CREM

Nivelles, le 31 août 2002

VERS UNE GÉOMÉTRIE NATURELLE

Recherche N^o 72/01 financée par le Ministère de la Communauté Française,
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique,
Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation
et du Pilotage interréseaux

Rapport de fin d'année, deuxième partie

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.

5 rue Émile Vandervelde   B-1400 Nivelles   Belgique

Tél. +32–(0)67 21.25.27   Fax. +32–(0)67 21.22.02   Cpte 068-2179326-54

rouche@amm.ucl.ac.be

8

Monter et démont(r)er en géométrie dans l'espace

1 Introduction

> Le sentiment exprimé dans ce passage de votre lettre où vous me dites « plus je réfléchis sur toutes ces choses, plus je reconnais que les mathématiques forment une science expérimentale aussi bien que toutes les autres sciences ... » ce sentiment, dis-je, est aussi le mien.
>
> C. Hermite[1]

Ce texte résume les principales étapes d'un cours de géométrie dans l'espace destiné à des élèves de 16 à 18 ans. Son originalité réside dans le rôle qu'y joue la *réalisation* de figures géométriques à trois dimensions à l'aide d'un *jeu de construction.*

L'apprentissage de la géométrie dans l'espace

Dans l'apprentissage de la géométrie dans l'espace, trois types d'activités sont essentielles :

- des activités d'expérimentation, où l'élève construit, manipule et explore de véritables objets à trois dimensions ;
- des activités de représentation, où l'élève traduit ses observations et ses hypothèses en termes de figures planes ;
- des activités de structuration, où l'élève organise ses résultats en schémas déductifs.

Bien sûr, lorsqu'un élève résout un problème de géométrie, ces activités ne se succèdent pas dans l'ordre où on vient de les décrire ; au contraire, elles se mélangent, se bousculent, s'opposent même, et ne manquent pas de se reproduire plusieurs fois, dans un désordre apparent. Mais aucun de ces types d'activités ne peut être négligé dans un apprentissage sérieux

[1] Mathématicien français (1822-1901), à qui l'on doit des contributions remarquables en analyse et en algèbre, entre autres une formule de résolution générale de l'équation du cinquième degré, la démonstration de la transcendance du nombre e, etc. Suivant le témoignage de J. Hadamard, qui fût son élève, il semble qu'Hermite détestait la géométrie... La citation est extraite d'une lettre à L. Königsberger, datée de 1880.

de la géométrie dans l'espace. À terme, on peut d'ailleurs concevoir qu'un élève « voit dans l'espace » lorqu'il est capable de coordonner (de manière consciente) ses expériences concrètes concernant les figures de l'espace, ses représentations de ces figures, et les hypothèses et les raisonnements qu'il leur associe.

Monter et démonter…

Ce texte propose un ensemble de situations qui mettent en scène cette coordination des trois types d'activités, en insistant tout particulièrement sur le rôle de l'expérimentation, c'est-à-dire de la réalisation effective de maquettes associées à un problème géométrique donné. Cette expérimentation est ici rendue possible grâce à un jeu de construction appelé K'NEX®. Dans un contexte d'enseignement, les avantages qu'offre ce jeu méritent qu'on les détaille un peu :

- le montage et le démontage des objets sont faciles, les objets sont néanmoins bien rigides et résistants, très maniables, et ils peuvent évoluer et être modifiés suivant les besoins de la question qu'ils mettent en scène ;
- les grandeurs qui caractérisent les composants sont simples (les longueurs sont choisies dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1, et les angles sont multiples de 45°), on peut réaliser des mesures sur une maquette, et plusieurs tailles ou couleurs d'objets sont envisageables ;
- ces contraintes de longueurs et d'angles sont aussi sources de développements intéressants (si tous les angles sont multiples de 45°, on dispose de pièces permettant de réaliser des assemblages sous un angle dièdre de 90°, d'où la possibilité de construire de nouveaux angles, …), de plus on dispose de rotules qui, avec un peu d'ingéniosité, rendent possible la construction de n'importe quel angle, plan ou dièdre, etc.

Ces multiples caractéristiques sont mises en valeur dans la résolution des problèmes retenus ici.

Mais malgré toutes ces qualités, il ne faut pas croire que le recours à K'NEX® soit la seule manière de faire de la géométrie expérimentale. D'autres jeux de constructions géométriques existent[2] et peuvent rendre d'excellents services, et les pailles et les tuyaux de pipes, ainsi que les bandes de papier tressées ou les développements (pour les polyèdres), … restent très profitables, et démocratiques de surcroît. Par ailleurs, un des objectifs d'un cours de géométrie dans l'espace consiste à apprendre aux élèves à se libérer des maquettes. Et en fait le dessin, et même le raisonnement formel à lui tout seul, devraient permettre à l'élève de réaliser *à terme* toutes les expériences dont il rêve !

[2] *VOLUMES À CONSTRUIRE* chez Fernand Nathan, *POLYDRON* de Polydron International, *MULTIPOLY* chez Philip and Stacey, etc. Mais ces jeux sont en général orientés vers la construction de polyèdres, et semblent moins polyvalents que K'NEX®.

... prépare à démontrer

Aborder la géométrie dans l'espace au départ de constructions effectives d'objets peut induire des développements théoriques qui s'écartent un peu des sentiers battus.

Par exemple, la plupart des constructions réalisables en K'NEX® sont dérivées de la géométrie du cube. Ces constructions amènent progressivement l'élève à étudier des figures de plus en plus élaborées *relativement* à certaines autres figures plus élémentaires, considérées comme *figures de référence*, telles que le cube. Elles servent effectivement de référence tant pour la représentation plane que pour le raisonnement déductif : une figure un peu complexe, mais inscrite dans une autre figure bien connue, s'imagine et se conçoit mieux, et ses propriétés, d'abord dissimulées, se découvrent ensuite à partir de celles de la figure-mère.

Monter – et démonter ! – des objets réels contribue donc à les faire voir d'une autre manière, précisément parce qu'on les a conçus et construits : on les connaît quasiment « de l'intérieur ». Et si on veut poursuivre dans cette manière de voir et de faire de la géométrie dans l'espace, il est presque naturel de ne pas attacher une présentation traditionnelle des résultats théoriques à des expériences qui ne peuvent la produire qu'indirectement.

