ou plus selon les possibilités et l'âge des enfants.

Ensuite, il demande à l'un des deux enfants de réaliser une nouvelle construction (de quatre ou six cubes) et de la cacher. La consigne est alors la suivante.

> Dictez à votre camarade la façon de réaliser cette construction afin qu'il puisse la reproduire.

Les deux enfants confrontent ensuite leurs réalisations pour vérifier si elles sont pareilles.

Cette étape leur permet de verbaliser et d'enrichir leur vocabulaire relatif à l'espace.

Enfin, l'enseignant pourra exercer la mémoire des enfants. Pour cela, il demande à l'un des deux de construire un modèle avec ses cubes. L'autre enfant, n'ayant pas vu les étapes de la construction, observe l'objet fini le temps qui lui est nécessaire. Le modèle est ensuite caché et l'enseignant donne à cet enfant la consigne suivante.

Reproduisez, de mémoire, la construction initiale.

Quand l'enfant pense avoir terminé, il compare sa construction au modèle afin de vérifier la ressemblance.

L'enseignant peut réaliser cette même activité avec deux cubes multicolores, en attirant l'attention sur toutes les faces du cube, même celles qui sont moins ou non visibles.

Prolongements possibles

On peut demander aux enfants plus âgés de s'asseoir face à face et proposer à l'un de faire une construction et à l'autre de la reproduire comme s'il était à la place de son camarade. On peut lui préciser : « quand tu regardes *ta* construction, tu dois voir la même chose que ton camarade qui regarde *sa* construction ».

Les enfants peuvent se déplacer pour vérifier si les constructions sont bien pareilles, ou retourner celle du camarade lorsqu'il a lui-même terminé.

Échos des classes

Lors de la reproduction, nous avons remarqué que certains enfants faisaient des allers-retours pour corriger leurs constructions, alors que d'autres restaient assis mais déplaçaient leurs constructions sur la table pour les comparer.

1.3 Positionner le cube multicolore

Comment s'y prendre ?

L'enseignant donne un cube multicolore et pose la question suivante.

Combien de couleurs différentes a-t-on utilisées pour peindre ce cube ?

Cette question permet de mettre en évidence le nombre de faces d'un cube. On peut aussi, éventuellement reprendre l'activité 1 du chapitre 1.

Ensuite, l'enseignant demande aux enfants de placer le cube sur le banc avec une arête face à eux et leur demande ce qui suit.

Combien de faces différentes voyez-vous ? Quelles sont les couleurs de ces faces ?

Après exploitation collective des résultats, on s'aperçoit que chaque enfant n'a dénombré que trois faces de couleurs différentes. Les autres couleurs ne sont pas visibles. L'enseignant attire donc l'attention des élèves sur le fait que, si on veut dessiner un cube, seules trois faces de ce cube sont nécessaires pour représenter ce que l'on voit.

Il présente alors un premier gabarit magnétique de cube multicolore (figure 10), qu'il fixe sur le tableau. Dans le contexte de l'activité, on peut espérer que tous les enfants reconnaissent dans ce gabarit, le dessin d'un cube. Cependant, pour s'assurer qu'ils établissent bien le lien entre le gabarit (représentation plane à deux dimensions) et l'objet (à trois dimensions), l'enseignant poursuit l'activité en deux temps.

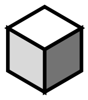


Fig. 10

Premier temps

Il donne d'abord la consigne suivante.

Placez votre cube dans la position correspondant à celle du gabarit qui se trouve au tableau.

L'enseignant vérifie auprès de chaque enfant et rectifie les erreurs si nécessaire. Il recommence plusieurs fois en variant les couleurs des faces visibles du gabarit au tableau.

Deuxième temps

Il place les enfants en vis-à-vis et dépose un cube multicolore entre eux, une arête verticale de face. Le type de perspective (isométrique) choisi pour dessiner les gabarits impose que l'objet qu'il représente ait une arête par devant. Il leur distribue une feuille sur laquelle sont dessinés deux gabarits vierges (fiche 2) et donne la consigne suivante.

Coloriez les faces du premier gabarit en respectant les couleurs que vous voyez sur le cube placé devant vous.

Chaque enfant constate que les couleurs qu'il utilise ne sont pas les mêmes que celles de son copain. Seule la face du dessus est de la même couleur pour les deux enfants. Au total, ils utilisent ensemble cinq couleurs. Où est donc passée la sixième ?

1.4 Constructions à partir d'assemblages de gabarits

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue aux enfants des cubes unis emboîtables, puis réalise au tableau un assemblage avec les gabarits magnétiques. Il leur demande ce qui suit.

Construisez avec vos cubes, l'objet dont le modèle est au tableau (figure 11).

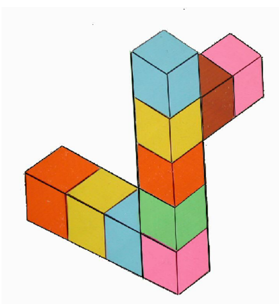


Fig. 11

L'enseignant propose des exercices de difficulté croissante tant au niveau du nombre de cubes, qu'au niveau du nombre de directions. Les fiches 3 à 5 des annexes proposent une série de modèles de difficultés diverses, parmi lesquelles l'enseignant peut choisir ceux qui conviennent le mieux au niveau des élèves de sa classe.

Les couleurs des gabarits aident les enfants dans leurs constructions. Ils peuvent, en effet, les faire correspondre à celles de leurs cubes et ainsi faciliter leur démarche.

Il faut attirer l'attention des enfants sur l'importance du dénombrement et la direction dans l'espace de chaque partie de la construction.

Échos des classes

Les enfants donnent un nom à l'assemblage, il l'appelle par exemple « serpent ». Cela les aide à avoir une image mentale globale de l'objet, et facilite leur construction. Ils comptent le nombre de cubes pour la « queue », pour le « corps » et pour la « tête ». Ce qui n'est pas aussi évident qu'il y paraît.

On a pu remarquer que certains avaient tendance à ajouter un cube à la « tête » ou la « queue ». De même, quelques enfants ne voient pas les trois directions de l'espace et construisent un serpent comme celui de droite sur la figure 12.

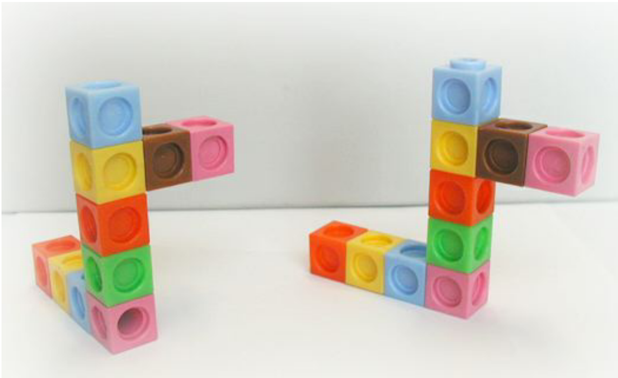


Fig. 12

2 Manipulations de gabarits de cubes

De quoi s'agit-il ?

Les enfants assemblent des gabarits pour reproduire des assemblages de cubes réalisés à trois dimensions.

Enjeux

Utiliser et enrichir un vocabulaire relatif au matériel (cube, face, ...) et à l'organisation spatiale (au-dessus, en dessous, à gauche, à droite, devant, derrière, ...) ;

orienter correctement ses gabarits pour que l'assemblage réalisé corresponde à l'objet réel ;

passer d'une réalisation à trois dimensions à une réalisation à deux dimensions.

Compétences.

Construire des figures et des solides simples avec du matériel varié.

Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement.

De quoi a-t-on besoin ?

Des multicubes ;

des gabarits de cubes magnétiques (fiche 1 en annexe) ;

des gabarits de cubes en carton (fiche 6 en annexe).

2.1 Assembler deux gabarits à l'aide des cubes

À l'activité 1.3 à la page 23, les enfants ont découvert les gabarits multicolores, mais seul l'enseignant les a manipulés. Dans les activités suivantes, les élèves vont être confrontés à des gabarits unicolores, ils vont apprendre à les manipuler et à les assembler, d'abord par deux, ensuite dans des configurations plus complexes.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue aux élèves des multicubes et des gabarits en carton. Il place un gabarit magnétique au tableau, puis donne la consigne suivante.

Observez ce gabarit, décrivez ce que vous voyez.

Plusieurs réponses sont probables :

- « C'est une figure à six côtés. »
- « Il y a trois lignes tracées dessus. »
- « C'est le dessin d'un cube. »
- « Il y a trois parallélogrammes. »
- ...

Après exploitation des différentes réponses, on admet que ce gabarit peut être le dessin d'un cube. L'enseignant pose alors la question suivante.

Que représente chacun des segments dessinés à l'intérieur de l'hexagone ? Que représente chacun des parallélogrammes ?

Il est très important pour la suite que les enfants établissent correctement les correspondances entre les éléments de l'objet réel et ceux de la représentation à deux dimensions.

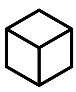


Fig. 13

L'enseignant propose ensuite aux enfants de positionner un de leurs multicubes devant eux pour qu'ils le voient comme le gabarit du tableau. Après une correction collective, on convient que le cube doit être posé sur la table avec une arête verticale face à soi[1].

À ce moment, l'enseignant enlève le gabarit du tableau et demande aux enfants de placer un de leurs gabarits sur le banc pour représenter leur cube. Il est très important, à ce stade, de vérifier que l'enfant place correctement son gabarit comme sur la figure 13.

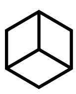


Fig. 14

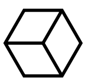


Fig. 15

Pour rectifier les erreurs classiques montrées par les figures 14 et 15, on retournera systématiquement à l'objet réel en insistant sur les correspondances entre cet objet et la représentation à deux dimensions donnée par le gabarit : le cube a une arête verticale de face, on doit donc placer le gabarit pour qu'un des segments tracés à l'intérieur de l'hexagone soit vertical ; la face du dessus du cube est visible, un des trois parallélogrammes qui représentent les faces doit être au-dessus.

[1] Contrairement à ce qui se passe dans une représentation en perspective cavalière classique, il n'y a pas de face frontale dans la perspective isométrique.

Lorsque tous les élèves parviennent à orienter correctement leur premier gabarit, on passe à l'assemblage de deux gabarits. L'enseignant invite les enfants à déposer un deuxième cube au-dessus du premier et à les emboîter. Il leur donne la consigne suivante.

Représentez cet objet de deux cubes à l'aide de vos gabarits.

Pour faciliter l'exploitation collective des réalisations des élèves, on peut conseiller, dans un premier temps, d'imposer les couleurs des cubes et de choisir les couleurs correspondantes pour les gabarits . Pendant que les enfants travaillent, l'enseignant vérifie qu'ils placent bien leur modèle avec une arête verticale frontale. Les premiers assemblages de gabarits mettent généralement en évidence plusieurs problèmes ; les plus fréquents sont repris à la figure 16.

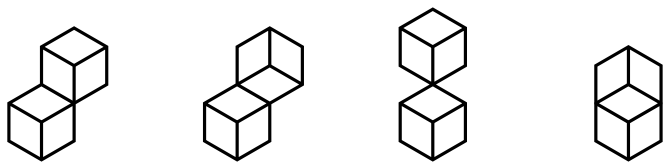


Fig. 16

Pour aider les élèves en difficulté, l'enseignant envoie au tableau un élève qui a réussi son assemblage et lui demande d'expliquer sa technique. Il insiste sur les différentes étapes évoquées par la figure 17 :

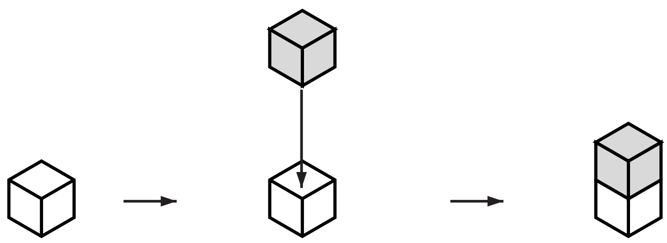


Fig. 17

orienter correctement son premier gabarit ; orienter correctement son deuxième gabarit ; approcher son deuxième gabarit par le dessus ; déposer le deuxième gabarit pour qu'il recouvre une face du premier, et que les arêtes verticales s'alignent.

