LA GÉOMÉTRIE NATURELLE : UNE GÉOMÉTRIE DE SENS COMMUN

Nicolas ROUCHE
CREM
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Rue E. Vandervelde
1400 NIVELLES

Pour le dire sommairement, ce que nous appelons ci-après *géométrie naturelle* est une géométrie accessible à tout un chacun, ancrée dans le sens commun et qui ne recourt pas aux mesures (ceci est un choix que nous avons fait). Le présent exposé, qui a pour objectif d'en montrer l'existence et les modalités principales, reprend pour l'essentiel le chapitre introductif d'un rapport de recherche intitulé *Vers une géométrie naturelle* (recherche 72/01 financée par le Ministère de la Communauté française et réalisée par le CREM). Il est divisé en trois sections : nous commençons par un exemple commenté qui montre déjà, dans une certaine mesure, ce qu'est la géométrie naturelle ; ensuite nous tentons de dégager les caractères propres d'une telle géométrie et en particulier ce qui la distingue des exposés géométriques classiques, ceux qui ont la forme d'un développement axiomatique de grande ampleur ; et enfin nous nous interrogeons sur son utilité et sa légitimité.

1. UN EXEMPLE D'ARGUMENTATION GEOMETRIQUE PROCHE DU SENS COMMUN

1.1 L'exemple

Considérons un angle droit ABC situé au-dessus d'un plan horizontal.

(A) *Si un des côtés de l'angle, par exemple AB, est horizontal, et si l'autre n'est pas vertical, alors la projection verticale de l'angle sur le plan est un angle droit.*

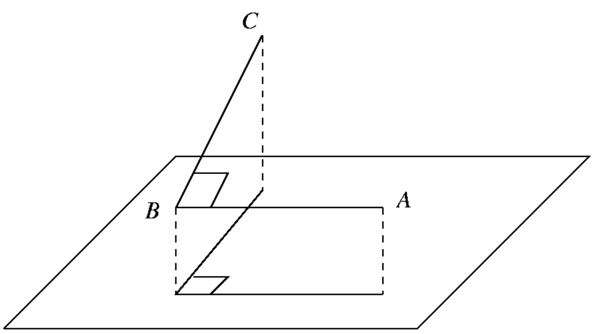

Fig. 1

Cette proposition est facile. L'angle droit avec un côté horizontal est *un objet simple* et bien défini. Le projeter verticalement sur un plan horizontal est *une opération* elle aussi *simple* et bien définie. On dessine sans peine une figure *typique* de la question posée, c'est-à-dire une figure qui représente toutes les situations en cause, sans imposer trop d'effort à l'imagination (voir figure 1).

Soit maintenant un angle droit *ABC* situé au-dessus d'un plan horizontal, et qui se projette verticalement sur celui-ci suivant un angle droit. Que peut-on dire de la position d'un tel angle dans l'espace? En particulier, est-ce qu'un au moins de ses côtés est horizontal ?

Il est intéressant, pour y voir clair, d'essayer d'ajuster une équerre dans un coin d'une pièce d'habitation. Après sans doute bien des tâtonnements, on arrive à soupçonner que si un angle (pas celui de l'équerre) a son sommet sur l'arête et que chacun de ses côtés suit un des deux murs en descendant, alors l'angle est aigu (voir figure 2). Et aussi que si un des côtés suit un mur en descendant, et que l'autre côté suit l'autre mur en montant, alors l'angle est obtus (voir figure 3).