Ainsi, les axiomes fondamentaux de la géométrie dans l'espace sont habituellement énoncés en termes d'objets premiers, non définis, et illimités[3], tels que les droites et les plans. Or, dès qu'on travaille sur des constructions réelles ou sur leurs représentations, les figures *limitées* (telles que segments, triangles, quadrilatères, ...) sont bien plus naturelles que les figures illimitées. Y a-t-il moyen de construire des synthèses théoriques en privilégiant autant que possible de telles figures limitées ? Il semble bien que oui, et on verra que ce mode d'approche suggère des problématiques inattendues et intéressantes.

D'autre part, l'observation de maquettes et l'étude des problèmes qui s'y rapportent mettent en évidence des hypothèses de travail ou des propriétés pour lesquelles la nécessité d'une démonstration ne s'impose pas d'emblée. Ainsi un cube regorge de rectangles « évidents » au sens où il ne semble pas nécessaire de prouver tout de suite qu'il s'agit bien de rectangles. En mathématiques, il est essentiel que de telles évidences ne soient pas passées sous silence, mais bien reconnues et *formulées* explicitement comme hypothèses de travail, leur statut pouvant alors être remis en question ultérieurement au fur et à mesure des besoins. Ces hypothèses de travail reconnues comme telles sont qualifiées ici de *principes*. Une bonne part de ce qu'il s'agit de réaliser dans une synthèse théorique consiste donc d'abord à mettre ces principes judicieusement à jour et à les exploiter, puis, pas à pas, à les faire dériver d'un nombre de plus en plus restreint de principes premiers et de propriétés démontrées. Une reconstruction par élagages successifs demande peut-être plus de temps que les exposés classiques, mais elle met immanquablement en valeur une raison d'être majeure d'une théorie mathématique.

[3] À l'exception évidemment des points !

Des questions hors de propos ?

Lorsqu'un enseignant organise son cours au départ de situations-problèmes, il doit savoir qu'il rencontrera des questions auxquelles ni ses élèves, ni lui-même peut-être n'arriveront à répondre, et que ce n'est pas nécessairement l'indice d'un défaut de préparation ou d'un échec, bien au contraire.

> Il existe une tendance naturelle dans l'enseignement des mathématiques à suivre l'ordre logique et à expliquer toutes les techniques et toutes les réponses, avant de soulever les questions et de considérer les exemples, en supposant que les étudiants auront ainsi à leur disposition toutes les connaissances utiles pour y répondre le moment venu.
> Il vaut mieux parsemer le cours de questions intéressantes et mystérieuses, et d'exemples inexplicables, même si les étudiants, les professeurs ou qui que ce soit, n'est pas près d'y répondre. Le meilleur ordre psychologique d'apprentissage pour un sujet de mathématiques est bien souvent très différent de l'ordre strictement logique. En tant que mathématicien, nous savons que les questions sans réponses ne connaîtront jamais de fin. Au contraire, les étudiants conçoivent généralement les mathématiques comme une nourriture prête à être consommée, et qu'il leur faudra digérer en conséquence.
> Il nous faudrait présenter les mathématiques à nos étudiants d'une manière qui soit, à la fois plus intéressante et plus proche des situations réelles que les étudiants rencontreront dans la suite de leur existence, à savoir *sans réponse assurée*.
>
> W. P. Thurston[4]

La construction de maquettes (avec les contraintes propres à un jeu tel que K'NEX®), et les questions étudiées dans le texte, suggèreront souvent de *nouvelles* questions pour lesquelles les éléments de réponses ne seront pas (encore) disponibles, ou même carrément difficiles. Ces questions « hors de propos » n'en sont pas moins passionnantes ! Quelques-unes sont relevées dans le texte et brièvement discutées. Leur statut est celui de *prolongements possibles*, à revisiter plus tard, ou tout simplement de questions dont la vocation est de rester ouvertes. Évidemment, ces questions ne sont ni obligatoires, ni même appropriées à tous les élèves, et leur liste est naturellement incomplète. Elles ne sont mentionnées que pour renforcer cette ambiance d'une géométrie en train de se découvrir, de se faire ...

Juste pour voir !

Ce texte est donc une proposition d'enseignement de la géométrie *dans certaines figures fondamentales de l'espace*, fondée sur la construction effective de ces figures (le cube étant la plus simple d'entre elles) et des figures apparentées ou dérivées ; elle est bien *fondée* ainsi, au sens où les activités d'expérimentation *conditionnent* les activités de représentation et de structuration ultérieures.

[4] Mathématicien américain contemporain (1946 – ...), spécialiste de la géométrie en dimensions 2 et 3. La citation est un extrait (traduit) de *Mathematical Education* — Notices of the American Mathematical Society, 37 (1990), 844-850.

Évidemment, cette proposition n'achève en aucune manière l'enseignement de la géométrie dans l'espace : il reste d'autres portes à ouvrir, mais leurs charnières ne devraient plus trop grincer ! Ainsi, la *géométrie synthétique classique* étudie dès le début des objets plus abstraits que le cube, et structure leurs propriétés de manière plus exigeante (par exemple le parallélisme vient avant la perpendicularité, ...). Et ce mode de pensée est tellement performant qu'il n'est pas souhaitable de le négliger. Mais ce sera d'autant plus facile que la géométrie dans des figures (limitées) a été conçue comme une première approche des problèmes et des modes de raisonnement de la géométrie synthétique classique. Parallèlement, la *géométrie vectorielle* et la *géométrie algébrique des coordonnées et des équations* sont des disciplines qui se construisent tout de suite en termes de figures limitées de l'espace : le segment et le parallélogramme pour la géométrie vectorielle, le cube ou le prisme pour la géométrie des coordonnées et des équations. Et presque de par leur nature même, ces deux géométries sont inséparables l'une de l'autre, puisque tout prisme est un assemblage particulier de parallélogrammes. Encore une fois, la géométrie dans des figures (limitées) de l'espace prépare à de tels développements.

Et pour conclure, le contenu et l'objectif majeur de ce texte peuvent peut-être se résumer en une boutade : il ne s'agit que d'un essai, d'un exercice d'une ampleur inhabituelle, dans lequel on se risque à penser la géométrie un peu différemment, ... *juste pour voir* !

