Université de Mons-Hainaut
Service d'Analyse et Méthodologie Mathématiques

L'algèbre linéaire au troisième degré du secondaire

G. Noël, F. Pourbaix, Ph. Tilleuil

1997

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

0.1. L'algèbre linéaire dans l'enseignement secondaire

> *En général, on ne se rend pas compte de façon claire que, dans l'enseignement secondaire (mis à part les rudiments du calcul infinitésimal), on n'enseigne rien d'autre que de l'algèbre linéaire.*
> *J. Dieudonné*

L'importance de l'algèbre linéaire et de ses applications est très largement reconnue. Ainsi, dans son *Cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, le CREM (voir [4], paragraphes 7.1.3 et 7.1.5) écrit :

> « *L'algèbre linéaire, ..., comporte une multitude d'applications dans les domaines les plus variés. C'est pourquoi elle est un des chapitres les plus importants (l'autre est l'analyse) dans la plupart des cours universitaires de mathématiques générales.* »

et plus loin :

> « *Parmi les théories algébriques, c'est l'algèbre linéaire qui possède les applications les plus nombreuses et les plus variées. Ceci est dû en partie au fait que la proportionnalité et, ce qui mathématiquement la généralise (la linéarité), sont parmi les choses les plus aisément concevables par l'esprit humain, même s'il est vrai qu'elles donnent du fil à retordre aux écoliers. Ceci fait que beaucoup de situations qui, prises dans toute leur complexité, ne sont pas linéaires, sont néanmoins, par raison de commodité, représentées par un modèle mathématique linéaire, choisi le moins inadéquat possible. L'algèbre linéaire sert à résoudre des problèmes de mécanique des vibrations, de réseaux électriques, d'évolution de population, de systèmes chimiques, économiques, sociaux, etc.* »

Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que le phénomène linéaire soit présent dans le cours de mathématique dès la fin de l'école primaire. Il suffit de rappeler les questions liées à la proportionnalité directe : pourcentages, intérêts, changements d'unités, dessins à l'échelle, emploi d'opérateurs fractionnaires, etc. Tout au long du premier et du deuxième degré de l'enseignement secondaire, le phénomène linéaire continue d'être présent en force. On rencontre de nouveau la proportionnalité, mais aussi

1. au premier degré (voir [1] :
   - les repérages sur une droite, dans un plan ou dans l'espace. Ces activités constituent les premiers contacts de l'élève avec la géométrie analytique laquelle peut être considérée comme l'application de l'algèbre linéaire (et multilinéaire) à la géométrie,

  - la moyenne d'un ensemble de données numériques,
  - des problèmes conduisant à des équations du type $ax + b = c$,
  - des applications diverses telles que la relation espace-temps pour un mobile, le montant d'une facture de téléphone ou le prix d'une course en taxi,
  - la mise en évidence et la distributivité,
  - les translations, symétries et rotations et leurs invariants fondamentaux, notamment l'alignement des points,
  - les projections parallèles et les agrandissements et réduction d'une figure plane, les reproductions à l'échelle,
  - la perspective cavalière et ses invariants : parallélisme de droites et rapports de segments de droites parallèles,
  - les effets sur les coordonnées de transformations telles que translations, symétries centrales ou orthogonales, rotations.

2. au deuxième degré (voir [2] et [3]) :
  - le théorème de Thalès et les triangles semblables, en particulier homothétiques,
  - les coordonnées du milieu d'un segment,la construction de la quatrième proportionnelle et le partage d'un segment en n parties égales,
  - les proportions,
  - les translations, rotations et symétries,
  - l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire, les composantes d'un vecteur,
  - la géométrie analytique plane de la droite,
  - l'analyse et la construction de graphiques de fonctions du type $x \mapsto ax + b$,
  - les fonctions, équations et inéquations du premier degré,
  - l'équation cartésienne d'une droite, les systèmes de deux équations à deux inconnues,
  - les problèmes conduisant à des équations du premier degré,
  - la liaison entre les transformations géométriques et les graphiques des fonctions $f(x)$, $f(x) + k$, $f(x + k)$, $kf(x)$, $f(kx)$,
  - la moyenne d'un tableau de nombres.

Si l'enseignement de l'algèbre linéaire durant les quatre premières années de l'enseignement secondaire peut raisonnablement procéder par accumulation de résultats, il vient un moment où une mise en ordre s'impose, où une synthèse doit être réalisée. Ce n'est qu'à ce prix que la puissance de l'outil introduit sera maîtrisée par les élèves et qu'il sera possible de le rendre pleinement opérationnel.