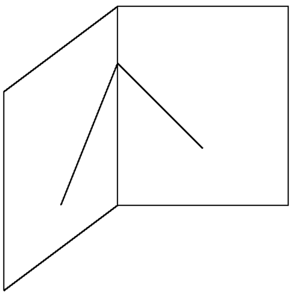

Fig. 2

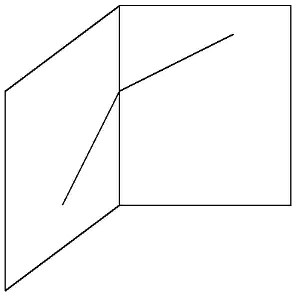

Fig. 3

On en vient alors à conjecturer que :

(B) *Si un angle droit situé au-dessus d'un plan horizontal se projette verticalement sur celui-ci suivant un angle droit, alors c'est que, forcément, un de ses côtés est horizontal.*

Pour prouver cela, on peut montrer que si aucun des côtés n'est horizontal, alors l'angle projeté n'est sûrement pas droit.

Voyons donc cela d'un peu plus près. Si aucun des côtés de ABC n'est horizontal, alors soit les deux côtés percent le plan, soit un des côtés et le prolongement de l'autre percent le plan, soit les deux prolongements percent le plan. Contentons-nous d'examiner le premier cas. Les deux autres se traiteraient de manière analogue.

Supposons que *A* et *C* soient les points de percée de *ABC* dans le plan. Faisons tourner l'angle *ABC* autour de *AC* comme charnière, jusqu'à l'amener en position horizontale, en *B'*. C'est ce que montre la figure 4).

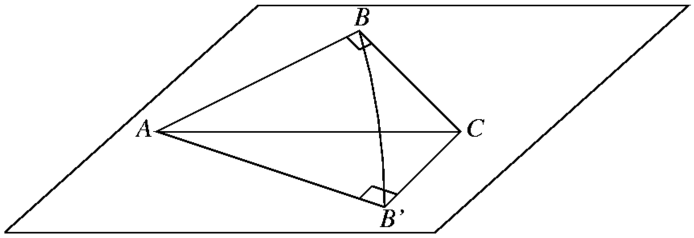

Fig. 4

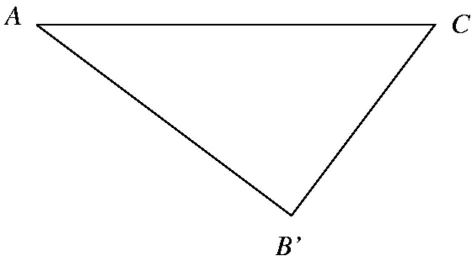

Fig. 5

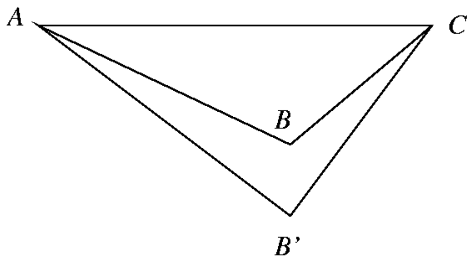

Fig. 6

La figure 5 montre l'angle rabattu vu du dessus. Nous voyons *AB'C* en vraie grandeur. Ramenons l'angle jusqu'à sa position de départ par une rotation de sens inverse autour de *AC*. Le sommet *B* de l'angle, revenu à sa position de départ au-dessus du plan, est vu du dessus quelque part à l'intérieur du triangle *AB'C* (en fait sur la hauteur issue de *B'*). Donc la projection de l'angle *ABC* sur le plan horizontal est un angle obtus.

1.2 Analyse de l'exemple

Au rebours de la proposition directe (A), la réciproque (B) est difficile. Ce qui est donné, c'est *la propriété* qu'a un angle droit de se projeter suivant un angle droit. Cet angle droit projeté est simple à imaginer. Mais on sait d'expérience qu'une projection peut correspondre à une infinité d'objets projetés. Où donc peut se trouver l'angle que l'on projette? Et surtout quelles directions dans l'espace peuvent prendre ses côtés? On est obligé de chercher à clarifier un ensemble infini de situations dont chacune est difficile à se représenter : la projection verticale d'un angle, fut-il droit, situé de façon quelconque, est difficile à voir.