Lorsque tous les enfants ont réussi leur premier assemblage, on répète la question, mais cette fois en accolant un deuxième cube à l'avant-plan droit. Ce deuxième assemblage, décrit à la figure 18, ne devrait pas poser de problèmes.

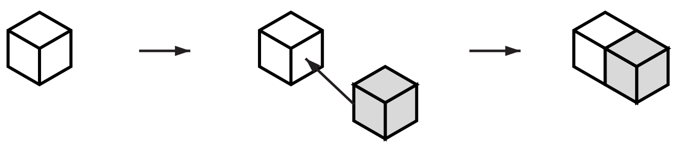


Fig. 18

On poursuit logiquement en les invitant cette fois à ajouter un cube à l'arrière-plan droit. Les enfants sont confrontés à un nouveau problème car le deuxième gabarit doit venir en-dessous du premier, il faut donc le glisser par dessous et non plus le superposer (voir figure 19).

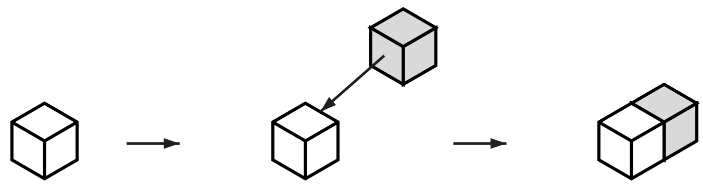


Fig. 19

Le même problème se pose dans le cas où le deuxième cube est placé en-dessous.

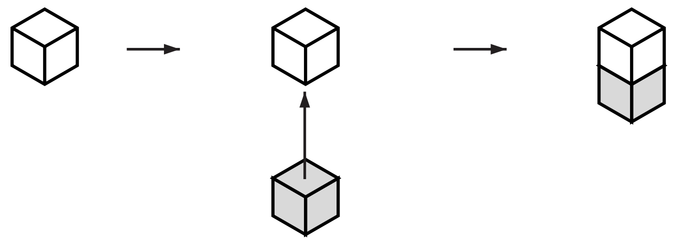


Fig. 20

On peut ainsi passer en revue toutes les positions possibles et on termine l'activité par une petite synthèse reprenant les différentes étapes à respecter pour assembler deux gabarits.

2.2 Assemblages de gabarits de cubes à partir de constructions données

Comment s'y prendre ?

L'enseignant dépose devant chaque enfant la construction de la figure 21 dans la bonne position, une arête verticale face à l'enfant.

Fig. 21

Dans un premier temps, il nous semble important, pour faciliter la mise en commun des résultats, que l'objet à représenter soit placé de la même façon devant chaque enfant afin qu'ils en aient tous la même vision (le même point de vue). L'enseignant distribue à chaque enfant une série de gabarits en carton et donne la consigne suivante.

Assemblez vos gabarits pour représenter la construction que vous voyez en face de vous.

Chaque enfant commence à assembler ses gabarits en fonction de la construction. L'enseignant repère les principales erreurs commises par les élèves, puis commence l'exploitation collective des résultats. Il envoie un élève au tableau réaliser l'assemblage à l'aide des gabarits magnétiques. L'enfant peut emporter sa construction ou effectuer de mémoire son assemblage avec les gabarits magnétiques. L'enseignant veille à ce qu'il ne change pas le point de vue sur l'objet. Il est important de détailler chaque phase de l'assemblage et de rappeler les bons gestes à acquérir à chaque étape : orienter correctement le premier gabarit, une arête verticale et une face au-dessus ; orienter correctement le deuxième gabarit ; le superposer ensuite sur une face du premier. La difficulté déjà mise en évidence lors de l'activité précédente, à savoir glisser un gabarit en dessous de ceux qui sont déjà placés, s'accroît avec le nombre de gabarits de l'assemblage. Il est en effet difficile de soulever un gabarit pour en glisser un autre en dessous sans faire bouger les autres pièces déjà placées. Les difficultés répétées des élèves amènent l'enseignant à poser une nouvelle question.

Peut-on organiser son assemblage pour éviter de devoir glisser des gabarits en dessous des autres ?

Après tâtonnements et discussions, les élèves en arrivent à la conclusion suivante : « il faut d'abord placer les gabarits des cubes qui sont le plus derrière et le plus en dessous ». Les enfants qui n'avaient pas réussi leur assemblage recommencent en appliquant la méthode qui vient d'être mise au point.

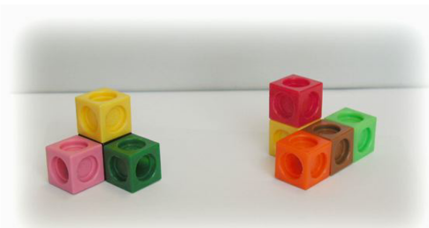


Fig. 22

L'enseignant leur propose ensuite les deux nouvelles constructions à représenter qu'il dépose correctement face à chaque enfant. Ces constructions (figure 22) sont un peu plus compliquées, car elles font intervenir une troisième direction de l'espace.

L'enseignant vérifie que chaque enfant représente bien ce qu'il voit et procède à des corrections individuelles si cela s'avère nécessaire. Il peut, dans ce cas, demander aux enfants qui ont réussi leur représentation d'aider leurs camarades en difficulté.

À ce stade, il est important de faire prendre conscience aux élèves des différentes orientations possibles d'un objet. L'enseignant poursuit donc en distribuant l'objet de la figure 23 aux enfants et leur donne la consigne suivante.

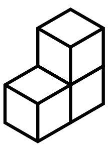


Fig. 23

Placez cette construction de trois cubes devant vous et représentez-la.

Puisque les enfants sont libres de placer leur construction comme ils le souhaitent, il est vraisemblable qu'ils ne la positionnent pas tous de la même façon. Les représentations qu'ils obtiennent sont donc différentes. Un éventail de possibilités est repris à la figure 24.

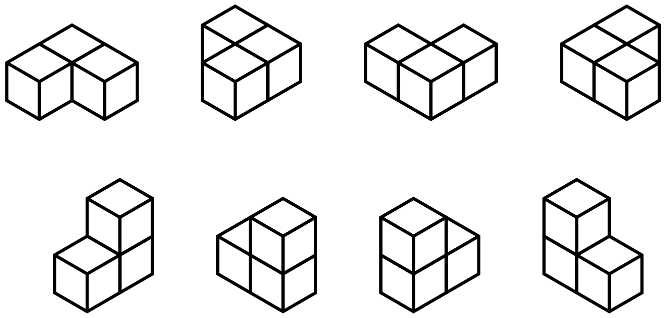


Fig. 24

L'enseignant choisit quelques assemblages intéressants et envoie les enfants les reproduire au tableau. Beaucoup sont surpris de voir apparaître des représentations différentes, alors qu'ils ont tous reçu la même construction. Pour qu'ils prennent conscience que ce sont bien toutes des images du même objet, l'enseignant demande à tous les enfants de placer leur construction pour qu'ils la voient comme le premier modèle représenté au tableau. Il vérifie ensuite le bon positionnement de toutes les constructions ou demande aux enfants d'un même banc ou d'une même rangée de comparer leurs solutions. Il n'intervient alors qu'en cas de litige.

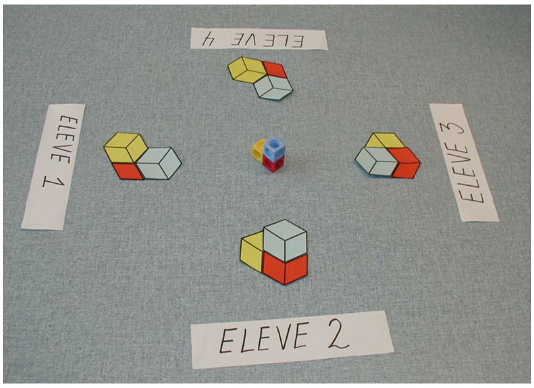
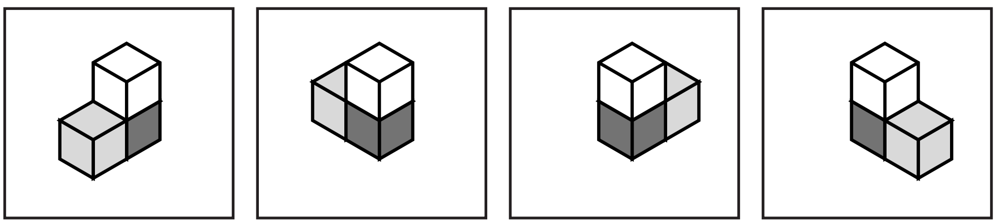


Fig. 25

Au lieu d'envisager plusieurs positions pour un même objet, on peut aussi envisager de faire varier les points de vue sur cet objet (figure 25). Pour cela, on invite les enfants à s'asseoir par groupe de quatre autour d'une table. On place une construction simple au centre de la table, chaque enfant représente ce qu'il voit avec ses gabarits. On demande aux enfants de coller leur assemblage sur une feuille pour qu'ils puissent comparer aisément leurs productions.



(élève1) *(élève2)* *(élève3)* *(élève4)*

Fig. 26

Pour terminer, l'enseignant invite les enfants à représenter avec leurs gabarits des objets de plus en plus complexes (figure 26).
À titre d'exemples, une série de modèles est reprise aux fiches 4 et 5. Lorsqu'on augmente le nombre de cubes, la stabilité des assemblages devient de plus en plus problématique. C'est alors le moment de proposer aux enfants de passer à la phase de dessin.

3 Dessins de cubes et de constructions

Toutes les activités reprises dans cette section ont comme objectif le dessin de cubes ou d'assemblages de cubes sur papier pointé. Néanmoins, au préalable, on peut tester les représentations des élèves en les laissant librement dessiner un cube sur papier blanc. La diversité des réalisations peut aider les enfants à mieux comprendre l'intérêt d'un papier tramé qui uniformise les représentations et permet une communication plus facile.

Pré-Test

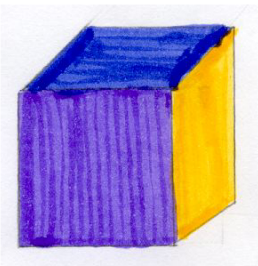


Fig. 27

Le dessin en perspective avec une face en « vraie grandeur » est le plus fréquent (figure 27).
On remarque aussi que certains enfants ont dessiné un cube en perspective avec une arête à l'avant-plan (figure 28) ou ont dessiné un développement de cube (figure 29).

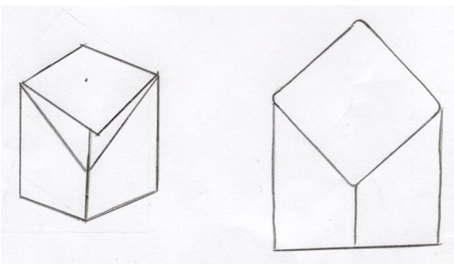


Fig. 28

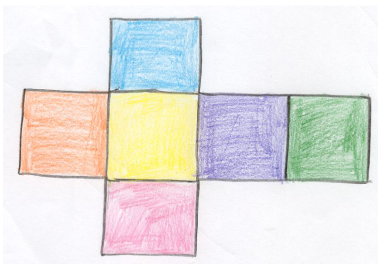


Fig. 29

D'autres dessinent également les arêtes cachées du cube (figure 30) ou un cube vu de haut dont la face carrée au centre est entourée de trapèzes, ce qui donne l'impression que le cube s'évase (figure 31).

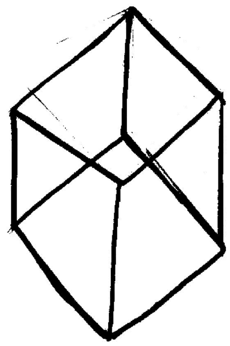


Fig. 30

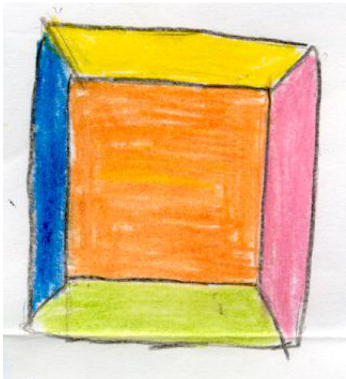


Fig. 31

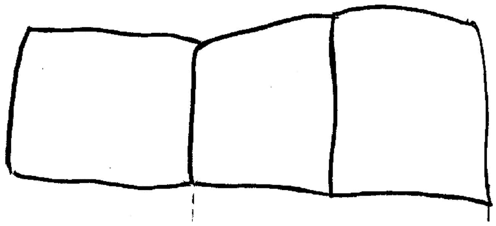


Fig. 32

Certains enfants représentent le cube par un carré ou plusieurs carrés juxtaposés (figure 32).

