

Première partie

La géométrie de l'algèbre linéaire

Chapitre 1

Analyse théorique

1.1	La problématique	13
1.1.1	L'enseignement de la géométrie	14
1.1.2	Le problème de la représentation plane	15
1.1.3	Le problème de la méthode	17
1.1.4	La géométrie de l'algèbre linéaire	20
1.2	Les grands thèmes	21
1.2.1	Les prérequis	22
1.2.2	Les thèmes fondamentaux et les thèmes annexes	23
1.2.3	Thème I : Géométrie d'incidence de l'espace	24
1.2.4	Thème II : Géométrie vectorielle élémentaire	25
1.2.5	Thème III : Produit scalaire	27
1.2.6	Thème IV : Nombres complexes et rotations du plan	28
1.2.7	Thème V : Les rotations de l'espace	30
1.2.8	Thème VI : Volume, produit extérieur et déterminant	33
1.2.9	Thème VII : Systèmes d'équations linéaires	39
1.2.10	Thème VIII : Matrices et composition des transformations linéaires	41
1.2.11	Conclusions	42
1.3	Relations entre les thèmes	44

1.1. La problématique

Cette introduction relève quelques uns des problèmes rencontrés par l'enseignement de la géométrie dans l'espace, et plus particulièrement dans ses relations avec l'enseignement de l'algèbre linéaire.

1.1.1 L'enseignement de la géométrie

Les problèmes posés par l'enseignement de la géométrie sont l'objet d'un rapport récent de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM ou ICMI).

Geometry, considered as a tool for understanding, describing and interacting with the space in which we live, is perhaps the most intuitive, concrete and reality-linked part of mathematics. On the other hand geometry, as a discipline, rests on an extensive formalization process, which has been carried out for over 2000 years at increasing levels of rigour, abstraction and generality ...

Among mathematicians and mathematics educators there is a widespread agreement that, due to the manifold aspects of geometry, the teaching of geometry should start at an early age, and continue in appropriate forms throughout the whole mathematics curriculum. However, as soon as one tries to enter into details, opinions diverge on how to accomplish the task. There have been in the past (and there persist even now) strong disagreements about the aims, contents and methods for the teaching of geometry at various levels, from primary school to university.

Perhaps one of the main reasons for this situation is that geometry has so many aspects, and as a consequence there has not yet been found — and perhaps there does not exist at all — a simple, clean, linear “hierarchical” path from the first beginnings to the more advanced achievements of geometry. Unlike what happens in arithmetic and algebra, even basic concepts in geometry, such as the notions of angle and distance, have to be reconsidered at different stages from different viewpoints.

([5] pp. 345-346)

Mais si ces problèmes ne sont pas nouveaux, ils prennent depuis quelques années une urgence nouvelle, comme le signale le même document (p.346).

Thus the teaching of geometry is not at all an easy task. But instead of trying to face and overcome the obstacles arising in the teaching of geometry, actual school-practice in many countries has simply bypassed these obstacles, cutting out the more demanding parts, often without any replacement. For instance, three-dimensional geometry has almost disappeared or has been confined to a marginal role in the curricula in most countries.

Quant à l'enseignement de la géométrie de l'espace, il possède ses difficultés propres qui ne sont pas sans interaction avec l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

1.1.2 Le problème de la représentation plane

Comme toute discipline mathématique, la géométrie de l'espace possède ses difficultés propres. Mais, d'une certaine manière, elle possède une difficulté de plus, liée à notre mode de vision. Cette difficulté supplémentaire, déjà analysée entre autres par R. Bkouche, (voir [12]), est celle de la représentation plane des objets de l'espace.

Il est bien difficile d'imaginer un cours de géométrie dans l'enseignement secondaire qui puisse ne pas recourir au dessin : à ce stade de l'apprentissage, une représentation aussi fidèle que possible de l'objet géométrique à étudier est manifestement indispensable .

Or, la feuille de papier étant un objet naturellement associé à l'idée de plan, le manque de fidélité de la représentation dessinée d'un objet géométrique plan ne résulte généralement que de l'épaisseur, inévitablement non nulle, des traits. Cette discordance étant reconnue, on peut considérer qu'il n'y a pas de problème de représentation fidèle des objets plans par le dessin. Mais, et toujours parce que la feuille de papier est plane, il y a un problème réel quant à la représentation « fidèle et plane » des objets à trois dimensions.

