CREM

Nivelles, le 31 août 2002

VERS UNE GÉOMÉTRIE NATURELLE

Recherche N^o 72/01 financée par le Ministère de la Communauté Française,
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique,
Service général des Affaires générales, de la Recherche en Éducation
et du Pilotage interréseaux

Rapport de fin d'année, deuxième partie

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l.

5 rue Émile Vandervelde B-1400 Nivelles Belgique

Tél. +32–(0)67 21.25.27 Fax. +32–(0)67 21.22.02 Cpte 068-2179326-54

rouche@amm.ucl.ac.be

10

Les coniques découvertes par la vue

« L'ellipse, je me propose de l'appeler ligne en œuf, puisqu'elle est identique à un œuf. »
« En fait, je suis d'avis que, même en l'absence de texte, la vue de la figure devrait suffire pour faire comprendre. »
Dürer
« Théorème, du grec theorema, sujet de contemplation, de méditation. »

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une découverte des trois types de coniques, de leur définition en termes de foyers et directrices, et de leurs axes de symétrie. Nous arrivons aussi pour l'ellipse à sa définition dite *du jardinier,* et pour l'hyperbole à sa définition s'appuyant sur la différence des distances de chaque point de la courbe aux foyers.

Cet exposé résulte du projet d'étudier les sections d'un cône par un plan à l'aide de courbes de niveau. Une fois celles-ci dessinées, l'essentiel de la démarche consiste à les regarder et à commenter ce que l'on voit. En particulier nous ne recourons à aucune équation. Ajoutons, pour être tout-à-fait clair et honnête, que les coniques ainsi redécouvertes ne sont pas les sections du cône lui-même, mais bien les projections orthogonales de celles-ci sur un plan horizontal.

Dans son ouvrage intitulé *Underweysung der messung,* A. Dürer étudiait déjà les sections coniques à l'aide de projections orthogonales et de courbes de niveau (voir A. Dürer, [1525]). Son objectif était de donner une construction des sections elles-mêmes, et non d'en établir les propriétés. Curieusement, et bien que sa construction de l'ellipse soit sans défaut dans son principe, il aboutit à la constatation erronée que l'ellipse a la forme d'un œuf. Il était donc persuadé qu'elle n'a qu'un axe de symétrie (comme quoi, le regard peut être trompeur !). Le lecture de Dürer, dont par ailleurs les figures ont inspiré les nôtres, peut être un complément intéressant à la présente étude.

2 Un cône vu de face et du dessus

Sur la figure 1, le segment TU schématise une tablette horizontale, vue par un observateur dont les yeux se trouvent à sa hauteur. C'est à cause de cette circonstance que la tablette est vue comme un segment. Sur cette tablette, on a dessiné, schématiquement aussi, un cône SAB en équilibre sur son sommet S. Ce cône, vu de face, a l'apparence d'un triangle isocèle. La figure 1 montre aussi le cône vu du dessus : il apparaît alors comme un cercle. On prendra garde que la vue du dessus du cône est celle qui apparaît au dessous sur la figure. Pour éviter toute méprise, nous dirons dorénavant que la vue de face est une projection sur un plan vertical, et la vue du dessus une projection sur un plan horizontal (celui de la tablette).

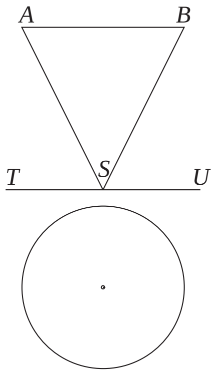

Fig. 1

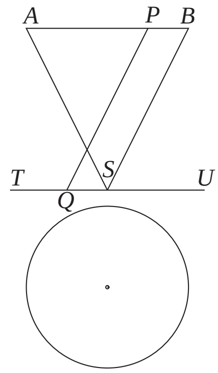

Fig. 2

La figure 2 montre le même objet, avec en plus un plan QP qui coupe le cône. Ce plan est également vu comme un segment. Il est parallèle à la génératrice SB du cône.