Alors on conjecture que la réciproque est vraie, mais cette conjecture n'a rien d'évident. Il faut donc l'assumer jusqu'à la preuve ou la réfutation. L'ennui est que, pour la prouver, l'énoncé invite à remonter de la projection (que l'on voit bien) à l'angle projeté, difficile à cerner vu l'ambiguïté *(bis repetita placent* !)

La seule démarche claire avec les projections, c'est, pour le dire familièrement, quand on va de l'objet à sa projection, pas l'inverse. Donc on s'arrange pour raisonner dans le bon sens. On considère toutes les situations où l'angle à projeter n'a pas de côté horizontal (en effet, considérer les autres ne conduirait nulle part). Et on entreprend de montrer que pour ces angles-là, la projection n'est pas un angle droit. On voit ainsi comment on est naturellement poussé vers ce que l'on appelle la contraposée de la conjecture.

On est soulagé d'être ramené au sens qui va de l'objet à sa projection, plutôt que l'inverse. *On peut alors, en effet, recommencer à imaginer une situation typique.* Mais il se fait qu'il y en a de trois sortes. Et donc, on les prend une par une.

On prend le cas où les deux côtés de l'angle à projeter coupent le plan, et la situation que l'on dessine est typique (on dit aussi *paradigmatique*) : ceci veut dire qu'elle est assez simple pour représenter toutes les situations du même type.

Voyons maintenant quelles manœuvres à partir de là conduisent à la preuve. On rabat l'angle sur le plan horizontal, puis on le remonte, par un mouvement continu de rotation, jusqu'à sa position initiale. On s'aperçoit alors que le sommet de l'angle ramené à cette position se projette à l'intérieur du triangle $AB'C$. Et on conclut à vue que la projection de l'angle droit est un angle obtus.

1.3 L'exemple regardé avec du recul

Terminons par un bref inventaire des observations que l'on peut faire à propos de cette argumentation, en mettant principalement en évidence ce qui ne relève pas des mathématiques constituées.

1) Les énoncés étudiés concernent les directions horizontale et verticale, qui sont des directions physiques. Toutefois, ces énoncés ont un lien étroit avec d'autres énoncés plus généraux, indépendants de ces références à la physique : ceux dans lesquels la direction du plan n'est pas spécifiée et où *l'angle droit ayant un côté horizontal* est remplacé par *un angle droit ayant un côté parallèle au plan.*

2) Le premier énoncé renvoie à une figure et, par des symboles littéraux, à des points de la figure. Un énoncé abstrait aurait laissé au lecteur le soin de se construire une image mentale de la situation.

3) Les figures sont choisies de façon à être *vues au mieux*, ce qui implique qu'elles ont été conçues par référence à l'observateur. Ainsi à la figure 1, l'angle à projeter est situé au-dessus du plan horizontal ; ensuite un de ses côtés est non seulement horizontal (ce qui se devait), mais frontal. À la figure 5, le plan horizontal est identifié au plan de la feuille et l'observateur est supposé le regarder du dessus.

4) Les projections orthogonales ne sont pas envisagées techniquement. Les propriétés qu'on en utilise sont celles qu'elles partagent, de manière approximative, avec ce que donne un regard du dessus sur un plan horizontal. On recourt donc ici à l'expérience acquise d'un accord suffisant entre les propriétés du regard et celles de la projection.

5) On recourt à un mouvement continu.

6) Enfin, comme nous l'avons vu, mais c'est l'observation la plus cruciale, le raisonnement comporte deux phases. L'ensemble des situations à envisager étant par trop touffu, on l'a ramené (d'une part par le passage à la contraposée, et de l'autre par la division en trois cas) à quelques ensembles plus petits, chacun maîtrisable par l'imagination. Il ne restait plus alors qu'à raisonner, dans chacun des cas, sur un exemple (une figure) représentatif de toutes les situations en cause.

