CREM

Nivelles, le 31 août 2002

VERS UNE GÉOMÉTRIE NATURELLE

Recherche N^o 72/01 financée par le Ministère de la Communauté Française,
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique,
Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation
et du Pilotage interréseaux

Rapport de fin d'année, deuxième partie

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.

5 rue Émile Vandervelde B-1400 Nivelles Belgique

Tél. +32–(0)67 21.25.27 Fax. +32–(0)67 21.22.02 Cpte 068-2179326-54

rouche@amm.ucl.ac.be

4

L'aire comme recouvrement d'une figure

Préambule

Le calcul des aires est enseigné dès l'école fondamentale. Son utilité dans la résolution de problèmes issus de la vie courante est telle que l'on veille à ce que les élèves disposent rapidement de procédures et de formules, aux dépens parfois d'une approche de la notion fondamentale d'aire comme recouvrement d'une figure.

La notion d'aire comme recouvrement permet des comparaisons, elle fonde la construction des formules de calcul et constitue un outil de démonstration. Cette notion joue un rôle central dans la géométrie grecque, elle intervient dans la plupart des démonstrations du théorème de Pythagore, et d'une toute autre façon, dans une démonstration du théorème de Thalès. Or, on le sait, ces deux théorèmes ouvrent la voie à des calculs de longueurs dans des figures dont on ne connaît pas toutes les dimensions et par là au calcul de distances inaccessibles. Ils sont aussi à la base de la trigonométrie.

Les activités de cette section s'adressent à des élèves de troisième année du secondaire de l'enseignement de transition, elles constituent un parcours dans la géométrie avec la notion d'aire comme fil conducteur. Elles renouent avec un certain regard, celui que porte la géométrie grecque sur les figures et les grandeurs, et mettent en place les outils de pensée qu'il faut engager dans les démonstrations qui utilisent des comparaisons d'aires.

1 Aires et périmètres

De quoi s'agit-il ?

Comparer des figures selon différents critères. Sont-elles superposables, de même aire, de même périmètre ? Expérimenter que des figures qui ont même aire n'ont pas nécessairement même périmètre (et réciproquement). Imaginer des découpages pour comparer les aires de figures non superposables.

Enjeux

La notion d'aire, abordée indépendamment du calcul des aires.
Distinguer un énoncé de sa réciproque.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – La fiche 9 à la page 193 présentée en annexe.

Prérequis. – Reconnaître à vue des mouvements qui permettent de superposer deux figures.

Comment s'y prendre ?

Les premières figures à comparer sont dessinées sur papier pointé. Cette trame, composée à partir d'un pavage de triangles équilatéraux, empêche le recours aux unités et aux formules habituelles, tout en donnant accès à des décompositions utiles pour comparer les périmètres et les aires des figures proposées.

Fiche 9

1. Quelles sont les figures qui ont la même aire ?
2. Quelles sont celles qui ont le même périmètre ?

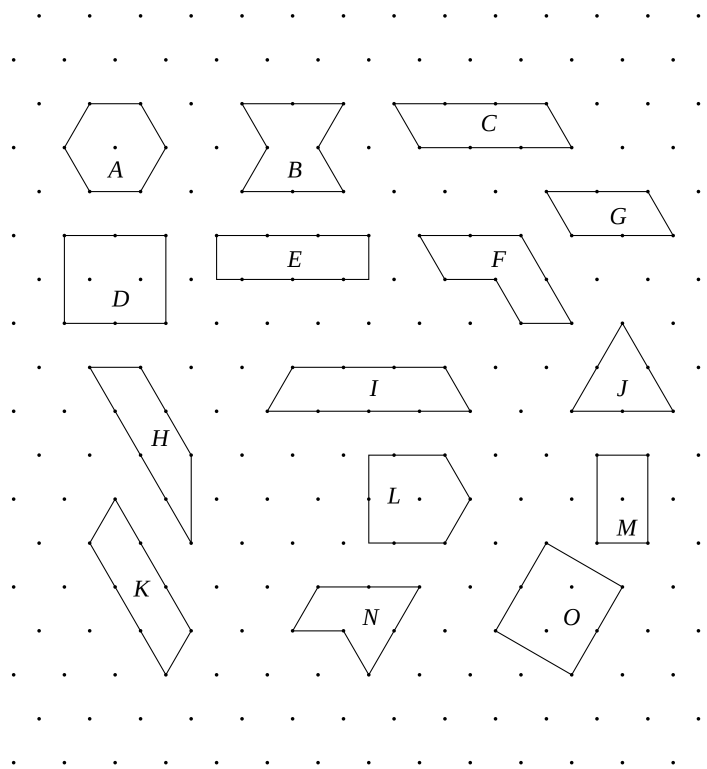


Fig. 1

Le travail commence par l'examen de la trame, c'est le ressort de l'activité !

La figure B est formée de deux trapèzes qui valent chacun un demi-hexagone. Ce premier découpage donne d'emblée une méthode de comparaison qui consiste à découper, puis à recomposer des figures en « morceaux superposables » . Ainsi,

- la figure C est composée de six triangles superposables aux triangles qui forment la figure K ou la figure B,
- la figure F est formée des mêmes trapèzes que la figure B,

- la figure G ne contient que quatre triangles, elle appartient à une autre catégorie.

Dans certains cas, la comparaison des figures selon les périmètres n'est pas aisée. Ainsi, dans les figures D, E, H, L, M et O, deux longueurs interviennent : le côté du triangle équilatéral et la hauteur de ce triangle, la hauteur étant évidemment plus courte que le côté. Il faut donc repérer ces deux longueurs, leurs moitiés ou leurs multiples, additionner puis comparer les sommes obtenues. Le passage par des lettres pour désigner ces deux longueurs facilite le travail. Soit a la longueur du côté et b celle de la hauteur. Le périmètre de la figure D s'écrit alors :

$$4a + 4b,$$

et celui de E :

$$6a + 2b.$$

Pour comparer ces deux périmètres, retranchons à chacun les parties communes et comparons les restes :

Figure D	Figure E
$\begin{array}{rcr} 4a & + & 4b \\ -4a & - & 2b \\ \hline & & 2b \end{array}$	$\begin{array}{rcr} 6a & + & 2b \\ -4a & - & 2b \\ \hline 2a & & \end{array}$

Comme $b < a$, le périmètre de D est inférieur à celui de E.

De même pour comparer les périmètres des figures D et L.

Figure D	Figure L
$\begin{array}{rcr} 4a & + & 4b \\ -4a & - & 2b \\ \hline & & 2b \end{array}$	$\begin{array}{rcr} 5a & + & 2b \\ -4a & - & 2b \\ \hline a & & \end{array}$

On retourne au papier pointé pour constater que $2b$ est plus grand que a, le périmètre de D est donc plus grand que celui de L.
Le professeur pose alors une nouvelle série de questions qui introduisent une synthèse.

> Vrai ou Faux ?
>
> 1. Si deux figures sont superposables, alors elles ont même aire.
> 2. Si deux figures ont même aire, alors elles sont superposables.
> 3. Si deux figures ont même périmètre, alors elles ont même aire.
> 4. Si deux figures ont même aire, alors elles ont même périmètre.
> 5. Si deux figures ont même aire et même périmètre, alors elles sont superposables.

Le premier énoncé est évidemment vrai, il a servi de critère pour répondre aux questions de la fiche 9. Par contre, réaliser clairement et justifier que la proposition réciproque est fausse est moins facile : c'est cependant une étape importante dans la formation des élèves. Les quatre énoncés suivants sont là pour aider à franchir ce cap. Les propositions sont toutes fausses. Pour justifier cela, il suffit d'exhiber chaque fois un contre-exemple. On en trouve pour chaque énoncé dans la figure 1. Ainsi, exhiber les figures F et C qui ont même aire et même périmètre, sans pour autant être superposables, suffit à prouver que la cinquième proposition est fausse.

Ces propriétés ayant été analysées quant au fond, un travail sur la forme peut être envisagé, à savoir : aborder la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante. Voici, à titre d'exemple, quelques questions.

Vrai ou faux ?

1. Pour que deux figures soient superposables, il faut qu'elles aient même aire.
2. Pour que deux figures soient superposables, il suffit qu'elles aient même aire.
3. Pour que deux figures aient même aire, il faut qu'elles soient superposables.
4. Pour que deux figures aient même aire, il suffit qu'elles soient superposables.
5. Deux figures sont superposables, seulement si elles ont même aire.

La question suivante demande de comparer des aires de figures familières. Mais cette fois, les élèves les dessinent eux-mêmes sur un papier vierge de toute trame.

Les diagonales d'un carré, d'un rectangle et d'un parallélogramme déterminent-elles des triangles de même aire ?

Les quatre triangles de la figure 2, dont un sommet est l'intersection des diagonales, sont très faciles à identifier, ils sont évidemment superposables et ont même aire.

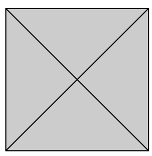


Fig. 2

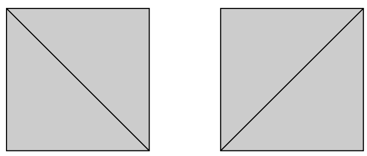


Fig. 3

Les quatre triangles montrés par la figure 3 sont moins faciles à repérer car, lorqu'on trace les deux diagonales comme sur la figure 2, ces triangles se chevauchent. On constate, dans la figure 2, que ces triangles sont superposables selon le cas, par un demi-tour, par un quart de tour ou une symétrie othogonale. Ils ont même aire.

Les diagonales du carré déterminent donc deux ensembles de triangles, un premier ensemble composé de quatre petits triangles de même aire ; un autre, de quatre triangles plus grands, eux aussi de même aire.

Dans le rectangle, considérons d'abord les triangles dont un sommet est l'intersection des diagonales. On voit deux paires de triangles superposables par un demi-tour, montrés par la figure 4.

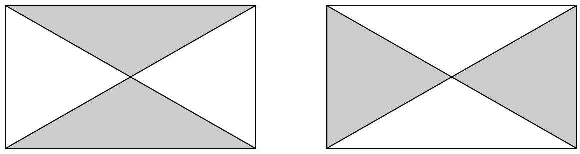


Fig. 4

Les deux triangles grisés de la figures 5 ne sont visiblement pas superposables, ceux de la figure 6 ne le sont pas non plus. Pour comparer leurs aires, on peut recourir aux formules mais on peut aussi, et c'est la méthode que nous préconisons ici, tenter de superposer les figures par morceaux.

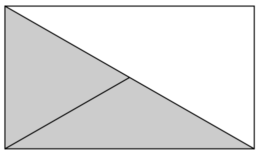


Fig. 5

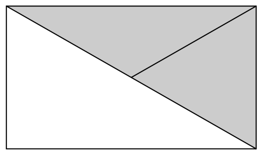


Fig. 6

Les élèves ayant, à plusieurs reprises (voir fiche 9), coupé des triangles selon une hauteur, on peut espérer qu'ils transfèrent cette expérience et tracent d'eux-mêmes les médianes du rectangle (voir figure 7).

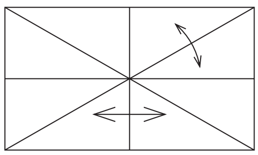


Fig. 7

Ce découpage met en évidence huit triangles superposables. Lorsqu'ils sont adjacents, ils sont superposables soit par une symétrie orthogonale, soit par un demi-tour. Il suffit ensuite de les assembler par paires pour reconstituer les triangles montrés par les figures 5 et 6. Les quatre triangles dont un sommet est l'intersection des diagonales du rectangle ont donc la même aire.

