



CREM

Nivelles, le 31 août 2002

# VERS UNE GÉOMÉTRIE NATURELLE

Recherche N° 72/01 financée par le Ministère de la Communauté Française,  
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique,  
Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation  
et du Pilotage interréseaux

*Rapport de fin d'année, deuxième partie*

---

**Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.**

5 rue Émile Vandervelde B-1400 Nivelles Belgique

Tél. +32-(0)67 21.25.27 Fax. +32-(0)67 21.22.02 Cpte 068-2179326-54

rouche@amm.ucl.ac.be

# PARALLÉLISME ET PERPENDICULARITÉ

## À TROIS DIMENSIONS

### 1 Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons quelques éléments d'une géométrie dite « naturelle » telle qu'elle est décrite dans l'introduction de cette étude. Il s'agit des relations de parallélisme et de perpendicularité dans la géométrie à trois dimensions, relations qui trouvent leur point de départ dans l'espace physique de notre environnement immédiat. Nous entendons par là l'environnement qui est à la portée de nos mains ou de nos regards, et dans lequel les objets ont une taille raisonnable.

Pour schématiser géométriquement cet environnement, nous faisons d'abord le choix de certaines formes simples situées dans l'espace, à savoir les droites et les plans. Ensuite, en nous appuyant sur des intuitions communes forgées à partir d'expériences quotidiennes, nous récoltons un premier lot de propriétés relatives à ces formes, et qui nous semblent évidentes ; nous les appelons *propriétés intuitives*. Enfin, nous énonçons quelques propriétés moins évidentes que nous appelons *propositions*. Nous déduisons ces propositions des propriétés intuitives, en nous appuyant sur une expérience de pensée qui permet de voir les configurations géométriques étudiées dans une position privilégiée. Celle-ci sera précisée ci-après.

La « naturalité » de la géométrie pratiquée ici s'explique par le fait que nous utilisons en concomitance trois sources de connaissances : l'intuition, l'expérience et la déduction.

### 2 Droites et plans : premières formes dans l'espace

Les formes de l'espace telles que les droites et les plans sont des objets mentaux qui se constituent à partir d'expériences ou d'observations faites dans le monde réel.

#### Notion de droite

Expérience : La ligne imaginaire de visée d'un géomètre arpenteur, d'un chasseur, des rayons solaires pénétrant dans une pièce obscure par un petit orifice.

#### Notion de plan

Expérience : La surface libre d'un lac, d'un liquide dans un récipient, le parement d'un mur, sont des exemples de surfaces planes.

Expérience : Pour obtenir une surface *plane* dans une masse de sable humide, on dépose sur le sable deux bâtons droits qui se touchent sans se croiser, on remplit de sable l'espace entre eux et on égalise le sable à l'aide de mouvements d'un troisième bâton s'appuyant sur les deux autres.

Propriété intuitive 1 : *La surface balayée par une droite mobile qui se meut en s'appuyant constamment sur deux droites fixes sécantes, est un plan.*

Propriété intuitive 2 : *Deux droites sécantes déterminent un plan.*

### 3 Notions de droites et plans parallèles et perpendiculaires



Fig. 1 : Un arbre

Notre perception de l'espace est en étroite relation avec la force de pesanteur. Cette force qui est dirigée à peu près vers le centre de la Terre, se manifeste au quotidien par exemple par son influence sur les arbres dont certains poussent très proches de la verticale (figure 1), par la nécessité de construire des maisons à la verticale sur des sols horizontaux, par l'effort que nous devons fournir pour soulever des objets, ceux-ci tombant vers le sol dès qu'on les lâche. La verticalité et l'horizontalité font donc partie de notre environnement. C'est pour cette raison que certaines propriétés des droites et des plans dans l'espace sont plus facilement perçues comme évidentes quand les droites et plans sont dans des positions privilégiées, celles de verticalité et d'horizontalité.



Fig. 2 : Un fil à plomb

#### Notion de droite verticale

Expérience : Un fil à plomb, qui permet de vérifier la verticalité d'un mur, matérialise une *droite verticale* (figure 2).

#### Notion de droites parallèles

Toutes les droites verticales se rencontrent au centre de la terre, qui est éloigné de nous à peu près de 6400 km. Mais on les considère habituellement sur une faible longueur. C'est le cas des deux peupliers de la figure 3, ou de deux fils à plomb suspendus côte à côte. Ces exemples donnent une idée de deux *droites parallèles*. Deux droites verticales, en un lieu donné pas trop étendu, sont considérées comme *parallèles*.



Fig. 3 : Deux arbres

#### Notion de plan horizontal

Expérience : La surface libre d'un lac ou d'un liquide dans un récipient matérialise un *plan horizontal*.

### Notion de plans parallèles

Expérience : Dans un immeuble, les étages sont construits sur des plans horizontaux. Les étages illustrent la notion de plans parallèles. Ainsi, on considère que *tous les plans horizontaux sont parallèles entre eux*.



Fig. 4 : Bulle d'air d'un niveau d'eau

### Notion de droite horizontale

Expérience : Pour vérifier si une droite est horizontale, on se sert d'un niveau d'eau. Celui-ci comporte deux marques et quand la bulle d'air est placée entre elles, elle indique que le niveau est réglé à l'horizontale. Dans cette position, le niveau matérialise une *droite horizontale*. La figure 4 montre une situation où la bulle d'air n'est pas située entre les deux marques. Dans ce cas, la direction du niveau n'est pas horizontale.

Expérience : Faisons flotter un bâton droit sur la surface d'un lac. Le bâton matérialise une droite horizontale.

Propriété intuitive 3 : *Toute droite contenue dans un plan horizontal est horizontale.*

Deux droites horizontales ne sont pas nécessairement parallèles. Elles peuvent aussi être sécantes ou ne pas se rencontrer, sans être pour autant parallèles. Mais on a la propriété intuitive suivante.

Propriété intuitive 4 : *Si deux droites sont parallèles et si l'une d'elles est horizontale, alors la seconde est également horizontale.*

Expérience : Si un niveau d'eau tourne autour d'un point fixe, et que dans toutes les positions, la bulle du niveau est entre les deux repères, alors le niveau balaie un plan horizontal.

Propriété intuitive 5 : *Une surface balayée par une droite horizontale mobile tournant autour d'un point fixe est un plan horizontal.*

Expérience : Certains niveaux, comme celui de la photo de la figure 5, sont munis de deux bulles et permettent de vérifier simultanément l'horizontalité de deux droites sécantes et orthogonales. Pour vérifier si une surface plane est horizontale, il suffit en fait de vérifier que deux droites sécantes du plan sont horizontales. Cette propriété est un peu plus générale que ce que donne l'expérience du niveau, puisque dans celui-ci les deux droites sont perpendiculaires.



Fig. 5 : Niveau d'eau

Propriété intuitive 6 : *Un plan qui contient deux droites sécantes et horizontales est aussi horizontal.*

Remarque : Un plan qui contient deux droites parallèles et horizontales n'est pas nécessairement horizontal. Cela est illustré par les marches d'une échelle en position oblique ou verticale.

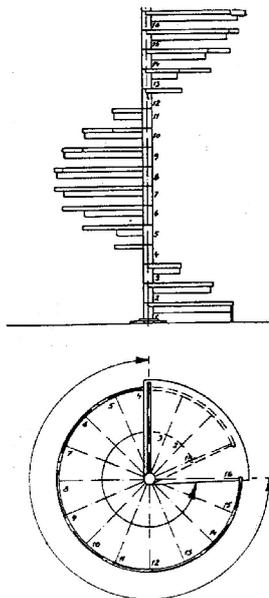


Fig. 6 : Escalier en colimaçon

### Notion de droites gauches

Expérience : Les bords des marches d'un escalier en colimaçon illustrent le fait qu'il y a des droites horizontales qui ne se rencontrent pas et qui ne sont pas parallèles (figure 6). Deux droites dans une telle position sont appelées *droites gauches*.

### Notion de droites perpendiculaires

Expérience : Suspendons un fil à plomb au-dessus d'un plan horizontal de manière que le fil à plomb touche le plan. Par le point de contact, menons une droite dans le plan. La droite du fil à plomb et celle du plan donnent un modèle de droites perpendiculaires.

On peut disposer l'angle privilégié d'une équerre le long du fil à plomb et de la droite du plan horizontal. Deux droites sécantes situées n'importe où et le long desquelles on peut disposer les deux côtés de l'angle privilégié d'une équerre sont appelées perpendiculaires.

Propriété intuitive 7 : *Deux droites sécantes, l'une verticale et l'autre horizontale, sont perpendiculaires.*

Expérience : Faisons tourner une équerre autour d'un de ses côtés disposé à la verticale. L'autre côté appliqué sur un plan horizontal ne décolle pas du plan.

Propriété intuitive 8 : *Une droite mobile perpendiculaire en un point donné à une droite verticale fixe, engendre un plan horizontal.*

### Notion de droite perpendiculaire à un plan

Une droite verticale fixe et le plan horizontal engendré par une droite mobile perpendiculaire à la droite fixe illustrent la notion de droite et de plan perpendiculaires : *toute droite verticale est perpendiculaire à tout plan horizontal*. On dit qu'une droite qui coupe un plan est perpendiculaire à celui-ci si elle est perpendiculaire à toutes les droites passant par son pied dans le plan.

### Expérience de pensée

L'expérience de pensée décrite ci-dessous amène à considérer comme particulièrement éclairantes les configurations géométriques dont les éléments essentiels sont des droites verticales et des plans

horizontaux. Ce point de vue particulier et les quelques propriétés intuitives déjà établies ou à établir permettent de déduire rapidement des propositions non évidentes, comme nous ne tarderons pas à le voir.

On suppose que toute figure de l'espace comportant des droites et des plans peut être déplacée de sorte qu'un de ses plans devienne horizontal, ou qu'une de ses droites devienne verticale. Dans un tel déplacement, les propriétés de parallélisme et d'orthogonalité de la figure au départ sont conservées à l'arrivée, de même que la distance entre deux points quelconques (la bijection est implicite, les objets solides étant déplaçables). Le déplacement en sens inverse est également possible.

## 4 Droite perpendiculaire à un plan

### PROPOSITION 1

*Une droite perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan est perpendiculaire à ce plan.*

Dans la démonstration, nous allons nous appuyer sur des propriétés déjà établies et sur l'expérience et les propriétés intuitives ci-après.

Expérience : Quand un carton en forme de rectangle plié en deux suivant une parallèle à un de ses côtés, est posé sur un plan horizontal, alors la ligne de pliage est en position verticale, quelle que soit l'ouverture du carton (figure 7). Si on applique le carton sur un plan situé en position quelconque, on arrive à la conclusion qui suit.