0.2. Les difficultés d'enseignement de l'algèbre linéaire

Dans les programmes mis en application à partir de 1968, la synthèse reposait sur une explicitation de la structure d'espace vectoriel présentée dès la quatrième année. Après quelques années d'application, on s'est rendu compte que l'introduction de cette structure était trop rapide, et que les élèves ne disposaient pas en temps voulu de la maturité nécessaire. De plus, loin de jouer le rôle d'une synthèse, l'étude de la structure d'espace vectoriel était souvent réalisée pour elle-même sans liaison suffisante avec les applications, qu'il s'agisse des applications extra-mathématiques — généralement inaccessibles aux élèves du secondaire — mentionnées dans la citation du CREM ou d'applications beaucoup plus simples, notamment à la géométrie de l'enseignement secondaire.

Des recherches menées en France pour déterminer la nature des difficultés d'enseignement de l'algèbre linéaire ont confirmé, peut-être même de façon amplifiée, les observations effectuées dans l'enseignement secondaire belge. Mentionnons en particulier les travaux de J.-L. Dorier (voir [23], [24], [25]) et K. Pavlopoulou (voir [40], [41]). Ces auteurs ont analysé l'enseignement d'algèbre linéaire tel qu'il se donne en France dans une première année d'études scientifiques de niveau universitaire, contexte dans lequel la structure vectorielle est de façon standard enseignée pour elle-même. Leurs remarques montrent à suffisance les défauts de la méthodologie adoptée.

> « *Notre analyse préalable de la nature des concepts d'algèbre linéaire [...] nous laisse supposer que leur aspect unificateur et simplificateur, ainsi que l'absence de problème* « *simple* » *permettant de justifier à lui seul l'introduction de concepts qui n'ont de réelle justification que dans leur emploi répété, conduisent à un enseignement dichotomique.*

> *D'un côté, on propose des problèmes qui soulèvent de « vraies » questions, mais pour lesquels l'algèbre linéaire n'est qu'une façon plus générale, mais pas indispensable, de résolution. Ce nouveau point de vue apporte éventuellement une simplification mais qui n'est vraiment effective que, d'une part, si on maîtrise bien les concepts d'algèbre linéaire et d'autre part si on a à résoudre plusieurs problèmes du même type. En situation d'enseignement, le risque est grand que la résolution du problème par la méthode utilisant l'algèbre linéaire ne soit qu'un effet du contrat global : «on est en cours d'algèbre linéaire, donc il faut s'en servir», ou bien que les questions qui découpent la tâche obligent à cette démarche. Il n'est par contre pas certain que libre de son choix, l'étudiant privilégie la méthode issue de l'algèbre linéaire, on a d'ailleurs observé quelques «dérapages» dans ce sens. Par ailleurs la résolution de ce type de problème nécessite souvent des prérequis liés à des techniques algébriques spécifiques au domaine en jeu (calcul polynomial, calcul intégral ou dérivation, etc). Les difficultés que ce phénomène engendre peuvent dans certains cas prendre des proportions telles que l'enjeu se trouve entièrement déplacé, et que les questions d'algèbre linéaire n'apparaissent plus que comme secondaires.*
>
> *D'un autre côté, le deuxième type de problèmes proposés en algèbre linéaire se situe dans un cadre entièrement formel sans référence extérieure. Les espaces utilisés sont généraux, on peut dire que les questions sont de vraies questions d'algèbre linéaire, mais que leur intérêt hors de ce cadre n'est en général pas visible dans le problème, ce qui peut poser un problème de motivation. L'enseignement visé ici est celui de « techniques-objets », les difficultés qu'il soulève sont liées à l'utilisation du formalisme du langage ensembliste, dont on sait que les étudiants ont beaucoup de mal à l'adopter, surtout en l'absence de point d'appui sur un cadre de référence plus complet. »*

Ainsi, l'algèbre linéaire de l'enseignement secondaire belge ou du début de l'enseignement universitaire français serait soit inutile, soit trop générale. Dans les deux cas, elle ne serait pas motivante. Mais de quelle algèbre linéaire s'agit-il ?