Considérons à présent les quatre triangles dont un côté est une diagonale du rectangle (voir figure 8). Lorsqu'on les considère à l'intérieur d'un même rectangle, ils sont superposables selon le cas, par un demi-tour ou par une symétrie orthogonale. Ils couvrent chacun un demi-rectangle. Ils ont même aire.

Les diagonales du rectangle, tout comme celles du carré, déterminent deux ensembles de triangles. Dans chaque ensemble, on trouve quatre triangles de même aire.

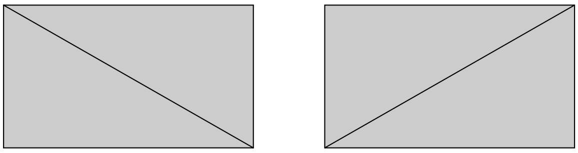


Fig. 8

Dans le parallélogramme, repérons d'abord les triangles dont un sommet est l'intersection des diagonales : ils se superposent deux à deux par un demi-tour ; ce sont les deux triangles grisés et les deux triangles blancs de la figure 9.

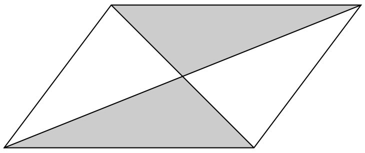


Fig. 9

On croit avoir terminé car la construction des médianes (voir figure 10) ne fait pas apparaître de sous-figures superposables et pourtant…

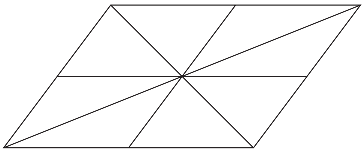


Fig. 10

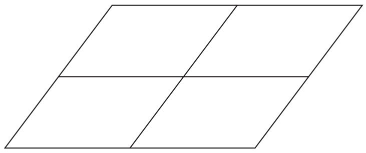


Fig. 11

Observons d'abord sur la figure 11 que les médianes forment quatre petits parallélogrammes superposables et que chacun est composé de deux triangles superposables.

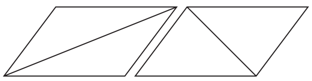


Fig. 12

Les quatre triangles de la figure 12 valent chacun la moitié d'un de ces petits parallélogrammes, ils ont donc même aire.

La figure 13 montre que les triangles dont un sommet est l'intersection des diagonales sont composés chacun de deux triangles de la figure 12, ils ont donc même aire.

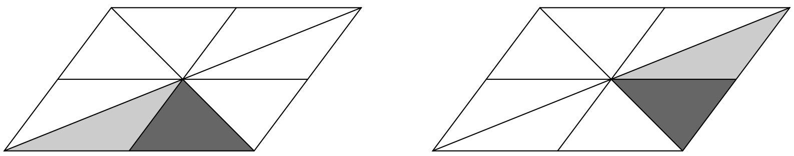


Fig. 13

Il faut évidemment considérer aussi les quatre grands triangles qui ont comme côté l'une des deux diagonales du parallélogramme de départ : ils sont superposables deux à deux par un demi-tour. Chacun est un demi parallélogramme, ils ont donc tous les quatre la même aire.

Carré, rectangle et parallélogramme sont donc découpés par leurs deux diagonales en deux ensembles distinctes de triangles, comportant chacun quatre triangles de même aire.

Le travail se clôture avec un retour sur la notion de polygones de même aire : lorsqu'on peut découper un polygone en un nombre fini de pièces et réarranger celles-ci pour former un autre polygone, alors les deux polygones ont même aire. On dit aussi que ces polygones sont *équidécomposables.*

2 Démontrer le théorème de Pythagore

De quoi s'agit-il ?

Les élèves se servent d'une trame quadrillée qui leur est fournie, pour comparer les aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle.

Enjeux

Conjecturer la relation de Pythagore et disposer d'éléments pour la démontrer.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – La fiche 10 à la page 194.

Prérequis. – Aire du rectangle, aire du triangle rectangle comme demi-rectangle.

Comment s'y prendre ?

Avant d'aborder l'exploration proprement dite du théorème de Pythagore, il est bon de le situer dans le cadre de la détermination d'un triangle. On sait par expérience que lorsqu'on articule deux barres de métal et qu'on les fixe l'une à l'autre pour qu'elles forment un angle donné, on détermine un troisième segment représenté par une ficelle sur la figure 14.

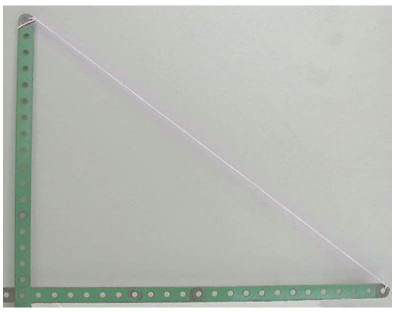


Fig. 14

On imagine donc que l'on peut calculer la longueur de la ficelle à partir de celles des deux barres. Le professeur soumet alors aux élèves quelques triangles rectangles, ils mesurent les côtés et cherchent une relation entre les longueurs. Les essais s'avèrent infructueux. C'est alors que le professeur introduit la fiche 10. Celle-ci dévie la recherche d'une relation entre longueurs vers celle d'une relation entre des aires.

Le professeur précise qu'aucune mesure à la règle n'est nécessaire, qu'il faut se servir uniquement des indications fournies par la trame quadrillée. Il recommande d'appeler u, la longueur du côté du carreau et u^2 l'aire d'un carreau. Nous appelons ici *carreau*, le plus petit carré qu'on peut dessiner sur la trame.

Fiche 10
Y-a-t-il une relation entre les aires des carrés construits autour d'un même triangle rectangle ?

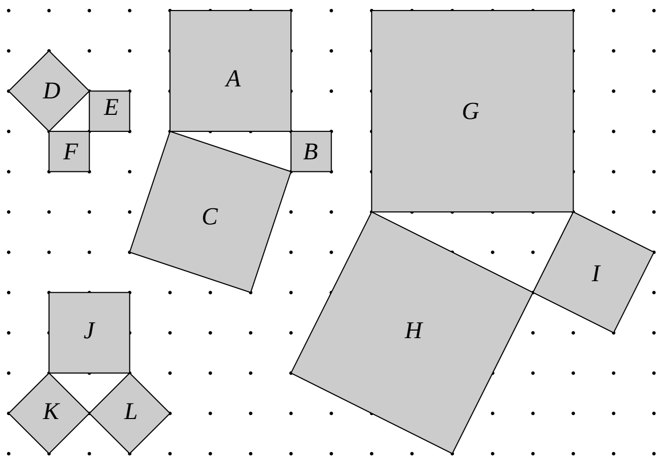


Fig. 15

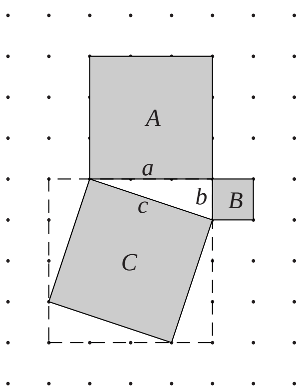


Fig. 16

Les élèves dressent un tableau dans lequel ils reportent pour chaque triangle, les mesures de chacun des carrés en distinguant le petit carré, le moyen et le plus grand (celui qui est construit sur l'hypoténuse).
Chaque fois que les côtés d'un carré ne sont pas dans les directions du quadrillage, on se sert d'un carré extérieur qui contient lui, un nombre entier de carreaux. C'est le cas, par exemple, du carré C montré par la figure 16. Les triangles extérieurs au carré, sont tous les mêmes, ils couvrent chacun un demi-rectangle qui vaut $3u^2$. L'aire du carré C vaut donc

$$16u^2 - (4 \times 1,5u^2) = 10u^2.$$

Le tableau, une fois complété, conduit à conjecturer que la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle vaut celle du carré construit sur l'hypoténuse.

Figure	Aire du plus petit carré	Aire du carré moyen	Aire du carré construit sur l'hypoténuse
ABC	$1u^2$	$9u^2$	$10u^2$
DEF	$1u^2$	$1u^2$	$2u^2$
GHI	$5u^2$	$20u^2$	$25u^2$
JKL	$2u^2$	$2u^2$	$4u^2$

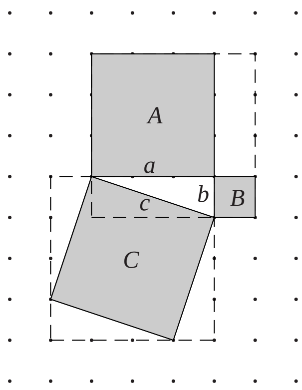


Fig. 17

Cette relation est surprenante. L'explication vient dès que l'on construit un autre carré extérieur aux carrés A et B. C'est ce que montre la figure 17. Les carrés A et B, complétés de quatre triangles, remplissent un carré de côté $a + b$. Le carré C et les quatre mêmes triangles remplissent aussi un carré de côté $a + b$. On a donc : aire A + aire B = aire C.
Après la phase d'exploration sur une trame quadrillée et l'explication que l'on vient de découvrir, il faut s'assurer que cette relation reste vraie pour des triangles rectangles qui ne sont pas dessinés sur une trame quadrillée. La démonstration induite par la question qui suit, utilise les propriétés des figures telles qu'elles ont été travaillées lors de la phase exploratoire.

> Construire puis découper huit triangles rectangles superposables. Appeler a et b les côtés de l'angle droit de ces triangles. Tracer deux carrés de côté $a + b$. Dans chacun des deux carrés, placer quatre triangles de sorte que les parties du carré non recouvertes par les triangles aient elles-mêmes la forme carrée.

La figure 18 montre deux façons de disposer les triangles.

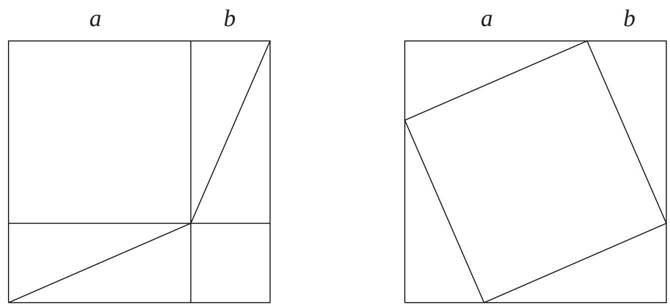


Fig. 18

Il faut d'abord s'assurer que les vides laissés par les triangles sont bien des carrés. C'est évident pour les carrés de côtés a et b tandis que pour celui de côté c (l'hypoténuse), il faut vérifier. On peut s'y prendre de deux façons : soit en montrant qu'il s'agit d'un losange dont les angles sont droits, soit en considérant que les quatre points qui déterminent ce quadrilatère sont images l'un de l'autre par une rotation de 90°.

L'équivalence entre l'aire du carré construit sur l'hypoténuse et celles des carrés construits sur les côtés de l'angle droit apparaît par différence. Ces figures illustrent les égalités

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$$

Algèbre et géométrie s'éclairent mutuellement. Un enchaînement naturel d'idées a conduit les élèves, au départ d'une notion très élémentaire (l'aire d'une figure), à conjecturer, puis à démontrer un des plus grands théorèmes de l'histoire de la pensée mathématique.

Retournons à présent au triangle rectangle formé à partir de deux tiges de métal (voir figure 14 à la page 63) : lorsque celles-ci forment un angle droit, la longueur de la ficelle qui relie les extrémités des deux barres est la racine carrée de la somme des carrés des longueurs des barres.

3 Aire du parallélogramme

De quoi s'agit-il ?