Avertissement

Les problèmes considérés dans la suite ne visent que les aspects les plus élémentaires de la géométrie dans l'espace (incidence, sections planes, débuts de la perpendicularité et du parallélisme), avec les synthèses et développements théoriques qui s'y rattachent ; d'autres sujets restent à aborder (méthodes synthétiques usuelles, transformations) ou l'ont déjà été (méthodes vectorielles ou algébriques), ailleurs ou partiellement, cf. G. Noël et al. [1997] et P. Tilleuil [2001]. Le texte se limite à l'essentiel, tant pour les activités d'expérimentation que pour celles de représentation et de structuration, sans détailler tous les développements méthodologiques auxquels ces activités peuvent donner lieu. Mais tout enseignant un peu sensible à l'apprentissage de la géométrie dans l'espace n'aura aucune peine à « boucher les trous »...

2 Les premières maquettes

De quoi s'agit-il ?

Les élèves construisent d'abord un cube à l'aide de pièces du jeu K'NEX®, et le représentent en projection parallèle. Ils construisent et représentent ensuite quelques pyramides et un octaèdre régulier.

Enjeux

Construire une figure à partir d'une figure-mère (le cube) ; découvrir et utiliser (pour reproduire un schéma de montage ou un dessin) quelques symétries d'une figure de l'espace.

De quoi a-t-on besoin ?

Certaines pièces du jeu K'NEX® ; la plupart d'entre elles sont reprises dans la figure 1 ci-dessous.

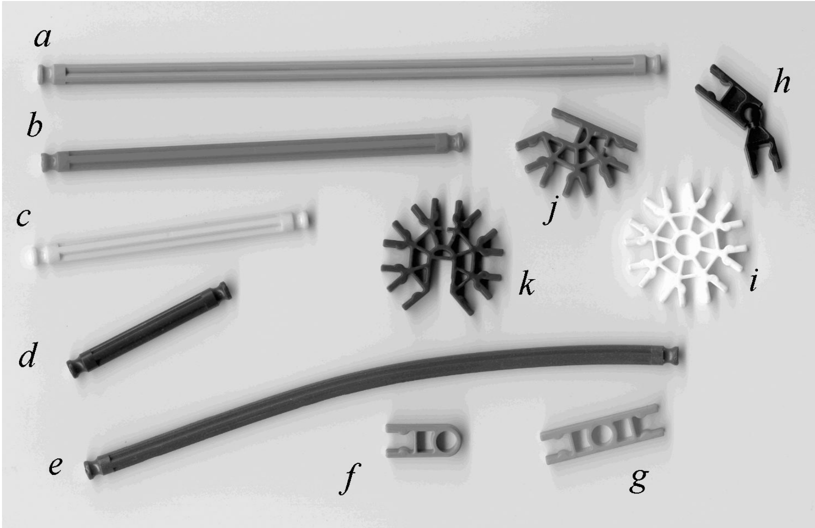

Fig. 1 : Quelques pièces utilisées dans ce chapitre.

Légendes de la figure 1 :

- a : baguette, ou tige (grise), d'approximativement 19,2 cm ;
- b : baguette, ou tige (rouge), d'approximativement 12,9 cm ;
- c : baguette, ou tige (jaune), d'approximativement 8,5 cm ;
- d : baguette, ou tige (bleu foncé), d'approximativement 5,4 cm ;
- e : baguette, ou tige (mauve), pliable, d'approximativement 18,8 cm ;
- f : demi-jonction ;
- g : jonction ;
- h : rotule ;
- i : étoile (complète) ;
- j : demi-connecteur ;
- k : connecteur complet.

Lorsqu'elles sont engagées dans des jonctions ou des connecteurs, les tiges sont successivement dans des rapports de $\sqrt{2}$ à 1.

2.1 La construction d'un cube

Comment s'y prendre ?

L'observation des maquettes (grues, voitures, ...) dans les boîtes de jeux K'NEX® montre immédiatement qu'il y a moyen de construire des objets à 3 dimensions.

> Question 1.
> Comment construire un cube en K'NEX® ?

Un assemblage fondamental

Cette activité est l'occasion de découvrir une des principales méthodes d'assemblage du jeu. On dispose pour cela de deux types d'éléments : le *connecteur complet* et le *demi-connecteur* (cf. les figures 2 et 3).

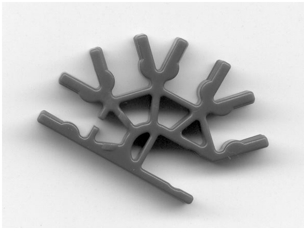

Fig. 2 : Un demi-connecteur.

Fig. 3 : Un connecteur complet.

Ces types de connecteurs peuvent s'emboîter l'un dans l'autre suivant leur encoche libre. Suivant les besoins, on peut assembler ainsi deux connecteurs complets (cf. la figure 4), un connecteur complet avec un demi-connecteur, ou deux demi-connecteurs.

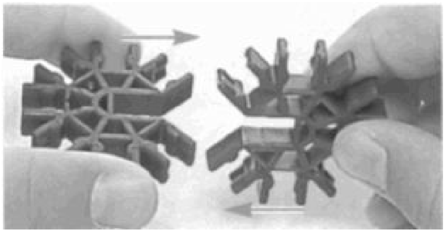

Fig. 4 : Assemblage de deux connecteurs complets.

Le résultat est une configuration où des angles multiples de 45° sont disponibles suivant deux plans perpendiculaires (cf. la figure 5).

Fig. 5 : Divers types de connecteurs, assemblés à 90°.

La construction d'un cube

La construction d'un cube est évidemment le B, A, BA de la construction de maquettes, et doit être réalisée par tous les élèves.

L'idée à la base de cette construction – et qui peut se généraliser pour la construction de la plupart des polyèdres – consiste à organiser le travail à partir de la disposition des angles adjacents en un sommet quelconque du cube. Comme il s'agit d'un assemblage de 3 angles droits adjacents deux-à-deux, il faut donc disposer en chaque sommet du cube d'un assemblage de connecteurs tels que celui décrit ci-dessus.

Dès lors, pour construire un cube en K'NEX®, il faut disposer de 12 baguettes de même longueur (donc de même couleur) pour les arêtes, et de 2×8 connecteurs (des demi-connecteurs ou des connecteurs complets conviennent pareillement), puisqu'un cube comporte 8 assemblages de 3 angles droits adjacents deux-à-deux (un par sommet).