Ce problème est une difficulté première et incontournable dans le cours de géométrie de l'espace ⁽¹⁾. On peut lui apporter deux types de solutions.

La première consiste à développer une « imagination de l'espace », c'est-à-dire à apprendre à se figurer consciemment l'espace tel qu'il est, et non pas tel qu'on le voit. Par exemple : des droites non coplanaires (ou gauches) doivent être présentes à l'esprit comme constituant un objet réel, alors que celui-ci n'est pas réductible à un objet plan. Ou des droites parallèles doivent être imaginées telles, alors qu'on les voit sécantes.

La seconde solution revient à décoder aussi explicitement que possible des modes de représentation plane des objets de l'espace, c'est-à-dire à apprendre à se figurer consciemment l'espace, soit tel qu'on le voit (perspective centrale), soit suivant d'autres règles élémentaires de représentation plane (perspective cavalière, projections orthogonales, etc). En un mot : il s'agit de dessiner l'espace tel qu'on sait bien qu'il n'est pas !

⁽¹⁾ Si la découverte des règles de la perspective centrale (c'est-à-dire du dessin des objets de l'espace tels qu'ils sont vus), par les peintres italiens du Quattrocento a été si tardive, c'est que ces règles n'étaient pas évidentes ! Pourquoi ? Probablement parce que nous ne percevons pas consciemment que notre vision est plane, et que donc ce que nous voyons est déjà « pré-codé ». Dès lors, s'il s'agit d'énoncer les règles qui président à la reproduction fidèle de ce que nous voyons, il faut se regarder en train de voir, et analyser alors géométriquement l'ensemble du processus. En d'autres mots : il faut amener à portée de la conscience ce qui, de par sa nature, fonctionne inconsciemment.

Même dans les cas où le problème de représentation plane d'un objet spatial est résolu de façon satisfaisante, même dans les cas où on a eu recours à un modèle matériel à trois dimensions, la complexité de l'objet lui-même ne permet pas toujours de tirer de cette représentation ou de cette modélisation le bénéfice que l'on en espérait. Ainsi, des expériences réalisées en URSS ont montré qu'une amélioration de la perception spatiale n'est pas suffisante pour entraîner automatiquement la prise de conscience des raisonnements à effectuer (voir [29]). On peut dire que l'appréhension d'une situation spatiale est plus difficile que celle d'une situation plane.

La conjonction des difficultés mathématiques propres au sujet, des difficultés inhérentes à la représentation plane des objets de l'espace et des difficultés d'appréhension des situations spatiales pourrait avoir comme conséquence importante que les programmes de géométrie de l'espace soient moins ambitieux que ceux de géométrie plane, alors que la géométrie de l'espace, étant celle du monde où nous vivons, devrait être la plus étudiée et probablement la plus ambitieuse. . . Et en effet, l'enseignement, autant en géométrie synthétique qu'en géométrie analytique, dès qu'on en arrive à la dimension 3, se limite en général ⁽²⁾ à la seule étude des relations les plus élémentaires (incidences, parallélismes, orthogonalités pour les droites et les plans).

Il apparaît ainsi une disproportion assez manifeste avec le volume de connaissances dispensé dans le cours de géométrie plane. Il en résulte aussi un manque de possibilités d'enseignement en spirale, les sujets concernés paraissant trop difficiles. Un exemple typique est la faible place réservée à l'étude des transformations de l'espace, alors qu'elle devrait prolonger de manière essentielle l'étude des transformations du plan.

On donne ainsi l'image d'une géométrie « fermée », qui ne sait pas généraliser, qui n'a plus d'outils assez puissants pour dépasser les difficultés . . .

⁽²⁾ Il n'en a pas toujours été ainsi. Par exemple, les programmes belges de 1955 comportaient des chapitres consacrés aux dièdres, trièdres, à divers polyèdres, à la sphère, ... sans parler de la géométrie descriptive.

1.1.3 Le problème de la méthode

La géométrie est certainement un des lieux privilégiés de l'apprentissage de l'activité mathématique pour les élèves du secondaire. Mais comment donner à ces élèves suffisamment de moyens d'être créatifs en géométrie de l'espace vu que, comme signalé ci-dessus, les difficultés y sont grandissantes, qu'il est nécessaire de relayer « l'imagination de l'espace », et que le dessin n'y suffit pas. Peut-on alors laisser l'élève s'enfermer dans une géométrie fermée et pauvre en résultats ?