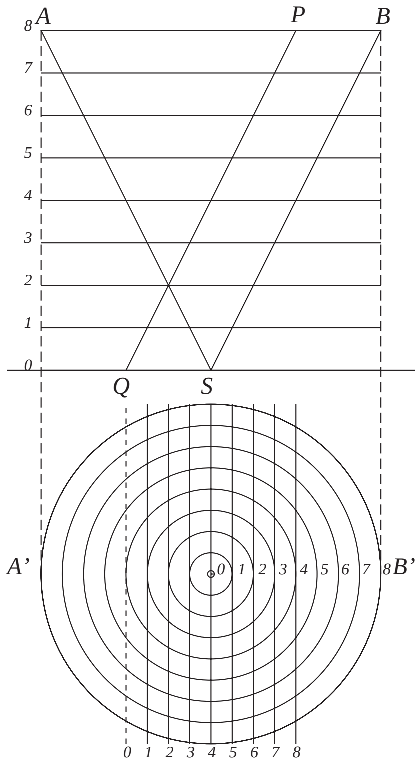

Fig. 3

Notre idée est d'explorer cette situation à l'aide de courbes de niveau. Sur la figure 3, nous avons dessiné des plans horizontaux « équidistants » numérotés de 1 à 8 selon leur niveau. Chacun d'eux est aussi vu sur le plan vertical comme un segment de droite horizontal.

Les intersections de ces plans avec le cône sont des courbes de niveau du cône. Sur le plan horizontal, elles apparaissent comme des cercles concentriques dont les rayons sont en progression arithmétique. Ce fait est dû à ce que les génératrices du cône sont des droites. Les intersections de ces plans avec le plan PQ sont des courbes de niveau de ce plan. Elles apparaissent sur le plan horizontal comme des droites parallèles équidistantes. La droite du niveau 0 est représentée en trait pointillé.

Pour faciliter le va-et-vient entre les projections verticale et horizontale, on joint souvent par une ligne de rappel les points qui se correspondent de l'une à l'autre. Ainsi, sur la figure 3, nous avons relié par une ligne en trait interrompu les points A et A', ainsi que B et B'.

Une courbe de niveau du cône et une courbe de niveau du plan ne peuvent se couper que si elles sont au même niveau. Leurs points d'intersection appartiennent à la fois au plan et au cône. Ce sont donc des points non seulement des deux courbes de niveau, mais aussi de la figure d'intersection du cône et du plan.

Ci-dessous, lorsque nous évoquerons les courbes (ou les droites, ou les cercles) de niveau, il s'agira des courbes qui appartiennent au plan horizontal. C'est de la même façon que l'on appelle courbes de niveau les courbes qui sont dessinées sur une carte, et non les courbes qui leur correspondent sur le terrain.

3 La parabole

En travaillant sur la figure 3, déterminons quelques points d'intersection du cône et du plan. Sur la figure 4, les projections de ces points sur le plan horizontal sont marquées d'un point noir. Elles esquissent une courbe, qui serait une courbe continue si tous les points de la section y étaient représentés.

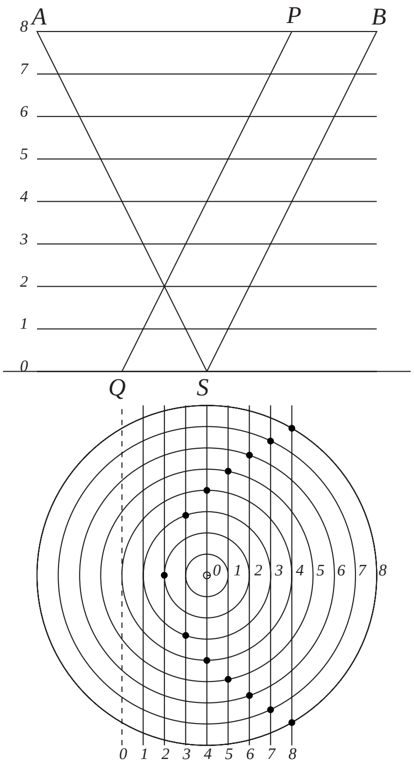

Fig. 4

Cette courbe possède un axe de symétrie passant par le centre des cercles et perpendiculaire aux droites de niveau. L'existence de cette symétrie n'est pas étonnante, puisque la configuration formée par le cône et le plan de section possède un plan de symétrie frontal passant par le sommet du cône.