2. QU'EST-CE QUI CARACTERISE EN GENERAL LA GEOMETRIE NATURELLE ?

L'exemple que nous venons de traiter et d'analyser assez longuement donne sans doute déjà une idée raisonnable de ce que nous appelons ici une géométrie naturelle. Plaçons-nous maintenant à un niveau plus général, en cherchant à caractériser cette géométrie telle qu'elle est représentée par tous les exemples traités dans notre recherche, et ceux que l'on pourrait encore y adjoindre. Certes, chacun des auteurs a vu le thème de la géométrie naturelle avec sa sensibilité propre. On ne peut nier qu'il y ait *des variétés de géométrie naturelle*. Cherchons néanmoins à nous approcher de ces démarches géométriques qui, tout en partant du terrain familier des élèves, conduisent toutefois clairement vers les géométries constituées, mais sans les assumer au départ.

L'exposé qui suit voudrait être une synthèse cohérente et raisonnablement complète, qui éclaire toutes les contributions de notre recherche. Pour lui assurer ce caractère, nous avons accepté qu'il comporte un certain degré de redondance avec ce qui précède.

2.1 Des notions familières

Au cours de l'enfance, les êtres humains apprennent en famille, à l'école, dans la rue, ... à manier et connaître les choses de leur environnement. Ils se familiarisent en particulier avec les propriétés essentielles de forme et de grandeur. Nous considérons ici ceux d'entre eux dont les connaissances dans ce domaine se limitent aux notions les plus répandues, les plus nécessaires à la vie, à l'exception – rappelons-le – des mesures, celles qui pour cela sont inscrites dans le sens commun.

Cet ensemble de connaissances élémentaires et fondamentales est loin d'être vide. Par exemple, tout le monde sait ce qu'est une ligne droite. Une telle ligne n'est pas vue comme infinie, mais elle est en tout cas extensible. Il en va de même de la notion de surface plane, conçue elle aussi comme non bornée, mais extensible. On utilise les termes de *droite* et de *plan* dans ces acceptions familières, en renvoyant à des propriétés au départ non explicitées, mais mobilisables. Autres exemples : tout le monde sait, ou au moins peut acquérir sans trop de peine l'expérience de ce que sont deux droites qui se coupent, deux droites parallèles, un angle, un angle droit, un cercle et son centre, deux plans qui se coupent, deux plans parallèles.

Certaines de ces notions - et peut-être toutes - trouvent leur origine dans l'environnement physique. Par exemple, la genèse de l'angle droit est liée à l'horizontale et à la verticale, au point que l'usage confond parfois les deux termes de *vertical* et *perpendiculaire*.

Tout le monde comprend ce que sont deux longueurs égales (au sens de superposables), ou une longueur plus grande qu'une autre. On voit ce qu'est le milieu d'un trait, la somme de deux longueurs. Et de même on comprend ce que sont deux angles égaux ou inégaux, et la somme de deux angles (inutile ici de préciser *deux grandeurs angulaires*).

Tout le monde comprend ce que sont certains mouvements simples. Par exemple transporter une chose en ligne droite sans changer son orientation dans l'espace, ou encore faire tourner une chose autour d'un axe. Peu importe que les termes de *translation* ou *rotation* soient connus ou non, les mouvements eux sont familiers.

La vue du dessus d'un objet situé au-dessus d'un plan horizontal n'est certes pas une notion précise. Elle possède néanmoins certaines propriétés raisonnablement claires et utiles. Par exemple, un angle droit parallèle au plan horizontal est perçu comme un angle droit (même si son image sur la rétine n'est pas un angle droit). Ou encore, si un point se trouve au-dessus d'une figure polygonale convexe dessinée dans le plan, on le voit à l'intérieur de la figure.

Toutes ces choses sont *connues intuitivement*. Mais il y a plus, car elles sont dotées de propriétés susceptibles d'être engagées dans des raisonnements. Donnons-en quelques exemples.