Fig. 7 : Carton plié en deux

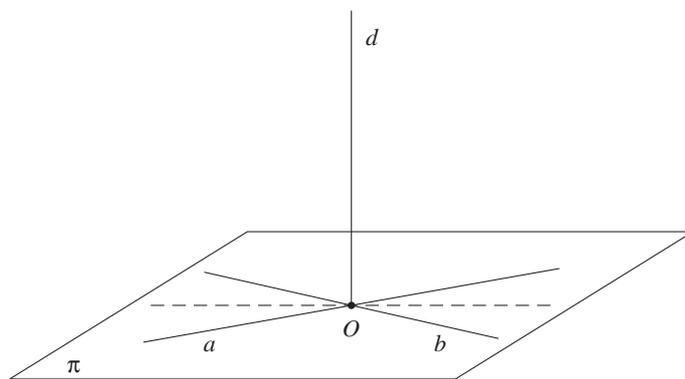


Fig. 8

Propriété intuitive 9 : *Pour deux droites sécantes, il existe une droite perpendiculaire à ces deux droites.*

Propriété intuitive 10 : *Une droite perpendiculaire à deux droites horizontales sécantes est une droite verticale.*

Revenons à la démonstration de la proposition 1. Considérons un plan  $\pi$ , deux droites  $a$  et  $b$  de ce plan sécantes en un point noté  $O$  et une droite  $d$  perpendiculaire à chacune d'elles (figure 8). La propriété intuitive 9 assure l'existence d'une telle droite. Grâce à la propriété intuitive 9, on a également l'existence et l'unicité de la droite perpendiculaire en un point à un plan.

Par l'expérience de pensée, nous amenons le plan  $\pi$  à la position horizontale. Ainsi, par la propriété 3, les droites  $a$  et  $b$  deviennent également horizontales et, par l'expérience de pensée, la droite  $d$

reste perpendiculaire à ces droites. Donc, d'après la propriété intuitive 10, la droite  $d$  devient une droite verticale. Ainsi, la droite  $d$  est perpendiculaire au plan  $\pi$  puisque, comme nous l'avons vu, toute droite verticale est perpendiculaire à tout plan horizontal.

## 5 Perpendiculaire commune à deux droites gauches

Si les droites données sont sécantes, la perpendiculaire commune est la perpendiculaire au plan de ces droites passant par leur intersection.

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite coplanaire avec les parallèles et perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Étudions maintenant le cas de deux droites gauches.

### PROPOSITION 2

*Il existe une perpendiculaire commune à un couple de droites gauches. La distance entre deux points, dont chacun appartient à une droite différente, est la plus courte lorsque les deux points appartiennent à la perpendiculaire commune. Cette distance s'appelle distance entre les deux droites.*

Pour établir cette proposition, nous nous appuyons sur de nouvelles propriétés intuitives précédées par une expérience.

Expérience : À la figure 6, la colonne de l'escalier en colimaçon matérialise la perpendiculaire commune aux droites matérialisées par les bords des marches. Sur la vue en projection orthogonale de l'escalier de la même figure, les bords des marches horizontales sont représentés par des segments et la colonne verticale de l'escalier est représentée par un point. Cette expérience amène deux nouvelles propriétés intuitives.

Propriété intuitive 11 : *Sur la vue du dessus, une droite verticale est représentée sur le plan horizontal par un point, une droite non verticale par une droite et deux droites gauches non verticales par deux droites sécantes.*

Propriété intuitive 11bis : *De tous les segments qui joignent un point à un plan horizontal, le plus court est celui qui est vertical.*

Propriété intuitive 12 : *La perpendiculaire commune à deux droites horizontales gauches est une droite verticale représentée sur la vue du dessus des deux droites par le point d'intersection de leurs projections.*

Propriété intuitive 13 : *Parmi tous les segments possibles dont les extrémités sont situées sur deux droites horizontales gauches, le segment le plus court est celui qui est à la verticale.*

Revenons à la démonstration de la proposition 2. Donnons-nous deux droites gauches notées  $a$  et  $b$ . Translatons la droite  $a$  vers la droite  $b$  jusqu'à que la droite translatée  $a'$  et la droite  $b$  soient sécantes. Engendrons un plan par une droite mobile qui se meut en s'appuyant sur les deux sécantes. Par l'expérience de pensée, amenons ce plan en position horizontale. Alors la droite  $b$  devient horizontale, de même la droite  $a$  qui est parallèle à une droite du plan considéré (en vertu de la propriété intuitive 4). En vertu de la propriété intuitive 11, leurs projections orthogonales sur un plan horizontal sont deux droites sécantes; en vertu de la propriété intuitive 12, le point d'intersection des sécantes représente la perpendiculaire commune. En vertu de la propriété intuitive 13, la distance la plus courte entre les droites est représentée par la longueur du segment de la perpendiculaire commune déterminé par ses point d'intersection avec les droites données.

## 6 Projections parallèles

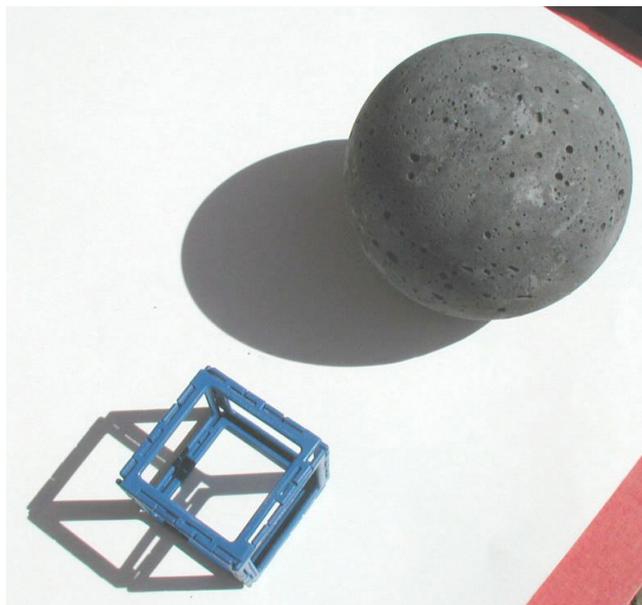


Fig. 9 : L'ombre au soleil d'un cube et d'une sphère

Expérience : Lorsqu'on observe l'ombre au soleil d'un cube, on y voit une figure plane dont des segments correspondent aux arêtes du cube et dans laquelle les arêtes parallèles sont représentées par des segments parallèles (figure 9). Ces ombres nous suggèrent une façon de représenter un cube sur une feuille de papier.

D'une manière générale, les représentations planes des formes à trois dimensions et la compréhension de leur fonctionnement sont importantes lorsqu'on étudie des problèmes de la géométrie à trois dimensions; elles aident à organiser les démonstrations et à formuler des arguments.

Dans cette section, on s'intéresse au fonctionnement d'un type de représentation plane qui a les mêmes propriétés que celles observées sur les ombres au soleil.

Comme modèle géométrique de l'ombre au soleil, on choisit les projections parallèles sur un plan, parce que cela correspond à l'interprétation suivante du phénomène de l'ombre : dans un faisceau de rayons lumineux parallèles, certains sont arrêtés par l'objet ; ceux-là correspondent à l'ombre sur le plan.

Pour s'assurer que ce modèle est conforme aux observations, il faut vérifier si les propriétés de l'ombre énoncées ci-dessus peuvent être traduites dans le modèle des projections parallèles.

### PROPOSITION 3

*Les projections parallèles sur un plan de deux droites parallèles sont deux droites parallèles, si aucune de ces droites n'est parallèle à la direction de la projection et si la direction de la projection n'est pas parallèle au plan de projection.*

Pour établir cette proposition, on s'appuie sur la propriété intuitive suivante.

Propriété intuitive 14 : *La section de deux plans horizontaux par un plan non horizontal est constituée de deux droites parallèles et horizontales.*

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 3. Considérons deux droites parallèles, notées  $a$  et  $b$ , et une droite  $d$  déterminant la direction des projections parallèles. Par hypothèse, cette droite n'est parallèle ni à la droite  $a$ , ni à la droite  $b$ , ni au plan de projection. Une droite mobile sécante avec  $a$  et parallèle à  $d$  engendre un plan noté  $\pi_a$ . Une droite mobile sécante avec  $b$  et parallèle à  $d$  engendre un autre plan noté  $\pi_b$ . Les intersections de ces plans avec le plan de projection donnent deux droites qui sont les projections parallèles des droites  $a$  et  $b$  sur le plan de projection.

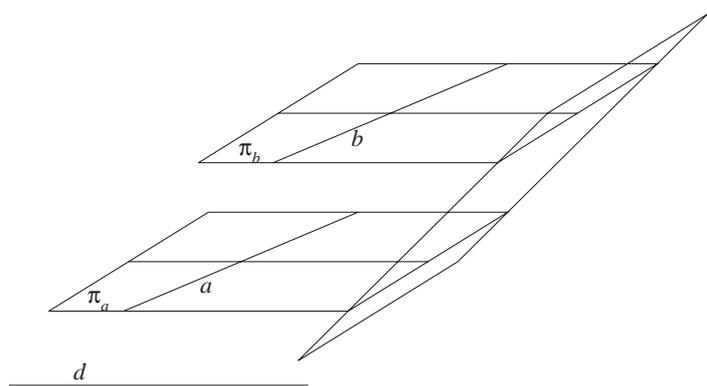


Fig. 10

Par l'expérience de pensée, on amène le plan  $\pi_a$  à la position horizontale, les droites  $a$  et  $d$  deviennent des droites horizontales et la droite  $b$  reste parallèle à la droite  $a$ . Donc d'après la propriété intuitive 4, elle devient horizontale (figure 10). D'après la propriété intuitive 6, le plan  $\pi_b$  devient également horizontal, puisqu'il contient deux droites horizontales sécantes, la droite  $b$  et la parallèle à  $d$ .

Dans les déplacements faits lors de l'expérience de pensée, le plan de projection modifie également sa position, mais il reste sécant avec les plans considérés. Or, d'après la propriété intuitive 14, l'intersection des deux plans horizontaux avec le plan de projection est constituée de deux droites parallèles. Amenées à leurs positions initiales, ces droites parallèles composent les intersections des plans  $\pi_a$  et  $\pi_b$  avec le plan de projection.

COROLLAIRE

*La projection parallèle d'un parallélogramme est un parallélogramme.*

## 7 Section plane d'un cylindre

Expérience : L'ombre au soleil d'une sphère est une courbe qui semble être un cercle étiré (figure 9). Cette courbe est appelée *ellipse*.