Étant donné que l'inclinaison du plan de section est la même que celle d'une génératrice du cône, l'écart entre deux droites de niveau successives est égal à l'écart (la différence des rayons) entre deux cercles de niveau successifs. De ce fait, chacun des points de la courbe est à égale distance du centre des cercles et de la droite de niveau 0. Cette propriété caractérise la courbe. En effet, tout point qui n'y satisfait pas appartient à deux courbes de niveaux différents, et donc ne peut pas être vu dans le plan horizontal comme un point d'intersection.

Une courbe ainsi définie porte le nom de *parabole*. Par définition, le centre des cercles est son *foyer*, et la droite de niveau 0 est sa *directrice*. Si on remplace le cône que nous avons dessiné par un cône de hauteur infinie, alors la parabole devient une courbe non bornée.

Si nous recommençons la même construction avec n'importe quel plan parallèle au plan QP, nous obtenons encore dans le plan horizontal une parabole possédant le même foyer, mais une autre directrice.

4 L'ellipse

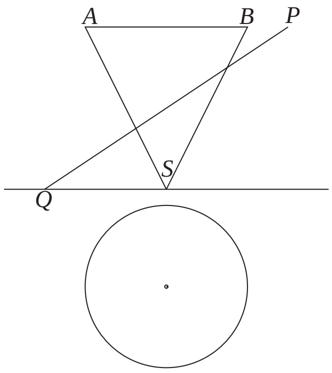

Fig. 5

Cherchons maintenant à voir ce qui se passe si nous considérons un plan de section qui ne soit plus parallèle à SB. Examinons donc un cône et un plan disposés comme sur la figure 5, de sorte que leur intersection forme une courbe bornée (l'inclinaison de QP est plus petite que celle de SB). Cette courbe forme une boucle, c'est-à-dire qu'elle se referme sur elle-même. Étudions, dans ce cas-ci aussi, la projection de la courbe sur le plan horizontal. La figure 6 montre quelques points de cette courbe.