0.3. Le malentendu de l'algèbre linéaire

Depuis les années soixante, une habitude malencontreuse s'est instaurée consistant à assimiler « algèbre linéaire » à « étude formelle de la structure d'espace vectoriel », ce qui n'en est qu'un point particulier, et pas le plus intéressant. C'est bien à l'algèbre linéaire comprise dans ce sens restreint que s'appliquent la plupart des critiques qui ont été mentionnées ci-dessus.

Cette erreur de vocabulaire et cette approche de la structure d'espace vectoriel qui n'en assurait pas le sens par une liaison correcte avec d'une part les applications, d'autre part les concepts géométriques élémentaires, a finalement eu pour conséquence non seulement le rejet de l'étude formelle de la structure d'espace vectoriel, mais aussi de ce concept lui-même et la plus grande partie de ceux qui y sont associés. En termes familiers, nous dirions qu'on a « jeté le bébé avec l'eau du bain ».

C'est ainsi qu'on a vu ces dernières années, l'importance de l'algèbre linéaire, au sens large, diminuer singulièrement dans le troisième degré de l'enseignement secondaire, alors qu'il n'est pas excessif de considérer que la grande majorité des jeunes gens qui abordent des études supérieures techniques, scientifiques, économiques ou même de sciences humaines seront confrontés à des situations relevant de cette discipline. Un effort particulier doit être réalisé en vue de leur assurer une préparation adéquate. L'enseignement de l'algèbre linéaire doit être complètement repensé. C'est à cette entreprise que notre travail doit apporter une contribution.

0.4. Les objectifs de notre recherche

Nous venons d'indiquer ce que notre travail n'est pas : l'algèbre dont il est question dans la suite **n'est pas** l'étude formelle de la structure d'espace vectoriel ni des applications linéaires. Même si nous estimons que cette dernière notion — qui n'est qu'une généralisation directe de la proportionnalité — constitue le point essentiel de tout cours d'algèbre linéaire, nous pensons contre-indiqué de l'aborder sans une préparation approfondie qui permette de la mettre en valeur.

Notre but a été de mettre au point des séquences d'enseignement du niveau du troisième degré de l'enseignement secondaire, et qui mènent progressivement les élèves des notions élémentaires de géométrie aux concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire.

Nous nous appuyons sur deux principes.

1. **En ce qui concerne le contenu : ne pas enseigner l'algèbre linéaire pour elle-même.**

   Nous ne voulons pas écrire un cours d'algèbre linéaire, mais rencontrer ses concepts et ses techniques le plus souvent possible, et cela de façon souvent informelle, à l'occasion d'activités diverses.

   Le cours de géométrie de l'espace se prête particulièrement bien à la réalisation d'un enseignement intégré d'algèbre et de géométrie. L'algèbre linéaire, au sens large, a mis en évidence le caractère linéaire, ou multilinéaire, de ces notions tout à fait fondamentales dans la géométrie d'Euclide que sont : le point, la droite, le plan, l'incidence, le parallélisme, la perpendicularité, la mesure des distances, des angles, des volumes, ...Depuis plus de 150 ans, la géométrie d'Euclide s'exprime largement dans le langage de l'algèbre linéaire.

   L'algèbre linéaire a aussi permis d'ouvrir la géométrie : pour l'essentiel, c'est même ce qui en a organisé le développement en rendant accessible par exemple les espaces de dimension supérieure à 3.

Coordonner algèbre linéaire et géométrie permet de montrer la puissance en géométrie de l'outil algébrique, mais aussi de faire bénéficier l'algèbre linéaire de l'intuition acquise en géométrie. C'est ce que Hans Freudenthal (voir [28]) appelle algébriser la géométrie et géométriser l'algèbre. Cette coordination de l'algèbre linéaire et de la géométrie constitue la première partie (et la plus importante) de notre travail, intitulée *La géométrie de l'algèbre linéaire*. Nous nous y efforçons de mettre en évidence systématiquement les trois éclairages de la plupart des activités de géométrie de l'espace, le but étant de permettre à l'élève qui doit résoudre un problème de choisir celui des points de vue synthétique, vectoriel ou analytique qui se révèle le plus adéquat. Actuellement, algèbre et géométrie semblent parler de l'espace de manières différentes, l'une à l'aide de figures, d'images et de démonstrations souvent élégantes, l'autre à partir de calculs et de structures formelles. Et ces deux approches des mêmes problèmes semblent très éloignées l'une de l'autre. L'élève n'apprend pas à choisir l'outil qui lui permet de résoudre le problème qui lui est posé.