En géométrie dans l'espace, l'assemblage de 3 angles droits adjacents deux à deux est souvent appelé un *trièdre trirectangle* ou plus simplement un *trièdre droit*.

La représentation d'un cube

La représentation d'un cube en projection parallèle est classique, et (théoriquement !) connue des élèves. Mais comme la grande majorité des dessins ultérieurs seront réalisés au départ du cube considéré comme « figure-mère », il convient de vérifier dès le début que les élèves ne rencontrent pas de difficultés à représenter un cube en projection parallèle (sinon, cf. par exemple le chapitre 7 de CREM [2001b]).

Lorsque les élèves réalisent leurs dessins sur des feuilles quadrillées, il peut être commode de partir de données communes à tous. Or, la projection parallèle d'un cube est entièrement déterminée par les coordonnées (planes) des projections A, B, C et D de 4 sommets du cube en configuration de trièdre droit. Par exemple, si dans la figure 6, l'origine est située en O et la feuille est quadrillée au demi-centimètre, et si

- les coordonnées du point A sont $(2;2)$,
- les coordonnées du point B sont : $(12;2)$,
- les coordonnées du point C sont $(5;4)$,
- les coordonnées du point D sont $(2;12)$,

on obtient une représentation d'un cube de 10 cm de côté avec deux faces parallèles en vraie grandeur (cf. la figure 7).

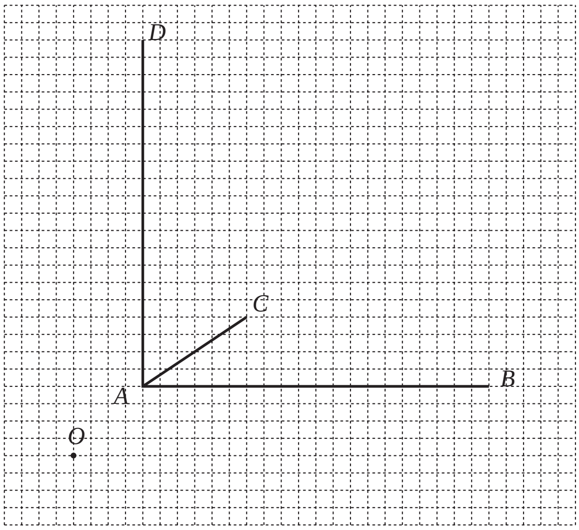

Fig. 6 : Une grille de construction...

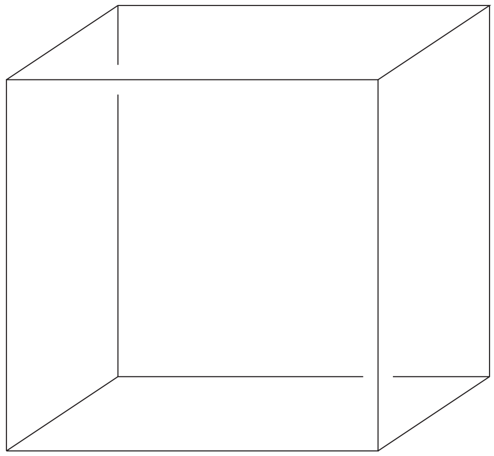

Fig. 7 : ... et le résultat.

Pareillement, si

- les coordonnées du point A sont $(4; 4)$,
- les coordonnées du point B sont $(12; 1,5)$,
- les coordonnées du point C sont $(10; 8,5)$,
- les coordonnées du point D sont $(4; 14)$,

on obtient une représentation du même cube avec seulement 4 arêtes parallèles en vraie grandeur : cf. les figures 8 et 9.

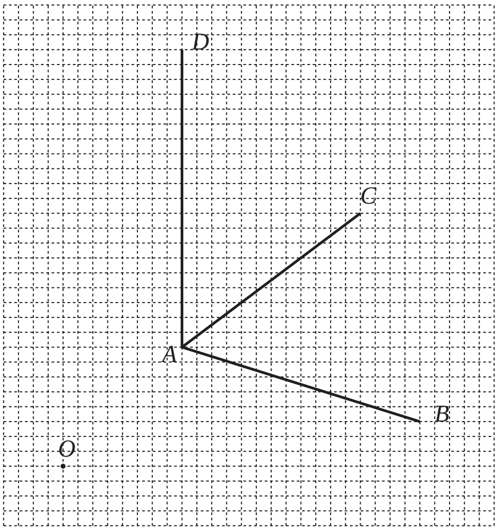

Fig. 8 : Une autre grille de construction...

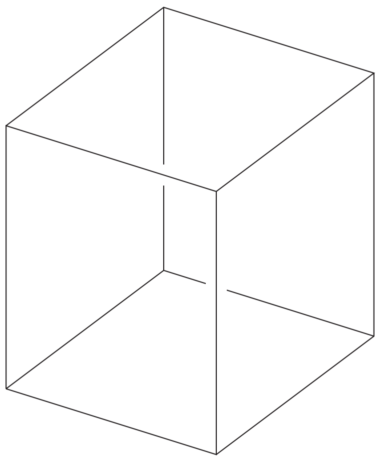

Fig. 9 : ... et le résultat.

En réalisant ces dessins, on observera qu'une telle représentation plane au départ d'un trièdre droit donné s'obtient exactement suivant le même

« schéma de montage » que celui du cube en K'NEX® : il suffit de reproduire le modèle de trièdre aux bons endroits et dans l'orientation appropriée !

2.2 Il n'y a pas que le cube...

Comment s'y prendre ?

Avec les pièces de K'NEX®, il y a moyen de construire beaucoup de figures qui ne sont pas des cubes. Dans un premier temps, il vaut peut-être mieux ne pas se lancer dans une exploration systématique de *toutes* les possibilités de construction de figures que le jeu permet de développer. On se limite ici à quelques figures de base, qui vont aider à assimiler les techniques de construction, et à préparer des situations dont l'intérêt se révèlera progressivement dans la suite.

Question 2.
Comment construire en K'NEX® :

- une (et même plusieurs) pyramide(s),
- une pyramide dont toutes les arêtes ont même longueur ?

Représenter ces figures, en précisant comment elles dérivent d'un cube.

Il est difficile de prévoir dans quel *ordre* la construction de pyramides peut se dérouler en classe. Ce qui suit n'a donc qu'un caractère... d'illustration !