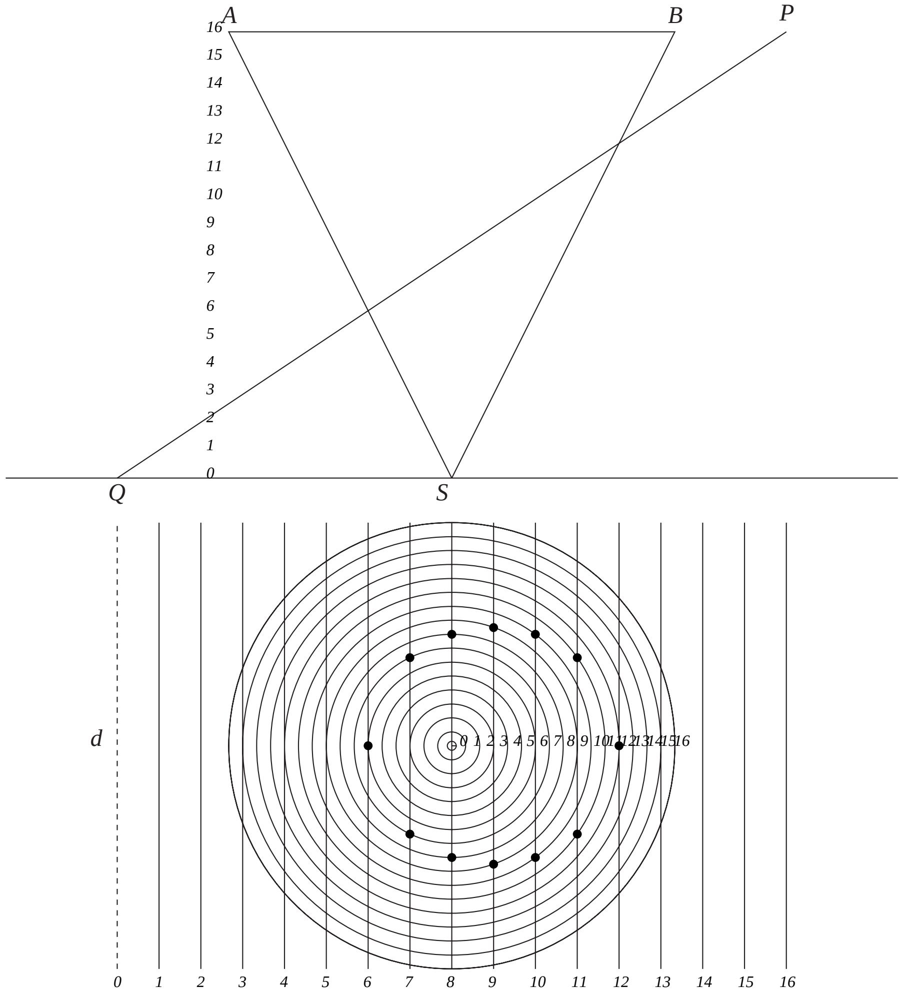

Fig. 6

Montrons que, pour chaque point de celle-ci, sa distance au centre des cercles est dans un rapport constant avec sa distance à la droite de niveau 0. Ce rapport est constant en raison du fait que tout point de la courbe est à l'intersection d'une droite et d'un cercle portant le même numéro. En effet, dans le plan horizontal, en partant d'un point quelconque, il faut franchir autant de cercles pour aller jusqu'au centre que de droites pour aller jusqu'à la droite de niveau 0. Le rapport en question est égal au rapport de l'écart entre deux cercles successifs et l'écart entre deux droites de niveau successives. Il est inférieur à l'unité du fait des inclinaisons respectives de QP et de SB.

Une telle courbe s'appelle *ellipse*. Le centre des cercles concentriques porte ici aussi le nom de *foyer* de l'ellipse, et la droite de niveau 0 porte le nom de *directrice*.

Comme la parabole, l'ellipse possède un axe de symétrie : c'est la droite qui passe par le foyer et qui est perpendiculaire à la directrice. Nous verrons plus tard qu'elle en possède un second.

Enfin, on réalise sans peine aussi que *toute* intersection bornée du cône par un plan se voit en projection, sur le plan horizontal, comme une ellipse dont le centre des cercles est encore un foyer, et dont la droite de niveau 0, variable selon le plan de section choisi, est une directrice.

5 Vers l'hyperbole

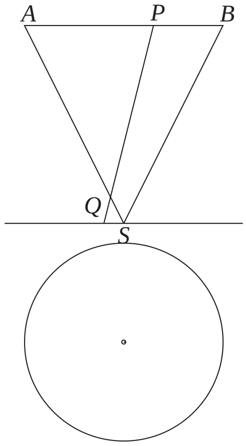

Fig. 7

Inclinons maintenant le plan de section différemment, comme sur la figure 7. La courbe d'intersection apparaît alors comme non bornée dès que l'on envisage un cône de hauteur infinie. Cette courbe se projette sur une courbe elle-même non bornée, celle que suggère la figure 8.