Les élèves comparent les aires de parallélogrammes qui ont même hauteur.

Enjeux

Établir la formule de l'aire du parallélogramme et savoir pourquoi on peut, dans ce calcul, choisir comme base n'importe quel côté du parallélogramme. La maîtrise de ces deux points conditionne l'accès à la démonstration du théorème de Thalès par les aires.

De quoi a-t-on besoin ?

Matériel. – Les fiches 11 à 14.

Prérequis. – Aire du rectangle. Cas d'isométrie des triangles. Invariants des isométries. Angles à côtés parallèles, à côtés perpendiculaires.

Comment s'y prendre ?

On propose la fiche suivante aux élèves :

Fiche 11

Ces deux parallélogrammes ont-ils la même aire ?

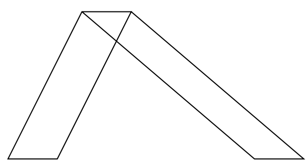


Fig. 19

Le professeur recommande aux élèves de compléter la figure pour y faire apparaître un trapèze et deux triangles superposables par translation. La figure 20 montre les deux triangles et la translation.

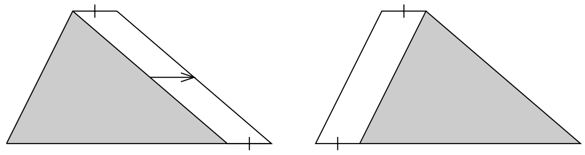


Fig. 20

Il suffit ensuite de considérer chaque parallélogramme comme « ce qui reste » lorsqu'on ôte au trapèze, à tour de rôle, un des deux triangles, et le tour est joué !

Cette démonstration établit l'égalité des aires de tous les parallélogrammes qui ont des bases de même longueur et des hauteurs (relatives à ces bases) de même longueur. On peut en effet disposer des parallélogrammes qui ont ces caractéristiques, comme ceux de la figure 19 et former un trapèze.

On notera qu'on a utilisé le principe d'« équicomplémentarité »pour comparer des aires. Chez Euclide, ce principe fait référence à la notion commune : « si à des choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux ».

On propose ensuite aux élèves la fiche suivante.

Fiche 12

Pour chaque parallélogramme, dessiner un rectangle de même aire.

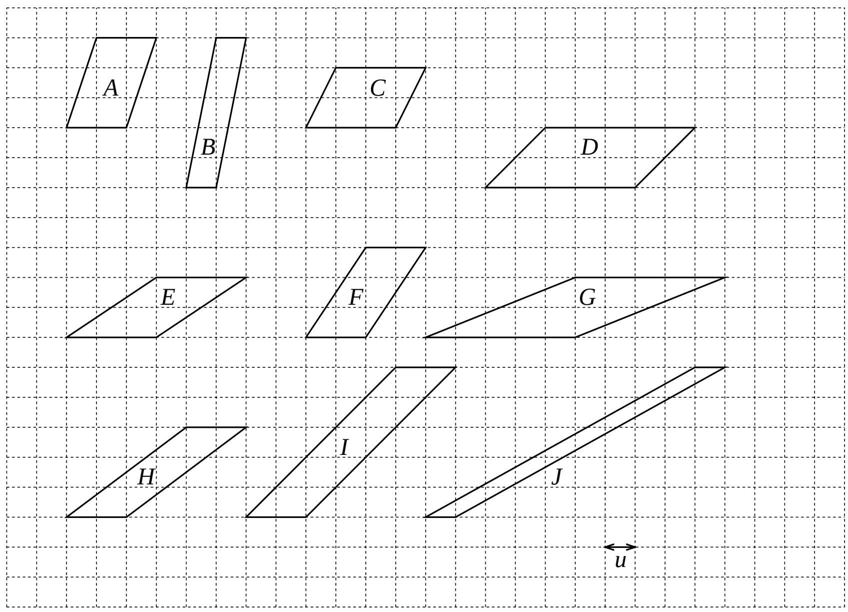


Fig. 21

Cette figure introduit un calcul d'aires. Une unité de longueur u est donnée. L'unité d'aire est u^2. Comme le rectangle est un parallélogramme, il suffit de construire un rectangle dont les dimensions sont la base et la hauteur du parallélogramme donné.

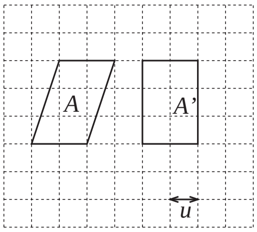


Fig. 22

Par exemple, pour le parallélogramme A, on construit un rectangle A' (voir figure 22) de $2u$ sur $3u$; il contient six carreaux, son aire est de 6 u^2.
Les parallélogrammes F et H ont même base et même hauteur que le rectangle A', ils ont donc aussi même aire. Les parallélogrammes C et E ont une base de $3u$ et une hauteur de $2u$, ils ont donc même aire que le rectangle A', à savoir $6u^2$. On trouve de la même façon l'aire des parallélogrammes B et J, elle vaut $5u^2$. Les parallélogrammes D, G et I ont une aire de $10u^2$.

On conclut :

1. *L'aire d'un parallélogramme vaut $a \times h$, a étant un côté et h, la hauteur relative à ce côté.*

Un autre énoncé, qui généralise celui-ci, sera bien utile dans la suite pour comparer des parallélogrammes qui ont même hauteur et des bases différentes (voir figure 23).

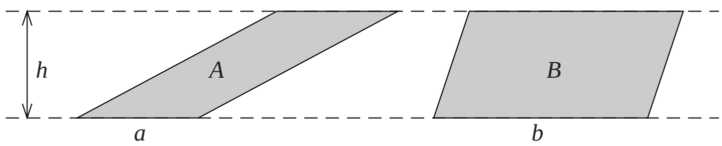


Fig. 23

2. *Les aires de parallélogrammes de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.*

En effet, $\dfrac{\text{aire de } A}{\text{aire de } B} = \dfrac{a \times h}{b \times h} = \dfrac{a}{b}$.
Ce théorème est essentiel : il opère le passage de la deuxième dimension à la première.

Fiche 13

1. Est-il possible de dessiner deux rectangles distincts qui ont même aire que le parallélogramme de la figure 24 ?
2. Est-il possible de dessiner deux rectangles distincts qui ont même aire que le losange de la figure 25 ? Imaginer des réponses avant de dessiner.

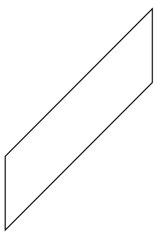


Fig. 24

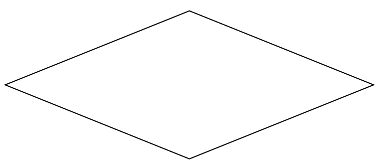


Fig. 25

Voici deux rectangles qui répondent à la première question.

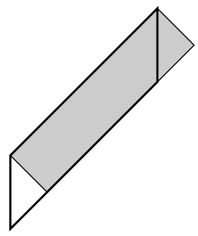


Fig. 26

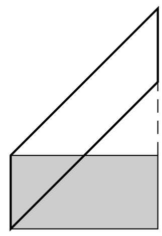


Fig. 27

Chacun d'eux a une aire égale à celle du parallélogramme puisqu'il a comme base un côté du parallélogramme et comme hauteur, la hauteur relative à ce côté. Ces deux rectangles ont donc même aire. Ceci montre que pour calculer l'aire d'un parallélogramme, on peut utiliser n'importe quel côté du parallélogramme, à condition de prendre ensuite comme hauteur, la hauteur relative à ce côté.

Les figures 28 et 29 montrent deux rectangles qui ont même aire que le losange.

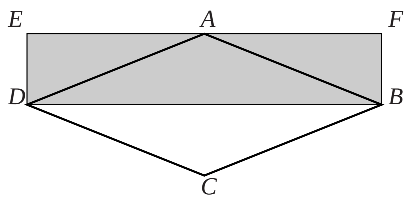


Fig. 28

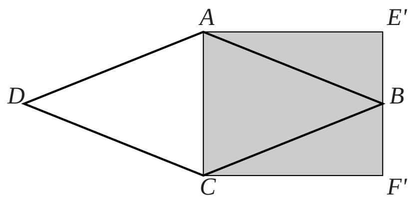


Fig. 29

On en tire deux façons de calculer l'aire d'un losange. Les lettres D et d désignant la grande et la petite diagonale, on a

$$\text{aire du losange} = D \times \frac{d}{2} = \frac{D}{2} \times d.$$

On peut aussi répondre à la question en s'inspirant des constructions réalisées en réponse à la fiche précédente : prendre comme base, tantôt un côté du losange, tantôt l'autre (voir les figures 30 et 31).

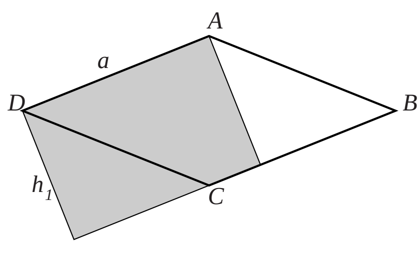


Fig. 30

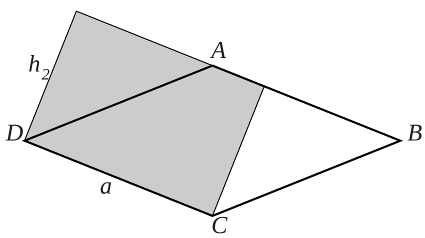


Fig. 31

Se pose alors la question de savoir si ces deux rectangles, qui ont même aire, sont ou non superposables. On peut vérifier qu'ils le sont effectivement en considérant que chacun des triangles grisés de la figure 32 est isométrique à un triangle blanc de la même figure.

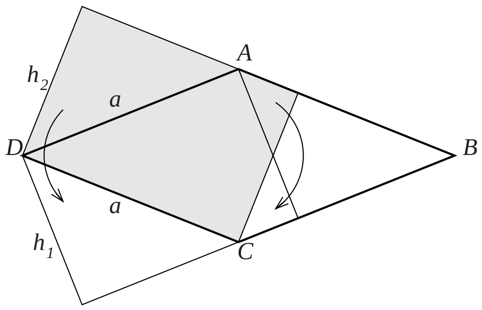


Fig. 32

En effet :

- les deux grands triangles, un gris et un blanc, sont rectangles, ils ont des hypoténuses de même longueur et des angles de même amplitude (angles à côtés parallèles).
- les deux petits triangles viennent chacun compléter le même cerf-volant de sommet B pour former un triangle rectangle. Les deux triangles ainsi formés sont isométriques car leurs hypoténuses ont même longueur (a) et qu'ils ont des angles de même amplitude (angles à côtés perpendiculaires inférieurs à 180°). Les deux petits triangles sont donc isométriques.

Le professeur oriente ensuite les élèves vers une autre façon de démontrer que les deux rectangles ont les mêmes dimensions. Il donne la consigne qui suit.

Ecrire l'aire de chacun des rectangles en utilisant les notations des figures 30 et 31.

L'aire du rectangle de la figure 30 à la page précédente s'écrit ah_1 , celle du rectangle de la figure 31 à la page précédente, ah_2 . On a par ailleurs

$$ah_1 = ah_2,$$

puisque chaque rectangle a même aire que le losange. Après simplification de l'égalité, on a donc

$$h_1 = h_2.$$

Ces deux rectangles ont donc les mêmes dimensions.

Cette dernière démonstration est très rapide, elle comporte un passage de la deuxième dimension à la première, elle ressort plus du calcul que de la manipulation de figures.

Fiche 14

On croise deux bandes de papier de même largeur comme sur la figure 33. Quelle est la nature du quadrilatère qui se forme à l'intersection des deux bandes ?