La représentation d'un cube par un carré voudrait dire que ce cube est parfaitement à hauteur des yeux et qu'aucune autre face n'est visible à part la face avant. Il est important de bien expliquer cela aux enfants et même de leur faire vivre la vision de cet unique carré en leur suggérant de placer un cube à hauteur de leurs yeux (mieux encore, d'un seul œil en fermant l'autre). Cette représentation par un unique carré est une des premières façons de le dessiner chez les plus jeunes (après le cercle), mais sans lien avec la position du cube. Cela semblerait dû au fait que l'objet ne possédant que des faces carrées, la forme « carré » devient une image mentale très forte. Elle parasite finalement la vision objective du cube où l'on distingue généralement plusieurs faces à la fois.

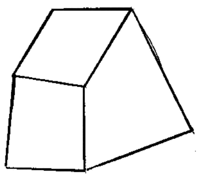


Fig. 33

De plus, dans le vocabulaire de certains enfants, il y a confusion entre les termes « cube » et « carré ». Afin de dessiner les autres faces du cube, les enfants rajoutent d'autres carrés. On peut alors parler de *réalisme intellectuel* ; les enfants, sachant que toutes les faces sont carrées, ne parviennent pas encore à sortir de cette représentation.

Une difficulté souvent rencontrée est d'assembler les faces qu'ils voient adjacentes (figure 33).

On note aussi que les enfants recherchent par essais et erreurs, effacent, retracent, pour obtenir des angles qui leurs semblent être corrects (figure 34).

Enfin, le dessin de la figure 35 montre les étapes parcourues par un même enfant pour arriver à dessiner son cube.

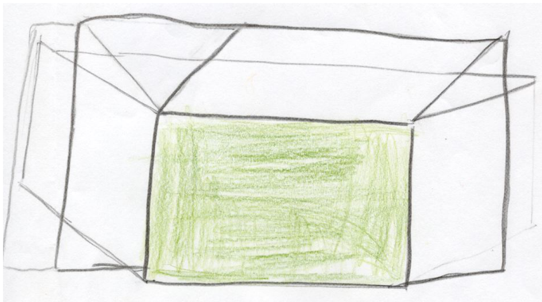


Fig. 34

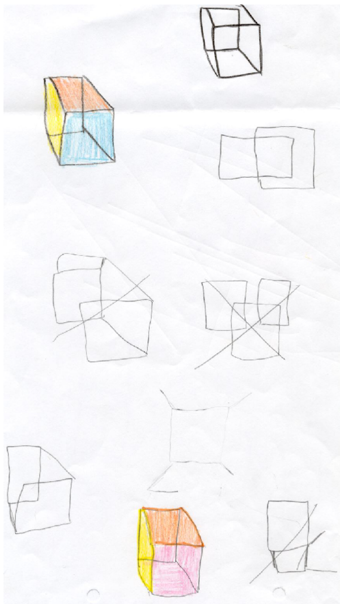


Fig. 35

Activités

De quoi s'agit-il ?

Les enfants dessinent, sur papier pointé, un cube ou un assemblage de cubes à partir d'un modèle réalisé avec les gabarits, à partir d'une construction à trois dimensions, en suivant une consigne déterminée par l'enseignant.

Enjeux

Utiliser et enrichir un vocabulaire relatif au matériel (cube, face, ...) et à l'organisation spatiale (au-dessus, en dessous, à gauche, à droite, devant, derrière, ...) ;

passer du gabarit d'un cube à son dessin sur papier pointé ;

passer d'une représentation à trois dimensions à un dessin à deux dimensions.

Compétences.

Tracer des figures simples sur papier tramé.

Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement.

De quoi a-t-on besoin ?

Des multicubes ;

des cubes multicolores ;

la fiche 7 en annexe ;

des feuilles de papier pointé (fiche 8 en annexe) ;

des crayons de couleurs.

3.1 Dessin d'un cube sur papier pointé (7 points)

Comment s'y prendre ?

L'enseignant suggère aux enfants, pour remédier au problème de stabilité de leurs assemblages de gabarits, de dessiner leurs constructions. Il leur présente à cet effet une feuille de papier pointé qui va leur permettre de réaliser des dessins qui correspondent exactement aux assemblages de gabarits.

a) Première étape

Avant de laisser les enfants dessiner sur la feuille complète, l'enseignant donne à chacun une feuille sur laquelle sont dessinés uniquement les sept points nécessaires au dessin du cube (figure 36 et fiche 7).

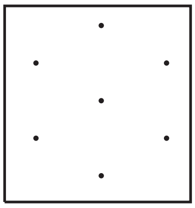


Fig. 36

Il leur donne la consigne suivante.

Reliez les sept points de manière à faire apparaître le dessin d'un cube.

L'enseignant les laisse libres de faire plusieurs essais. Il suggère aux enfants en difficulté de prendre un de leurs gabarits comme modèle. Il peut aussi leur donner un calque avec la trame des sept points pour qu'ils le superposent à un de leurs gabarits en carton.

b) Deuxième étape

Lorsque tous ont réussi leur dessin, l'enseignant leur donne un cube multicolore et donne la consigne suivante.

Placez le cube multicolore avec une arête verticale devant vous, ensuite coloriez celui que vous venez de dessiner en respectant les couleurs des faces.

Variante. – On peut faire de même avec un cube multicolore placé au centre d'une table autour de laquelle sont assis quatre enfants, chaque enfant ayant une arête différente face à lui. Ils dessinent et colorient chacun le cube comme ils le voient sur une feuille à trame de sept points. Les dessins sont, ensuite, mélangés et les enfants doivent retrouver la place d'où ils ont été dessinés. On peut aussi leur demander de positionner le cube pour le voir comme sur un des quatre dessins.

c) Dernière étape

Pour terminer, l'enseignant distribue une feuille de papier pointé (fiche 8) et donne la consigne suivante.

Retrouvez les sept points qui servent à dessiner un cube (figure 37) et reliez-les.

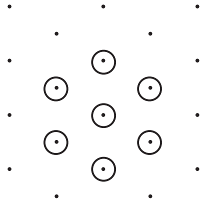


Fig. 37

Lorsque les enfants sont confrontés à une feuille complète de papier pointé, certains ont tendance à vouloir dessiner le cube avec une face frontale.

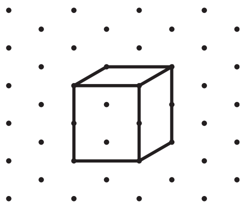


Fig. 38

Il est important de leur expliquer que la représentation qui nous intéresse ici est celle avec une arête à l'avant-plan et que le papier pointé est le support idéal dans ce cas. Pour dessiner un cube avec une face frontale, il est préférable d'utiliser du papier quadrillé, car sur le papier pointé, ce qu'ils dessinent comme étant une face frontale n'est pas un carré (figure 38).

3.2 Dessins de cubes sur papier pointé à l'aide d'assemblages de gabarits

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue aux enfants quelques multicubes, des gabarits en carton et une feuille de papier pointé. Il demande à chacun de poser un cube sur la table, toujours avec une arête verticale de face et de le dessiner sur sa feuille. Il donne ensuite la consigne suivante.

> Attachez un deuxième cube à l'arrière-plan droit du premier. Reproduisez votre construction avec vos gabarits, puis dessinez-la sur votre feuille de papier.

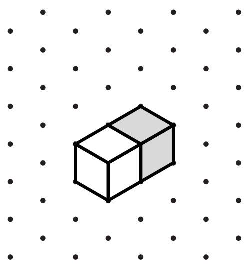


Fig. 39

Il est important dans cette première phase de dessin que les enfants se réfèrent à l'assemblage de gabarits. En effet, dès qu'on dessine un deuxième cube accolé au premier, certaines arêtes ne doivent pas apparaître, soit dans le premier cube, soit dans le deuxième. Le recours aux gabarits montre quelles arêtes sont cachées et aide donc sensiblement les enfants. Pour cet objet placé à l'arrière-plan, ce sont certaines arêtes du deuxième cube qui sont cachées par le premier (figure 39).

Les couleurs peuvent aussi se révéler une aide précieuse, notamment pour repérer le premier cube dessiné (dans toutes les figures, c'est le cube blanc).

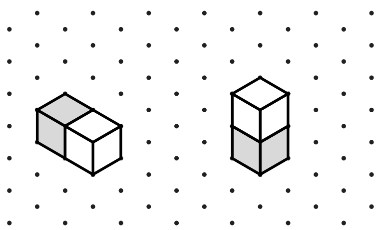


Fig. 40

Lorsque tous les enfants ont terminé ce premier dessin, on poursuit l'activité en faisant varier la position du deuxième cube, d'abord à l'arrière-plan gauche, puis en dessous (voir figure 40). Dans ces deux constructions, ce sont toujours des arêtes du deuxième cube qui ne doivent pas être dessinées.

L'enseignant propose ensuite aux enfants de dessiner les objets où le deuxième cube est au-dessus ou à l'avant-plan du premier. Les enfants sont alors confrontés à la principale difficulté liée à ce type de représentation : certaines arêtes du premier cube, déjà dessinées, doivent disparaître car le deuxième les cache. Il faut donc les gommer (les figures 41 et 42 montrent les arêtes « parasites » en pointillé).

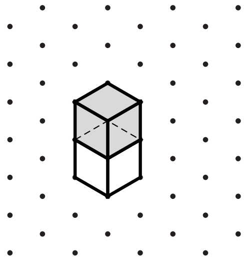


Fig. 41

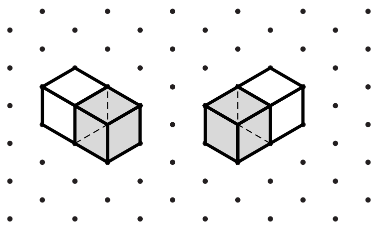


Fig. 42

Une comparaison des différentes constructions permet de mettre en évidence la conclusion suivante : il est préférable, lorsqu'on dessine un objet formé de plusieurs cubes, de commencer par ceux qui sont le plus au-dessus et le plus devant.

On remarque que la démarche mise ici en évidence est exactement l'inverse de celle établie pour l'assemblage de gabarits à l'activité 2.2. L'enseignant veillera à ce que les élèves distinguent bien les deux situations.

3.3 Dessins de cubes sur papier pointé à partir de constructions

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue à chaque enfant dix multicubes et des feuilles de papier pointé. Il donne la consigne suivante.

Avec ces dix cubes, construisez une « boîte » déposez-la à plat sur le plan de la table et dessinez-la sur votre feuille de papier pointé. Faites de même en la déposant ensuite verticalement.

Les figures 43, 44 et 45 montrent diverses réalisations des élèves.

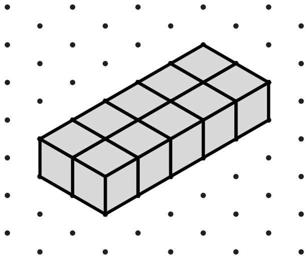


Fig. 43

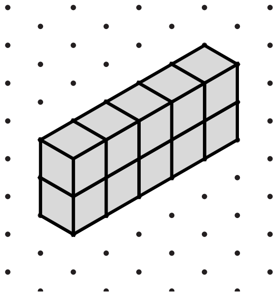


Fig. 44

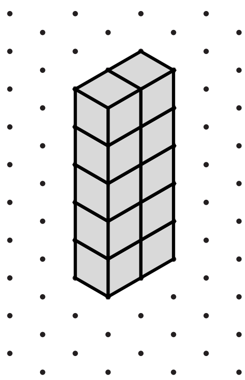


Fig. 45

L'enseignant rappelle aux élèves qu'il faut réfléchir au premier cube à dessiner pour éviter au maximum les coups de gomme. Cette activité permet aussi d'attirer l'attention des élèves sur l'alignement de certaines arêtes de leur construction et donc, par conséquent, sur les lignes directrices correspondantes dans leur dessin. À partir de là, la plupart se mettent à dessiner leur construction, non plus petit cube par petit cube, mais « globalement » en commençant par les arêtes extérieures de leur objet.