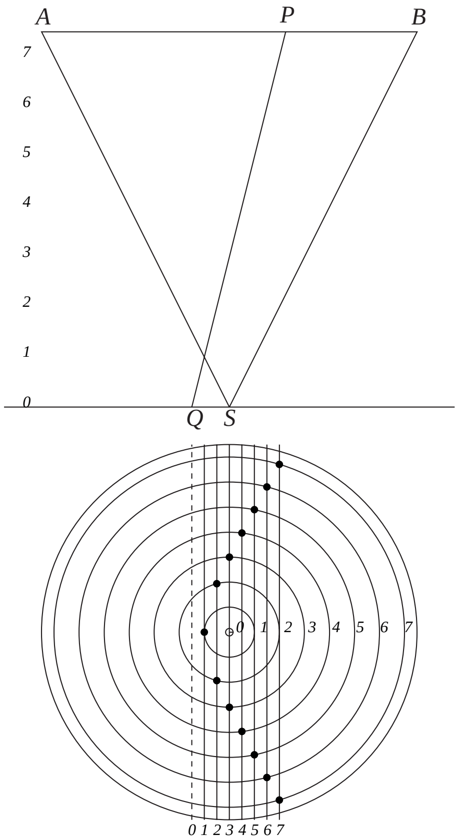

Fig. 8

Ceci dit, nous pouvons transposer à cette figure une des observations que nous avons faites à propos de l'ellipse. Pour chaque point de la courbe, le rapport de sa distance au foyer à sa distance à la directrice est constant, mais supérieur à 1. La courbe trouvée porte le nom de *branche d'hyperbole*. Pourquoi *branche* ? Le lecteur que la chose intrigue ne tardera à avoir la réponse. Remarquons que la courbe obtenue possède un axe de symétrie, mais certainement pas deux. Nous reviendrons plus tard sur cette question de la symétrie.

6 L'hyperbole

Considérons maintenant, comme sur la figure 9, un deuxième cône de même sommet que le premier mais orienté vers le bas. On peut lui faire correspondre les mêmes cercles de niveau que pour le cône de départ (voir figure 8), à condition d'affecter chaque niveau d'un signe moins.