L'ombre au soleil d'une sphère peut être modélisée géométriquement par projection parallèle de la sphère sur un plan de projection. Du point de vue géométrique, cela revient à étudier des projections parallèles des points de la sphère qui sont aussi les points de contact des tangentes à la sphère parallèles à la direction de la projection. Toutes ces tangentes à la sphère forment une surface qui est un cylindre droit de rayon égal au rayon de la sphère. Ainsi, l'ombre de la sphère peut être modélisée géométriquement comme section plane d'un cylindre droit.

PROPOSITION 4

*Une section plane d'un cylindre droit, est une courbe fermée obtenue à partir du cercle de la base du cylindre par une dilatation.*

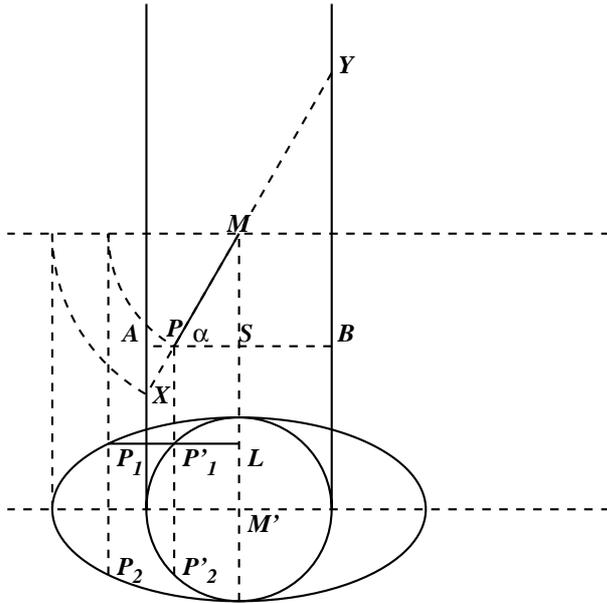


Fig. 11 : section d'un cylindre

L'argumentation s'appuie sur la figure 11, qui montre la situation privilégiée d'un cylindre vertical.

Le segment  $[A, B]$  représente la vue de face de la section plane du cylindre par un plan horizontal, le segment  $[X, Y]$  représente la vue de face de la section du cylindre par un plan oblique. La vue du dessus des deux sections est représentée par le cercle de la même figure.

Dans la suite, pour construire la courbe d'intersection entre le plan oblique et le cylindre, on considère un point courant  $P$  du segment  $[X, Y]$ . Il représente, dans la vue de face, l'intersection entre le plan de section, le plan horizontal et le cylindre (un cylindre plein en l'occurrence).

Pour construire en vraie grandeur la courbe d'intersection entre le plan oblique et le cylindre, on rabat le plan oblique en position horizontale par une rotation autour du segment horizontal représenté par le point  $M$ . On voit alors que le point courant  $P'_1$  du cercle est envoyé sur le point courant  $P_1$  de la courbe obtenue comme section du cylindre.

Quand le point  $P$  se meut sur le segment  $[XY]$ , alors le point  $P'_1$  (ou  $P'_2$ ) se meut sur le cercle, et le point  $P_1$  (ou  $P_2$ ) se meut sur la courbe allongée représentée à la même figure 11.

Montrons que cette courbe est obtenue par une dilatation (étirement) du cercle. En effet, étant donné que

$$|P'_1L| = |PS|$$

et que

$$|P_1L| = |PM|,$$

on a que

$$\frac{|P'_1L|}{|P_1L|} = \frac{|PS|}{|PM|}.$$

Le rapport  $\frac{|PS|}{|PM|}$  ne dépend pas de la position du point  $P$ , il est donc constant (car il est égal à  $\cos \alpha$ ). Il en résulte que tout point  $P_1$  de la courbe d'intersection est l'image d'un point  $P'_1$  du cercle par une dilatation parallèle à un diamètre fixe du cercle et de rapport  $\frac{|PS|}{|PM|}$ .

## VOLUMES ET AIRES

L'enseignement du calcul des aires et des volumes est une occasion privilégiée pour pratiquer la géométrie dans l'espace. Cette problématique peut être abordée d'une manière « naïve » comme l'a fait CAVALIERI au XVII<sup>e</sup> siècle ou même déjà ponctuellement ARCHIMÈDE. Pour convaincre le lecteur de cela, nous proposons dans ce chapitre, pour le calcul des aires et des volumes, une organisation théorique possible et qui, en outre, suggère une organisation didactique. Nous établissons ici des résultats relatifs aux volumes de solides tels que pyramide, cône, sphère, et aux surfaces de solides tels que cône et sphère.

### 1 Le principe de Cavalieri, pourquoi, comment ?

#### 1.1 Quelques faits intrigants

Commençons par citer quelques formules connues ; leur analyse permettra ensuite d'en déduire des faits intrigants.

On sait que le volume d'une pyramide ou d'un cône de base  $B$  et de hauteur  $h$  est égal à  $\frac{1}{3} \times (Bh)$ . Comparons cette formule avec celle du volume d'un prisme ou d'un cylindre de même base et même hauteur, à savoir  $Bh$ . On observe que le volume d'une pyramide vaut  $\frac{1}{3}$  du volume d'un prisme de même base et de même hauteur, que le volume d'un cône vaut  $\frac{1}{3}$  du volume du cylindre de même base et même hauteur. Comment expliquer ce rapport  $\frac{1}{3}$  ?

On sait que le volume d'une sphère de rayon  $r$  vaut  $\frac{4}{3}\pi r^3$ . Écrivons cette formule sous la forme  $4 \times (\frac{1}{3}\pi r^2 r)$  ou sous la forme  $\frac{1}{3} \times (\pi(2r)^2 r)$ . Observons que

- la formule  $4 \times (\frac{1}{3}\pi r^2 r)$  nous fait penser au volume quadruple d'un cône de hauteur  $r$  et de rayon  $r$  ;
- la formule  $\frac{1}{3} \times (\pi(2r)^2 r)$  nous fait penser à un cône de hauteur  $r$  et dont la base a pour rayon le diamètre  $2r$  de la sphère.

La formule qui donne l'aire d'une sphère de rayon  $r$  est  $4\pi r^2$  ; cette aire est quatre fois plus grande que l'aire du grand cercle.

La formule  $4\pi r^2$  est aussi celle de l'aire latérale du cylindre de hauteur  $2r$  et de même rayon  $r$  que celui de la sphère. Comment est-il possible que l'aire de la sphère soit la même que l'aire latérale du cylindre de même rayon, bien que cela ne semble pas être vrai ?

Terminons par citer le résultat étonnant établi par ARCHIMÈDE à propos de la sphère et du cylindre circonscrit à la sphère.

*Le rapport du volume du cylindre au volume de la sphère est le même que le rapport de l'aire totale du cylindre à l'aire de la sphère. Ce rapport vaut  $3/2$ .*

Dans l'organisation théorique proposée ci-après, nous abordons ces questions en les traitant au départ à la manière des géomètres grecs, c'est-à-dire d'abord en termes de rapports, pour aller ensuite jusqu'aux formules. Nous pensons ainsi éclairer le lecteur sur les raisons profondes de ces résultats étonnants.

## 1.2 Équidécomposabilité des surfaces et des solides

Dans le chapitre 4, on a comparé des aires de figures planes en s'appuyant sur leur équidécomposabilité. Dans cette section, nous évoquons quelques résultats théoriques sur l'équidécomposabilité des polyèdres et les limites de la méthode d'équidécomposabilité. Notre source est M. GRÉGOIRE [1992].

Dans le cas des figures planes les plus communes, comme par exemple les polygones, la méthode d'équidécomposabilité des figures de même aire s'appuie sur une propriété élémentaire des aires, à savoir :

*Deux figures planes qui sont décomposables en un même jeu de figures plus petites, ont une même aire.*

On peut se poser la question réciproque : sachant que deux figures sont de même aire, sont-elles équidécomposables ? En 1832, le mathématicien hongrois F. BOLYAI a démontré que :

*Si deux polygones ont la même aire, ils peuvent être décomposés en les mêmes figures polygonales en nombre fini.*

Dans le cas des figures planes délimitées par des courbes, de telles décompositions ne sont plus possibles. L'exemple le plus connu est celui du cercle et du carré de même aire. Le problème correspondant s'appelle la quadrature du cercle. Il n'a pas de solution par équidécomposition.

Dans le cas des polyèdres, l'égalité des volumes n'est pas une condition suffisante pour assurer l'équidécomposabilité. En effet, en 1900, le mathématicien allemand MAX DEHN a démontré qu'un tétraèdre régulier n'est pas équidécomposable avec un tétraèdre rectangle et isocèle de même volume et qu'il existe une infinité de paires de tétraèdres non équidécomposables. Ce même mathématicien a formulé et démontré une condition nécessaire pour l'équidécomposition de deux polyèdres. Cette condition s'exprime en fonction des angles dièdres et des longueurs des arêtes. Les figures 10 et 11 montrent deux autres tétraèdres de même volume et qui ne sont pas équidécomposables : les tétraèdres *A E F D* et *A C E F*.

En 1965, le mathématicien suisse J. P. SYDLER a démontré que la condition de DEHN est suffisante.

La condition de DEHN est rarement satisfaite par deux pyramides de même volume. Il est donc impossible en général de décomposer une pyramide en un nombre fini de polyèdres pour recomposer une nouvelle pyramide ou un polyèdre de volume connu. Ainsi, pour calculer le volume d'une pyramide, il faut faire appel à d'autres méthodes. Parmi celles-ci se trouve une méthode appelée *principe de CAVALIERI*.

## 1.3 Principe de Cavalieri

Au XVII<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens ont inventé une méthode particulière pour mesurer des aires et des volumes. Il s'agit de la méthode des indivisibles, qui a été traitée en 1635 par BONAVENTURA CAVALIERI dans son ouvrage « La géométrie des indivisibles ». Les indivisibles de CAVALIERI sont obtenus par découpage d'une figure par des droites parallèles ou d'un solide par des plans parallèles.

Les indivisibles de CAVALIERI d'un polygone sont des segments parallèles obtenus comme intersections du polygone avec des droites parallèles, les indivisibles d'un parallélépipède sont, toujours chez CAVALIERI, des parallélogrammes égaux à la base et situés dans des plans parallèles à celle-ci, les indivisibles d'un cylindre sont des cercles situés dans des plans parallèles à la base, les indivisibles d'une pyramide sont des triangles semblables au triangle de la base et situés dans des plans parallèles à la base.