L'enseignant donne ensuite à chaque enfant la première construction de quatre cubes de la figure 46, une feuille de papier pointé et la consigne suivante.

Dessinez la construction sur votre feuille de papier pointé.

L'enseignant veille à ce que la construction ait bien une arête verticale face à l'enfant et vérifie l'exactitude des dessins. De nouveau, l'alignement des arêtes aide les enfants dans leur construction. Certains ont besoin de colorier chaque cube de leur dessin en respectant les couleurs. Quand tous les enfants ont terminé ce premier dessin, l'enseignant peut poursuivre l'activité avec les deux autres constructions, en demandant de respecter la même consigne.

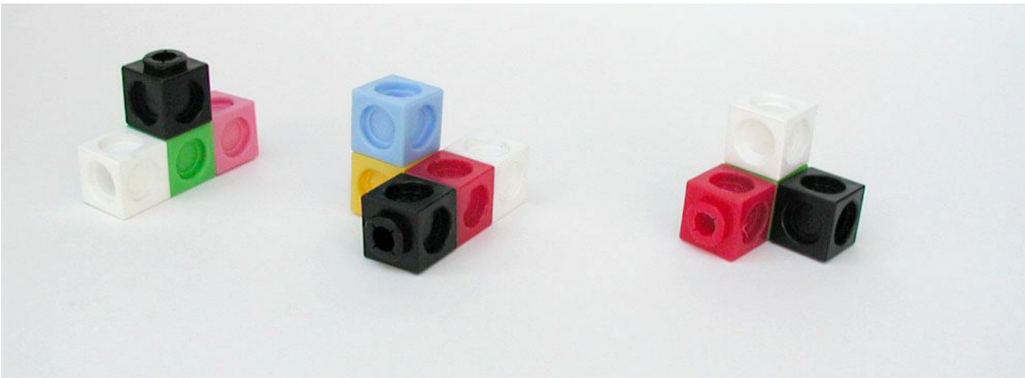


Fig. 46

Ces deux constructions présentent une difficulté supplémentaire, puisqu'ils introduisent une troisième direction dans le dessin. Les enfants qui ont terminé l'activité peuvent réaliser des constructions plus élaborées et les dessiner sur papier pointé.

Prolongement possible

L'enseignant invite les enfants à s'asseoir par groupe de quatre autour d'une table sur laquelle est déposée un objet formé de trois multicubes. Il leur donne la consigne suivante.

Dessinez cette construction sur une feuille de papier pointé.

Il vérifie l'exactitude de chaque dessin puis les rassemble afin de les comparer. Les enfants remarquent que les dessins ne sont pas les mêmes, ils correspondent à quatre points de vue différents du même objet. L'enseignant peut ensuite mélanger les feuilles, les redistribuer au hasard et demander aux enfants de situer l'endroit d'où le dessin a été réalisé.

3.4 Dessins de cubes sur papier pointé par des enfants assis face à face

L'enseignant invite les enfants à s'asseoir deux par deux, face à face, et place entre eux un cube multicolore. Il leur donne une feuille de papier pointé avec la consigne suivante.

Dessinez le cube et coloriez les faces en respectant les couleurs.

Lorsque tous les enfants ont terminé, l'enseignant demande à chacun de cacher son dessin, puis donne la consigne suivante.

Décrivez, chacun à votre tour, ce que vous voyez, à votre voisin d'en face pour qu'il puisse dessiner et colorier la même chose que vous.

Lorsqu'ils ont terminé, les enfants comparent le dessin réalisé sous dictée avec celui qui a été caché. Ces dessins devraient être identiques. Les enfants discutent et se corrigent si nécessaire. L'enseignant leur propose le même exercice avec deux multicubes qu'ils placent d'abord verticalement, puis horizontalement (figures 47 et 48).

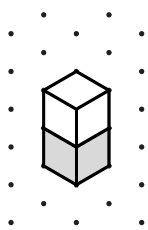


Fig. 47

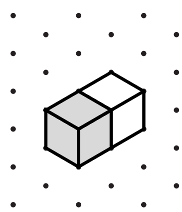


Fig. 48

Ils recommencent l'exercice avec deux cubes multicolores.

3

Voir dans l'espace

> Un petit croquis m'en dit souvent plus long qu'un long rapport.
>
> Napoléon Bonaparte

> S'il est essentiel de commencer par savoir, c'est justement pour avoir une chance de réussir à modifier le cours des choses.
>
> Jacques Bouveresse

Ce chapitre est un complément aux précédents. Il a pour but de donner aux enseignants une vue d'ensemble des problèmes que pose la vision dans l'espace.

1 Explorer les objets par la vue et le toucher

Pour percevoir la forme et les dimensions d'une figure plane, par exemple une figure découpée dans du papier, il suffit de la regarder d'un seul côté. Tel n'est pas le cas pour un solide opaque à trois dimensions, car si on se limite à un seul point de vue, on ne le voit pas tout entier. Pour le connaître complètement, il faut l'explorer par la vue ou le toucher. Il faut donc tourner autour, ou le faire pivoter devant soi, ou le tâter. Et ensuite, pour en avoir une intuition d'ensemble, il faut coordonner ces perceptions partielles successives. Cela se fait en général spontanément, mais la capacité de se représenter les objets de manière fidèle varie d'une personne à l'autre. Cette capacité peut être améliorée par l'exercice.

Le dessin industriel systématise cette nécessaire multiplicité des points de vue et leur recomposition. On y donne habituellement trois vues d'un même objet : une vue de face, une vue du dessus et une vue de côté (voir section 6). Pour se représenter l'objet, il faut coordonner mentalement les trois vues. La capacité de le faire varie beaucoup d'une personne à l'autre, mais peut s'entraîner.

2 Reconnaître l'identité de deux objets

Comment pouvons-nous reconnaître que deux objets sont identiques ? Nous nous limitons ici à l'identité géométrique, c'est-à-dire à l'identité de forme et de grandeur. S'il s'agit de deux objets plans, on vérifie leur identité en les superposant. Une telle opération est par contre impossible pour les solides à trois dimensions, car ils ne peuvent pas se pénétrer l'un l'autre. Pour vérifier qu'ils ont même forme et même grandeur, il faut donc recourir à d'autres méthodes, ce qui est un des objets de la géométrie. On peut conjecturer l'identité de deux objets simples en les disposant devant soi dans une même orientation, et en faisant glisser mentalement l'un sur l'autre jusqu'à ce qu'ils « se superposent en pensée » (comme on pourrait le faire en réalité s'ils étaient des hologrammes). C'est ce qu'illustrent les figures 1 et 2.

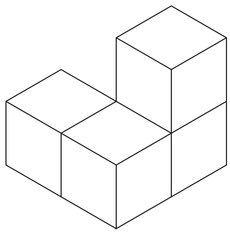


Fig. 1

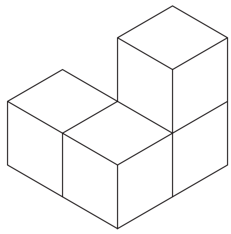


Fig. 2

Considérons maintenant les figures 3 et 4. Elles représentent toutes deux un assemblage de quatre cubes, et on peut dire aussi que ceux-ci y sont disposés *de la même façon*. Et pourtant, on a beau tourner ces objets comme on veut, on n'arrive pas à les superposer mentalement, par un simple glissement. En fait, ils sont images l'un de l'autre dans un miroir. De deux solides qui sont ainsi « les mêmes », quoique non superposables, mais qui le deviennent lorsqu'on remplace l'un des deux par son image dans un miroir, on dit qu'ils sont *énantiomorphes*[1].

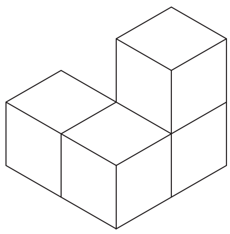


Fig. 3

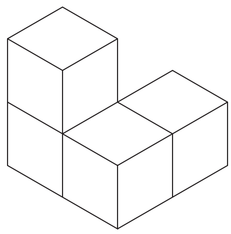


Fig. 4

À titre de contre-exemple, les figures 5, 6 et 7 représentent trois solides qui sont eux effectivement superposables. On ne doit pas les *renverser* dans un miroir pour arriver à les superposer mentalement. Mais si on réfléchit l'un d'eux dans un miroir, il demeure superposable aux autres.

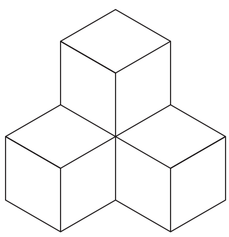


Fig. 5

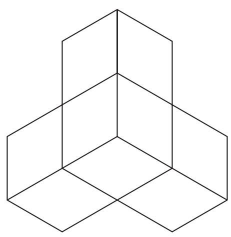


Fig. 6

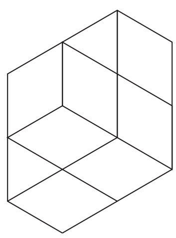


Fig. 7

Les personnes non habituées peuvent éprouver beaucoup de difficultés à reconnaître que deux objets énantiomorphes ne sont pas superposables. On ne saurait trop leur recommander d'expérimenter cela avec des objets réels, par exemple des assemblages de vrais cubes.

Il existe des couples d'objets énantiomorphes dans les espaces à une, à deux et à trois dimensions. Pour en savoir plus à ce sujet, on pourra se reporter à CREM [2001a].

[1] Ce terme savant a moins d'importance que le fait de reconnaître l'existence de paires d'objets de ce type.

3 Voir à plat ou en relief

Certains dessins sont perçus parfois *à plat*, et à d'autres moments *en relief*. Par exemple, beaucoup de lecteurs interpréteront spontanément la figure 8 comme un hexagone régulier dans lequel on a dessiné trois rayons. Mais d'autres lecteurs, ou les mêmes à d'autres moments, interpréteront cette figure comme un cube.

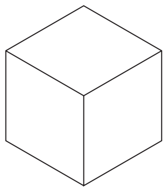


Fig. 8

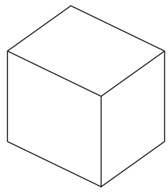


Fig. 9

La figure 9 sera perçue plus facilement comme un cube (ou un parallélépipède) que comme un hexagone irrégulier dans lequel on a tracé trois segments issus d'un même point et rejoignant trois sommets.

Ainsi, chacune de ces deux figures peut être perçue de deux façons, entre lesquelles l'observateur ne peut pas toujours choisir volontairement. La perception bascule souvent d'une interprétation à l'autre sans que l'on sache bien pourquoi.

Mais au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, les psychologues de la forme (M. Wertheimer, W. Köhler) ont remarqué que certaines figures sont perçues plus souvent à deux dimensions qu'à trois, et que pour d'autres, c'est l'inverse. Cette observation s'applique aux représentations planes d'objets à trois dimensions très symétriques tels qu'un cube, un parallélépipède rectangle, une pyramide droite, etc.

Restons-en provisoirement à l'exemple du cube. Dans la pratique, pour voir un cube s'inscrire – ou à peu de chose près –, dans un hexagone régulier, il faut le regarder d'un point de vue très particulier, avec un œil dans le prolongement d'une de ses diagonales (ou si on veut en prenant une de ses diagonales comme ligne de visée) et en fermant l'autre œil. En pratique, on ne perçoit presque jamais un cube de cette façon. Pour le percevoir ainsi, il faut véritablement chercher ce point de vue particulier. Et donc dans l'immense majorité des cas, on voit un cube « de côté », de sorte qu'il s'inscrit dans un hexagone irrégulier, ce dont la figure 9 montre un exemple.

Voici un autre exemple du même phénomène. La figure 10 sera plus souvent perçue comme un carré (ou un losange) muni d'une diagonale, que comme l'image d'un tétraèdre régulier, ou d'une pyramide à base triangulaire. Par contre, il faudra faire un effort moindre pour percevoir la figure 11 comme représentant une pyramide.