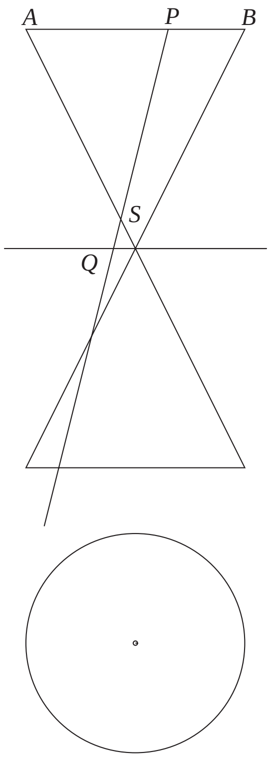

Fig. 9

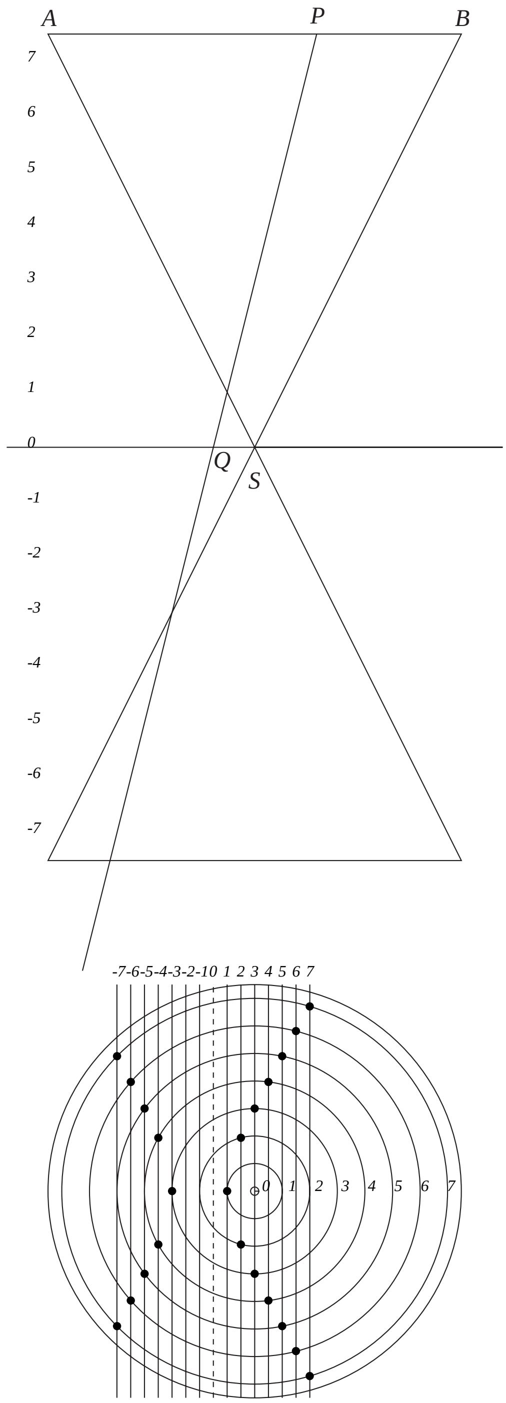

Fig. 10

Pour nous conformer au vocabulaire mathématique en usage, nous appellerons dorénavant *nappe d’un cône* ce que nous appelions jusqu’ici *cône* ; et nous appellerons *cône* l’ensemble des deux nappes opposées par le sommet, telles qu’on les voit sur la figure 9. Ceci dit, on voit sur la figure 9 que le plan QP coupe les deux nappes du cône. Étudions donc la projection sur le plan horizontal de la section du cône entier.

La figure 10 montre la section complète. Elle est formée de deux courbes qui, considérées ensemble, constituent ce que l’on appelle une *hyperbole*. Ainsi, l’hyperbole comprend deux branches. On soupçonne qu’elle possède un deuxième axe de symétrie : nous regarderons cela ci-après.

Il est aisé de voir que l’hyperbole est le lieu des points dont les rapports des distances au foyer et à la directrice possède une valeur constante supérieure à 1.

7 L'ellipse a-t-elle deux axes de symétrie ?

Nous avons remarqué ci-dessus que l'ellipse a un axe de symétrie passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice. Mais en regardant la figure 6, on a l'impression qu'elle possède un deuxième axe de symétrie perpendiculaire au premier et passant à droite du foyer. Il s'agirait d'un axe que DÜRER n'aurait pas vu ! Qu'en est-il exactement ?

Mis à part le fait que l'ellipse nous donne l'impression d'avoir un deuxième axe de symétrie, nous ne voyons sur la figure aucun autre élément de symétrie par rapport à cet axe, sauf toutefois le réseau de lignes de niveau du plan de section. Peut-être, pour y voir plus clair, serait-il utile de compléter la figure pour y faire apparaître de nouvelles symétries ?