CAVALIERI utilise les indivisibles pour formuler le principe qui permet de comparer des aires ou des volumes. Cette comparaison s'appuie sur la notion de rapport de grandeurs.

#### LE PRINCIPE DE CAVALIERI

*Soient deux surfaces dans un plan et toutes les droites parallèles à une droite donnée. Si chacune de ces droites détermine dans les deux surfaces des segments de même longueur ou de longueurs dans un même rapport, les surfaces ont respectivement même aire ou des aires dans ce même rapport.*

*Soient deux solides et tous les plans parallèles à un plan donné. Si chacun de ces plans détermine dans les deux solides des sections de même aire ou dont les aires sont dans un même rapport, les solides ont même volume ou des volumes dans ce même rapport.*

Dans le cas des aires des polygones, le principe de CAVALIERI peut être confronté avec la méthode d'équidécomposabilité.

Prenons pour exemple un rectangle et un parallélogramme de même base et de même hauteur. D'une part, nous savons qu'ils sont équidécomposables (voir chapitre 4). D'autre part, si les bases de deux parallélogrammes sont alignées comme le montre la figure 1, alors nous pouvons observer que chacune des droites parallèles aux bases détermine dans les deux parallélogrammes les segments de même longueur.

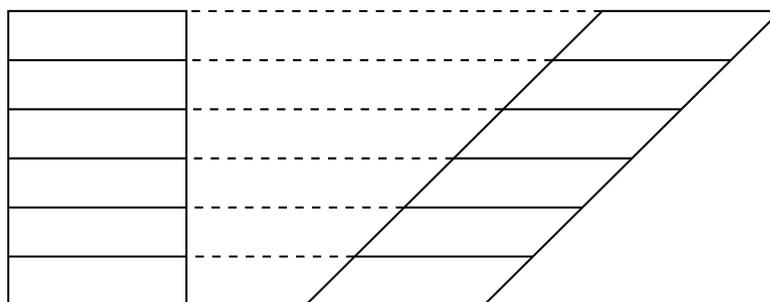


Fig. 1 : Un rectangle et un parallélogramme

Le même rapprochement entre les deux méthodes peut se faire dans le cas de deux triangles de même base et de même hauteur. D'une part, de tels triangles sont équidécomposables ; d'autre part, si leurs bases sont alignées comme sur la figure 2, alors chacune des droites parallèles à la droite des bases détermine dans les deux triangles des segments de même longueur.

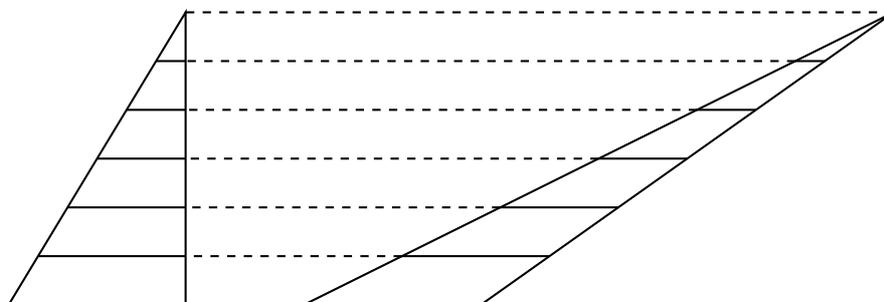


Fig. 2 : Deux triangles de même base et de même hauteur

Dans le cas des volumes, pour amener le principe de CAVALIERI à l'évidence, on imagine des expériences faisant appel à nos intuitions.

- On considère deux solides creux qu'on peut remplir d'eau, posés sur un plan horizontal. On suppose qu'à chaque niveau, leurs sections ont une même aire. Ainsi, lorsqu'on les remplit, la petite quantité d'eau ajoutée à chaque niveau pour faire monter un peu celui-ci, est la même dans chacun des solides. Il en résulte qu'au total, on verse la même quantité d'eau dans les deux solides, et par conséquent le volume de l'un est égal au volume de l'autre. Une variante de cette expérience consiste à verser simultanément, dans les deux récipients, de l'eau sortant de deux robinets dont le débit est le même. A chaque moment, les niveaux d'eau dans les deux récipients sont les mêmes.
- On considère un solide obtenu par empilement de feuilles de papier (figure 3). En le déformant par une poussée exercée sur le tas de feuilles, on obtient un autre solide vu comme un autre empilement des mêmes feuilles de papier. Les volumes des deux tas sont les mêmes.



Fig. 3 : Deux tas de feuilles

- On considère un cylindre obtenu par empilement de pièces de monnaies. En le déformant par une poussée exercée sur le tas de pièces, on obtient un autre solide (figure 4). Les volumes des deux tas de pièces sont les mêmes.



Fig. 4 : Trois tas de pièces

Les figures 3 et 4 suggèrent les deux propositions suivantes.

*Deux parallélépipèdes de même base et de même hauteur ont même volume.*

*Deux cylindres de même base et de même hauteur ont même volume.*

Le principe de CAVALIERI permet de les établir de la manière suivante.

Quant à la première proposition, considérons un parallélépipède posé sur un plan horizontal. D'une part, toute section du solide par un autre plan horizontal est un parallélogramme isométrique à la base. Considérons ensuite deux parallélépipèdes de même base et de même hauteur posés sur un même plan horizontal, par exemple l'un droit et l'autre oblique. Toute section de l'un et de l'autre par un plan horizontal quelconque donne deux parallélogrammes isométriques à la base, donc de même aire. Le principe de Cavalieri permet de conclure que les parallélépipèdes ont le même volume.

D'autre part, on peut prouver que deux parallélépipèdes de même base et de même hauteur sont équidécomposables. Un exemple particulièrement simple de cela est donné par les deux parallélépipèdes  $ABCDEFGH$  et  $ABCDLMNK$  de la figure 5.

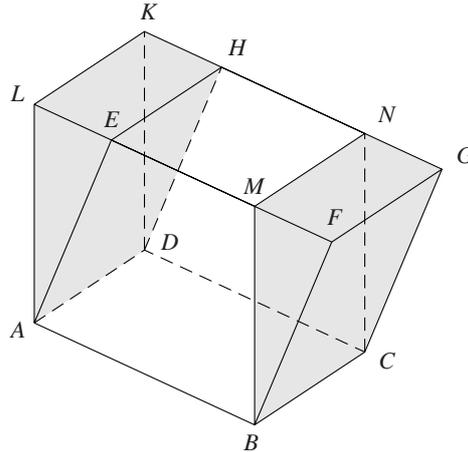


Fig. 5 : Deux parallélépipèdes équivalents par décomposition

Quant à la deuxième proposition, considérons un cylindre de base circulaire. Posons-le sur un plan horizontal. Alors toute section par un autre plan horizontal est un cercle isométrique au cercle de la base. Si ensuite nous plaçons sur le même plan un autre cylindre de même base et de même hauteur, alors toute section des deux cylindres par un plan horizontal donne deux cercles isométriques à celui de la base, donc isométriques entre eux. On conclut que les deux cylindres ont le même volume. De même pour un solide non cylindrique construit sur une base circulaire et tel que ses sections par des plans parallèles à la base soient des cercles isométriques à la base : son volume est égal au volume du cylindre de même hauteur et de même base.

Dans le cas des cylindres de même base et de même hauteur, par exemple l'un droit et l'autre oblique, nous ne pouvons plus nous appuyer sur leur équidécomposabilité, car celle-ci n'est pas possible.

## 2 Comparer des volumes

Dans cette section, nous faisons référence aux notions ou aux propriétés suivantes :

- la notion de rapport de deux grandeurs et de proportion entre quatre grandeurs ;
- le théorème de PYTHAGORE en termes d'aires ;
- le théorème suivant : tout cercle est au carré qui lui est circonscrit dans le rapport  $\frac{\pi}{4}$  ;
- la propriété de THALÈS dans le plan.

### 2.1 Comparer les volumes de pyramides et de prismes

#### PROPOSITION 1

*Deux pyramides de même hauteur et de même base polygonale (ou bases polygonales isométriques) sont de même volume.*

Avant d'établir ce résultat, étudions d'abord la nature d'une section plane quelconque d'une pyramide de base polygonale par un plan parallèle à la base. Cette section est homothétique au polygone de la base, et donc ses angles sont égaux respectivement à ceux du polygone de la base (figure 6). Comme, en plus, les sommets du polygone de la section plane sont situés sur des arêtes de la pyramide issues de son sommet, par la propriété de THALÈS, tous ces sommets divisent ces arêtes

dans le rapport des distances au sommet du plan de la section et du plan de la base. Ce rapport est aussi le rapport d'homothétie dans l'espace entre le polygone de la base et le polygone de la section.

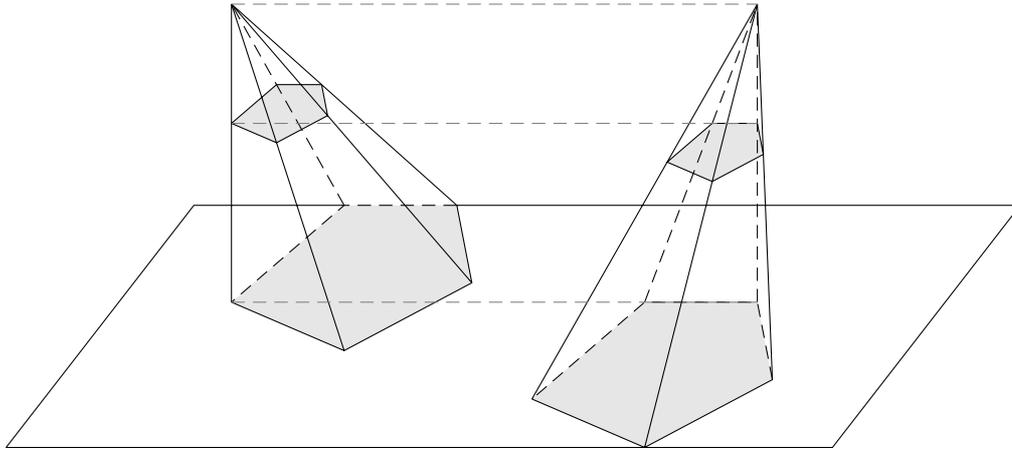


Fig. 6

Considérons maintenant deux pyramides de même hauteur et de même base polygonale. Plaçons-les sur un plan horizontal. Les polygones de section par un plan horizontal quelconque sont homothétiques aux polygones de bases, avec le même rapport d'homothétie. Ces polygones ont donc même aire. Par le principe de CAVALIERI, les volumes des pyramides sont égaux aussi.

Passons maintenant à une nouvelle proposition.