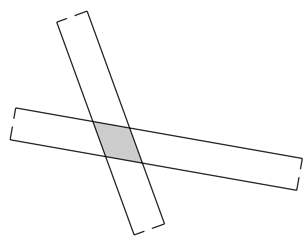


Fig. 33

Le quadrilatère est certainement un parallélogramme. Mais, sauf dans les cas où les bandes sont disposées comme sur la figure 34, on perçoit rarement que c'est un losange.

Même dans ce cas, la figure que l'on a entre les mains n'étant pas très stable, on hésite. Pour s'assurer qu'il s'agit bien d'un losange et comprendre en même temps pourquoi des bandes de même largeur forment nécessairement un losange, on entreprend de démontrer. Il s'agit donc de prouver que ce parallélogramme a des côtés égaux. Reportons-nous à la figure 35 et montrons que $a = b$.

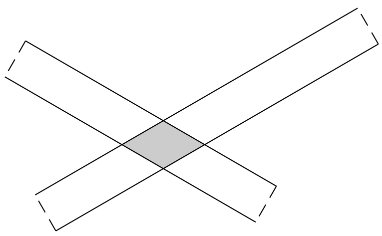


Fig. 34

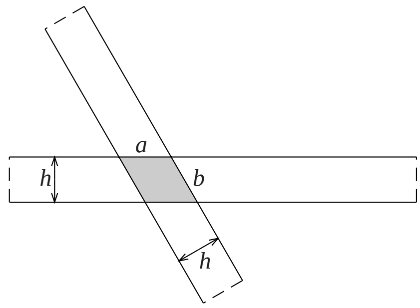


Fig. 35

L'idée de s'assurer d'une égalité de longueurs par le biais des aires est préparée par la fiche précédente. Calculons l'aire du parallélogramme de deux façons, nous avons :

$$ah = bh,$$

ce qui prouve que $a = b$.

Cette démonstration, comme la précédente, porte sur des longueurs mais utilise des égalités d'aires. Il s'agit ici aussi d'une réduction de dimension, démarche inverse de ce que l'on a l'habitude de faire.

4 Démontrer le théorème de Thalès

De quoi s'agit-il ?

Les élèves comparent des parallélogrammes de même hauteur pour établir des égalités de rapports.

Enjeux

Établir une égalité entre rapports de longueurs par le biais d'un rapport d'aires. Démontrer le théorème de Thalès pour des segments qui ne sont pas nécessairement commensurables.

De quoi a-t-on besoin ?

Prérequis. – Une première version du théorème de Thalès portant sur des configurations qui présentent un réseau de parallèles équidistantes. Les énoncés établis à l'issue des activités précédentes.

Comment s'y prendre ?

La démonstration que nous proposons ci-après ne présuppose pas qu'il existe un réseau de parallèles équidistantes qui partage OA et AB (voir figure 36) en parties égales. Il va de soi que cette démonstration ne peut intervenir dans la formation des élèves qu'après une approche de la conservation des rapports par une projection parallèle, à propos de figures qui présentent des réseaux de parallèles équidistantes. C'est dans ce contexte en effet, que la proportionnalité entre segments est accessible à des débutants. On trouve dans CREM [2002] une proposition d'enseignement qui développe cette approche.

La démonstration qui suit est directement inspirée de celle que propose Euclide dans le Livre 6 consacré aux rapports et proportions. Nous l'avons simplement adaptée pour faire voir les figures-clés que nous avons travaillées jusqu'ici, à savoir, des parallélogrammes de même hauteur. Ils remplacent les triangles utilisés par Euclide. Les questions qui suivent guident les élèves dans l'exploration des figures qui sous-tendent la démonstration et indiquent les étapes par lesquelles il faut passer.

Voici la première étape.

Soit un triangle OBB' (voir figure 36) dans lequel on a tracé, par un point A qui appartient à OB, la parallèle à BB'.

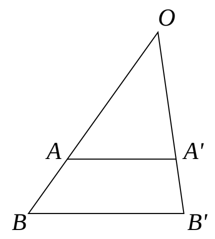


Fig. 36

On demande de

1. mener par B la parallèle à $B'O$ et par O la parallèle à BB', appeler C l'intersection de ces deux droites,
2. prolonger AA', appeler D l'intersection de AA' avecBC,
3. repérer, dans la figure ainsi obtenue, tous les parallélogrammes qui ont même hauteur et écrire leurs aires respectives.

La figure 37 montre la constrution demandée et fait voir trois parallélogrammes qui ont même hauteur.

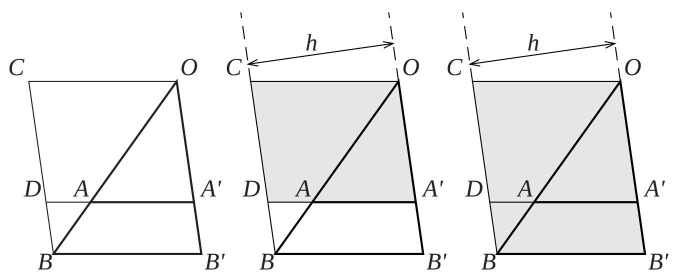


Fig. 37

L'aire du parallélogramme $OCDA'$ est $OA' \times h$,
L'aire du parallélogramme $DA'B'B$ est $A'B' \times h$,
L'aire du parallélogramme $OB'BC$ est $OB' \times h$.

La deuxième étape est analogue à la première.

> Reproduire la figure 36.
> On demande ensuite de
>
> 1. mener par B' la parallèle à BO et par O la parallèle à BB', appeler E l'intersection de ces deux droites,
> 2. prolonger AA', appeler F l'intersection de AA' avec $B'E$,
> 3. repérer tous les parallélogrammes de cette figure qui ont même hauteur et écrire leurs aires respectives.

La figure 38 montre la constrution demandée et fait voir trois parallélogrammes qui ont même hauteur.

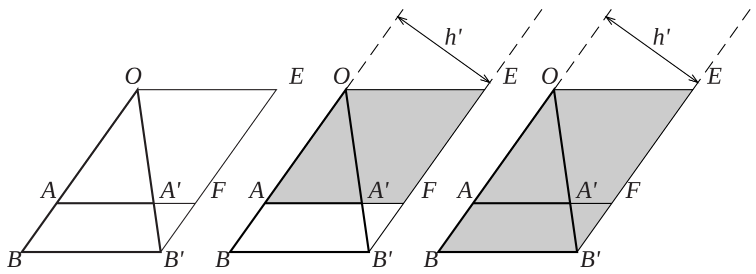


Fig. 38

L'aire du parallélogramme $OAFE$ est $OA \times h'$,
L'aire du parallélogramme $AFB'B$ est $B'F \times h'$,
L'aire du parallélogramme $OEB'B$ est $B'E \times h'$.

La dernière étape demande de passer d'un rapport d'aires à un rapport de longueurs.

> Montrer que les rapports $\frac{OA}{OB}$ et $\frac{OA'}{OB'}$ sont égaux.

Il faut choisir les parallélogrammes qui engagent les rapports dont il est question dans l'énoncé. Dans les figures 37 et 38, les parallélogrammes utiles sont colorés en gris.

L'aire du parallélogramme $OCDA'$ (figure 37) est égale à celle du parallélogramme $OAFE$ (figure 38) puisque leurs bases sont égales et qu'ils ont même hauteur. Pour la même raison, l'aire du parallélogramme $OB'BC$ (figure 37) est égale à celle du parallélogramme $OEB'B$ (figure 38).

Le rapport des aires des parallélogrammes grisés de la figure 37 est donc égal au rapport entre les aires des parallélogrammes grisés de la figure 38. On a donc

On a donc

$$\frac{OA' \times h}{OB' \times h} = \frac{OA \times h'}{OB \times h'}.$$

Et après simplification,

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}.$$

On peut faire la même chose pour d'autres paires de parallélogarmmes et montrer en ce faisant, qu'on a aussi

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}.$$

On énonce ensuite la propriété suivante, qui est une forme élémentaire du théorème de Thalès.

3. *Toute paralllèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments homologues proportionnels.*

5

Quadrature des figures rectilignes planes

1 Introduction

Ce chapitre commence par quelques exemples particuliers et simples de transformations d'un rectangle en un carré de même aire. Pour arriver à ces transformations, on s'appuie d'abord sur des décompositions d'un rectangle en quelques pièces (une sorte de puzzle) permettant de reconstituer le carré, puis sur le théorème de Pythagore exprimé numériquement.

Dans une seconde partie, on étudie la question de manière plus générale, et en s'imposant de ne recourir qu'à des puzzles, et donc en excluant le recours aux mesures.

La possibilité de transformer n'importe quel rectangle en un carré de même aire, appelée *quadrature du rectangle*, peut avoir deux prolongements intéressants. D'une part, ce problème permet d'introduire une vision géométrique de la racine carrée. D'autre part, il débouche sur la question encore plus générale de la quadrature d'une figure rectiligne plane. Nous montrerons en effet dans la dernière section que le cas du rectangle permet de résoudre la quadrature de n'importe quel polygone.

De plus, si on sait construire un carré de même aire que n'importe quel polygone, alors on sait comparer les aires de deux polygones sans recourir à aucune mesure ou aucun calcul. En effet, il est facile de comparer les aires de deux figures semblables, comme deux carrés : il suffit de les superposer pour voir lequel est le plus grand.

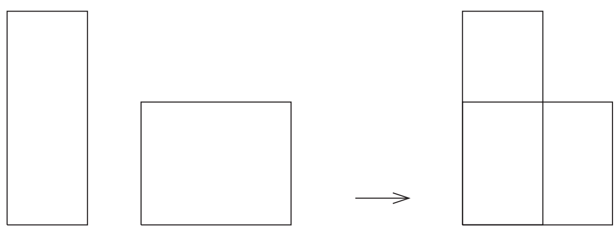


Fig. 1

Par contre, il n'est généralement pas possible, du premier coup d'oeil, de dire lequel, parmi deux polygones quelconques, a la plus grande aire, aucune superposition ne permettant parfois de conclure. Le problème se pose d'ailleurs déjà pour deux rectangles. La figure 1 propose par exemple deux rectangles dont on veut comparer les aires, et ces deux mêmes rectangles superposés.

Sur cette figure, et à défaut de mesurer les côtés et calculer les aires, on ne voit pas bien lequel des deux rectangles a la plus grande aire.

Par contre, si on a une méthode pour construire, pour chacun de ces deux rectangles, un carré de même aire, alors on peut décider, sans aucune mesure, lequel des deux rectangles a la plus grande aire, en comparant les deux carrés associés.

En général, la quadrature des polygones permet donc également de comparer les aires de deux polygones par des méthodes purement géométriques, sans effectuer aucune mesure ni aucun calcul (même si, dans un premier temps et dans le cas particulier du rectangle, nous aurons recours à la mesure pour exhiber quelques premiers exemples simples).

Nous pensons que ce chapitre peut servir, dans la forme que nous lui avons donnée, à la formation (initiale ou continuée) des régents. Il pourrait cependant être adapté, ne fut-ce que partiellement, pour en faire une activité dans des classes de troisième ou quatrième année de l'enseignement secondaire, par exemple comme support géométrique à l'introduction des racines carrées.

2 Des rectangles et des carrés de même aire

La première question est très simple : il s'agit de trouver quelques exemples de couples carré-rectangle de même aire. Nous imposerons ensuite certaines conditions afin d'arriver à une démarche plus systématique, liée au théorème de Pythagore. Au passage, nous verrons apparaître quelques puzzles qui permettent de découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire.