Un angle inattendu

Dans un cube en K'NEX®, on peut construire les diagonales consécutives de faces carrées adjacentes, puisque le rapport des longueurs des baguettes (une fois assemblées) est de $\sqrt{2}$ à 1. Mais cela peut demander qu'on modifie l'orientation des connecteurs là où les diagonales en question doivent se rejoindre ; ces manipulations sont faciles à mettre en œuvre. On obtient ainsi une *pyramide trirectangle* (figure 10).

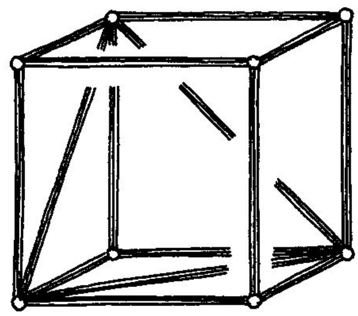

Fig. 10 : Une pyramide trirectangle dans un cube.

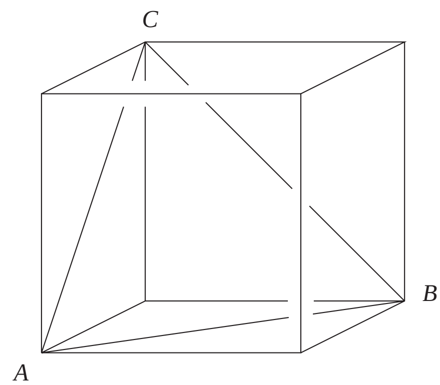

Fig. 11 : Le triangle équilatéral manifeste.

Cette construction est remarquable : elle fait apparaître un triangle équilatéral *manifeste* et *inattendu* !

En effet, le triangle ABC dans la figure 11 est manifestement équilatéral, puisque toutes les faces du cube étant isométriques, leurs diagonales sont évidemment *aussi* isométriques.

Mais de prime abord, il est assez inattendu de construire des angles de 60° à partir de l'assemblage de pièces déclinées chacune en multiples de 45° ; on se risquerait presque à écrire

$$45° \ll + \gg\ 45° = 60°.$$

Le « truc », c'est que l'angle de 60° ainsi construit n'est situé dans aucun des plans des connecteurs qui permettent de le construire, ce que l'insertion dans le cube fait voir immédiatement. Autrement dit, dans la pseudo-égalité $45° \ll + \gg\ 45° = 60°$, chacun des angles est situé dans des plans différents de celui des deux autres !

Il est intéressant de désolidariser ensuite cette pyramide du cube qui a permis de la construire.

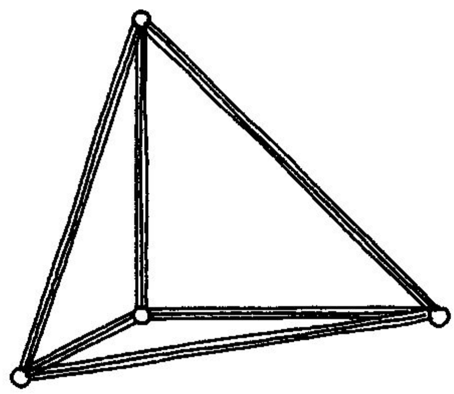

Fig. 12 : Une pyramide trirectangle sans son cube.

On obtient donc une pyramide à 4 faces (ou *tétraèdre*), dont 3 faces sont des triangles rectangles isocèles et 1 face est un triangle équilatéral. En ses 4 sommets, on observe respectivement 3 assemblages d'angles de 45°, 45° et 60° adjacents 2 à 2, et 1 assemblage en trièdre droit, hérité du cube original.

On peut alors proposer aux élèves de construire une pyramide trirectangle *sans* passer par la construction du cube « géniteur » (en ne leur fournissant que les pièces nécessaires à cette construction).

Deux grandes sœurs

Les élèves peuvent construire d'autres pyramides en K'NEX®, soit en les inscrivant dans un ou plusieurs cubes, soit par assemblage de pyramides trirectangles, soit peut-être encore autrement ...

Par exemple, en assemblant 2 pyramides trirectangles suivant une de leurs faces en forme de triangle rectangle isocèle, on obtient une nouvelle pyramide à 4 faces (ou *tétraèdre*).

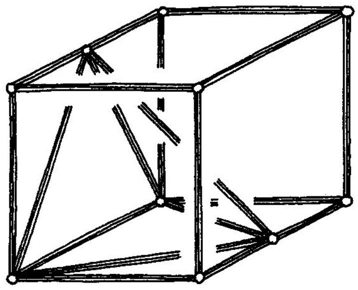

Fig. 13 : Une autre pyramide dans un double cube...

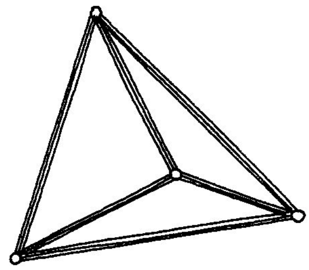

Fig. 14 : ... et sans son double cube.

Cette pyramide comporte 2 faces qui sont des triangles rectangles isocèles et 2 faces qui sont des triangles équilatéraux. En ses 4 sommets, on observe respectivement 2 assemblages d'angles de 45°, 45° et 60° adjacents 2 à 2, et 2 assemblages d'angles de 60°, 60° et 90° adjacents 2 à 2.

Pareillement, si on assemble 2 pyramides du type construit précédemment, suivant une de leurs faces en forme de triangle rectangle isocèle, on obtient encore une nouvelle pyramide, à 5 faces cette fois-ci. On obtient d'ailleurs la même figure en assemblant 4 pyramides trirectangles le long d'une même arête d'un angle droit. L'insertion de cette nouvelle pyramide dans un quadruple cube (qui est aussi le demi-cube de côté double) illustre ces modes de construction (cf. la figure 15).

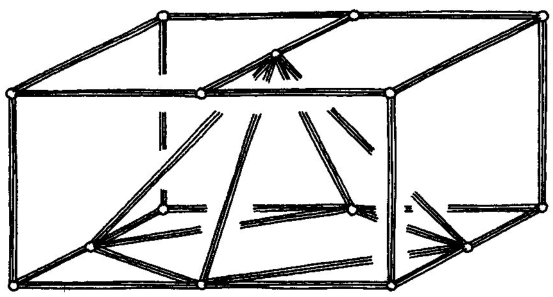

Fig. 15 : Une pyramide dans un demi-cube...