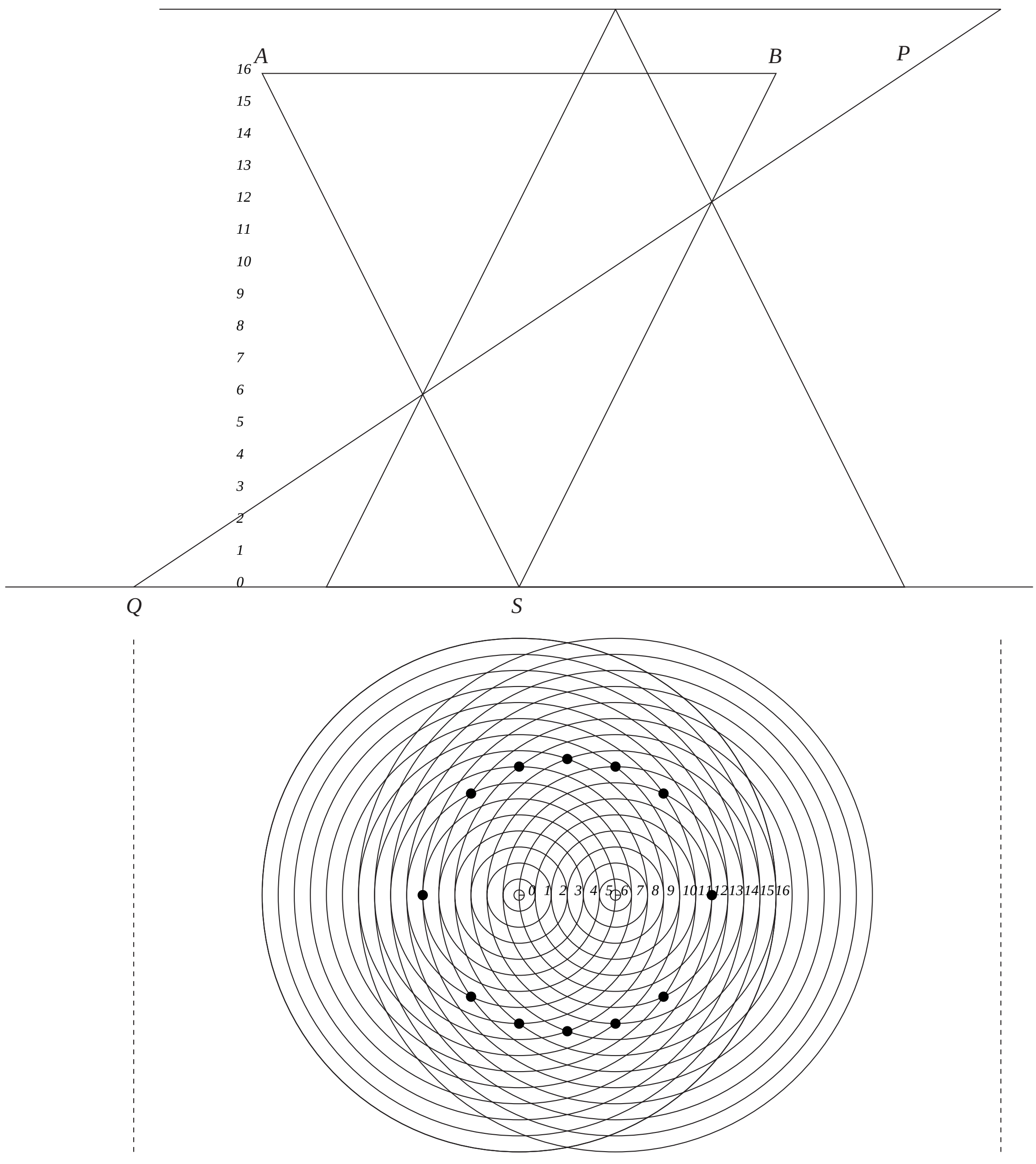

Fig. 11

Ce que nous allons proposer ne viendra sans doute pas à l'idée de tout le monde, car c'est un peu comme l'œuf de COLOMB. Mais c'est à force de se voir expliquer des œufs (!) de COLOMB qu'on finit par avoir assez d'imagination pour en dénicher soi-même.

Ceci dit, nous avons devant nous un cône, un plan et la section du cône par le plan. Serions-nous capables de trouver un deuxième cône qui, coupé par le même plan, aurait la même courbe d'intersection ? La figure 11 montre comment on peut réaliser cela.

Il faut que le deuxième cône (il n'est utile ici d'en dessiner qu'une seule nappe) soit identique au premier et que son axe soit vertical, comme était l'axe du premier. Et pour le positionner, il suffit de s'assurer qu'il a bien pour intersection avec le plan, la même courbe que le premier.

Nous avons dessiné les courbes de niveau du deuxième cône. La vue sur le plan horizontal fait apparaître un nouveau foyer de l'ellipse (projection du sommet du nouveau cône), et une nouvelle directrice (la vue sur le plan horizontal de l'intersection du plan de section avec le plan horizontal passant par le sommet du nouveau cône). Pour ne pas surcharger la figure, nous n'y avons pas reporté les lignes du niveau du plan de section.

La figure 11 fait effectivement apparaître pour l'ellipse un deuxième axe de symétrie, perpendiculaire au premier et passant par le point milieu des deux foyers. Ce point est appelé le *centre* de l'ellipse.