Construire quelques exemples de couples rectangle-carré de même aire.

La première idée devrait être de trouver des couples d'entiers dont le produit est un carré parfait. Un exemple est donné à la figure 2.

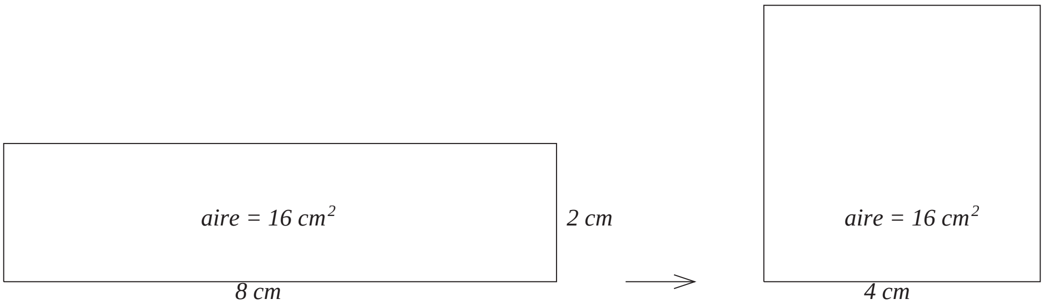


Fig. 2

D'autres exemples du même type peuvent être trouvés, comme le rectangle de côtés 4 cm et 9 cm, et le carré de côté 6 cm. Certains élèves auront peut-être pensé à la solution simple qui consiste à choisir un rectangle dont un côté mesure 1 cm et la mesure de l'autre côté est un carré parfait.

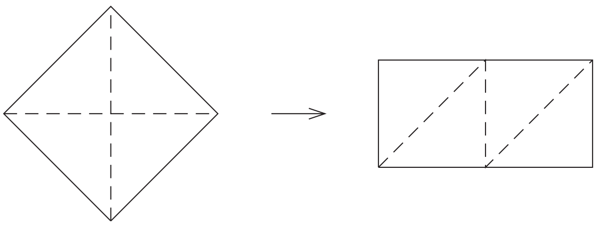


Fig. 3

D'autres enfin pourraient penser au découpage d'un carré en 4 triangles rectangles qui permettent de reconstituer un rectangle de même aire que celle du carré (voir figure 3).

Si ce type d'exemple n'a pas été proposé, il peut être introduit par la question suivante.

Comment construire un carré de même aire qu'un rectangle donné, lorsque celui-ci a un côté de longueur 1 cm, et un autre côté dont la mesure est un nombre entier de centimètres (2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm,...) ?

Pour un rectangle de côtés 1 cm et 2 cm, la solution est donnée à la figure 3 (où l'on passe cette fois du rectangle au carré). Remarquons que, dans ce cas, le carré obtenu est de côté $\sqrt{2}$.

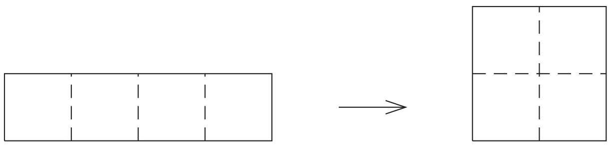


Fig. 4

Le rectangle de côtés 1 cm et 4 cm ne doit évidemment pas poser de problème : il a même surface qu'un carré de 2 cm de côté. On peut cependant se demander si, comme dans le cas précédent, on peut faire un découpage du rectangle pour obtenir le carré. La solution est aussi très simple et est donnée à la figure 4.

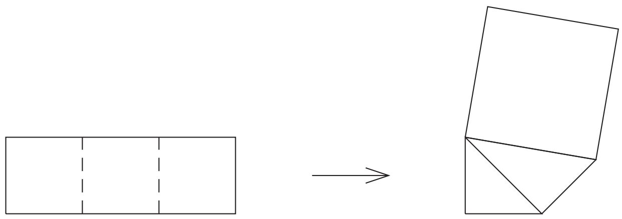


Fig. 5

Pour le rectangle de côtés 1 cm et 3 cm, les élèves penseront peut-être à utiliser le théorème de Pythagore pour construire un segment de longueur $\sqrt{3}$. Si ce n'est pas le cas, on peut les guider en remarquant que le rectangle de côtés 1 cm et 3 cm est constitué de la réunion d'un rectangle de côtés 1 cm et 2 cm, pour lequel on a déjà construit un carré d'aire égale (voir figure 3), et d'un carré de côté 1 cm.

Le problème revient donc à construire un carré dont l'aire vaut la somme des aires de deux autres carrés, ce qui s'obtient grâce au théorème de Pythagore (voir figure 5). Mais, dans ce cas, on ne voit pas a priori de puzzle permettant de passer du rectangle au carré...

En général, pour construire un carré d'aire égale à celle d'un rectangle de côtés 1 cm et n cm, il suffit de pouvoir construire un segment de longueur $\sqrt{n}$, et on peut utiliser pour cela le procédé appelé *escargot de Pythagore*, représenté sur la figure 6.

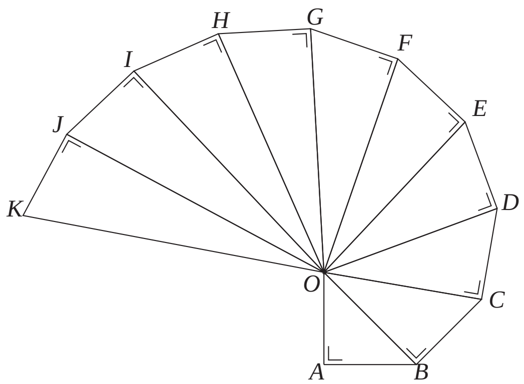


Fig. 6

En construisant successivement des segments de longueur 1 $[OA]$, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FG]$, ..., on déduit du théorème de Pythagore que $|OB| = \sqrt{2}$, $|OC| = \sqrt{3}$, $|OD| = \sqrt{4} = 2$, $|OE| = \sqrt{5}$, $|OF| = \sqrt{6}$, ...

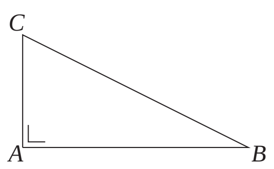


Fig. 7

De plus, on peut la plupart du temps sauter des étapes et arriver à un *turbo-escargot*, par exemple :
si $|AB| = 2$ et $|AC| = 1$ alors $|BC| = \sqrt{5}$;
$\sqrt{5}$ peut donc être construit en une seule étape ;

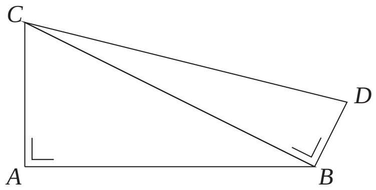


Fig. 8

si $|AB| = 4$ et $|AC| = 2$ alors $|BC| = \sqrt{20}$;
si de plus $|BD| = 1$ alors $|CD| = \sqrt{21}$;
$\sqrt{21}$ peut donc être construit en deux étapes.

3 Une propriété intéressante

Nous aimerions trouver une propriété assurant l'existence d'un puzzle permettant de passer d'un rectangle à un carré de même aire dans tous les exemples de la section précédente.

> Choisir un exemple de couple rectangle-carré de même aire : on note le rectangle $ABCD$ et le carré $A'B'C'D'$. Pour comparer les deux figures, on les superpose par exemple en faisant coïncider les deux angles droits en A et A'. Tracer alors les droites obliques BD', $B'D$ et CC'. Que constate-t-on ?

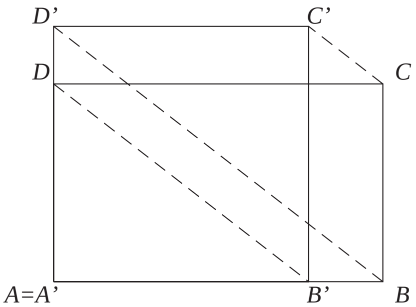


Fig. 9

La construction demandée mène à une figure telle que la figure 9.
Quel que soit l'exemple choisi, on remarque que les droites BD', $B'D$ et CC' semblent parallèles. On peut donc énoncer la conjecture suivante.

1. *Conjecture : Si un rectangle $ABCD$ et un carré $A'B'C'D'$ ont même aire, et si on les superpose comme à la figure 9, alors les droites BD', $B'D$ et CC' sont parallèles.*

En supposant que cette conjecture soit correcte, on peut alors poser le problème suivant.

> Si on se donne un carré $A'B'C'D'$ et un segment $[AD]$, comment construire un rectangle de même aire que le carré, et dont un côté est $[AD]$?

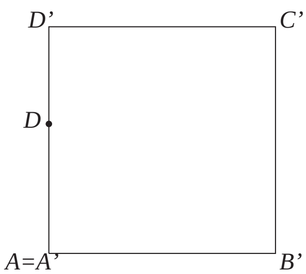


Fig. 10

Pour construire le rectangle demandé, on se ramène à la configuration de la figure 9. On trace un carré $A'B'C'D'$ et un segment $[AD]$ comme sur la figure 10.
On trace alors $B'D$ et la parallèle à $B'D$ passant par D'. On note B le point d'intersection de cette parallèle avec $A'B'$. Il suffit alors de tracer le rectangle de côtés $[AD]$ et $[AB]$.

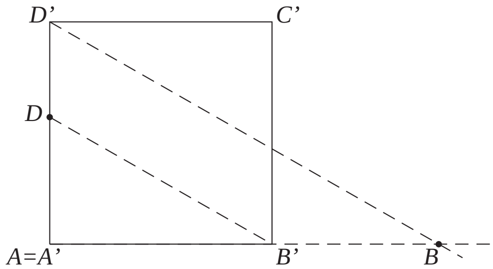


Fig. 11

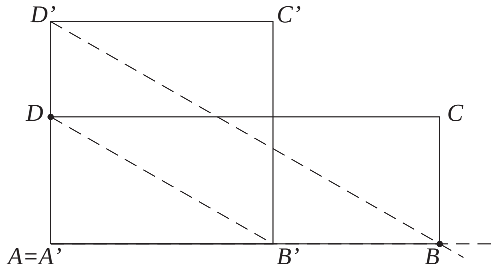


Fig. 12

> Comment s'assurer que le rectangle $ABCD$ construit à la figure 12 est bien de même aire que le carré $A'B'C'D'$? Peut-on trouver un puzzle qui permet de passer du carré au rectangle ?

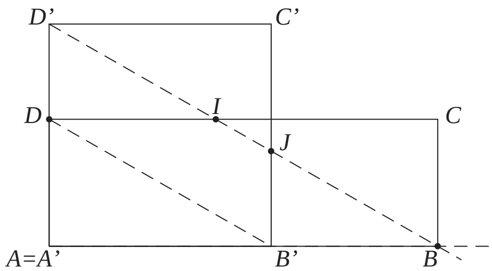


Fig. 13

Si on observe bien la figure 12, on voit apparaître des triangles isométriques qui devraient permettre de répondre à la question. Notons pour cela I et J les points d'intersection de BD' avec CD et $B'C'$.

Les triangles $DD'I$ et $B'JB$ sont isométriques : en effet, par construction $BD' \parallel B'D$, ce qui implique $|DI| = |B'B|$, et comme ces deux triangles sont à côtés parallèles, ils sont bien isométriques.

De même, les deux triangles $D'C'J$ et ICB sont isométriques : comme $|DI| = |B'B|$ et $|AB| = |CD|$, on a également $|IC| = |A'B'| = |D'C'|$, et comme les deux triangles sont à côtés parallèles, ils sont bien isométriques.