Freudenthal nous rappelle opportunément que l'algèbre peut venir à notre secours :

From Descartes onwards, algebra was admitted into geometry though the honorific title of true geometry was still reserved to the Euclidean method. However the more geometry proved unable to compete with the greater fertility of algebra and analysis, the more it was neglected, and the more its weakness became evident, the more people were inclined to rely on the so-called analytic geometry. Hilbert's " Grundlagen der Geometrie " could not turn back this trend. On the contrary, it showed even more clearly what was lacking in Euclid and how hard it was to fill the gaps. Moreover, was not the final result of Hilbert's approach the coordinatization and algebraization of geometry ?

([28] p. 420)

Dans sa brochure proposant des « standards », le *National Council of Teachers of Mathematics* (U.S.A.), (voir [6] p.161) esquisse un programme de « géométrie algébrique » :

In grades 9-12, the mathematics curriculum should include the study of the geometry of two and three dimensions from an algebraic point of view so that all students can

- *translate between synthetic and coordinate representations ;*
- *deduce properties of figures using transformations and using coordinates ;*
- *identify congruent and similar figures using transformations ;*
- *analyze properties of Euclidean transformations and relate translations to vectors ;*

and so that, in addition, college-intending students can

- *deduce properties of figures using vectors ;*
- *apply transformations, coordinates, and vectors in problem solving.*

L'introduction de méthodes algébriques en géométrie est donc inévitable, et cela dès l'étude de la géométrie plane. On se trouve alors confronté au problème du *choix de la méthode* de résolution d'un problème.

Dans le contexte de la géométrie synthétique plane, on distingue déjà la géométrie des figures et la géométrie des transformations. L'introduction d'un repère cartésien permet de ramener de nombreux problèmes à des résolutions d'équations. Le calcul vectoriel et le calcul barycentrique sont adaptés à certains problèmes particuliers. Une autre forme — extrêmement puissante, mais qui n'est d'habitude enseignée ni dans le secondaire, ni ailleurs — de ce que nous pourrions appeler un calcul algébrico-géométrique est disponible dès qu'ont été introduits les nombres complexes et leur interprétation géométrique.

Mais plus la résolution d'un problème est algébrique, plus elle risque de s'écarter de l'intuition géométrique. On peut ainsi rencontrer des démonstrations de résultats géométriques dont on se dit que « ce n'est plus de la géométrie ». C'est le cas de certaines applications du produit scalaire. C'est encore plus le cas des calculs basés sur les nombres complexes. Lors de l'étude de la géométrie plane, la transition du point de vue synthétique vers un point de vue algébrique doit s'effectuer sans brûler les étapes, en veillant à ce que l'élève ait présent à l'esprit le sens géométrique des calculs algébriques. Sans quoi, il ne sera pas en mesure de distinguer qu'un problème formulé uniquement en termes géométriques peut éventuellement être résolu par une méthode algébrique.

Les mêmes principes peuvent être appliqués à la géométrie de l'espace. Mais au troisième degré du secondaire, l'élève n'est plus tout à fait un débutant. Il a déjà rencontré en géométrie plane l'usage de méthodes algébriques. En particulier, il sait ce qu'est un système de coordonnées cartésiennes. Il n'est donc pas indispensable d'avoir rencontré beaucoup de concepts et de résultats de géométrie synthétique avant de traduire certaines situations en termes algébriques. On peut plutôt envisager un enseignement qui amène les élèves régulièrement en contact avec les divers points de vue, assurant ainsi la coordination de ces points de vue, et conservant un sens géométrique même aux calculs purement algébriques. C'est cette approche que nous avons esquissée dans l'introduction générale. Mettre en évidence systématiquement les trois éclairages, synthétique, vectoriel, analytique, de la plupart des activités de géométrie de l'espace, doit permettre à l'élève aux prises avec un problème de choisir celui de ces points de vue qui est le plus efficace. Il s'agit non pas de lui *enseigner une méthode de résolution* des problèmes de géométrie de l'espace, mais de lui en enseigner plusieurs, et surtout de lui *apprendre à en choisir une*.