La limitation de la dimension à 3 se révèle rapidement un inconvénient important, qui empêche de percevoir la portée véritable des concepts d'algèbre linéaire. D'autres activités doivent donc également être proposées aux élèves. Elles peuvent être issues d'autres domaines mathématiques (analyse, probabilités) mais aussi d'autres disciplines. Il est en particulier souhaitable de présenter également des activités ayant un caractère interdisciplinaire. Deux d'entre elles constituent la seconde partie de notre travail.

2. **En ce qui concerne les activités : mettre en évidence des analogies et laisser mûrir les notions**

   Dès que l'élève a acquis les principes de géométrie vectorielle, synthétique ou analytique, ce devrait être à lui de choisir librement la m éthode de résolution des problèmes qui lui sont soumis. Mais c'est à l'enseignant de faire ressortir les analogies et les différences entre les traitements possibles. Le but n'est pas tant de résoudre un problème que de réfléchir sur ce qui fait que le problème peut être résolu. Les traits fondamentaux, tant géométriques qu'algébriques doivent ainsi apparaître et réapparaître dans des circonstances différentes.

   Les applications non géométriques, relevant de contextes variés, doivent également permettre de mettre en évidence des analogies conduisant à des économies de pensée. Ce sont les faits structurels de l'algèbre linéaire qui doivent être mis en place en souplesse, et sans formalisation. On attendra donc que l'élève ait de lui-même saisi la signification profonde des analogies remarquées avant de les exploiter en vue d'une quelconque formalisation. Cette dernière pourrait même ne jamais avoir lieu dans le cadre de l'enseignement secondaire, mais les activités menées à ce niveau la rendrait possible et fructueuse dans l'enseignement supérieur.

0.5. Résultats de la recherche

Le chapitre 1 du présent travail propose un schéma d'organisation de l'enseignement de l'algèbre linéaire selon 10 grands thèmes théoriques.

Pour opérationnaliser ce schéma, une période de plusieurs années de travail serait nécessaire. Nous avons donc dû nous limiter à en traiter seulement une partie.

Les fiches que nous présentons au chapitre 2 sont ainsi structurées de façon différente et regroupées en sections qui ne correspondent pas exactement aux thèmes du chapitre 1. Le tableau suivant indique la concordance entre thèmes et sections.

Thème	Section	Titre
I	A	Géométrie d'incidence
II	B	Géométrie vectorielle
V	F	Rotations de l'espace
VI	E	Produit vectoriel, volume et déterminant
VII	C	Systèmes d'équations linéaires et fonctions linéaires
VIII	F	Rotations de l'espace
IX	–	
X	–	

On notera en particulier que les thèmes V et VIII de l'étude théorique sont abordés ensemble dans les fiches de la section F (sans intervention des quaternions). L'étude du produit extérieur prévue au thème VI a été ramenée à celle du produit vectoriel dans les fiches de la section E.

Telles qu'elles sont, les fiches sont plus destinées au professeur qu'aux élèves. Elles proposent une construction inductive de la théorie à partir de problèmes, lesquels ne sont pas conçus pour être résolus par les élèves sans intervention de l'enseignant. Si une prolongation du projet avait été possible, la seconde année aurait été consacrée en partie à leur expérimentation dans des classes.

Les chapitres 3 et 4 ouvrent une porte vers des activités interdisciplinaires en proposant des applications peu classiques : le calcul du champ électrique créé par des charges ponctuelles situées aux sommets d'un réseau cubique et la construction d'un cadran solaire.

Afin de faciliter la visualisation de situations sur un réseau cubique préconisée dans les premières fiches, nous avons réalisé un didacticiel intitulé « Reseau.exe » qui est joint au présent fascicule et dont les annexes 1 et 2 proposent d'une part un mode d'emploi, d'autre part un exemple d'utilisation.

Les annexes 3 et 4 présentent un inventaire succinct des principaux textes classiques consacrés à l'algèbre linéaire et à la notion de vecteur.

Le travail est complété par une bande vidéo d'environ 10 minutes qui illustre les fiches de la section A.

Enfin, signalons que ce travail a fait l'objet de trois communications dans le cadre du Séminaire de Didactique des Mathématiques organisé à l'Université de Mons-Hainaut en février et mars 1997.