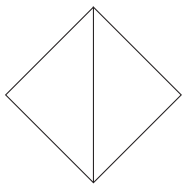


Fig. 10

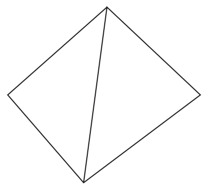


Fig. 11

Revenons aux figures 8 et 9. Un cube, objet très symétrique, peut être représenté par un dessin *très symétrique* ou *peu symétrique*. Il se fait que la perception visuelle interprète *le plus souvent* le dessin comme représentant la forme la plus simple et la plus symétrique. Il est plus simple d'interpréter la figure 8 comme un hexagone régulier, figure plane effectivement très régulière, que comme un cube. Quant à la figure 9, vue dans le plan elle est peu régulière, tandis que vue dans l'espace elle renvoie à un cube, figure très symétrique. Le cerveau *choisit* en quelque sorte, le plus souvent, l'interprétation la plus simple et la plus régulière. C'est là ce que les psychologues appellent la *loi de la bonne forme.*

L'observation est peut-être encore plus frappante lorsqu'on représente des solides en tiges. La figure 12 montre un cube vu symétriquement, et la figure 13 un cube vu de côté. La figure 14 montre de même un tétraèdre vu symétriquement, et la figure 15 le même vu un peu de côté. La figure 16 est une pyramide à base carrée vue juste du dessus, et la figure 17 la montre vue de côté.

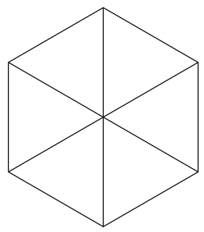


Fig. 12

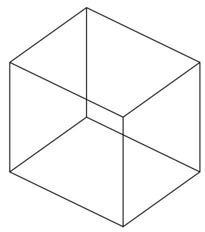


Fig. 13

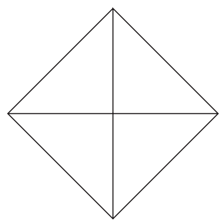


Fig. 14

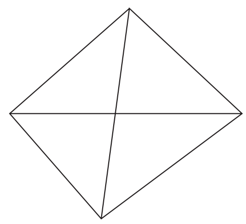


Fig. 15

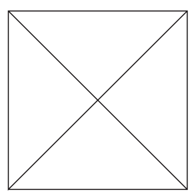


Fig. 16

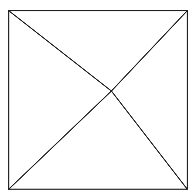


Fig. 17

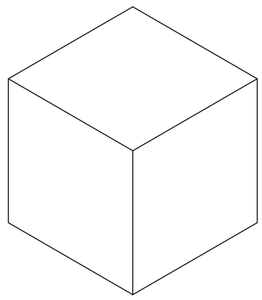


Fig. 18

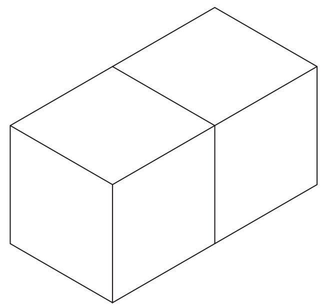


Fig. 19

La figure 18 sera parfois perçue comme un hexagone régulier. Mais si on la complète en la désymétrisant comme à la figure 19, alors on la perçoit plus facilement comme représentant un assemblage de deux cubes.

La figure 20, qui possède un axe de symétrie, sera difficilement perçue comme représentant trois cubes, au rebours de la figure 21 qui montre le même assemblage vu de côté.

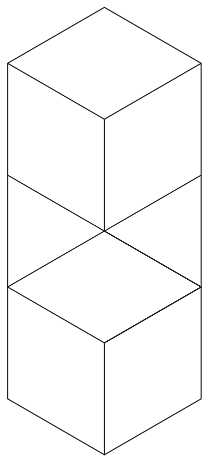


Fig. 20

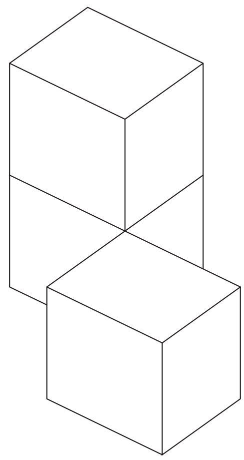


Fig. 21

Sur la loi de la bonne forme, on pourra consulter P. Guillaume, [1979].

4 Un seul dessin, plusieurs objets représentés

Nous avons vu à la section précédente qu'un même dessin peut, selon les circonstances, être perçu en plan ou en relief. Mais un même dessin peut aussi, selon les moments, être vu en relief de diverses façons.

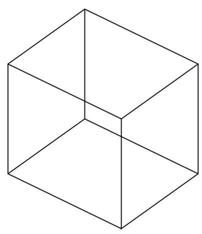


Fig. 22

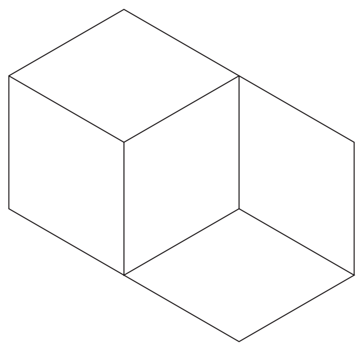


Fig. 23

Par exemple, la figure 22 qui représente un cube en arêtes, peut être interprétée selon les moments comme une vue du dessus, ou comme une vue du dessous.

Par exemple encore, la figure 23 peut être vue de quatre façons différentes :

- comme un cube au-dessus à gauche, cachant partiellement un cube en dessous à droite ;
- comme un cube en dessous à droite, cachant partiellement un cube au-dessus à gauche ;

- comme un cube auquel on a accolé, sur la droite et en dessous, un trièdre formé par trois faces de cube ;
- comme un cube auquel on a accolé, sur la gauche et au-dessus, un trièdre formé par trois faces de cube.

Il ne faut donc pas s'étonner si deux personnes, à un moment donné, disent ne pas voir la même chose[2]. L'ambiguïté des représentations planes provient en fait de ce que tout point du plan est candidat pour représenter divers points de l'espace.

Une manière de réduire cette ambiguïté consiste à dessiner en trait pointillé les arêtes qui sont cachées si le solide est à faces pleines, ou situées à l'arrière s'il s'agit d'un solide en tiges. Par exemple, selon cette convention, le cube de la figure 24 est vu du dessus, tandis que celui de la figure 25 est vu par dessous.

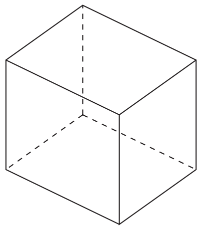


Fig. 24

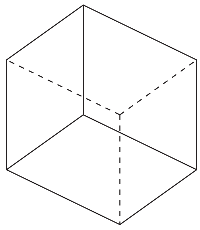


Fig. 25

Cette analyse des figures ambiguës montre une embûche de l'enseignement de la géométrie de l'espace. En effet, on ne peut guère espérer enseigner cette géométrie sans s'appuyer sur des représentations planes d'objets à trois dimensions (on ne peut pas toujours disposer de solides réels ou de maquettes). Et la situation peut devenir compliquée si les élèves ne s'entendent pas entre eux ou avec le professeur sur l'interprétation d'un dessin.

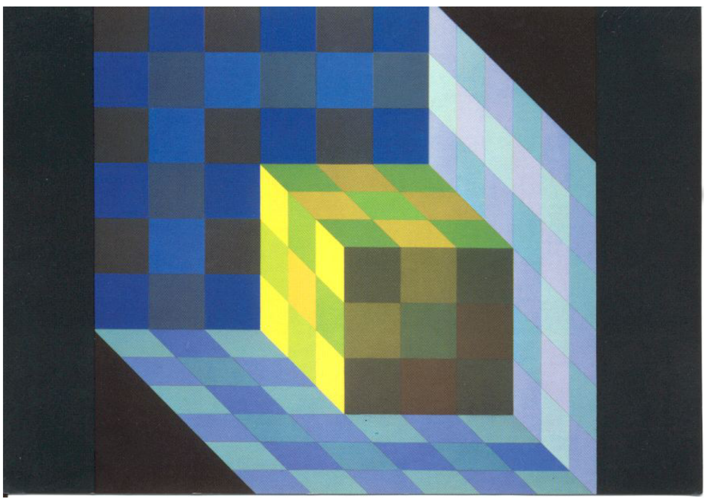


Fig. 26

[2] Ces visions différentes ne sont pas faciles à évoquer et le lecteur devra sans doute s'armer de patience. Il pourra s'aider de la remarque suivante : la figure 23 montre en deux endroits trois segments issus d'un même point et apparaissant en plan à 120° les uns des autres. Un tel trièdre peut être perçu de deux façons : soit avec son sommet devant et ses arêtes fuyant vers l'arrière, soit à l'inverse.

Le peintre VASARELY a astucieusement exploité l'ambiguïté des représentations planes d'objets de l'espace, comme le montre la figure 26. Celle-ci est reproduite schématiquement à la figure 27. Une autre œuvre de VASARELY, reproduite schématiquement à la figure 28, propose également une vue ambiguë d'un objet de l'espace.

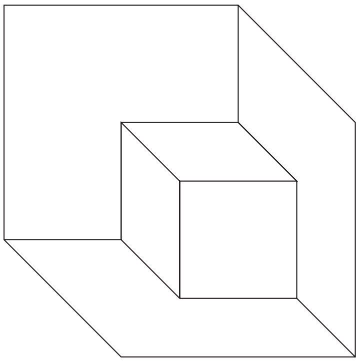


Fig. 27

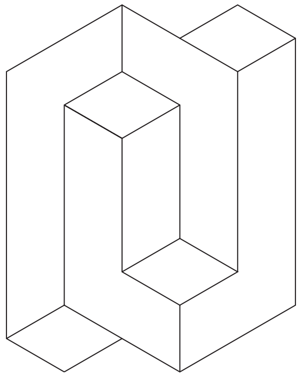


Fig. 28

5 Les figures impossibles

Il existe aussi des dessins qui paraissent à première vue représenter un objet de l'espace, mais qu'un examen plus attentif révèle comme impossibles à construire, au moins d'un certain point de vue. C'est le cas de l'assemblage de cubes que montre la figure 29 et qui forme une sorte de boucle.

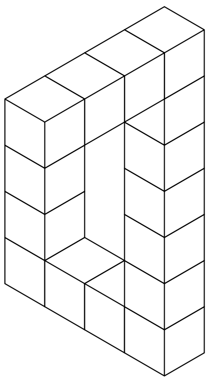


Fig. 29

On peut analyser cette impossibilité de plusieurs façons, dépendant de l'endroit où l'on commence à parcourir la boucle. Partons par exemple de la rangée de cubes la plus basse, qui va de l'arrière gauche vers l'avant droit. Elle se raccorde à une colonne verticale de 7 cubes, suivie d'une rangée horizontale de 3 cubes qui va vers la gauche et l'avant. Au bout de cette rangée, 2 cubes sont suspendus. Ils se trouvent donc à gauche et en avant. Il est donc impossible qu'ils se raccordent à notre cube de départ, puisque celui-ci se trouve à gauche et en arrière. En ce sens, l'assemblage est impossible à réaliser.

Mais si par contre on suppose que la boucle n'est pas fermée, alors la colonne de deux cubes suspendue en avant et à gauche peut être interprétée comme cachant la face supérieure du cube de départ de notre parcours, cube qui se trouve à gauche et en arrière. Ainsi, la figure 29 ne représente un objet impossible que si on veut y voir une boucle fermée. Au cas contraire, elle est une représentation trompeuse d'une boucle ouverte parfaitement réalisable. Mais dans ce cas, il faut chercher soigneusement le point de vue adéquat pour la voir à peu près comme sur la figure.

La figure 30 montre une bande repliée en carré et vue du dessus. La figure 31 montre la même bande vue du dessous. Quant à la figure 32, elle est une déformation de ces mêmes figures, mais on ne peut arriver à lui faire correspondre une figure de l'espace. Le lecteur aura peut-être reconnu le logo des automobiles Renault (tourné d'un quart de tour). Il n'est pas étonnant que cette figure soit due à Vasarely.