PROPOSITION 2

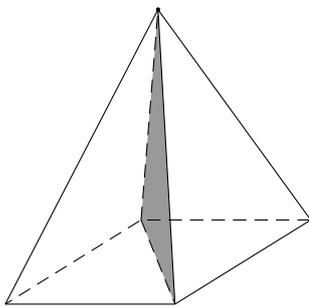


Fig. 7

*Toute pyramide ayant pour base un parallélogramme est constituée de deux tétraèdres de même volume.*

Cette proposition est la conséquence de la proposition 1. En effet, le plan qui passe par le sommet de la pyramide et par une diagonale de la base, coupe la pyramide en deux tétraèdres de même hauteur et de même base triangulaire (figure 7).

PROPOSITION 3

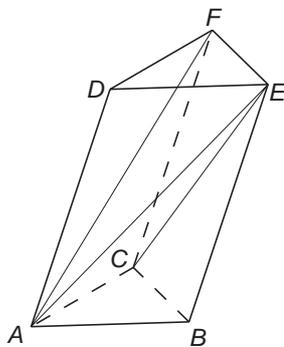


Fig. 8

*Tout prisme à base triangulaire peut être décomposé en trois pyramides à base triangulaire de même volume.*

Ce résultat a été déjà établi par EUCLIDE (III<sup>e</sup> siècle av. J.-C.) La figure 8 montre un prisme à base triangulaire.

Les figures 9, 10, 11 montrent une décomposition du prisme  $ABCDEF$  en trois pyramides à base triangulaire :  $ABCE$ ,  $AEFD$  et  $ACEF$ .

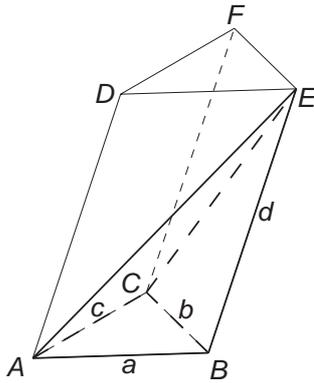


Fig. 9

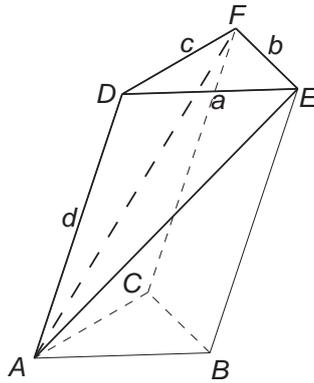


Fig. 10

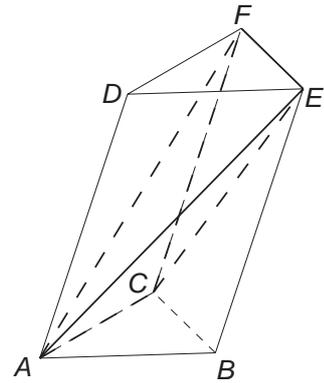


Fig. 11

Les pyramides  $ABCE$  et  $AEFD$  ont une même hauteur et des bases isométriques. D'après la proposition 1, elles ont même volume.

Les pyramides  $ABCE$  et  $ACEF$  peuvent être considérées comme obtenues à partir de la section de la pyramide  $ABEFC$  par le plan  $ACE$ . D'après la proposition 2, ces pyramides à base triangulaire ont même volume.

Ainsi, les trois pyramides  $ABCE$ ,  $AEFD$  et  $ACEF$  qui constituent le prisme ont même volume. Cela signifie que le volume de chacune d'elles vaut  $\frac{1}{3}$  du volume du prisme.

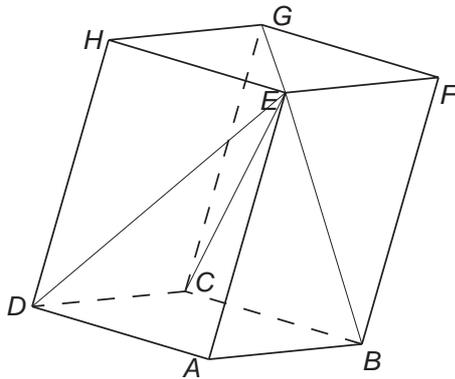


Fig. 12

PROPOSITION 4

Tout parallélépipède peut être décomposé en trois pyramides de même volume.

La figure 12 montre un parallélépipède  $ABCDEFGH$ .

Les figures 13, 14, 15 montrent une décomposition du parallélépipède en trois pyramides ayant le même sommet, chacune ayant pour base une face du parallélépipède :  $EABCD$ ,  $EBCGF$  et  $ECGHD$ .

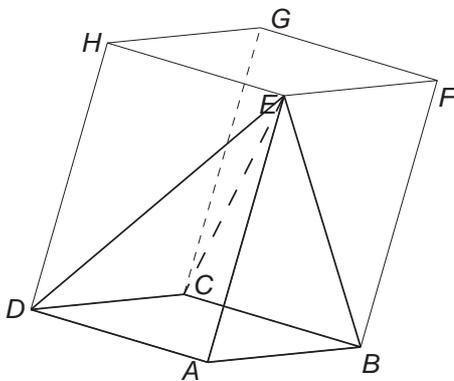


Fig. 13

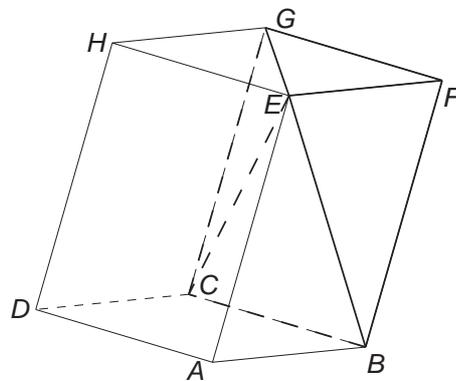


Fig. 14

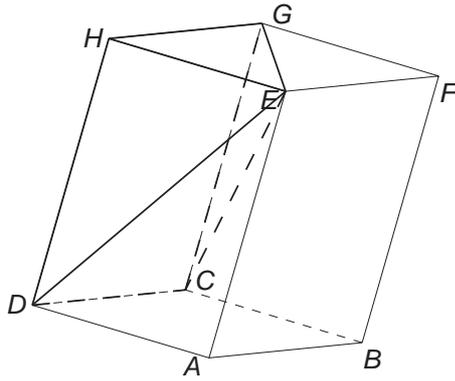


Fig. 15

Chacune de ces trois pyramides peut être décomposée, à son tour, en deux pyramides à base triangulaire et de même volume, comme dans la proposition 2 :

- la pyramide  $EABCD$  en les pyramides  $EABD$  et  $EBCD$ ,
- la pyramide  $EBCGF$  en les pyramides  $EBGF$  et  $EBCG$ ,
- la pyramide  $ECGHD$  en les pyramides  $EDGH$  et  $EDCG$ .

Les pyramides  $EABD$ ,  $EFGB$  et  $EDGH$  (figures 16, 17, 18) sont de même hauteur, car toutes les trois sont « coincées » entre les deux plans horizontaux  $ABCD$  et  $EFGH$ . Elles ont pour bases des triangles  $ABD$ ,  $EFB$  et  $EHG$ , tous les trois situés dans des plans horizontaux. Ces bases sont isométriques. Ainsi, en vertu de la proposition 1, ces pyramides ont même volume.

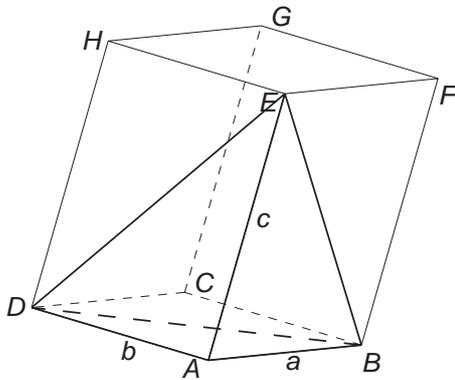


Fig. 16

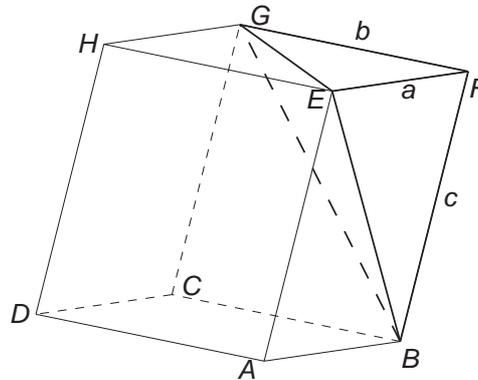


Fig. 17

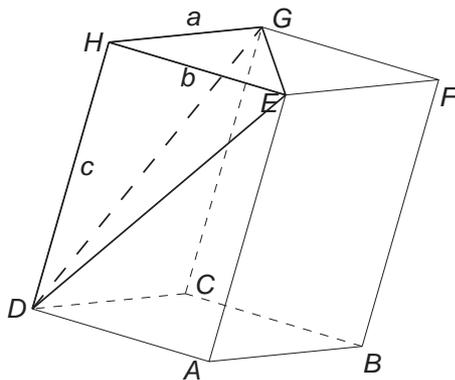


Fig. 18

Il en résulte que les six pyramides à base triangulaire sont de même volume et donc les trois pyramides ayant pour bases des faces du parallélépipède sont aussi de même volume. Ainsi le volume de chacune des trois pyramides dont le parallélépipède est constitué vaut  $\frac{1}{3}$  du volume du parallélépipède.

PROPOSITION 5

*Toute pyramide à base triangulaire peut être logée dans un prisme à base triangulaire de volume trois fois plus grand que celui de la pyramide.*

Donnons-nous une pyramide à base triangulaire. La figure 19 montre une des possibilités pour la loger dans un prisme de même base et de même hauteur. Elle est l'une des trois pyramides de la

décomposition possible du prisme en trois pyramides de même volume évoquée à la proposition 3. Ainsi, le volume d'un prisme est trois fois plus grand que celui d'une pyramide de même base triangulaire et de même hauteur.