2.2 Des propriétés connues ou aisément reconnaissables

Il va de soi, par exemple, que si deux grandeurs sont égales à une même troisième, elles sont égales entre elles. Ou que si on veut maintenir constante une somme de deux grandeurs, et si on diminue un des termes de la somme, il faut augmenter l'autre.

De même, si deux angles sont opposés par le sommet, on reconnaît qu'ils sont égaux, ce qui est particulièrement clair si on les considère en position frontale, avec leurs deux côtés également inclinés. Ou encore, si on translate une droite dans une direction qui lui est parallèle, elle glisse sur elle-même et donc ne change pas de position. Dernier exemple enfin, personne ne contestera que les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu.

Ainsi, certains objets géométriques de base sont connus familièrement. Ils sont ce que H. FREUDENTHAL appelle des *objets mentaux*, par opposition aux concepts définis techniquement au sein d'une théorie mathématique organisée formellement. Les propriétés de ces objets demeurent d'ordinaire au niveau implicite. Mais lorsque la nécessité s'en fait sentir, par exemple dans des problèmes de construction, elles sont reconnues, identifiées, et deviennent mobilisables dans des raisonnements. Elles sont alors, selon l'expression de FREUDENTHAL, des outils efficaces pour organiser, comprendre, certains champs de phénomènes.

Essayons maintenant d'approfondir encore la notion de géométrie naturelle.

2.3 Des objets déplaçables

Les objets étudiés en géométrie naturelle ne sont pas des ensembles immobiles dans un espace abstrait. Ce sont des objets déplaçables, solides. Ils sont solides au sens où, dans tous les déplacements physiques ou mentaux qu'on leur fait subir, ils conservent leur forme et leur grandeur. Une telle affirmation ne heurte pas le sens commun, même si elle renvoie aux problèmes de la *conservation* étudiés par PIAGET et à l'élucidation philosophique de la constance des objets (cf. MERLEAU-PONTY} [1945]). La notion d'*espace* n'apparaît pas dans le cadre de la géométrie naturelle, et lorsqu'on y étudie des objets plans, ce ne sont pas des objets *du plan*.

2.4 Des symétries de deux ordres

Des symétries de deux ordres contribuent à faciliter la saisie des objets auxquels on accède par la géométrie naturelle. Il s'agit d'abord de la symétrie du corps humain et plus particulièrement de ses organes de perception (principalement mais pas seulement la vue) : l'être humain possède, en gros, un plan de symétrie. Il s'agit ensuite de la symétrie des deux directions physiques de base à la surface de la terre, à savoir l'horizontale qui est une direction de plans, et la verticale qui est une direction de droites.

Le plan de symétrie du corps humain, dans la plupart de ses positions habituelles à l'état de veille, est un plan vertical, ou à peu près. Les objets *plans* sont perçus le plus fidèlement lorsqu'ils se trouvent devant l'observateur et dans un plan frontal, à distance ni trop petite, ni trop grande.

Répétons que, pour saisir une projection orthogonale d'un objet sur un plan, il est éclairant de placer l'objet au-dessus du plan disposé horizontalement, et de le regarder du dessus, à la verticale. Inscrire la situation dans les deux directions physiques qui nous sont les plus familières aide à les voir au mieux.

Autre exemple : lorsqu'il s'agit de saisir un objet plan possédant un axe de symétrie, le plus facile est de le disposer non seulement dans un plan frontal pour l'observateur, mais encore de placer son axe de symétrie dans le plan de symétrie de l'observateur : par exemple, on voit mieux un rectangle devant soi s'il est *bien droit*, plutôt que *de travers*.

Il en va des mouvements simples comme des objets. Ainsi, comme nous l'avons signalé, une translation d'une figure plane est plus fidèlement perçue lorsqu'elle a lieu non seulement dans un plan frontal, mais encore horizontalement.