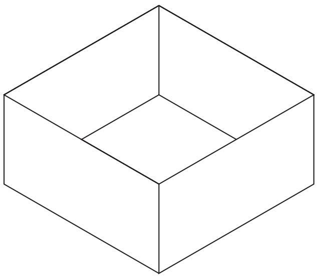


Fig. 30

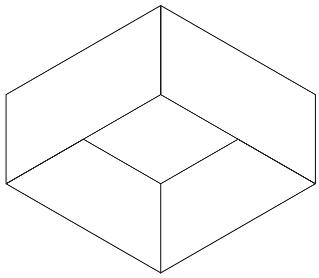


Fig. 31

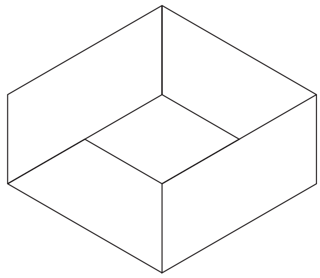


Fig. 32

La possibilité – si on ose dire –, des figures impossibles, résulte, comme celle de plusieurs visions d'un seul dessin, du fait qu'un point du plan est candidat pour représenter divers points de l'espace.

Le dessin présenté à la figure 33 montre un personnage examinant attentivement un objet impossible. Il est du graveur hollandais Escher. Celui-ci s'est aussi amusé à combiner des représentations impossibles à des choses familières comme un escalier ou un cours d'eau, créant ainsi des situations intrigantes. La figure 34 en montre un exemple. Si on imagine que l'eau coule dans un chenal quasi horizontal, alors elle devrait tomber derrière le bac. Mais comme elle tombe dans le bac, c'est que le chenal monte. Or selon l'interprétation immédiate du dessin en perspective, le chenal ne monte pas.

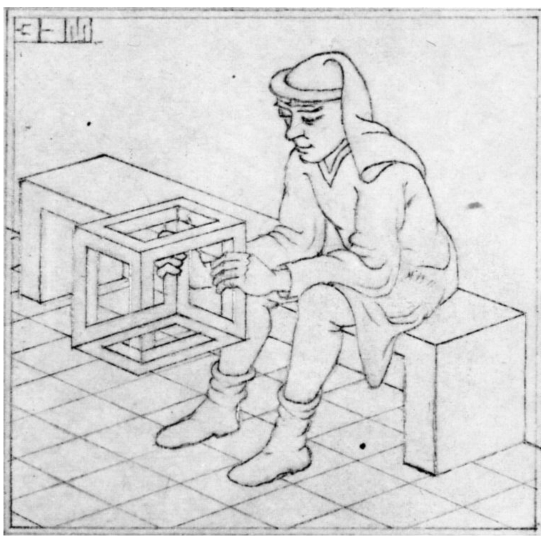


Fig. 33

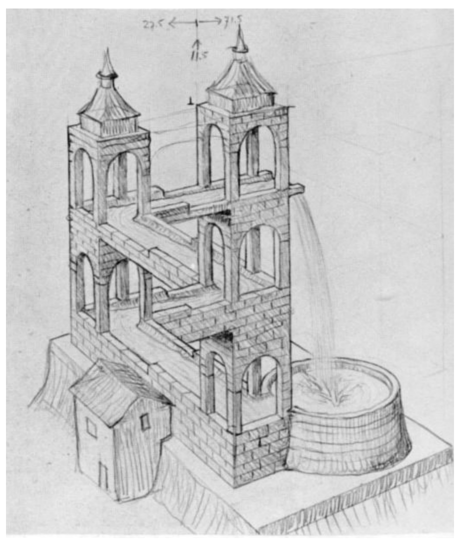


Fig. 34

Sur les figures ambiguës ou impossibles, on pourra consulter J. Guiraud et P. Lison, [1976]. Pour Escher, voir par exemple J. L. Locher, [1976].

6 Plusieurs systèmes de représentation

Toutes les figures que nous avons proposées jusqu'ici sont en *perspective cavalière*[3]. Cela veut dire, entre autres, que lorsque deux arêtes d'un objet de l'espace sont parallèles, elles sont représentées en plan par deux traits parallèles. La figure 35 représente une petite église en perspective cavalière. Sur la perspective cavalière, voir G. Audibert, [1990].

Dans une autre forme de perspective, appelée *perspective à point de fuite*, deux droites parallèles qui s'éloignent de l'observateur sont représentées par des segments qui convergent vers un point de fuite, comme celui vers lequel on croit voir se rejoindre les deux bords d'une route droite. La figure 36 représente le même édifice dans cette autre perspective. Sur la perspective à point de fuite, voir Th. Gilbert, [1987].

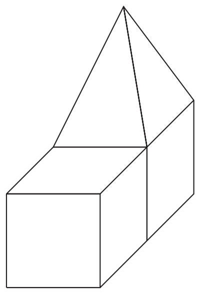


Fig. 35

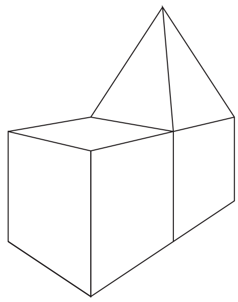


Fig. 36

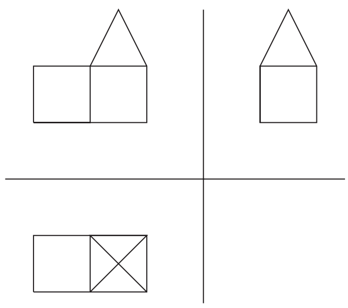


Fig. 37

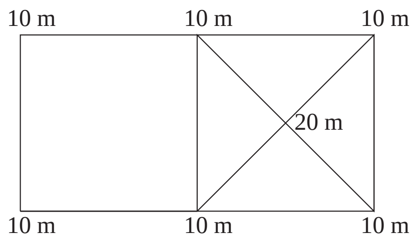


Fig. 38

En *dessin technique*, on représente un objet, comme nous l'avons rappelé ci-dessus, par une vue de dessus, une vue de face et une vue de côté. Un exemple en est donné à la figure 37. Sur ce mode de représentation, voir par exemple R. Verschraegen, [1971].

Enfin, en *projection cotée*, on ne conserve que la vue du dessus, mais on y indique, dans une unité convenue, la hauteur à laquelle se trouvent différents points importants de l'objet. C'est ce qu'illustre la figure 38. Les cartes géographiques munies de courbes de niveau sont aussi des projections cotées : la figure 39 en donne un exemple.

[3] Nous utilisons ici la locution *perspective cavalière* dans son acception la plus générale, celle qui renvoie à toutes les représentations pouvant résulter d'une projection parallèle sur un plan. En d'autres circonstances (cf. L. Lismont, [2001] (B)), nous avons trouvé commode de réserver cette locution aux représentations dans lesquelles tout cube possède une face frontale.

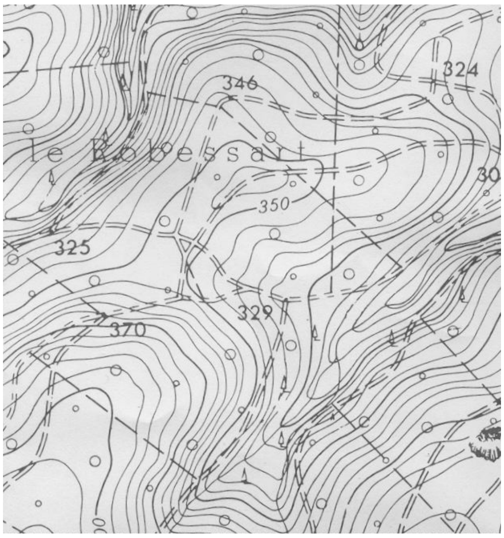


Fig. 39

Chacun de ces quatre systèmes de représentation a ses avantages et ses inconvénients. Leur multiplicité témoigne à la fois de l'insuffisance de chacun d'eux et de l'ingéniosité déployée par les hommes pour répondre à la nécessité pratique de représenter en plan les objets de l'espace. Les deux formes de la perspective sont utilisées surtout par les dessinateurs et les peintres, les projections orthogonales (cotées ou non) par les artisans, les architectes et les ingénieurs. Apprendre à manier ces diverses formes de représentation et à passer de chacune aux autres développe la capacité à *voir dans l'espace*. Voir à ce sujet la section 8.

La perspective à point de fuite a été conçue et perfectionnée par les peintres et les architectes de la renaissance italienne (Brunelleschi, Alberti, Piero della Francesca, ...). Elle a donné naissance au XVII^{e} siècle à la géométrie dite *projective*, discipline qui a atteint son plein développement au XIX^{e} siècle. Pour en apprendre un peu plus sur cette fécondation des mathématiques par la peinture, on pourra se reporter par exemple à A. Dahan-Dalmedico, [1986].

7 Voir bien ou mal

Comme nous l'avons rappelé à la section 1, on ne voit jamais complètement un objet de l'espace du premier coup : il faut multiplier les points de vue, puis réaliser une véritable synthèse de ces vues particulières, ce qui se fait plus ou moins consciemment. C'est à ce prix seulement que l'on se construit une idée intuitive de l'objet dans sa globalité.

7.1 Distance de l'objet

Ce travail de « prises de vues » et de synthèse est considérablement entravé ou facilité par certaines circonstances. Tout d'abord, on ne voit pas bien les objets trop grands. On voit bien un objet lorsqu'il s'inscrit dans un angle de vue modéré. La preuve, c'est que si l'objet est trop proche, on s'efforce de « prendre du recul », précisément pour diminuer l'angle de vue. Le professeur qui est le nez sur le tableau se plaint souvent de ne pas bien voir. Mais d'autre part, si on doit s'éloigner trop, on ne discerne plus bien les détails. Il arrive que l'on n'identifie un objet situé trop loin pour être vu distinctement que par référence à son environnement.

On ne voit pas bien non plus un objet trop petit, et si on s'en approche trop, on n'arrive plus à accommoder la distance de vision nette. Dans ce genre de circonstances, les myopes sont avantagés.

En résumé, pour qu'un objet soit vu distinctement, il faut qu'il ne soit ni trop grand, ni trop petit, ni trop loin, ni trop près[4]. Or nous sommes loin de maîtriser toujours les tailles des objets et leurs distances à nous. Il en résulte que nous voyons mal une proportion considérable des objets qui sollicitent notre attention.

7.2 Orientation de l'objet

D'autre part, l'orientation d'un objet peut aussi faciliter ou entraver sa perception. Pour examiner cette question, supposons que l'observateur soit dans une position *normale*, avec le buste vertical et le regard orienté devant lui et proche de l'horizontale. Et prenons l'exemple d'un cube. On le reconnaît plus facilement comme tel s'il est posé sur une table, c'est-à-dire sur un plan horizontal, face à l'observateur, un peu de travers de manière qu'on en voie trois faces.

De même une pyramide ou un cône droits sont le plus facilement reconnus lorsque leur axe est vertical. *A contrario*, on imagine le malaise d'une personne à qui l'on présenterait une maquette de maison orientée n'importe comment dans l'espace. L'horizontale et la verticale, qui sont des directions physiques familières à l'homme, jouent ainsi un rôle essentiel dans la perception d'une foule d'objets.

Insistons un peu sur ce point. On s'aperçoit spectaculairement du soutien qu'apportent les directions horizontale et verticale lorsqu'on en est soudain privé. Tel est le cas quand on cherche à comprendre les jours, les nuits et les saisons. Pour y arriver, on considère habituellement une représentation de la terre en quatre points de son orbite comme sur la figure 40. Le soleil est au centre et l'orbite est dessinée « horizontalement », ce qui permet de la voir au mieux. Sur la figure 41, nous avons isolé la terre avec son axe des pôles incliné. Nous avons aussi représenté la verticale (qui passe par le centre de la terre) ainsi que le plan de l'horizon, en un lieu situé à 45° de latitude nord. Les deux directions ainsi représentées ne coïncident pas du tout avec les bords de la feuille. Cela demande un grand effort d'imagination d'identifier cette verticale et cette horizontale avec les mêmes directions connues familièrement.