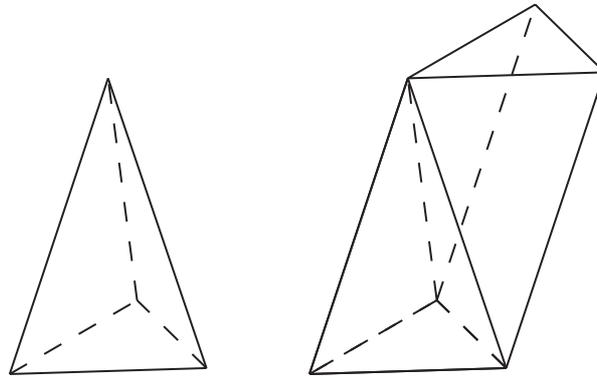


Fig. 19

## PROPOSITION 6

*Toute pyramide dont la base est un parallélogramme peut être logée dans un parallélépipède de volume trois fois plus grand que celui de la pyramide.*

Donnons-nous une pyramide ayant pour base un parallélogramme. La figure 20 montre l'une des possibilités pour la loger dans un parallélépipède de même base et de même hauteur. Elle est l'une des trois pyramides de la décomposition possible du parallélépipède en trois pyramides de même volume évoquée à la proposition 4. Ainsi, le volume d'un parallélépipède est trois fois plus grand que le volume d'une pyramide de même base et de même hauteur.

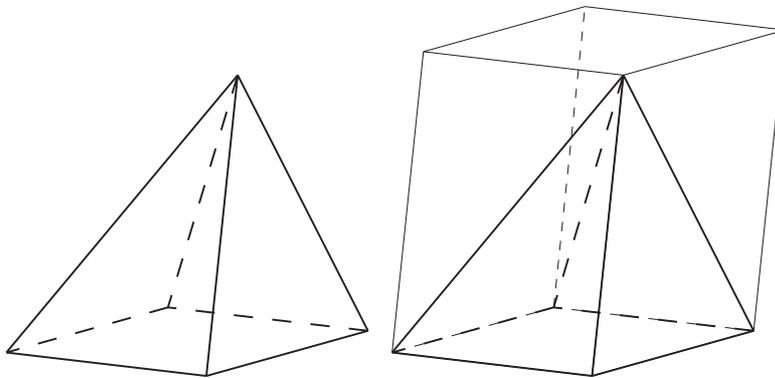


Fig. 20

## PROPOSITION 7

*Toute pyramide ayant pour base un quadrilatère quelconque peut être logée dans un prisme de volume trois fois plus grand que celui de la pyramide.*

Donnons-nous une pyramide à base quadrilatérale (figure 21). Décomposons-la en deux pyramides à bases triangulaires par le plan passant par son sommet et une diagonale de la base. Chaque pyramide à base triangulaire ainsi obtenue peut être logée dans un prisme à base triangulaire de volume trois fois plus grand que le sien. Ce prisme est de même base et de même hauteur que la pyramide (figure 21). Ainsi, lorsqu'on réunit les deux prismes correspondant respectivement à chacune des deux pyramides à base triangulaire de départ, on obtient un prisme à base quadrilatérale

qui contient la pyramide donnée. Le volume de ce prisme est trois fois plus grand que celui de la pyramide.

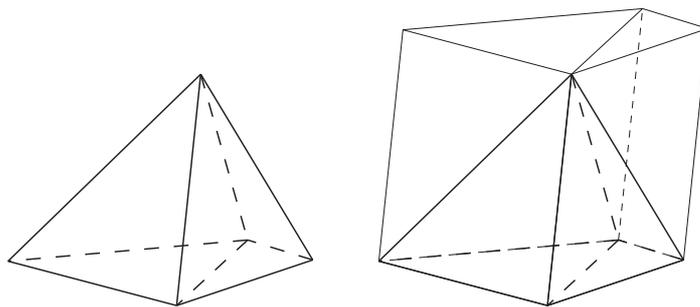


Fig. 21

Remarquons que lorsque la base d'une pyramide est un polygone quelconque, alors le procédé est analogue ; on décompose la pyramide donnée en pyramides à bases triangulaires, à chacune d'elles on associe un prisme de mêmes base et hauteur, on réunit tous ces prismes en un seul dont la base et la hauteur sont les mêmes que celles de la pyramide donnée. Comme le volume de chaque composante de cette pyramide vaut  $\frac{1}{3}$  du volume du prisme associé, on conclut que le volume de la pyramide donnée vaut  $\frac{1}{3}$  du volume du prisme associé. On considère ici qu'il est possible de trianguler tout polygone.

## 2.2 Comparer les volumes de cônes et de cylindres

### PROPOSITION 8

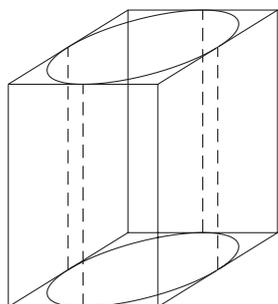


Fig. 22

*Considérons un cylindre quelconque à base circulaire et inscrivons-le dans un parallélépipède à base carrée et de même hauteur. Le rapport de leurs volumes est égal au rapport de leurs bases, qui ne dépend pas du rayon du cylindre.*

Plaçons les deux solides sur un plan horizontal (figure 22). Toute section du premier et du second par un plan horizontal quelconque donne respectivement un carré et un cercle inscrit dans ce carré. Le rapport des aires de ces sections est constant. D'après le principe de Cavalieri, le rapport des volumes du cylindre et du parallélépipède est égal au rapport des bases.

### PROPOSITION 9

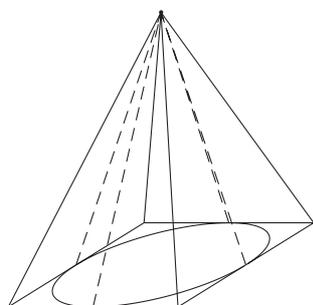


Fig. 23

*Le rapport des volumes d'un cône à base circulaire et d'une pyramide à base carrée circonscrite au cône est le même que le rapport des volumes du cylindre de même rayon et même hauteur et du parallélépipède à base carrée circonscrit au cylindre.*

Considérons un cône quelconque à base circulaire et inscrivons-le dans une pyramide à base carrée et de même sommet. Plaçons les deux solides sur un plan horizontal (figure 23).

Toute section du premier et du second par un plan horizontal quelconque donne respectivement un carré et un cercle inscrit dans ce carré. Le rapport des aires de ces sections est constant. D'après le principe de CAVALIERI, le rapport des volumes du cône et de la pyramide est égal à ce rapport. D'après la proposition 8, ce rapport est égal au rapport des volumes du cylindre de même rayon et du parallélépipède à base carrée dans lequel le cylindre est inscrit.

La proposition suivante est la conséquence immédiate des propositions 6, 8 et 9.

PROPOSITION 10

*Le rapport des volumes d'un cône et d'un cylindre de même base et de même hauteur est égal au rapport des volumes de la pyramide et du parallélépipède à base carrée dans lesquels ils sont respectivement inscrits (figures 24 et 25). Ce rapport vaut  $\frac{1}{3}$ .*

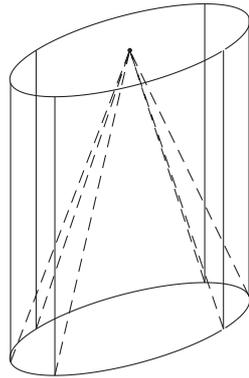


Fig. 24

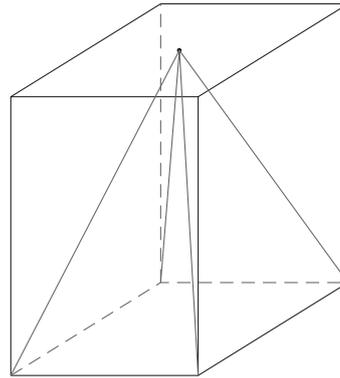


Fig. 25

Le rapport  $\frac{1}{3}$  mis en évidence à l'occasion des comparaisons des volumes d'une pyramide et d'un prisme de même base et de même hauteur, ou d'un cône et d'un cylindre de même base et de même hauteur, peut être considéré comme étant aussi remarquable que le rapport  $\pi$  de l'aire d'un cercle et de son diamètre, même si, en tant que nombre,  $\pi$  pose plus de problèmes que  $\frac{1}{3}$ .

### 2.3 Comparer les volumes d'une demi-sphère, d'un cône inscrit et d'un cylindre circonscrit à la demi-sphère

PROPOSITION 11

*Considérons une demi-sphère et un cône, tous deux inscrits dans un même cylindre comme cela est suggéré à la figure 26. Alors le volume de la demi-sphère est égal à la différence entre le volume du cylindre et le volume du cône.*

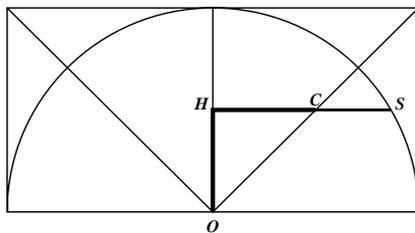


Fig. 26

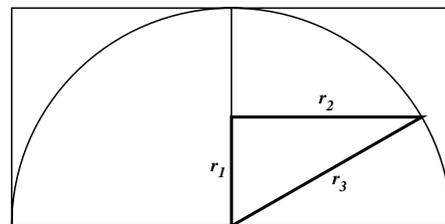


Fig. 27

Plaçons les trois solides sur un même plan horizontal, le cône étant posé sur sa pointe. Comparons les aires des cercles obtenus comme leurs sections par un plan horizontal quelconque. Notons par  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  les rayons des sections respectives du cône, de la sphère et du cylindre.

Étant donné que le rayon du cône est égal à sa hauteur, le rayon de la section du cône est égal à la hauteur du plan de section au-dessus du plan horizontal (figure 26).

Le rayon du cylindre est également celui de la demi-sphère. Il en résulte que ce rayon, à savoir  $r_3$ , est égal à l'hypoténuse du triangle rectangle représenté à la figure 27.

Doublons tous les côtés de ce triangle ; nous obtenons un nouveau triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont les diamètres  $d_1$  et  $d_2$  des sections du cône et de la sphère et dont l'hypoténuse est le diamètre  $d_3$  de la section du cylindre (figure 28). Par le théorème de PYTHAGORE en terme d'aires, on a que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés.

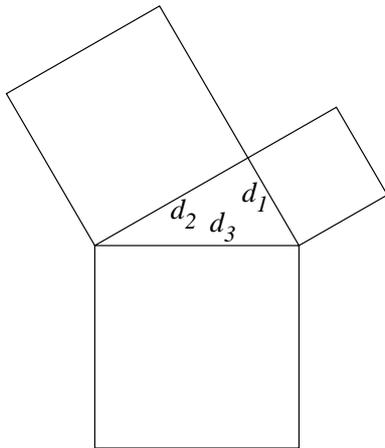


Fig. 28

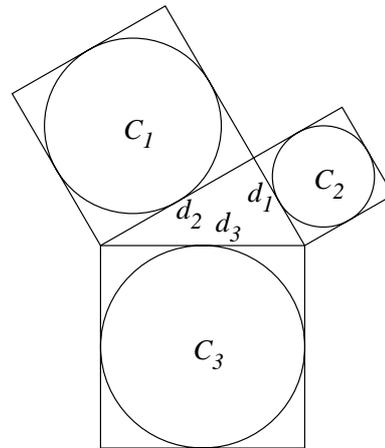


Fig. 29

Le raisonnement qui suit est inspiré par celui de GALILÉE [1665].