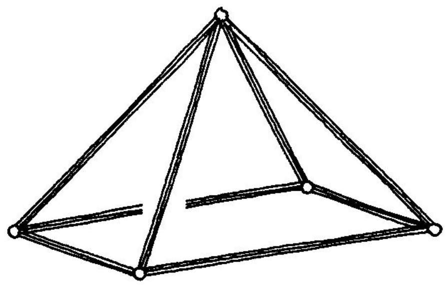

Fig. 16 : ... et sans le demi-cube.

Cette pyramide comporte 4 faces qui sont des triangles équilatéraux, et 1 face en forme de carré ; *toutes* ses arêtes ont donc la *même* longueur. En ses 4 sommets, on observe respectivement 4 assemblages d'angles de 60°, 60° et 90° adjacents 2 à 2, et – pour la première fois ! – 1 assemblage de 4 angles de 60° adjacents 2 à 2.

Ici aussi, on peut proposer aux élèves de construire directement ces pyramides, sans passer par les intermédiaires cubiques qui ont permis de les engendrer.

La représentation de ces nouveaux objets

Elle se réalise au départ d'un réseau de cubes convenablement agencés, en transférant sur le dessin le schéma de montage mis en œuvre avec les pièces de K'NEX®. La figure 17 ci-dessous montre un exemple achevé d'une telle représentation, au départ de la grille de construction de la figure 8.

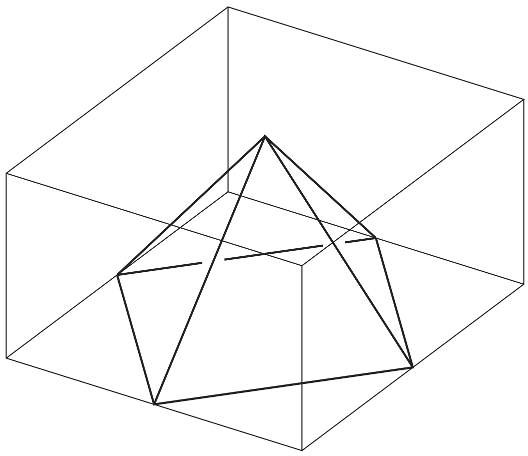

Fig. 17 : Une représentation plane d'une pyramide dont toutes les arêtes sont de même longueur.

Prolongement possible

PROBLÈME

Est-il possible de construire en K'NEX® d'autres pyramides que celles obtenues à l'issue de la question précédente ?

Quelques indications

C'est un problème élémentaire, mais un peu corsé, dans lequel les démonstrations sont essentiellement de nature combinatoire, puisqu'un nombre assez restreint – mais bien organisé – de vérifications permet d'en venir à bout !

Si on se limite aux pièces de type a, b, c, d (baguettes) et j, k (connecteurs) dans la figure 1, la réponse est-elle... oui, ou non ?

Voici quelques éléments permettant de le savoir.

• *Il n'y a pas moyen de construire avec ces pièces d'autres angles que les multiples entiers de 45° et de 60°* . Pour s'en convaincre, il suffit de construire tous les angles issus d'un assemblage de deux connecteurs complets (cf. la figure 4).

• *Les seuls triangles constructibles avec ces pièces sont les triangles rectangles isocèles et les triangles équilatéraux.* C'est une conséquence immédiate du résultat précédent.

• *Il n'y a pas moyen de construire avec ces pièces une configuration de 3 angles de 60° adjacents 2 à 2.* Il suffit – à nouveau – de construire *toutes* les configurations de 3 angles adjacents 2 à 2, issus d'un assemblage de 2 connecteurs complets. On retrouve exclusivement les configurations déjà obtenues, à savoir : $(45°, 45°, 60°)$, $(60°, 60°, 90°)$ et $(90°, 90°, 90°)$; en particulier, la configuration $(45°, 60°, 90°)$ se révèle impossible.

Par ailleurs, on a déjà eu l'occasion de vérifier qu'une configuration de 4 angles de 60° adjacents 2 à 2 est parfaitement réalisable avec les pièces retenues !

• *Il n'y a donc que 2 types de tétraèdres constructibles avec les types de pièces choisis, et aucun n'est régulier !* ... Et ils ont déjà été construits.

• *Qu'en est-il pour les pyramides dont la base est un polygone ayant plus que 3 côtés ?* On pourrait espérer que de tels polygones sont toujours décomposables en triangles constructibles, mais c'est malheureusement faux : un rectangle dont les côtés sont dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1 fournit un contre-exemple, puisque l'angle d'une diagonale avec un côté n'est pas constructible.

À titre documentaire, la pyramide de base $ABCD$ représentée dans la figure ci-dessous, telle que $|AD| = |BC| = |BE| = |EC| = 2$ et $|AB| = |CD| = |AE| = |ED| = \sqrt{2}$ est « presque » constructible. « Presque », car toutes les longueurs conviennent, mais les 3 angles adjacents en B (ou en C) sont alors égaux à 45°, 60° et 90°, ce qui n'est pas constructible.

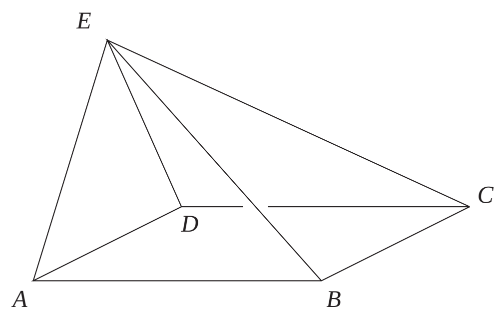

Fig. 18 : Cette pyramide n'existe pas ... en K'NEX.

Il reste donc à explorer toutes les pyramides dont la base est un polygone constructible avec les pièces retenues, et ayant au moins 4 et au plus 7 côtés. C'est une (petite) affaire de patience, qui achève de montrer pourquoi la réponse au problème posé est... oui, ou peut-être... non !?!

> Question 3.
> Comment construire un octaèdre régulier en K'NEX® ? Le représenter, en précisant comment il dérive d'un cube.

À ce stade des manipulations, une certaine habileté se développe et les solutions se dégagent vite.