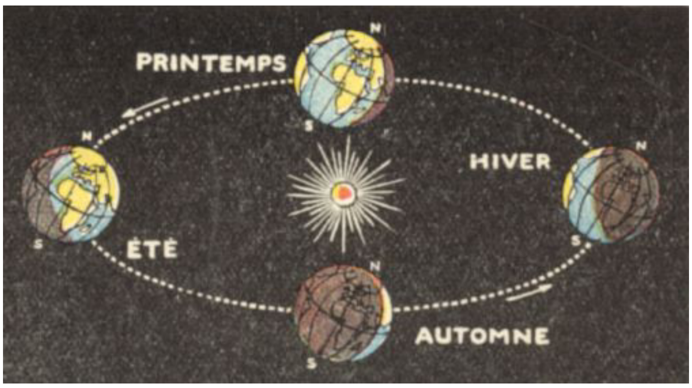


Fig. 40

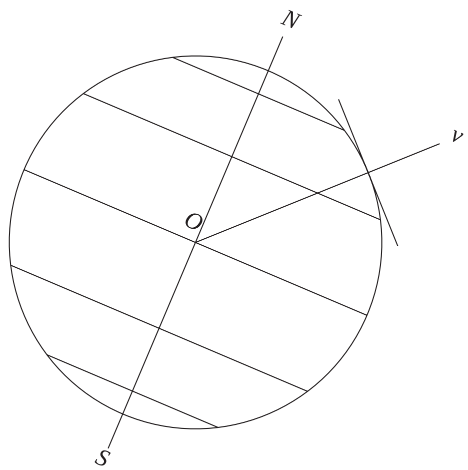


Fig. 41

[4] Il faudrait ajouter encore ni trop brillant, ni trop sombre.

7.3 Orientation de l'observateur

Un observateur couché, ou placé dans une orientation inhabituelle (par exemple la tête en bas) a beaucoup de peine à percevoir les choses « comme elles sont ». Il en va de même s'il est en position normale, mais doit lever ou abaisser trop le regard, ou encore tourner trop les yeux vers la gauche ou la droite. Dans toutes ces circonstances, il est en outre difficile de communiquer à propos des objets. Par contre, si un objet est placé normalement devant soi, on peut parler à son sujet du dessus et du dessous, de l'avant et de l'arrière, de la gauche et de la droite, et ces qualifications aident à se le représenter. En outre, dans la communication entre personnes à propos des objets de l'espace, il est essentiel de comprendre ce que ces qualifications veulent dire lorsqu'elles s'appliquent à une autre personne que soi-même. En d'autres termes, il faut arriver à se mettre en imagination à la place de l'autre, pour saisir ce que veulent dire, par rapport à lui, *devant, derrière, à gauche, à droite, dessus* et *dessous.*

8 Qu'est-ce que voir dans l'espace ?

Ceci dit, qu'est-ce exactement que la capacité de *voir dans l'espace*, dont parlent si souvent les enseignants de mathématiques ? C'est tout d'abord la capacité, face à un objet perçu malaisément pour une raison quelconque, que ce soit sa position, sa taille, son orientation, ou une position défavorable de l'observateur, de le ramener mentalement et de se ramener soi-même dans une position d'observation aisée, ce qui permet de se le représenter fidèlement, d'en parler et de raisonner à son propos.

Cette capacité de ramener *mentalement* l'objet dans une position privilégiée, pour être à même d'en *détailler les propriétés,* est considérablement facilitée par deux circonstances importantes. D'une part si l'objet possède des symétries simples, celles-ci, perçues comme organisation globale de ses parties les unes par rapport aux autres, aident à le reconstituer dans la position privilégiée. Et de même, si l'objet est familier ou figuratif, ses diverses parties sont reconnues d'un coup d'œil, sans qu'il soit besoin de les détailler, et elles sont reconstituées en position privilégiée, sans devoir être transportées mentalement.

Nous venons de parler de *détailler les propriétés.* Voir dans l'espace, c'est aussi être capable d'agir mentalement sur les objets et d'imaginer des perceptions instructives. Par exemple faire tourner un objet, en faire le tour, l'agrandir ou le rapetisser, le déformer, le décomposer en ses parties et imaginer les connexions de ces parties et plus généralement sa structure, y discerner des axes ou des plans privilégiés, le situer dans un assemblage d'objets.

La capacité de voir dans l'espace est d'abord relative à la représentation mentale des objets (réels) perçus malaisément. Mais elle concerne aussi la restitution à trois dimensions des objets représentés en plan. Comme nous l'avons vu ci-dessus, les représentations planes d'objets de l'espace peuvent être ambiguës ou trompeuses. Elles ne sont en tout cas jamais totalement fidèles. Et c'est donc une opération non triviale, exécutée selon les cas de manière consciente ou raisonnée, que de faire correspondre à une figure plane, un objet en relief pensé en position privilégiée et donc sur lequel on puisse raisonner.

La reconstruction mentale d'un objet figuré par un dessin est facilitée par diverses circonstances. Montrons cela sur des exemples de perspective cavalière. Comme ci-dessus, la symétrie de l'objet, même si elle ne se retrouve pas dans le dessin, aide à la reconstruction (voir les figures 42 et 43). De même, le caractère figuratif est un facteur facilitant (voir les figures 44 et 45).

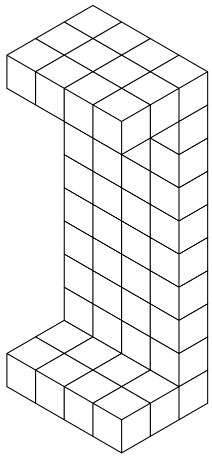


Fig. 42

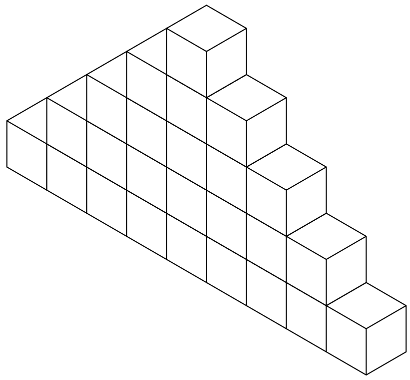


Fig. 43

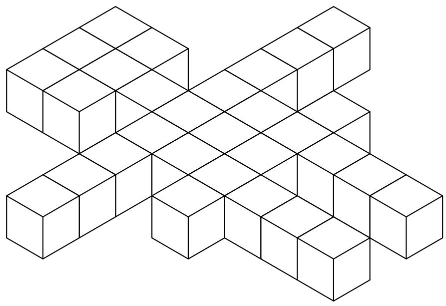


Fig. 44

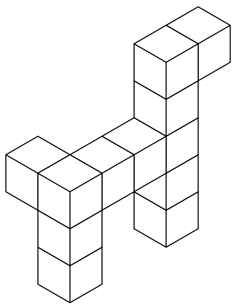


Fig. 45

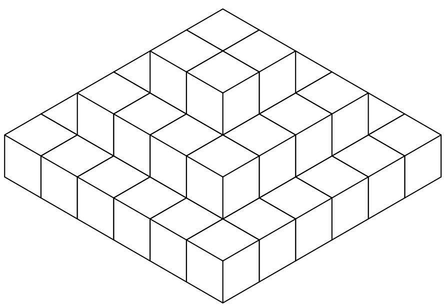


Fig. 46

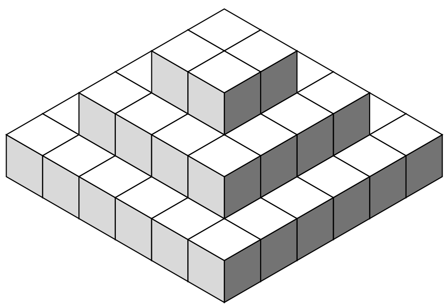


Fig. 47

Des ombres propres, supposées provenir d'un éclairage latéral, favorisent souvent la perception du relief, ce que l'on réalise en comparant les figures 46 et 47. Enfin, certains comptages ou mesures sommaires servent aussi à la reconstruction spatiale : c'est ainsi par exemple que l'appendice situé au-dessus et à droite de l'objet présenté à la figure 48 est constitué de deux cubes et non de trois. Avoir reconnu ce nombre aide à se souvenir de l'objet[5].

[5] Nous avons observé plusieurs fois que des personnes à qui on demandait de construire un assemblage réel de cubes d'après le modèle de la figure 48 construisaient cet appendice avec trois cubes.

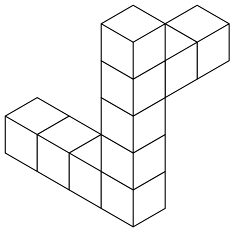


Fig. 48

9 La vision dans l'espace et la pensée

Parce que l'être humain doit sans cesse se situer parmi des objets à trois dimensions et agir sur eux, la capacité de voir dans l'espace a clairement une valeur pratique inappréciable. Mais pourquoi cette capacité est-elle un atout dans l'apprentissage des mathématiques ?

Tout d'abord, elle aide à apprendre la géométrie, ce qui va de soi. Mais en outre, dans toutes les autres parties des mathématiques, les intuitions spatiales constituent un soutien essentiel. Il faut même ici généraliser d'emblée le propos. Car ce qui soutient la pensée mathématique, ce sont les intuitions géométriques non seulement dans l'espace à trois dimensions, mais aussi dans des espaces à une et deux dimensions. Qui plus est, il y a des interactions utiles entre la droite, le plan et l'espace : les droites sont des éléments structurants du plan, comme les droites et les plans le sont de l'espace. La vision dans l'espace, au sens restreint où nous en avons parlé jusqu'ici, n'est qu'une facette (centrale) d'une sorte d'agilité de l'esprit circulant à travers des espaces de dimensions variées. Donnons-en quelques exemples.

On imagine volontiers les nombres rangés sur une droite. Mais le produit de deux nombres correspond à un réseau rectangulaire ou à un rectangle, le produit de trois facteurs à un parallélépipède. La figure 49 illustre géométriquement la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, sur l'exemple $3 \times (2 + 4) = 3 \times 2 + 3 \times 4$. La figure 50 permet de saisir intuitivement l'associativité de la multiplication, car on s'y persuade sans peine que $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$. La propriété de commutativité est aussi illustrée par ces deux figures.

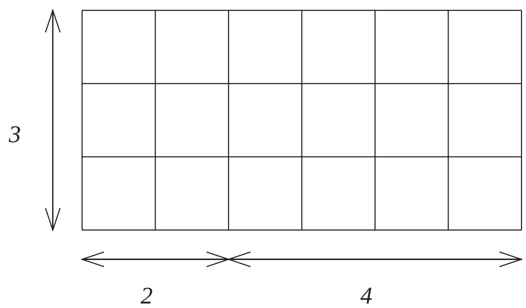


Fig. 49

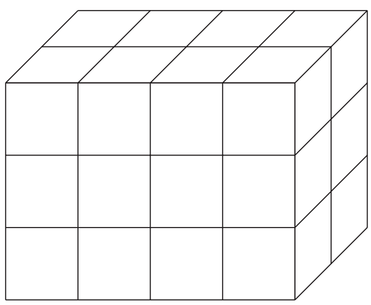


Fig. 50

Les fonctions d'une variable réelle sont représentées par des tableaux à deux entrées. Les fonctions de deux variables par des tableaux à trois entrées, dont la disposition la plus naturelle est celle d'un parallélépipède. Les mêmes fonctions se représentent naturellement comme des surfaces topographiques au-dessus d'un plan de coordonnées x et y. Les fonctions réelles de trois variables peuvent être imaginées comme représentant la densité d'un corps, variable d'un point à un autre. Les lieux géométriques sont souvent des surfaces dans l'espace. Résoudre un système de trois équations à trois inconnues revient à rechercher l'intersection de trois plans. Les questions de programmation linéaire se ramènent souvent à la recherche d'un maximum ou d'un minimum dans une région polyédrale.

On pourrait multiplier les exemples. Mais une autre considération est importante[6]. En mathématiques, par delà les fonctions de deux ou trois variables, il y les fonctions de 4, 5, …, n, … variables. Par delà les systèmes de trois équations, il y les systèmes de 4, 5, …, n, … équations, etc. Or il se fait que les intuitions acquises dans le cadre des espaces ordinaires à deux ou trois dimensions se transposent, vaille que vaille, mais de façon tout de même efficace, à des espaces à plus de trois dimensions. Il y a même dans les mathématiques d'aujourd'hui une discipline appelée l'*analyse fonctionnelle*, où l'on étudie des objets dans des espaces possédant une infinité de dimensions. Et lorsqu'on étudie des objets dans de tels espaces, on revient sans cesse en pensée à des notions de géométrie familière, comme par exemple celle de distance.