Considérons trois cercles, chacun inscrit dans un des trois carrés. C'est ce que représente la figure 29. Le rapport des aires d'un carré et du cercle qui y est inscrit est constant. Le théorème de PYTHAGORE s'étend ainsi aux aires des cercles ; la somme de l'aire du cercle de rayon  $r_1$  et de l'aire du cercle de rayon  $r_2$  est égale à l'aire du cercle de rayon  $r_3$ . Or, l'aire du cercle de rayon  $r_1$  est celle de la section du cône, l'aire du cercle de rayon  $r_2$  est celle de la section de la sphère et l'aire du cercle de rayon  $r_3$  est celle de la section du cylindre.

À partir de ce qui précède, on obtient que, pour n'importe quel plan horizontal, l'aire de la section du cylindre est égale à la somme de l'aire de la section du cône et de l'aire de la section de la sphère.

En d'autres termes, pour tout plan horizontal, l'aire de la section de la sphère (cercle de rayon  $r_2$ ) est égale à l'aire de la couronne de rayons  $r_1$  ( $= |HC|$ ) et  $r_3$ . Cette couronne est une section plane du solide qu'on obtient à partir du cylindre quand on en enlève le cône. Or, le volume de ce solide est égal à la différence du volume du cylindre et du volume du cône.

Par le principe de CAVALIERI, le volume de la demi-sphère est égal au volume de ce nouveau solide, et donc il est égal à la différence du volume de cylindre et du volume de cône.

#### CONCLUSION 1

*Le volume d'une demi-sphère est égal à deux fois le volume du cône dont les rayon et hauteur sont égaux au rayon de la demi-sphère. Le volume de la sphère de même rayon est égal à quatre fois le volume du même cône.*

En effet, c'est la conséquence immédiate du fait que le volume de la demi-sphère est égal à la différence du volume de cylindre et du volume de cône dont les rayon et hauteur sont égaux au rayon de la demi-sphère et du fait que le volume du cylindre est égal à trois fois le volume du cône considéré.

#### CONCLUSION 2

*Le rapport des volumes d'une sphère et du cylindre circonscrit à la sphère est égal à  $\frac{2}{3}$ .*

Cette conclusion est immédiate, car ce rapport est celui du volume de la demi-sphère et du cylindre circonscrit à la demi-sphère.

### 3 Calculer des volumes

Dans cette section, nous traduisons en termes de formules les résultats des sections précédentes. Pour cette raison, cette section se situe au-delà de la géométrie naturelle telle que nous l'avons conçue ici.

Partons pour cela des formules suivantes, dans lesquelles les unités d'aire et de volume sont celles qui dérivent naturellement de l'unité de longueur :

- l'aire du rectangle de hauteur  $a$  et de base  $b$  est  $ab$  ;
- le volume du parallélépipède rectangle de dimensions  $a$ ,  $b$  et  $c$  est  $abc$  ; le volume du parallélépipède de base  $B$  et de hauteur  $h$  est  $Bh$ .

Ces formules sont établies aisément pour des mesures entières ou rationnelles. On les admet ici pour des mesures irrationnelles. On a en outre que

- l'aire du cercle de rayon  $r$  est  $\pi r^2$  ;
- le rapport des aires d'un cercle et d'un carré circonscrit au cercle est  $\frac{\pi}{4}$  ;
- la longueur de la circonférence de rayon  $r$  est  $2\pi r$ .

Ces formules une fois admises, on en tire plusieurs autres, à savoir les suivantes.

*Le volume d'un parallélépipède dont la base mesure  $B$  unités d'aire et dont la hauteur mesure  $h$  unités de longueur, est égal à  $Bh$ .*

Considérons deux parallélépipèdes de même hauteur avec des bases de même aire, posés sur un plan horizontal. D'après le principe de CAVALIERI, ils ont même volume. Si, en plus, l'un de ces parallélépipèdes est un parallélépipède rectangle, alors son volume est égal à  $abc$ , et peut aussi s'écrire  $Bh$ . Il en résulte que le volume de l'autre parallélépipède, supposé quelconque, est aussi égal à  $Bh$ .

*Le volume d'un prisme de base triangulaire  $B$  et de hauteur  $h$ , est donné par la formule  $Bh$ .*

En effet, le volume d'un prisme à base triangulaire vaut la moitié du volume du parallélépipède de même hauteur et dont la base est un parallélogramme constitué de deux triangles isométriques à la base du prisme.

*Le volume d'une pyramide à base triangulaire de base  $B$  et de hauteur  $h$ , vaut  $\frac{1}{3}Bh$ .*

Par la proposition 5, à toute pyramide à base triangulaire, on peut associer un prisme de même base, de même hauteur et de volume triple. On a donc que

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3}(Bh) = \frac{1}{3}Bh.$$

Le volume d'une pyramide dont la base  $B$  est un parallélogramme et dont la hauteur est égale à  $h$  vaut  $\frac{1}{3}Bh$ .

Par la proposition 6, à toute pyramide dont la base est un parallélogramme, on peut associer un parallélépipède de même base, de même hauteur et de volume triple. D'où

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3}Bh.$$

Le volume d'une pyramide dont la base  $B$  est un quadrilatère quelconque et dont la hauteur égale  $h$  vaut  $\frac{1}{3}Bh$ . Par la proposition 7, à toute pyramide dont la base est un quadrilatère quelconque, on peut associer un prisme de même base, de même hauteur et de volume triple. D'où

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3}Bh.$$

Le volume d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est égal à  $\pi r^2 h$ .

Considérons un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . Il peut être inscrit dans un parallélépipède de même hauteur et dont la base carrée a pour côté  $2r$ . Leurs volumes sont dans un rapport égal à  $\frac{\pi}{4}$ . D'où

$$V_{\text{cylindre}} = \frac{\pi}{4}(2r)^2 h = \frac{\pi}{4}4r^2 h = \pi r^2 h.$$

Le volume  $V$  d'un cône de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est égal à  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ .

Considérons un cône de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . Il peut être inscrit dans un cylindre de même rayon et de même base. D'après la proposition 12, le rapport de leurs volumes est égal à  $\frac{1}{3}$ . D'où

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{3} 4r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Le volume  $V$  d'une sphère de rayon  $r$  vaut  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

Dans une configuration comme celle de la figure 26, le volume du solide obtenu en retirant le cône du cylindre est égal à  $\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$ . Ce volume est égal à celui de la demi-sphère. D'où on a

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

## 4 Aires de solides

### 4.1 Aire latérale d'un cône

Dans cette section, nous allons calculer l'aire latérale du cône par deux raisonnements différents. Le premier s'appuie sur des calculs élémentaires d'aires de secteur de disque et sert à rendre plausible le second, qui est inspiré par le principe de CAVALIERI.

PROPOSITION 12

L'aire latérale d'un cône droit de rayon  $r$  et de génératrice  $\ell$  et l'aire de sa base sont dans un rapport égal à  $\frac{\ell}{r}$ .

Premier raisonnement.

La surface d'un cône est une surface développable, c'est-à-dire qu'« elle peut, à partir d'un coup de ciseaux idéal, être mise à plat, (...) être appliquée sur un plan » (S. Baruk [1992]). La portion du plan correspondant à la surface du cône est un secteur de disque de rayon  $\ell$  et d'arc de longueur  $2\pi r$  (figures 30 et 31).

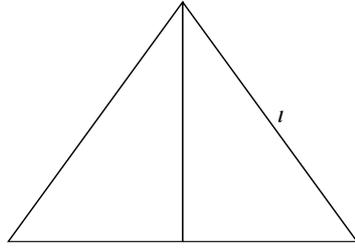


Fig. 30

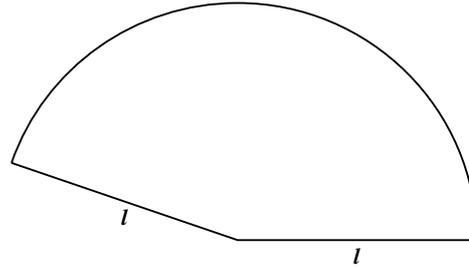


Fig. 31

Dans la suite du raisonnement, nous nous appuyons sur le résultat suivant.

*Les aires de deux secteurs circulaires d'un même cercle et les arcs correspondants sont des grandeurs proportionnelles.*

Ainsi, l'aire  $A$  de la surface du cône comparée à l'aire du cercle est dans le même rapport que la longueur de l'arc du secteur au périmètre du cercle. On a donc

$$\frac{A}{\pi \ell^2} = \frac{2\pi r}{2\pi \ell}$$

ou, après simplification,

$$\frac{A}{\pi \ell} = r.$$

Il en résulte que

$$A = \pi r \ell.$$

De là, on tire que le rapport entre l'aire de la surface latérale et celle de la base du cône est égal à  $\frac{\ell}{r}$ .

Second raisonnement.

La comparaison de l'aire latérale du cône et de l'aire de sa base conduit au paradoxe suivant. La surface latérale d'un cône peut être vue comme composée de l'assemblage des cercles découpés par tous les plans parallèles à sa base. A chacun de ces cercles, on peut associer sa projection sur la base du cône et réciproquement. L'assemblage des cercles ainsi projetés compose le disque de la base. Ainsi les deux surfaces, celle du disque et celle du cône, sont composées des mêmes éléments indivisibles. On pourrait alors penser que l'aire du disque de la base est la même que l'aire latérale du cône. Or, visiblement, cela n'est pas le cas. Ce paradoxe est dû à TACQUET, enseignant jésuite d'Anvers, qui l'a imaginé pour refuser la méthode des indivisibles de CAVALIERI.

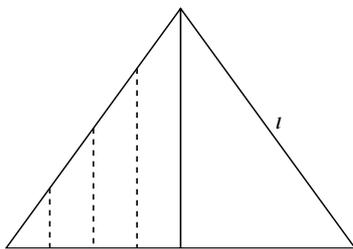


Fig. 32

Il a été étudié récemment par M. SCHNEIDER [1988]. Cette dernière a proposé à des élèves le problème suivant : *Considérons la surface d'un cône droit comme l'assemblage des cercles qu'y découpent tous les plans parallèles à sa base. Associons à chacun de ces cercles sa projection sur la base du cône. Les cercles ainsi projetés composent le disque de base. Quelle relation y a-t-il entre l'aire latérale du cône et celle de sa base ?* La figure 32 illustre cela sur une vue en coupe.