E. MACH [1922] a, le premier sans doute, montré que l'être humain, pour percevoir les objets le plus fidèlement possible, s'efforce d'accorder la symétrie de son corps avec celles des objets et avec les directions horizontale et verticale. Il ajoute, ce qui nous paraît important, que lorsqu'un tel accord est trouvé, il en résulte pour l'observateur un sentiment d'équilibre qui est une satisfaction esthétique élémentaire.

Soulignons que, parce qu'elles renvoient à la biologie et à la physique, ces considérations sur la capacité de l'être humain à saisir les grandeurs et les formes se situent hors du cadre de la géométrie déductive.

2.5 Des preuves par l'exemple

À quel type de preuve recourt-on dans le cadre de la géométrie naturelle ?

Tout d'abord, on utilise des implications. Et ceci dès le départ. Les exemples de propriétés connues ou aisément reconnaissables que nous avons donnés à la section 2.2 sont des implications. En effet, elles s'énoncent ou peuvent s'énoncer sous la forme « si... alors... ». Et d'ailleurs, à défaut de posséder des implications au départ, nous n'aurions pu construire aucun raisonnement.

D'où vient l'évidence de ces implications ? Ce sont en fait des évidences qui se constatent sur des objets simples, et qui sont possibles seulement parce que ces objets sont simples. Ceci mérite une explication.

Qu'est-ce en effet qu'un objet simple, porteur d'évidence ? Lorsque, dans les raisonnements dont nous parlons ici, on affirme quelque chose d'un objet, on parle toujours en fait d'une classe d'objets. On parle par exemple de toutes les paires possibles de parallèles, de tous les rectangles possibles, de tous les angles imaginables, etc. Une telle classe est simple si on peut la parcourir sans peine en imagination, si on la voit en quelque sorte d'un bout à l'autre.

Mais comment fait-on pour imaginer toute une classe d'objets ? D'abord, nous l'avons dit, on amène - effectivement ou mentalement - un objet de la classe en position privilégiée devant soi. Ensuite, tous les objets semblables à celui-là, c'est-à-dire de même forme que lui, sont imaginés sans peine, car dès la prime enfance, l'être humain reconnaît les objets semblables. Si tous les objets de la classe sont semblables, alors l'effort de parcours s'achève là. Mais la classe des objets peut avoir, à similitude près, un ou plusieurs degrés de liberté. La classe des rectangles, par exemple, a un degré de liberté (le rapport de ses côtés) ; la classe des triangles en a deux (par exemple le rapport de deux côtés et l'angle compris entre ceux-ci). Le *nombre de degrés de liberté*, c'est le nombre de paramètres qu'il faut pour décrire la classe.

On parcourt sans trop de peine en imagination les classes pas trop hétéroclites, celles en fait qui n'ont pas plus d'un ou deux degrés de liberté. La géométrie naturelle n'accède directement qu'à celles-là, et n'accède - éventuellement - à certains autres qu'à travers celles-là. À titre de contre-exemple, on réalise la difficulté d'imaginer l'ensemble des quadrilatères, et encore davantage des pentagones.

Mais là où ce parcours en imagination est possible, on *voit* qu'une propriété reconnue sur quelques cas s'étend à tous les autres. C'est parce qu'on imagine – potentiellement – tous les objets de la classe infinie, qu'on sait que la propriété est vraie. Elle ne peut être fausse, parce qu'il n'y a pas de contre-exemple imaginable. Elle est nécessaire, parce qu'en quelque sorte elle épuise potentiellement l'examen de la classe entière. En ce sens ou pourrait dire qu'il s'agit d'une *induction complète* (et même la plupart du temps d'une induction non dénombrable). Si on n'en connaissait pas les limites et les pièges, on pourrait dire que cette forme d'inférence où « on voit tout » est supérieure aux déductions formelles, dès que celles-ci, ce qui leur arrive souvent, permettent de conclure sans voir tout (ce qui par ailleurs est le signe de leur efficacité).