Une étoile au cœur du cube

En assemblant deux des pyramides à 5 faces rencontrées dans la résolution de la question 2 suivant leur base carrée, on obtient l'octaèdre recherché. Il est formé de 8 triangles équilatéraux, et en chacun de ses 6 sommets, on observe le même assemblage de 4 angles de 60° adjacents 2 à 2.

Quelle que soit la manière dont on aborde cette construction, il faut essayer de la situer dans la suite des constructions précédentes et, ce faisant, on ne peut manquer de la situer relativement à un – ou plusieurs – cubes. Toutes les observations qu'on peut faire à cette occasion se résument dans la figure suivante. On construit un « grand » cube en y faisant figurer les deux médianes de chaque face carrée, ainsi que leur point d'intersection que l'on réalise par l'assemblage de deux connecteurs complets. On relie ensuite entre eux ces points d'intersection, pourvu qu'ils soient situés dans des faces adjacentes du cube. L'octaèdre devient ainsi la figure qui réunit (agréablement) les centres de symétrie des faces du cube ; sans entrer dans une définition technique, on peut dire que l'octaèdre est ainsi réalisé en tant que polyèdre *dual* du cube.

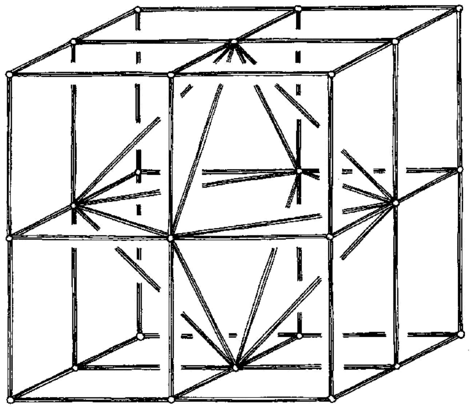

Fig. 19 : Une construction d'un octaèdre comme dual du cube.

Une représentation plane de l'octaèdre

Partant de cette dernière construction, il n'y a plus de grande difficulté à réaliser une représentation plane de l'octaèdre. La figure 20 ci-dessous montre une telle représentation, au départ de la grille de construction de la figure 8 ; ce n'est bien sûr que le « double » de la figure 17.

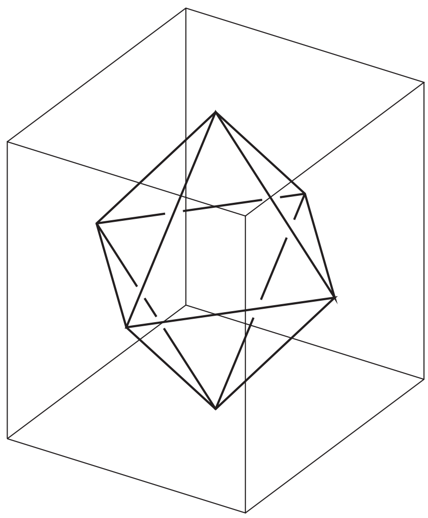

Fig. 20 : Une projection parallèle d'un octaèdre.

Prolongement possible

PROBLÈME

Lorsqu'on réalise un octaèdre comme polyèdre dual d'un cube, il « tient debout » parce que le cube qui permet de le construire est posé sur une de ses bases carrées. Sans ce cube, l'octaèdre ne tient évidemment pas tout seul en équilibre sur un de ses sommets. Comment représenter l'octaèdre naturellement, c'est-à-dire posé sur une de ses *faces* ?

Quelques indications

La première chose qui saute aux yeux, lorsqu'on pose l'octaèdre sur une de ses faces, c'est que la face opposée lui est parallèle et ensuite, qu'elle semble être dans la position de la face « au sol », *mais après une rotation de 60°* ! On reviendra plus loin sur tout ce qui peut encore être décrit et déduit de l'observation de cette position particulière[5], mais –pour le moment – comment ces observations aident-elles à *représenter* l'octaèdre ainsi posé sur une de ses faces ?

Ce n'est pas immédiat : en effet, lorsqu'on a posé l'octaèdre de cette manière, son « cube-mère » a accompagné le mouvement, et n'est plus du tout aussi utilement situé qu'auparavant ! En fait, il n'y a plus de cube immédiatement utile pour réaliser le dessin souhaité. Il faut donc chercher à représenter directement des triangles équilatéraux en projection parallèle et calculer (que faire d'autre ?) la distance qui sépare les faces opposées de l'octaèdre. À titre documentaire, le théorème de Pythagore permet de calculer cette distance δ en fonction – par exemple – de la longueur c du côté, ou du rayon R du cercle circonscrit à un des triangles équilatéraux ; on trouve

$$\delta = c\frac{\sqrt{3}}{3} = R\sqrt{2}.$$

On peut en déduire un procédé de construction (peu glorieux) de l'octaèdre posé sur une face.

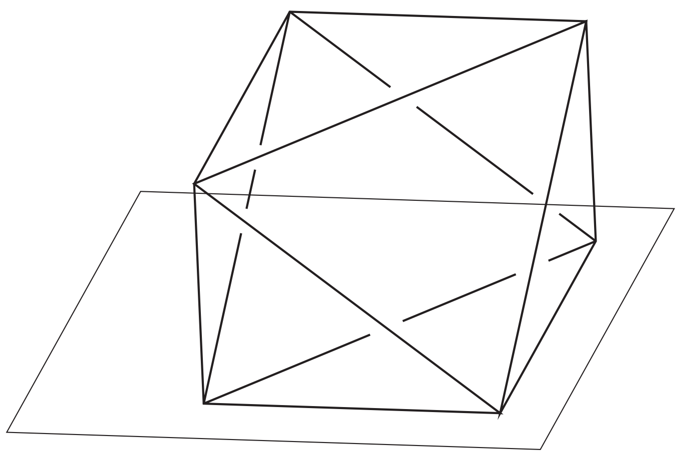

Fig. 21 : Une projection parallèle d'un octaèdre posé sur une face.

[5] L'octaèdre est ainsi l'exemple le plus simple de ce qu'on appelle un *antiprisme* !

De très belles représentations de l'octaèdre dans cette situation ont été réalisées par Léonard de Vinci (cf. L. Pacioli [1509]) ; on en trouvera ci-dessous deux reproductions.