Ces deux paires de triangles isométriques vont permettre de comparer facilement les aires du rectangle $ABCD$ et du carré $A'B'C'D'$. On a en effet

$$\begin{aligned}
\text{aire de } A'B'C'D' &= \text{aire de } A'DIJB' + \text{aire de } DD'I + \text{aire de } D'C'J,\\
&= \text{aire de } A'DIJB' + \text{aire de } B'JB + \text{aire de } ICB,\\
&= \text{aire de } ABCD.
\end{aligned}$$

Ces deux paires de triangles isométriques donnent aussi clairement un puzzle qui permet de passer du carré au rectangle : il suffit de découper dans le carré les deux triangles $DD'I$ et $D'C'J$, puis de les faire glisser pour qu'ils occupent respectivement les places de $B'JB$ et ICB, et on obtient le rectangle.

D'autre part, cette construction donne un certain poids à notre conjecture, puisque nous avons montré qu'à partir d'un carré et d'un segment quelconque, on peut effectivement construire un rectangle de même aire que le carré et ayant le segment comme côté, tout en vérifiant l'hypothèse de parallélisme des droites obliques que nous avions tracées.

4 Quadrature du rectangle

À la section précédente, nous avons construit un rectangle de même aire qu'un carré donné, et ayant un segment donné pour côté. Réciproquement, nous voudrions trouver une méthode pour construire un carré de même aire qu'un rectangle donné. Ce problème porte le nom de *quadrature du rectangle*. Nous essaierons également de trouver un puzzle correspondant à cette construction.

Dans ce cas-ci, la construction est moins immédiate que celle donnée à la section précédente, puisque nous ne disposons pas d'un côté de la figure cherchée, c'est-à-dire du carré de même aire qu'un rectangle donné. Cependant, nous disposons de la conjecture du parallélisme établie à la section précédente, qui va nous permettre de trouver d'autres propriétés de la figure formée par un rectangle et un carré de même aire, afin d'aboutir à la construction recherchée.

Sur la figure 9 à la page 78, à partir de laquelle nous avons établi notre conjecture, nous observons deux triangles à côtés parallèles $AB'D$ et ABD'. Supposons que nous fassions tourner le triangle $AB'D$ autour de A d'un quart de tour dans le sens anti-horlogique. Étudier la figure formée des deux triangles après transformation.

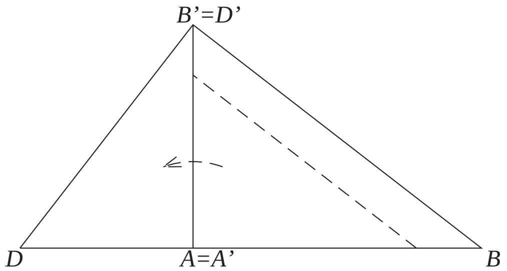


Fig. 14

La figure obtenue est la figure 14.
Après transformation, le point B' se confond bien avec D' puisque, sur la figure 9, $A'B'C'D'$ est un carré et donc $|AB'| = |AD'|$. De plus, le triangle $DB'B$ de la figure 14 est rectangle en $B' = D'$. En effet, les droites $B'D$ et BD' de la figure 9 étant parallèles, les angles $\widehat{ADB'}$ et $\widehat{AD'B}$ sont égaux, et comme le petit triangle ADB' est rectangle en A, on a également $\widehat{ADB'} + \widehat{AB'D} = 90°$, ce qui implique finalement que $\widehat{AD'B} + \widehat{AB'D} = 90°$, et donc aussi que l'angle en $B' = D'$ du triangle $DB'B$ de la figure 14 est droit.

D'autre part, on peut également remarquer que la hauteur du grand triangle rectangle $DB'B$ de la figure 14, qui est le côté du carré de la figure 9, divise l'hypoténuse en deux segments qui sont les côtés du rectangle de la figure 9. Comme, sur cette figure, le rectangle et le carré ont même aire, on a $|AD'|^2 = |DA| \cdot |AB|$, autrement dit on retrouve le résultat bien connu sur la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle. Il s'énonce comme suit.

2. *Le carré de la mesure de la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle vaut le produit des mesures des segments que cette hauteur détermine sur l'hypoténuse.*

Revenons au problème de la construction d'un carré de même aire qu'un rectangle donné $ABCD$, dont nous allons noter les mesures des longueurs des côtés a et b. Le côté du carré cherché mesurera donc $\sqrt{ab}$. Le raisonnement que nous avons fait ci-dessus suggère de d'abord s'intéresser au problème suivant.

Comment construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $a + b$, et dont la hauteur issue de l'angle droit divise l'hypoténuse en deux segments de longueurs a et b ?

Il faut se rappeler ici qu'un triangle rectangle est toujours inscrit dans un demi-cercle dont un diamètre est l'hypoténuse du triangle. On trace donc un segment $[DB]$ de longueur $a + b$, que l'on divise en deux segments de longueurs a et b, en plaçant un point A sur $[DB]$ de telle façon que $|DA| = a$ et $|AB| = b$. On trace ensuite un demi-cercle de diamètre $[DB]$, et le sommet de l'angle droit du triangle rectangle recherché est le point d'intersection B' du demi-cercle et de la perpendiculaire à $[DB]$ passant par A.

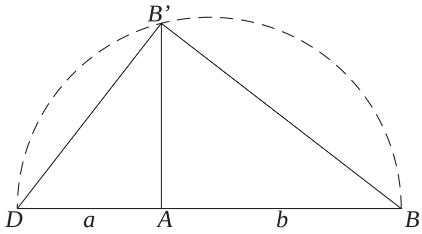


Fig. 15

La propriété de la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle nous assure que, sur la figure 15, le segment $[AB']$ mesure $\sqrt{ab}$, autrement dit ce segment est le côté d'un carré de même aire qu'un rectangle de côtés a et b.

Nous voudrions de surcroît trouver un puzzle qui permette de découper un rectangle donné pour en faire un carré de même aire. Pour cela, nous construisons d'abord le carré de même aire que le rectangle, grâce à la construction du triangle rectangle décrite ci-dessus : nous obtenons la figure 15. Ensuite, nous effectuons la démarche inverse de celle utilisée précédemment : à partir de la figure 15, nous faisons tourner le triangle $DB'A$ d'un quart de tour dans le sens horlogique autour de A, pour obtenir la figure 16 (où les deux triangles sont encore à côtés parallèles), que nous complètons en construisant le rectangle de côtés $[AB]$ et $[AD]$, et le carré de côté $[AB']$ (voir figure 17).

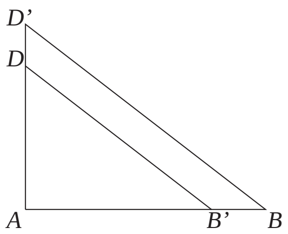


Fig. 16

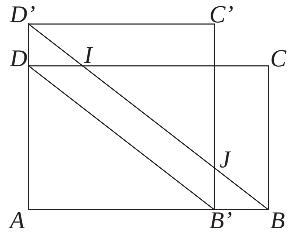


Fig. 17

Nous observons sur la figure 17 deux paires de triangles isométriques : $DD'I$ et $B'JB$ d'une part, $D'C'J$ et ICB d'autre part (la justification est la même qu'à la fin de la section 3). Ces isométries de triangles permettent encore de visualiser l'égalité des aires du rectangle et du carré, mais aussi de trouver un puzzle qui permet de découper le rectangle pour obtenir le carré (voir figure 18).

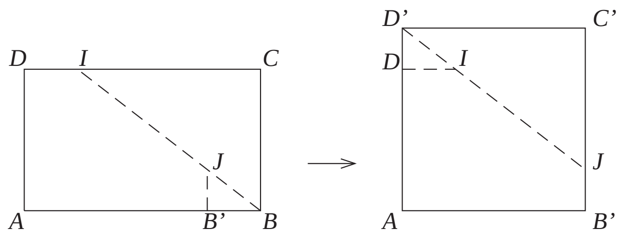


Fig. 18

Nous avons donc résolu notre problème de la quadrature d'un rectangle. Nous avons vu au passage que la conjecture des parallèles que nous avions énoncée à la section 3 était vérifiée, puisqu'elle arrive maintenant comme conséquence de la construction du côté d'un carré de même aire qu'un rectangle donné, en utilisant le résultat concernant la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle (voir figure 15).

Cependant, nous avons travaillé sur des figures, et nous pouvons nous demander si celles-ci sont les plus générales possibles. Par exemple, lorsque nous observons la figure 17, nous pouvons nous rendre compte que le point J pourrait être à l'extérieur du rectangle si celui-ci était particulièrement allongé.

> Qu'est-ce qui change dans la résolution du problème de la quadrature d'un rectangle, lorsqu'on choisit par exemple b très grand par rapport à a (a et b représentant toujours les longueurs des côtés du rectangle) ?

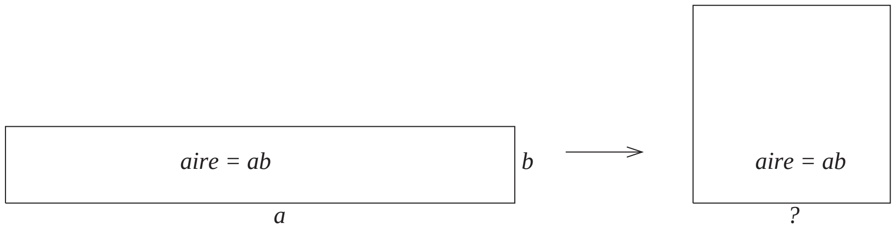


Fig. 19

La construction est la même que dans le cas précédent : on commence par trouver le côté du carré recherché en construisant un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $a + b$, et dont la hauteur issue de l'angle droit divise l'hypoténuse en deux segments de longueur a et b.

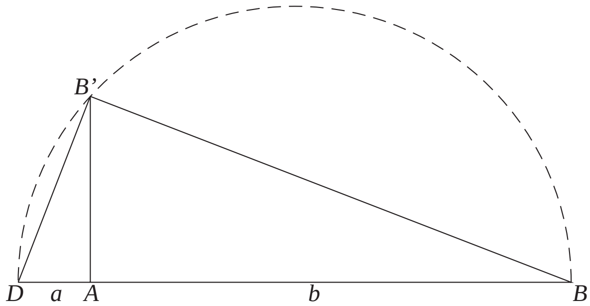


Fig. 20

On fait à nouveau tourner le triangle rectangle ADB' d'un quart de tour autour de A pour obtenir la figure 21, que l'on complète ensuite en construisant le rectangle de côtés $[AB]$ et $[AD]$, et le carré de côté $[AB']$ pour obtenir la figure 22.