Poussons la réflexion encore un peu plus loin. La pensée se communique le plus souvent par le langage. Or tant le langage parlé que le langage écrit se développent à une dimension : les mots parlés se suivent nécessairement dans le temps, et les mots écrits sont alignés. Ainsi, les moyens ordinaires de communication sont *unidimensionnels*. Mais la pensée est-elle, de son côté, unidimensionnelle ? Évidemment non. L'être humain vit dans l'espace et pense, se représente des choses dans l'espace. Et comme nous l'avons vu ci-dessus, il pense dans l'espace bien des choses qui ne sont pas naturellement inscrites dans l'espace. En outre, la pensée s'occupe des choses, mais aussi et peut-être surtout des relations entre les choses. Or il n'y pas de raison que les relations entre les choses se présentent toujours en ligne[7]. C'est pour cela, selon toute vraisemblance, que la faculté de voir dans l'espace est un soutien de la pensée en général, et pas seulement de la pensée mathématique, ou géographique, ou architecturale, … Il est donc sage de faire le pari qu'une substantielle instruction géométrique constribue à la formation intellectuelle générale.

10 Comment apprendre ?

Tout enfant, dans son milieu de vie, perçoit et manipule des objets solides, apprend à en parler et s'efforce d'en dessiner certains. De plus, il est plongé dans un univers d'images, animées ou non, qui le familiarisent avec les vues en plan d'objets solides. Il apprend spontanément à faire le va-et-vient entre ces objets et leurs représentations les plus communes. Ainsi et par la force des choses, il acquiert une certaine capacité à voir dans l'espace, variable d'un individu à l'autre. Cet apprentissage spontané se situe dans le cadre de l'intelligence des situations (cf. H. Wallon, [1970]), et ne relève donc pas au départ d'une activité déductive. L'*intelligence des situations* ou *intelligence pratique* est celle qui permet à l'enfant – ou à l'adulte –, en présence des choses qui sollicitent son attention, d'enchaîner quelques actions pour réaliser un but. Elle se distingue de l'intelligence abstraite, qui peut s'exercer hors de la présence des choses, sur des symboles qui les représentent.

Telle que nous venons de la présenter, l'intelligence des situations semble indépendante de l'acquisition du langage. Mais il faut tout de suite corriger cette impression. Il est vrai que le geste du bébé qui saisit son biberon et le porte à sa bouche du côté de la tétine se passe de mots et de phrases. Mais dès que l'enfant se met à parler, le langage soutient les démarches de l'intelligence pratique,

[6] Nous évoquons ici au passage certains sujets mathématiques qui ne seront pas familiers à plus d'un lecteur. Cela ne devrait pas compromettre la compréhension générale de notre argumentation.

[7] Dans les mathématiques d'aujourd'hui, on représente souvent les relations par des flèches, et on construit des diagrammes dits *à flèches*, que l'on peut en un certain sens voir comme des phrases à 2, 3, 4, …, n, … dimensions. Voir à ce sujet R. Lavendhomme, [1982].

contribue en quelque sorte à les piloter. Cela témoigne d'un *premier pas* vers l'intelligence abstraite. En effet, les mots qui sous-tendent les actions renvoient à des objets, des situations spatiales, et des actions dans l'espace. Or chaque mot de cet ordre – substantif, verbe, adverbe, préposition, … – parce qu'il renvoie non pas à une chose singulière, mais à une catégorie, est le représentant d'un objet mental[8]. C'est sur ce terrain où l'intelligence pratique et le langage quotidien se forment l'un par l'autre, en s'épaulant mutuellement, que la pensée abstraite et déductive commence à prendre son essor. On conçoit sans peine l'importance, pour la suite de l'éducation, de cette première phase de la vie, en apparence peu intellectuelle et où beaucoup de choses s'acquièrent spontanément, grâce à la stimulation du milieu.

Mais si beaucoup de choses s'acquièrent spontanément, il est vrai aussi que l'école peut – et doit – contribuer à renforcer et perfectionner les acquis spontanés, pour donner aux enfants le maximum de chances de développer leurs potentialités. Les interventions de l'école peuvent se situer dans des registres divers et complémentaires.Voici, brièvement évoqués, quelques exemples d'activités possibles dans une classe.

1) Désigner à vue, dans un lot d'objets, la copie[9] d'un objet que l'on a par ailleurs sous les yeux.

2) Désigner à vue, dans un lot d'objets, la copie d'un objet que l'on a été voir au fond de la classe, sans pouvoir le transporter.

3) Retrouver par tâtonnement, dans un sac contenant un lot d'objets, un objet dont on a une copie sous les yeux.

4) Reproduire un assemblage d'objets (par exemple une construction en cubes) que l'on a sous les yeux.

5) Reproduire un tel assemblage d'après un dessin (par exemple en perspective cavalière).

6) On découpe dans des cartons des représentations de cubes comme celles qui apparaissent sur les figures 1 à 4. En disposant de tels cartons sur la table, représenter en plan un assemblage de cubes que l'on a devant soi . Assembler des cartons pour figurer une situation spatiale est plus facile que de dessiner, mais aussi mobilise d'autres capacités psychomotrices (par exemple celle de glisser un carton sous un autre pour figurer un objet à l'arrière de celui-ci).

7) Dessiner un assemblage d'objets sur du papier quadrillé ou pointé, ou sur du papier blanc, à main levée ou aux instruments.

8) Reproduire ou représenter un assemblage d'objets que l'on peut aller voir au fond de la classe, mais non transporter.

9) Reproduire ou représenter un assemblage d'objets décrit oralement par une autre personne, à partir de l'assemblage lui-même, ou d'une représentation.

10) Décrire par écrit un assemblage d'objets, et le donner à reproduire à une autre personne, à partir de la description.

De telles activités soigneusement graduées exercent les perceptions visuelles et tactiles, les facultés psychomotrices (à l'œuvre pour assembler des objets, dessiner selon diverses techniques), la mémoire, les langages parlé et écrit. Elles obéissent à des critères de succès intrinsèques, c'est-à-dire

[8] La locution *objet mental*, introduite par H. Freudenthal, doit être distinguée de celle de concept mathématique au sens le plus courant. Un concept mathématique s'inscrit dans une théorie axiomatique, il répond à une définition précise, comportant toutes les connotations techniques qui lui permettent de déjouer les pièges des démonstrations. Un *objet mental* est une notion appartenant au langage quotidien ou proche de celui-ci, moins connotée techniquement que la plupart des concepts mathématiques, et qui est néanmoins un outil efficace pour analyser et comprendre une classe de phénomènes numériques, géométriques ou autres. Pour plus de détails à ce sujet, voir par exemple N. Rouche, [1992].

[9] Ici et ci-dessous, le mot *copie* renvoie à un objet de même grandeur et de même forme.

indépendants de la sanction du maître : dans chaque cas, on vérifie sans peine le succès ou l'échec de l'opération. Certains mobilisent l'action d'une personne isolée, d'autres requièrent la collaboration entre deux ou plusieurs personnes.

Revenons un moment sur le rôle du langage. Les enfants non seulement utilisent, mais mettent au point, souvent entre eux, un langage qui leur permet de communiquer efficacement. Ils choisissent fréquemment des mots qui ne sont pas ceux des manuels. *Ces mots, que l'adulte parfois n'attend pas, témoignent d'une première objectivation de la pensée* : on se met d'accord sur une désignation, et cela fonctionne, on se comprend et on arrive par là au bout des opérations entreprises.

Certes il importe que petit à petit les enfants apprennent les dénominations officielles, parce qu'elles leur ouvrent des possibilités de communication plus larges, quasi universelles. Il faut apprendre à parler comme tous les autres.

Mais dans l'apprentissage de la langue scientifique, *l'essentiel* se trouve dans la communication claire des choses et des idées, et non dans le respect d'un langage convenu. La rigueur du langage n'est pas un objectif en soi. Elle a une fonction, qui est d'aider à éviter les quiproquos et les erreurs, d'affermir la pensée, de rendre la démarche intellectuelle sûre.

Quelques mots maintenant sur l'apprentissage des représentations planes d'objets de l'espace. Les enfants et les adolescents s'initient à la géométrie, en particulier à celle de l'espace. Cette étude ne saurait être au départ celle d'axiomes, de définitions et de propriétés déduites. Elle consiste plutôt, au cours des premières années de l'enfance, en activités comme celles que nous avons évoquées ci-dessus, qui renforcent dans l'action, la pensée et le langage ce qu'apporte de facto l'environnement quotidien[10]. En ce sens, le rôle de l'école élémentaire n'est pas d'abord d'inculquer une discipline intellectuelle préexistante, codifiée dans un livre[11].

Au sortir de l'enfance, on étudie plus résolument la géométrie raisonnée. En ce qui concerne la géométrie de l'espace, la manipulation de vrais objets à trois dimensions demeure indispensable et stimulante jusqu'à la fin des études. Mais à côté des solides et des maquettes, les représentations planes doivent aussi jouer un grand rôle.

Pour deux raisons d'abord, elles ont un intérêt propre. En effet, nous vivons, comme on dit, dans une civilisation de l'image, et donc il est utile de comprendre les images et de savoir à l'occasion s'en servir pour argumenter (et pour tant d'autres choses !) ; ensuite, la recherche de représentations fidèles a joué un grand rôle dans l'histoire du dessin, de la peinture et du bas-relief, et les résultats de cette recherche sont de ce fait porteurs d'une profonde signification culturelle. C'est pourquoi il est bon que l'étude des représentations planes – y compris sans doute dans leur dimension historique – soit un thème en soi dans les leçons de géométrie de l'espace (voir à cet égard CREM [2001a] et [2001b]).

Mais une autre raison, davantage liée à la géométrie elle-même, rend cette étude inéluctable. D'une part, comme nous l'avons déjà observé, on n'a pas toujours à sa disposition des solides réels ou des maquettes. Et force est donc de s'expliquer à l'aide de dessins. Mais il y a plus profond : comme nous l'avons aussi expliqué ci-dessus, nous voyons mieux, plus complètement, les choses plates que les choses en relief. Et donc, dans certaines circonstances, malgré les ambiguïtés des représentations planes, et à condition que ces ambiguïtés soient clairement connues et reconnues, il est plus aisé de raisonner sur une figure que sur un solide. Par exemple, pas mal de formes et de mesures se lisent plus aisément sur un plan d'architecte que sur une maquette. *Et donc les représentations*

[10] Trop souvent sans doute, dans l'enseignement élémentaire, la géométrie des programmes se limite aux définitions des figures et solides courants, et à quelques formules d'aires et de volumes. Cette remarque n'entraîne pas que les aires et volumes soient des matières négligeables, loin de là. Mais elles devraient faire l'objet d'un autre exposé.

[11] Peu importe si certains, par respect de l'acception habituelle du terme *science*, veulent qualifier cet apprentissage de pré-scientifique – ou en l'occurrence de pré-géométrique – plutôt que de scientifique.

planes ne sont pas toujours un pis-aller auquel on recourt parce que les maquettes sont chères et encombrantes. Il arrive qu'elles soient aussi par elles-mêmes une aide positive à l'intelligence des choses de l'espace.

Acceptons donc pour acquise cette double constatation que les représentations planes sont, dans la géométrie de l'espace, à la fois des chapitres à étudier et des moyens d'accéder aux connaissances. À cause de cela, un paradoxe apparaît. Car pour apprendre la géométrie, on doit s'appuyer sur les représentations planes, mais pour comprendre les représentations planes (dont la plupart sont des projections[12]), on a besoin de la géométrie. Ainsi les deux vont de pair, et le paradoxe suffit à montrer qu'il n'y a pas à la géométrie de l'espace un *accès* pur, où chaque élément serait d'emblée à sa place dans les chaînes déductives issues d'un ensemble d'axiomes. Bien entendu, une telle théorie existe (et peut même être développée selon divers ordres), mais elle ne peut être le fait que d'une mise au point tardive (fin du secondaire ou enseignement supérieur) d'un savoir acquis tout autrement. Une certaine maîtrise du va-et-vient entre le plan et l'espace relève d'abord du registre perceptivo-moteur et sert d'appui au registre déductif.

[12] Les développements de solides constituent une exception.

Annexe

Fiches à photocopier