Ensuite, *lorsqu'on enchaîne plusieurs implications* pour construire une preuve, la preuve que l'on obtient est de la même nature. Prouver, dans le cadre de la géométrie naturelle, c'est montrer qu'aucune variante imaginable de la situation proposée n'échappe à la règle. Ce sont des preuves par l'exemple, possibles seulement parce que l'exemple (la figure) est représentatif de la classe. On dit aussi dans un tel cas que l'exemple est *paradigmatique*. Les preuves de ce type sont admises dans le cadre des mathématiques constituées lorsqu'on peut leur substituer des preuves *purement déductives* (ce que l'on ne prend pas toujours la peine de faire).

Cela étant, on comprend que la géométrie naturelle, à ce point liée aux évidences perceptives et aux images mentales, ne s'appuie sur aucun instrument conceptuel trop élaboré. Ce qui n'empêche pas qu'au moment où elle touche ses limites, cette géométrie invite à recourir aux nombres ou à des formes d'organisation algébrique.

3. NECESSITE ET FONCTION DE LA GEOMETRIE NATURELLE

On le voit, la géométrie naturelle est une géométrie commençante, qui accepte d'avoir beaucoup de propositions de départ et qui n'est pas unifiée. Elle correspond à un registre de la pensée géométrique plus proche du sens commun que celui des exposés plus complets, fondés tout entiers sur peu d'axiomes. Il existe beaucoup d'exemples de ces derniers.

On peut alors se demander pourquoi on ne partirait pas de l'un d'eux, choisi parmi les plus accessibles. D'autant que ces exposés vont plus loin et plus sûrement que la géométrie naturelle, car ils sont des produits longuement façonnés par des siècles d'efforts des mathématiciens. Tâchons de répondre à cette question, d'abord en fonction des premiers âges scolaires.

En premier lieu, une démarche axiomatique de longue haleine est inaccessible aux tout jeunes enfants, car ils vivent dans la pensée commune, et même dans la pensée commune en voie de formation. Leur relation aux propriétés géométriques des choses est par conséquent de l'ordre du quotidien. On conçoit par ailleurs combien il est important de développer leur savoir-faire et leur savoir à propos des formes et des grandeurs.

L'expérience - en particulier celle des « mathématiques modernes » - semble avoir prouvé qu'une approche axiomatique de grande ampleur est inaccessible à beaucoup d'enfants de 12, 13 ou 14 ans (nonobstant le fait qu'il s'agit là des âges où débutent les opérations formelles au sens de PIAGET). Il ne manque pas d'arguments plausibles pour expliquer cela. D'abord, un exposé axiomatique long est, comparé à la pensée commune, tellement réorganisé en vue de sa cohérence déductive qu'il est trop loin des élèves. Ensuite, si les axiomes sont en nombre restreint, il oblige à la démarche contre nature de prouver des évidences.

Il a pour fonction une réorganisation logique de matériaux scientifiques qui le requièrent. Or les élèves de cet âge, n'ayant pas accumulé de tels matériaux, ne peuvent ressentir cette nécessité.

Cela n'exclut pas que quelques élèves soient sensibles à la séduction d'un discours parfaitement ordonné, fut-il quelque peu détaché du réel. De tels élèves méritent considération. Mais d'une part ils ne peuvent dicter la règle de l'enseignement. Et plus fondamentalement, on peut arguer qu'à les enfermer dans un univers intellectuel trop pur, on leur barre l'accès à bien des sources de la pensée créative.

Résumons et complétons ces quelques considérations pour montrer, en guise de conclusion, la nécessité et la fonction de la géométrie naturelle.

1) Il faut partir de la pensée commune, parce que, tout particulièrement en ce qui concerne les jeunes enfants, on ne peut pas partir d'ailleurs.

2) Le passage aux exposés axiomatiques formels est une rupture importante par
rapport à la pensée commune. Cette rupture doit être motivée. Il faut arriver à faire partager par les élèves le besoin d'une mise en ordre. Or ce besoin n'est autre que celui de sortir la pensée commune des difficultés dans lesquelles elle s'empêtre. Il importe donc d'avoir reconnu et même quelque peu exploré ces difficultés. Alors, la pensée scientifique se construit, comme dit BACHELARD, *contre* la pensée commune. Mais aussi, et dans une mesure indispensable, en y plongeant ses racines.