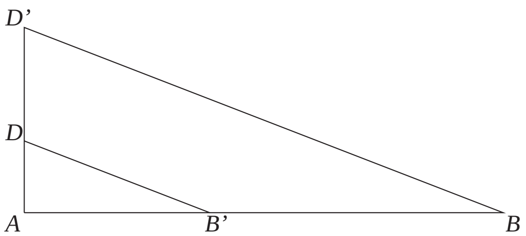


Fig. 21

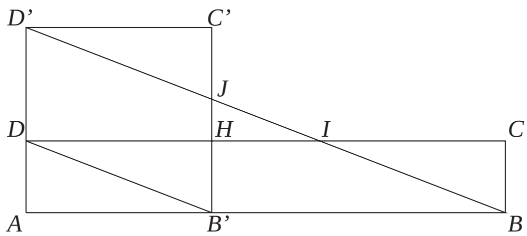


Fig. 22

À la figure 22, on a encore $B'D \parallel BD'$, mais on voit que les triangles isométriques à considérer pour le puzzle ne sont plus disposés de la même façon. Les deux paires de triangles isométriques sont

$DD'I$ et $B'JB$ d'une part, $D'C'J$ et ICB d'autre part (la justification reste la même que dans la première construction), et permettent de comparer les aires du rectangle et du carré. On a en effet

$$\begin{aligned}
\text{aire de } ABCD &= \text{aire de } ADHB' + \text{aire de } B'HIB + \text{aire de } ICB,\\
&= \text{aire de } ADHB' + \text{aire de } B'JB - \text{aire de } HIJ + \text{aire de } ICB,\\
&= \text{aire de } ADHB' + \text{aire de } DD'I - \text{aire de } HIJ + \text{aire de } D'C'J,\\
&= \text{aire de } ADHB' + \text{aire de } DD'JH + \text{aire de } D'C'J,\\
&= \text{aire de } A'B'C'D'.
\end{aligned}$$

D'autre part, ces deux paires de triangles isométriques donnent également un puzzle qui permet de découper le rectangle pour obtenir le carré (voir figure 23 où le petit triangle du puzzle est isométrique au triangle HIJ de la figure 22).

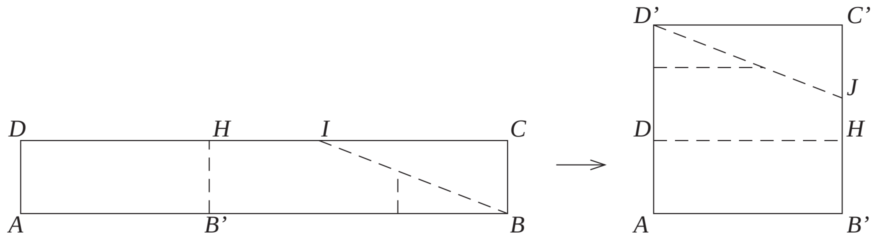


Fig. 23

On voit que le problème de la quadrature du rectangle se résout de différentes manières, selon que le rectangle est « allongé » ou pas, c'est-à-dire selon l'ordre de grandeur du rapport $\frac{b}{a}$ des longueurs des côtés du rectangle (en supposant par exemple que b est la longueur du grand côté du rectangle) : si ce rapport est petit, alors on se réfère au premier cas qui a été traité et on obtient un puzzle de trois pièces (voir figure 18), et si le rapport est grand, alors on se réfère au deuxième cas et on obtient un puzzle de quatre pièces (voir figure 23). À quel moment passe-t-on d'un cas de figure à l'autre, et qu'en est-il du rapport $\frac{b}{a}$ à ce moment ?

Les figures 17 et 22 nous ont permis d'obtenir les puzzles dans les deux cas. Nous les reproduisons ci-dessous afin de pouvoir les comparer.

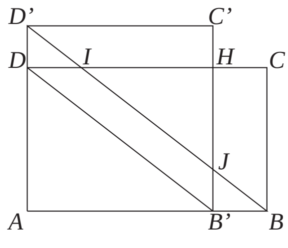


Fig. 24

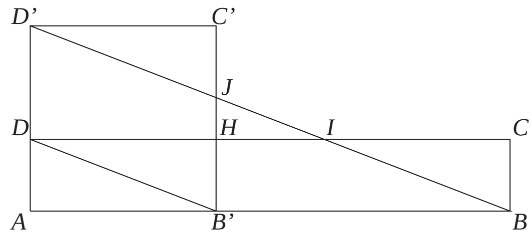


Fig. 25

Dans la figure 24, le triangle HIJ se trouve à l'intérieur du rectangle et du carré, tandis que dans la figure 25, il passe à l'extérieur du rectangle et du carré.

Si on imagine, à partir de la figure 24, que l'on allonge le rectangle (en allongeant $[AB]$), on observe que le triangle HIJ devient de plus en plus petit et, à un certain moment, les trois points I, J et H se confondent puis, si on continue l'allongement, on passe à la configuration de la figure 25. Examinons plus attentivement le cas où les points I, J et H sont confondus (voir figure 26)

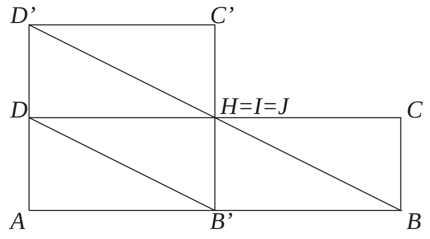


Fig. 26

Dans les figures 24 et 25, les triangles $DD'I$ et $B'JB$ sont isométriques, et les triangles $D'C'J$ et ICB sont isométriques. Ces isométries seront encore vraies dans le cas où les points H, I et J sont confondus. Dans ce cas, on a $|HC| = |DH|$ et $|DD'| = |AD|$. On peut alors en déduire que $|AB| = 4|AD|$.

On voit finalement que c'est lorsque la longueur b du grand côté du rectangle vaut 4 fois la longueur a du petit côté, que l'on passe d'un puzzle à 3 pièces à un puzzle à 4 pièces. De plus, lorsque b vaut exactement $4a$, le puzzle est très simple, puisqu'il suffit alors de couper le rectangle en deux pour obtenir un carré de même aire (les rectangles $ADHB'$, $DD'C'H$ et $B'HCB$ sont évidemment isométriques sur la figure 26).

5 Généralisation aux figures rectilignes planes

À la section précédente, nous avons résolu le problème de la quadrature du rectangle. Nous pouvons nous demander s'il est possible, de la même manière, de construire un carré de même aire qu'un polygone quelconque donné. Nous allons examiner quelques exemples, en nous ramenant à chaque fois au cas du rectangle, puis nous étendrons nos arguments au cas général.

> Étant donné un parallélogramme quelconque, comment construire un carré de même aire que ce parallélogramme ?

L'idée est bien sûr de se ramener au cas du rectangle, puisqu'il y a un découpage bien connu qui permet de passer d'un parallélogramme à un rectangle de même aire (pour cela, on choisit comme base du parallélogramme son plus long côté).

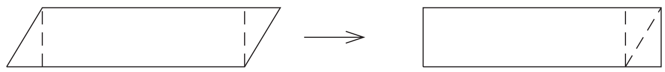


Fig. 27

Le rectangle obtenu peut être transformé en un carré de même aire (voir section 4), et on en déduit que le parallélogramme peut également être transformé en un carré de même aire. De plus, en combinant le puzzle donné à la figure 27 avec le puzzle permettant de passer d'un rectangle à un carré de même aire, on se convainc qu'il est également possible de trouver un puzzle permettant de découper un parallélogramme pour obtenir un carré de même aire.

> Étant donné un triangle quelconque, comment construire un carré de même aire que ce triangle ?

De nouveau, on essaie de se ramener à l'un des cas déjà étudiés précédemment. Or il est assez facile de découper un triangle pour obtenir un parallélogramme de même aire : il suffit de tracer un segment joignant les milieux de deux côtés (ce segment est alors parallèle au troisième côté), puis de combiner les deux morceaux comme sur la figure 28.

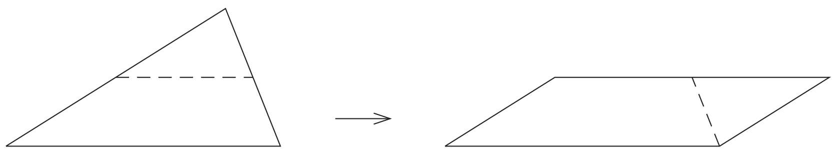


Fig. 28

À nouveau, comme il est possible de construire un carré de même aire qu'un parallélogramme, il est également possible de construire un carré de même aire qu'un rectangle, et par combinaison de puzzles, on voit qu'il existe également un puzzle qui permet de découper un triangle pour obtenir un carré de même aire.

En général, la quadrature d'un polygone quelconque est-elle toujours possible ?

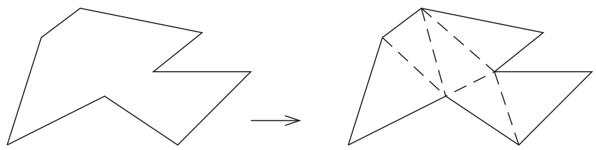


Fig. 29

Pour répondre à cette question, on essaie encore de se ramener aux cas déjà résolus. Or tout polygone peut être découpé pour former un nombre fini de triangles. La figure 29 en donne un exemple.

Or chacun des triangles peut être transformé (avec puzzle) en un carré de même aire. Nous sommes donc arrivés à montrer que tout polygone peut être transformé en un nombre fini de carrés dont la somme des aires vaut l'aire du polygone de départ, et qu'il existe un puzzle qui réalise cette transformation (en combinant le découpage du polygone en triangles et les puzzles pour chacun des triangles).

Il reste donc à trouver une méthode qui permette de transformer un nombre fini de carrés en un seul carré, dont l'aire vaille la somme de celles de tous les autres carrés.

Supposons que l'on ait deux carrés, comment construire un carré dont l'aire vaut la somme des aires des deux carrés ?

Il s'agit ici d'une application directe du théorème de Pythagore sous sa forme géométrique : *la somme des aires des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle vaut l'aire du carré construit sur l'hypoténuse.* Il suffit donc, quand on a deux carrés quelconques, notés A et B sur la figure 30, de les placer dans la position du théorème de Pythagore, et l'aire du carré C de la figure 30 vaut la somme des aires des carrés A et B.

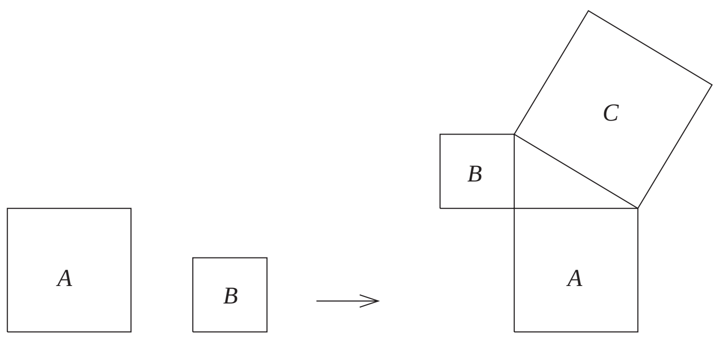


Fig. 30

De plus, il existe de nombreux puzzles qui permettent de prouver visuellement le théorème de Pythagore, et donc de découper deux carrés pour les transformer en un carré dont l'aire vaut la somme des aires des deux carrés (voir par exemple R. B. Nelsen [1993]).

Revenons au problème de la quadrature d'un polygone quelconque. Nous avons vu que tout polygone peut être découpé pour obtenir un nombre fini de carrés dont la somme des aires vaut l'aire du polygone de départ. Or, le théorème de Pythagore permet de découper deux carrés pour obtenir un carré dont l'aire vaut la somme des aires des deux carrés. Mais si on a trois carrés, il suffit d'en prendre deux, d'utiliser Pythagore pour les transformer en un seul carré, que l'on combine de la même façon avec le troisième carré qui reste, pour obtenir un carré dont l'aire vaut la somme des aires des trois carrés de départ. Et on peut faire de même avec quatre carrés, cinq carrés, ... ; il suffit d'itérer le processus.