Mais cette figure nous montre encore autre chose, à savoir que l'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances aux deux foyers possède une valeur donnée constante. En effet, lorsqu'on passe d'un plan de niveau au suivant, par exemple en montant, le rayon du cercle de niveau du premier cône augmente d'une unité, tandis que celui du second diminue d'une unité. Sur notre figure, la somme constante des distances aux deux foyers vaut 18 fois la différence des rayons de deux cercles successifs.

8 Et l'hyperbole ?

Comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, l'hyperbole de la figure 10 semble bien avoir elle aussi un deuxième axe de symétrie. Qu'en est-il ?

La figure 12 montre comment l'introduction d'un deuxième cône identique au premier fait apparaître pour l'hyperbole un deuxième foyer, une deuxième directrice et un nouvel axe de symétrie. Le point milieu entre les foyers s'appelle ici aussi *centre* de l'hyperbole.

Enfin, on voit aussi sur la figure 12 que l'hyperbole est le lieu des points pour lesquels la valeur absolue de la différence des distances aux deux foyers est constante. Ceci est dû au fait que, lorsqu'on passe d'un plan de niveau au suivant, par exemple en montant, le rayon du cercle de niveau du premier cône augmente d'une unité, et en même temps celui du second augmente aussi d'une unité. Sur notre figure, la différence constante des distances aux deux foyers vaut, en valeur absolue, 2 fois la différence des rayons de deux cercles successifs.

Au terme de notre parcours, nous constatons que les projections sur un plan horizontal de *toutes* les sections possibles d'un cône par un plan sont des coniques admettant un même foyer : celui-ci est la projection du sommet du cône sur le plan horizontal. Ce qui varie d'un cas à l'autre, ce sont les positions d'un éventuel deuxième foyer et de la ou des directrices.

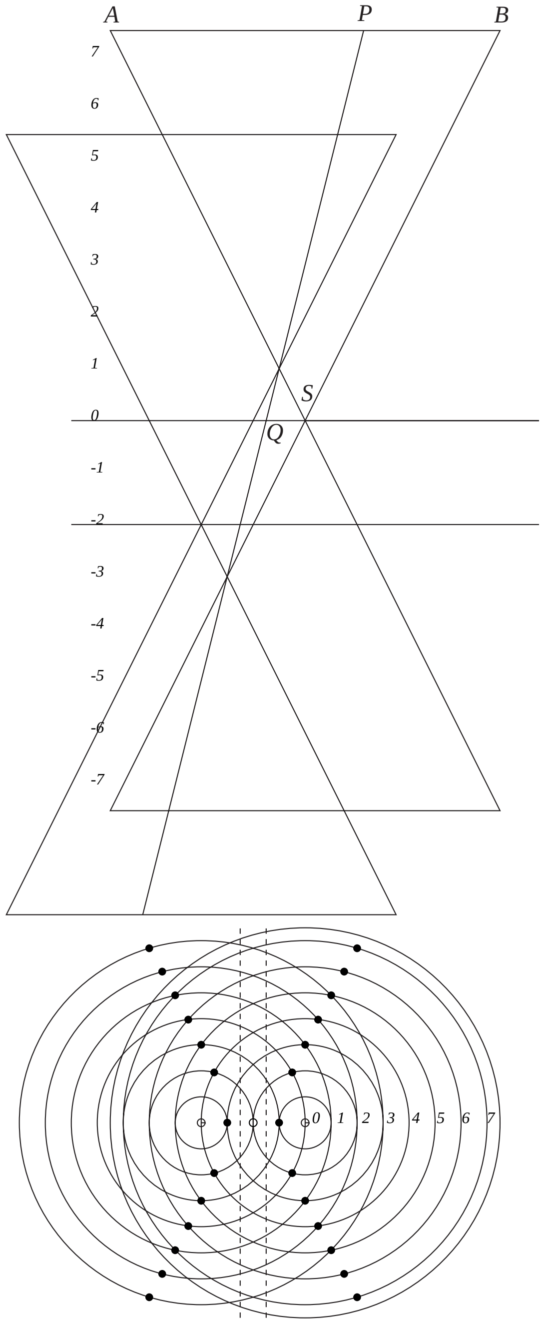

Fig. 12