3) La pensée géométrique arrivée à maturité ne se réduit pas - heureusement - à la construction de discours déductifs. Elle est une activité créative qui dans bien des circonstances peut utilement s'appuyer sur la considération d'objets solides déplaçables, de mouvements simples, de points de vue privilégiés sur des objets symétriques, de preuves paradigmatiques. La géométrie naturelle contribue à l'heuristique de la géométrie tout court.

4) Qui plus est, les matériaux accumulés par la pratique d'une géométrie de sens commun sont des sources d'intuitions possibles de *toute pensée mathématique* (et non seulement géométrique) ultérieure, jusque dans les registres les plus formels.

4. DES EXEMPLES POUR TOUS LES AGES SCOLAIRES

Dans le corps de notre recherche, nous avons illustré la géométrie naturelle par des exemples appropriés à tous les âges de l'école, de la maternelle jusqu'à la fin du secondaire. Donnons maintenant une idée de ces exemples, en les regroupant par affinité de sujet plutôt qu'en suivant l'ordre chronologique des apprentissages.

Le chapitre 1 propose pour l'école maternelle des jeux et dessins de cubes. Le chapitre 2 traite de la même matière, plus systématiquement, pour l'école primaire. Il propose successivement des assemblages de cubes, des assemblages de cartons représentant des cubes et enfin des représentations de ces assemblages sur du papier tramé. Le chapitre 3, de nature plus théorique, complète les chapitres 1 et 2 par une analyse de la capacité à voir dans l'espace. À l'autre bout de la scolarité, le chapitre 8 esquisse les possibilités du jeu appelé K'NEX pour enseigner les éléments de la géométrie de l'espace, dans le contexte des polyèdres. Le chapitre 9, quant à lui, introduit aux groupes de symétries dans le plan et l'espace, à partir des polygones et des polyèdres.

Le chapitre 6 établit quelques propriétés non évidentes du parallélisme et de la perpendicularité dans les débuts de la géométrie de l'espace.

Le chapitre 4 élabore la notion d'aire de polygone. Le chapitre 5 traite de la transformation de tout polygone en un carré de même aire. Le chapitre 7 montre que la méthode de CAVALIERI pour les volumes et les aires s'inscrit dans le cadre de la géométrie naturelle.

Le chapitre 10 enfin montre comment engendrer les coniques en s'appuyant sur des courbes de niveau.

Ajoutons que cette étude résulte du travail d'une équipe dans laquelle chacun a pu exprimer librement sa sensibilité. D'ailleurs, la géométrie naturelle n'est pas une idée que l'on puisse cerner de façon définitive. Les différents chapitres montrent bien la variété de ses interprétations possibles, ce qui a pour effet heureux de constituer, pour l'avenir, les bases d'un débat qui demeure nécessaire. Les membres de l'équipe étaient Michel Ballieu, Marie-France Guissard, Maria-Izabela Krysinska, Patricia Laurent, Christine Lemaître, Nicolas Rouche, Thaïs Sander, Philippe Tilleuil, Françoise Van Dieren, Marie-Françoise Van Troeye et Patricia Wantiez.

5. BIBLIOGRAPHIE

ERNST MACH [1922] *L'analyse des sensations, le rapport du physique au psychique*, Éditions Jacqueline Chambon, 1996. Traduit de l'édition originale allemande *Analyse der Empfindungen* par F. Eggers et J.-M. Monnoyer.

MAURICE MERLEAU-PONTY [1945], *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris.

HANS FREUDENTHAL [1983], *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht.

CREM [2001a], *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, CREM, Nivelles.

CREM [2001b], *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM, Nivelles.