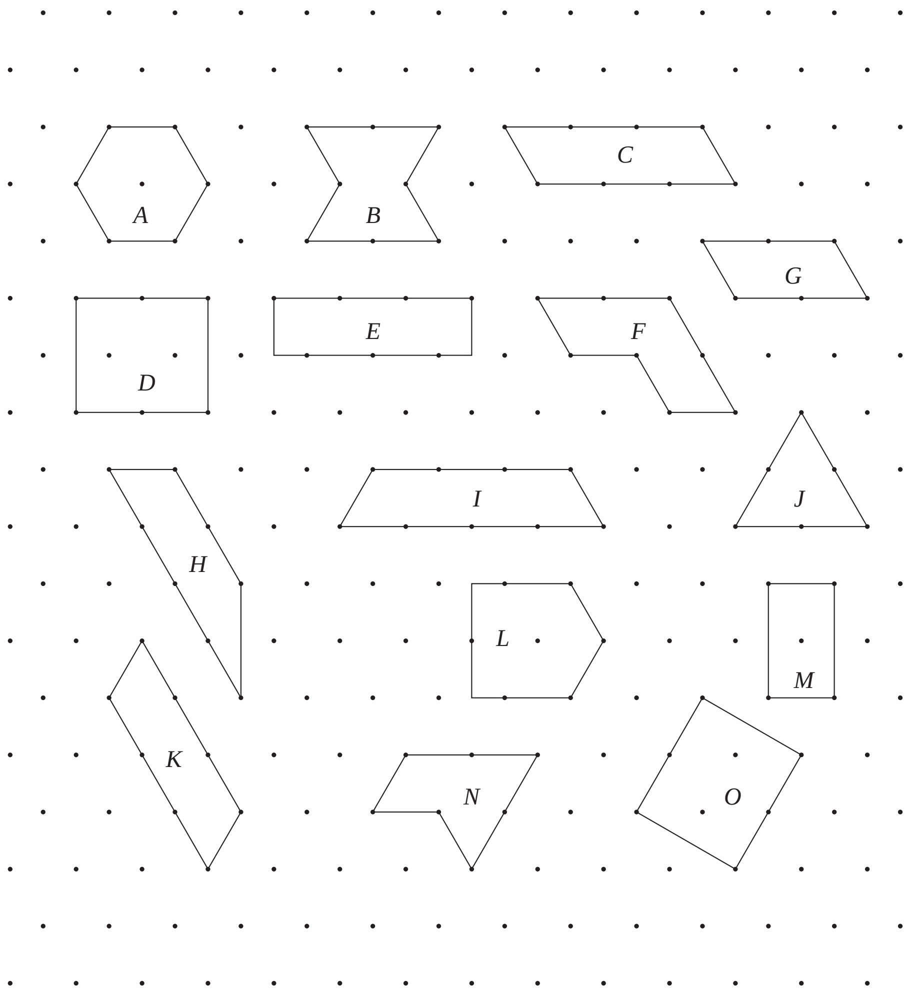
Nous avons donc finalement montré qu'il est possible de transformer un nombre fini de carrés en un seul carré dont l'aire vaut la somme des aires des carrés que l'on a combinés, et cette transformation peut être le résultat d'une combinaison de puzzles. Comme nous avions aussi montré que tout polygone pouvait être transformé en un nombre fini de carrés dont la somme des aires vaut l'aire du polygone, nous sommes finalement parvenus au résultat suivant.

3. *La quadrature de n'importe quel polygone est réalisable ; autrement dit on peut transformer n'importe quel polygone en un carré de même aire que le polygone de départ. De plus, cette transformation peut se faire à l'aide d'un puzzle qui permet de découper le polygone pour obtenir un carré de même aire.*

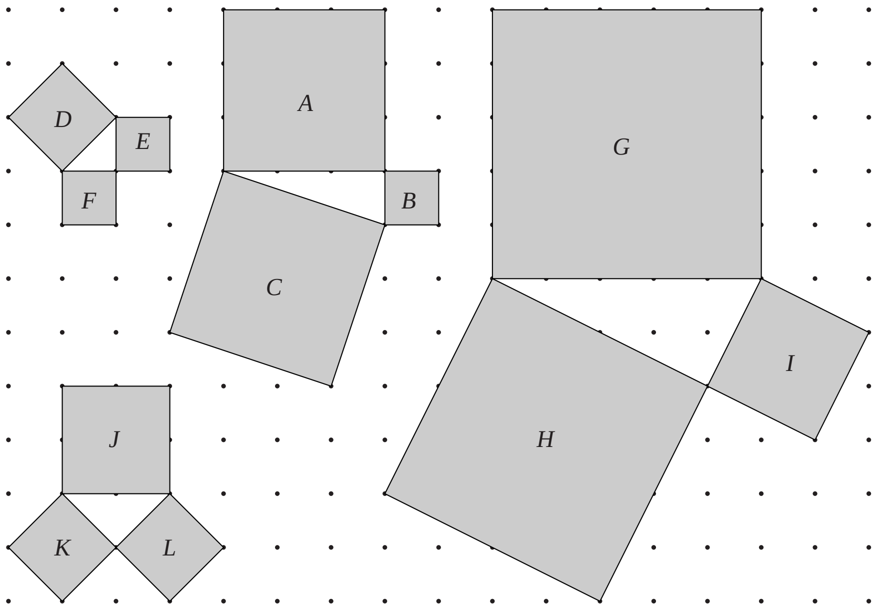
Annexe

Fiches à photocopier

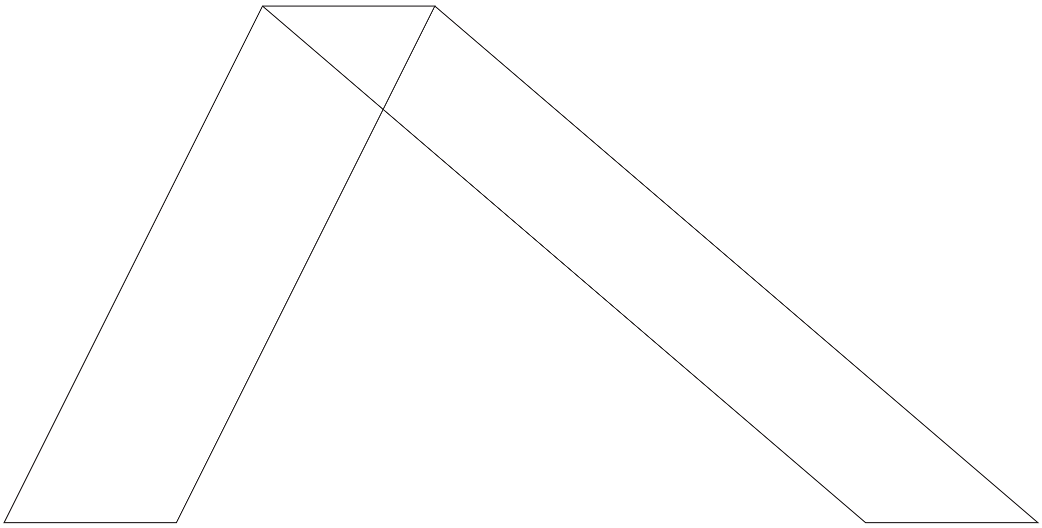
1. Quelles sont les figures qui ont même aire ?
2. Quelles sont celles qui ont le même périmètre ?



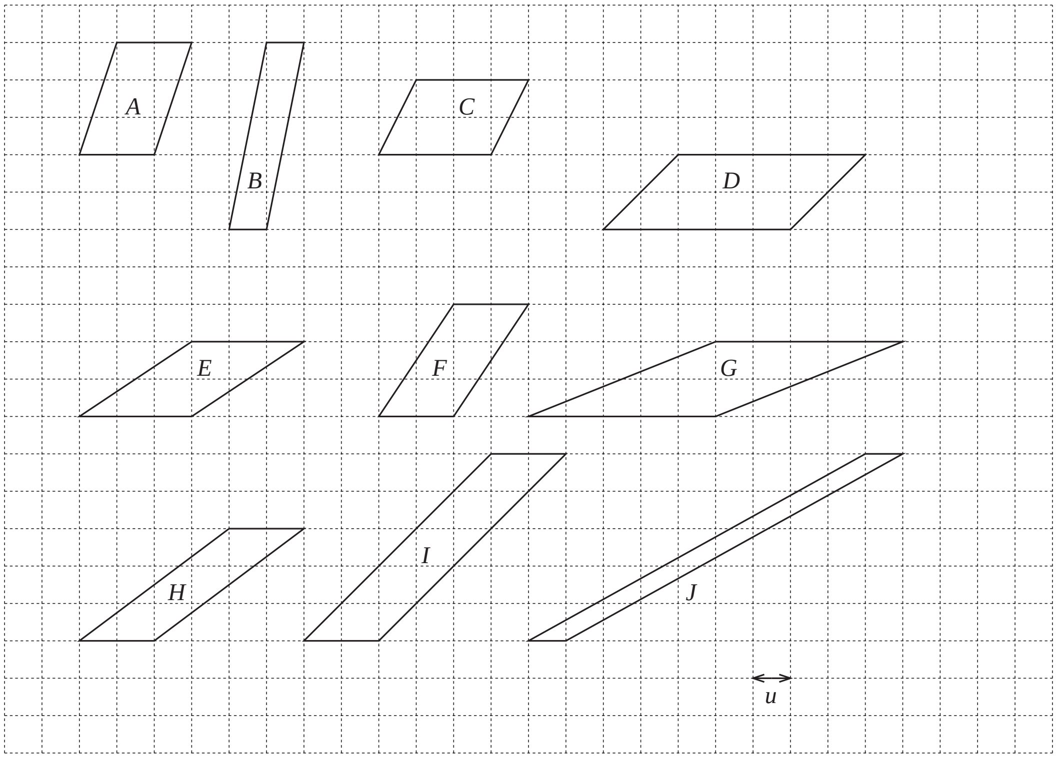
Y-a-t-il une relation entre les aires des carrés construits autour d'un même triangle ?



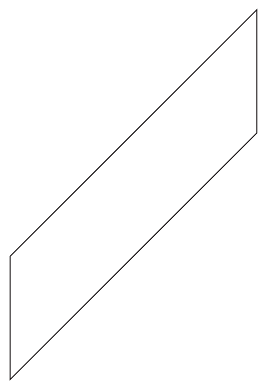
Ces deux parallélogrammes ont-ils la même aire ?



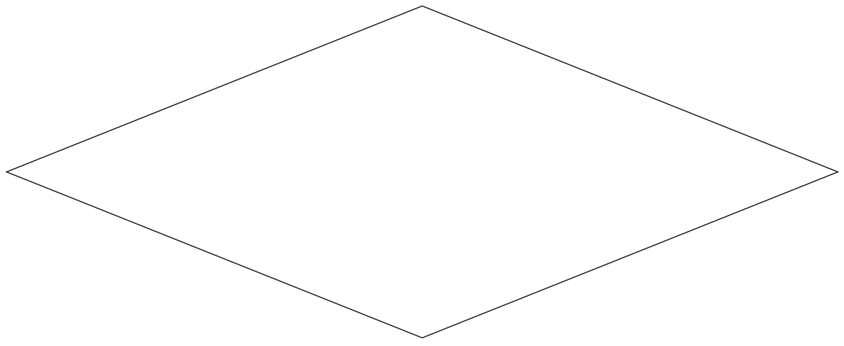
Pour chaque parallélogramme, dessiner un rectangle de même aire.



Est-il possible de dessiner deux rectangles distincts qui ont même aire que le parallélogramme de la figure ci-dessous ?



Est-il possible de dessiner deux rectangles distincts qui ont même aire que le losange ci-dessous ? Imaginer des réponses avant de dessiner.



On croise deux bandes de papier de même largeur comme sur la figure. Quelle est la nature du quadrilatère qui se forme à l'intersection des deux bandes ?