Dans sa thèse, M. Schneider a relaté les faits suivants. « Certains élèves remarquent qu'il y a autant de cercles sur la base que sur la surface latérale et ils concluent que les deux aires sont égales :

si l'on met ces circonférences l'une dans l'autre dans un même plan, on devrait obtenir la même valeur que si on empilait ces cercles l'un sur l'autre pour former la surface latérale du cône ?

Certains autres s'étonnent que cela conduise à un résultat incorrect, car l'aire latérale ne peut [...] pas égaler l'aire de la base, puisqu'elle varie avec la génératrice.

Certains encore affirment que le résultat est faux, car dans le raisonnement, on ne respecte pas les conditions d'application du principe de CAVALIERI.

Pour expliquer le paradoxe, quelques élèves remarquent qu'il y a plus de points sur l'arête que sur le rayon et donc plus de cercles sur la surface latérale, que l'espacement des cercles sur la base diffère de l'espacement des cercles sur le cône ou que deux cercles de l'aire latérale enserrent une bande plus large sur le cône que leurs correspondants dans la base ou que dans le raisonnement on ne tient pas compte d'une certaine notion d'« épaisseur » des indivisibles circulaires. »

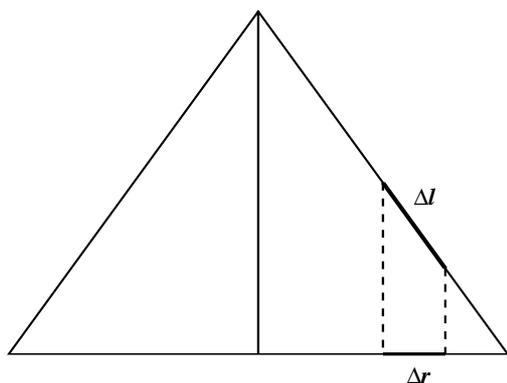


Fig. 33

En effet, lorsqu'on dessine des cercles également espacés sur la surface du cône (voir par exemple l'espacement  $\Delta l$  sur la figure 33), les cercles correspondants situés dans la base sont aussi espacés également, mais les espaces sont différents (voir par exemple  $\Delta r$  sur la figure 33). L'espacement des cercles sur la surface est  $\Delta l/\Delta r$  fois plus large que celui des cercles sur la base. Comme le rapport  $\Delta l/\Delta r$  est égal au rapport  $\frac{\ell}{r}$ , il est donc plausible de penser que le rapport  $\frac{\ell}{r}$  est aussi celui de deux aires, l'aire latérale notée  $S$  et l'aire de la base  $\pi r^2$  (figure 33). On obtiendrait ainsi l'égalité des rapports

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\ell}{r}.$$

Ce résultat est le même que celui obtenu par le premier raisonnement. Ainsi, la propriété intuitive selon laquelle « le rapport de l'espacement des cercles est égal au rapport des aires des surfaces considérées », gagne en plausibilité. La géométrie naturelle, on le voit, se pratique aussi dans le registre heuristique.

## 4.2 Aire d'une sphère

La formule  $\frac{1}{3}4\pi r^3$  du volume d'une sphère de rayon  $r$  établie dans la section précédente, suggère que le volume d'une sphère est égal au volume d'un cône de hauteur  $r$  et dont la base a pour rayon  $2r$ . On peut écrire en effet

$$\frac{1}{3}4\pi r^3 = \frac{1}{3}(4\pi r^2)r = \frac{1}{3}\pi(2r)^2r.$$

Cette formule suggère aussi que la sphère peut être vue comme un solide qui n'est pas très différent d'un solide composé d'un très grand nombre de pyramides de hauteurs égales au rayon de la sphère et dont les bases semblent « paver » la surface de la sphère.

On peut donc retenir la conjecture suivante.

CONJECTURE : L'aire de la sphère de rayon  $r$  est égale à  $4\pi r^2$ .

Nous allons confirmer cette conjecture par un raisonnement de type infinitésimal. Il s'agit de s'appuyer sur l'approximation d'une petite tranche de la surface de la sphère par la surface d'un cône tronqué (figures 34 et 35). Ce raisonnement est aux confins de la géométrie naturelle, car il cache un passage à la limite.

## PROPOSITION 13

*L'aire d'une sphère est égale à l'aire latérale du cylindre circonscrit.*

On considère une sphère de rayon  $r$  et le cylindre qui lui est circonscrit. On coupe les deux solides par deux plans parallèles à la base du cylindre et distants de  $h$  comme indiqué sur la figure 35. On considère ensuite le cône tronqué engendré par la rotation du segment  $QT$ , tangent en  $P$  à la sphère, autour de l'axe du cylindre. Dans la suite, on s'appuie sur l'intuition selon laquelle l'aire latérale de la tranche de la sphère est aussi proche que l'on veut de l'aire latérale du cône tronqué, pour autant que les plans parallèles soient suffisamment proches l'un de l'autre.

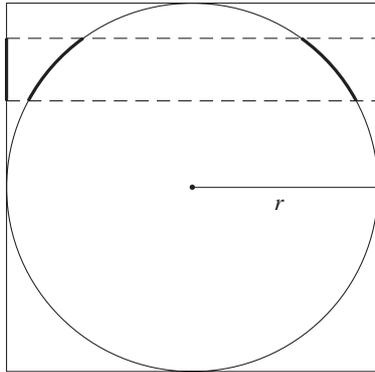


Fig. 34

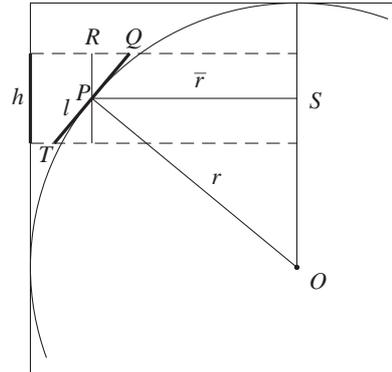


Fig. 35

À partir de la similitude des triangles  $OPS$  et  $QPR$ , on obtient l'égalité des rapports

$$\frac{|OP|}{|PS|} = \frac{|QP|}{|PR|}.$$

Comme on a  $|OP| = r$ ,  $|PR| = \frac{h}{2}$ , et qu'on convient de noter  $|PS| = \bar{r}$ ,  $|QP| = \frac{\ell}{2}$ , la proportion établie s'écrit ainsi

$$\frac{r}{\bar{r}} = \frac{\ell}{h},$$

ou encore

$$rh = \bar{r}\ell,$$

ce qui entraîne

$$2\pi rh = 2\pi r\ell.$$

Par ailleurs, on peut montrer, comme on l'a fait pour l'aire latérale du cône, que l'aire latérale du cône tronqué s'écrit  $2\pi\bar{r}\ell$ . Ceci étant, comme l'aire latérale du cône tronqué approxime une tranche de l'aire de la sphère, on se convainc que l'aire de la sphère égale l'aire latérale du cylindre. D'où la conclusion suivante.

*L'aire de la sphère de rayon  $r$  est égale à*

$$S = 4\pi r^2.$$

Remarquons que ce résultat confirme la conjecture. Sa plausibilité est donc renforcée ainsi que la confiance qu'on peut avoir dans le nouveau type d'arguments utilisés ici et des intuitions qui sont derrière ces arguments.

La conclusion suivante s'appuie sur la Conclusion 2 de la section 2.3 et elle termine cette section.

CONCLUSION

*Le rapport de l'aire de la sphère et de l'aire totale du cylindre circonscrit à la sphère est égal au rapport de leurs volumes et ce rapport est égal à  $\frac{2}{3}$ .*

## 5 Les moyens élémentaires d'étude des aires et des volumes

Révoquons pour conclure quelques approches qui suffisent pour construire une première théorie des notions d'aire et de volume. On remarquera que le principe de CAVALIERI pour les aires planes n'est pas relevé ci-dessous, car il n'est pas indispensable. Pour la classe des figures élémentaires planes étudiées habituellement, on suppose vraies les propriétés suivantes.

Propriétés d'équidécomposabilité.

- Si une figure en contient une autre, alors la figure qui est constituée de leur différence a pour aire la différence des aires de ces deux figures.
- Deux figures isométriques (superposables) sont de même aire (propriété de congruence).
- Si on compose sans recouvrement une figure avec un nombre fini de figures données, alors son aire est égale à la somme des aires des composantes.

Pour mesurer des aires, on s'appuie en outre sur les propriétés suivantes.

Mesure des aires.

- L'aire d'un rectangle de base  $b$  et de hauteur  $h$  est égale à  $b \times h$ .
- L'aire d'un polygone peut être mesurée à l'aide d'une surface unitaire, comme par exemple un carré.
- La mesure d'une aire, en fonction de l'unité choisie, est un nombre positif (la mesure des aires est non négative).

En plus des propriétés ci-dessus, on recourt à des passages à la limite intuitifs, principalement pour les aires délimitées par des courbes et qui ne sont pas équidécomposables avec des polygones. Ces passages à la limite portent sur des suites d'aires polygonales.

Venons-en maintenant aux volumes. Les principes suivants suffisent pour construire une première théorie des volumes. On remarquera que le principe de CAVALIERI permet de ne pas recourir aux congruences des solides et qu'il court-circuite aussi les passages à la limite.

Pour la classe des solides élémentaires étudiés habituellement, on suppose vraies les propriétés suivantes.

Propriétés d'équidécomposabilité.

- Si un solide contient un autre solide, alors le solide qui est constitué de leur différence a pour volume la différence des volumes de ces deux solides.
- Si un solide est composé par la réunion d'un nombre fini de solides disjoints deux à deux, alors son volume est égal à la somme des volumes qui le composent.

Mesure des volumes.

- Le volume d'un parallélépipède droit de base  $B$  et de hauteur  $h$  est égal à  $Bh$ .
- Le nombre associé à un volume, en fonction de l'unité choisie, est un nombre positif (la mesure de volume est non-négative).

À ce lot de propriétés, on ajoute le principe de CAVALIERI qui permet d'amener le problème de calcul des volumes à celui des aires. Il est formulé ici d'une manière plus générale :

- Considérons deux solides et tous les plans perpendiculaires à une droite donnée. Si toute section plane d'un des solides par un de ces plans est plus petite que la section par le même plan de l'autre solide, alors le volume du premier solide est plus petit que le volume du second.

APOSTOL [1967] formule des propriétés analogues et il les considère comme axiomes pour définir le concept d'aire et le concept de volume. C'est en s'appuyant sur ces propriétés qu'il met en place le calcul intégral des aires et des volumes.