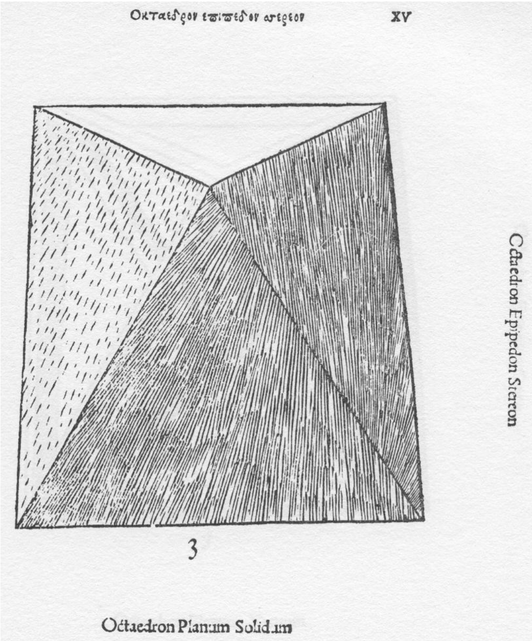

Fig. 22 : Un octaèdre plein posé sur une face.

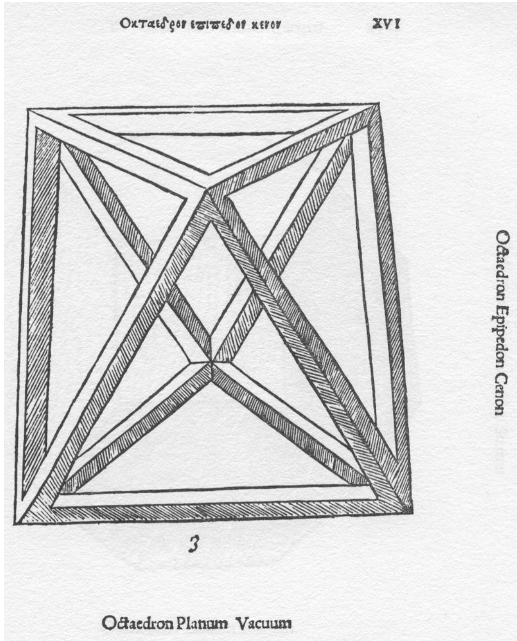

Fig. 23 : Un octaèdre creux posé sur une face.

Prolongement possible

PROBLÈME

Est-il possible de construire un tétraèdre régulier en K'NEX® ?

Quelques indications

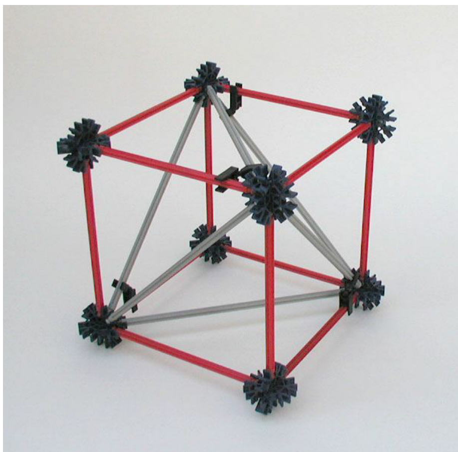

Fig. 24 : Un tétraèdre dans un cube.

Il est déjà acquis que c'est impossible avec les pièces de type a, b, c, d (baguettes) et j, k (connecteurs) de la figure 1. Mais si on dispose aussi de rotules (pièce de type h dans la même figure), cela ne présente plus grande difficulté, puisque les rotules permettent de construire n'importe quel angle dans n'importe quelle situation !

La manière la plus simple de procéder reste de partir d'un cube, et de former un tétraèdre à partir de 6 diagonales (une par face du cube) bien orientées, c'est-à-dire choisies de telle sorte qu'elles se rassemblent par groupe de 3 en 4 sommets bien choisis du cube ou encore, de manière équivalente, de telle sorte que les diagonales situées dans des faces opposées soient « tournées de 90° ».

Si, dans un cube suffisamment grand, on réalise ainsi *les deux seuls* tétraèdres *distincts* de ce type, on obtient une figure assez élaborée, appelée parfois *Stella Octangula*. On y visualise l'intersection des *diagonales* de chaque face du cube, et l'octaèdre, né de la dualité, devient ainsi vraiment l'étoile au cœur du cube.

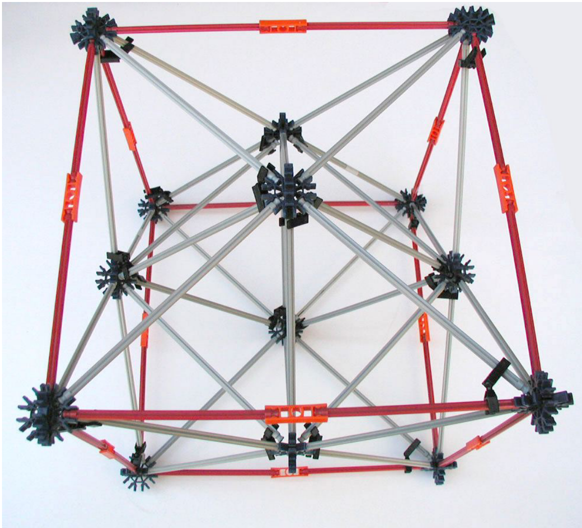

Fig. 25 : La Stella Octangula dans un cube.

Débarassée du cube qui l'a fait naître, l'étoile se révèle non-convexe.

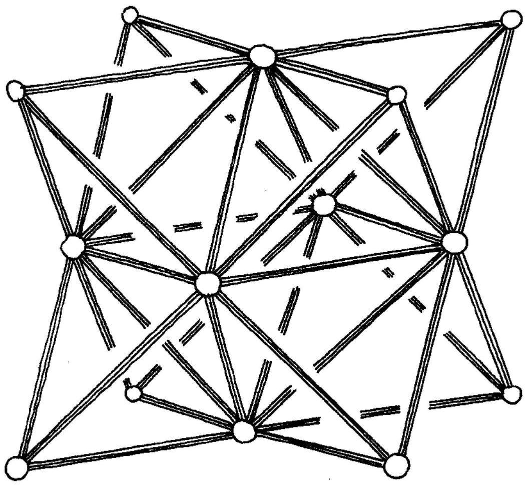

Fig. 26 : La Stella Octangula est un polyèdre non-convexe.