Dans ce contexte, l'algèbre linéaire est un outil privilégié. Elle permet de traiter avec aisance certaines situations géométriques qui ne pourraient être étudiées qu'avec difficultés par les méthodes synthétiques. Il en est ainsi, par exemple, des transformations de l'espace.

Mais ce que nous avons appelé le « malentendu de l'algèbre linéaire » dans l'introduction générale a eu pour conséquence de priver le cours de géométrie de l'espace du bénéfice des méthodes d'algèbre linéaire. Dans l'état actuel des choses, il y a par conséquent un vide à combler entre l'enseignement de la géométrie de l'espace dans le secondaire et l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les écoles supérieures et les universités. D'autant plus que ce vide se traduit par une formidable perte de sens, et handicape ainsi sérieusement l'apprentissage de l'algèbre linéaire par ceux-là mêmes qui sont amenés à devoir s'en servir concrètement dans des contextes divers.

De telles difficultés doivent pouvoir se dissiper si on en revient aux sources mêmes de l'algèbre linéaire. Il existe en effet des chemins qui vont de la géométrie vers l'algèbre linéaire, sans réduire pour autant le cours de géométrie à une illustration desséchée des notions d'algèbre linéaire.

1.1.4 La géométrie de l'algèbre linéaire

La première partie de notre travail consiste en un exposé qui éclaire les difficultés propres à l'enseignement de la géométrie de l'espace et contribue à les résoudre par l'introduction de notions d'algèbre linéaire, qui facilite la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur en ce qui concerne l'apprentissage des modes de pensée particuliers de l'algèbre linéaire, et dissipe ainsi les malentendus signalés plus haut.

En ce sens, on y entendra parler sans arrêt de points, de droites, de plans, d'incidences, de parallélisme, de perpendicularité, de distances, d'angles, de surfaces, de volumes, de transformations, et des relations que tous ces objets entretiennent entre eux, mais on y entendra parler tout autant de la manière dont on amène tous ces objets à la portée du calcul, de la signification de ce calcul, et des avantages géométriques qu'on en retire.

Il y a enfin, au coeur de notre projet, la volonté de convaincre de la pertinence d'un enseignement de l'algèbre linéaire dans le secondaire, autant vis-à-vis de la géométrie que d'autres parties des mathématiques. Cela est notamment possible à travers la résolution de problèmes où l'algèbre linéaire est indispensable, ainsi que par la mise en évidence de la symbiose entre algèbre et géométrie.

De manière très succincte, parmi les problèmes qui semblent les plus pertinents, citons :

- l'étude géométrique des systèmes d'équations linéaires, c'est-à-dire la traduction géométrique de tous les résultats classiques concernant leur résolution ; il est remarquable que cette traduction aura comme source des généralisations appropriées des notions de surface et volume ;
- l'étude géométrique des rotations de l'espace, en particulier la question de la composition de ces rotations ;
- l'étude géométrique des changements linéaires de variables, et de leur composition, en terme d'un « dictionnaire matriciel », et en prolongement entr'autres des deux problèmes précédents.

Tels quels, ces problèmes ne signifient pas encore grand chose, ou au contraire peut-être ... trop de choses. C'est pour cela que nous fournissons dans la suite une première description, plus détaillée, des grands thèmes qui devraient traverser « la géométrie de l'algèbre linéaire ». Certains de ces thèmes seront traités au chapitre 2 à l'aide d'une ou plusieurs fiches constituant autant de séquences d'enseignement.

1.2. Les grands thèmes

Les trois grands axes de notre coordination algèbre linéaire-géométrie, tels qu'ils ont été sommairement décrits à la fin de la section précédente, vont être abordés dans la suite à travers huit thèmes fondamentaux, fortement reliés entre eux, notés I à VIII, et auxquels pourraient s'ajouter deux thèmes annexes, IX et X.

1.2.1 Les prérequis

La mise en évidence de l'aspect géométrique de l'algèbre linéaire s'organise sur base de certains prérequis, qui ont en général fait l'objet d'un enseignement systématique dans le second degré de l'enseignement secondaire.

Ces prérequis peuvent être regroupés sommairement en quatre rubriques.

Les systèmes d'équations linéaires élémentaires

L'élève aura rencontré différentes situations, géométriques ou autres, qui débouchent sur un système d'équations du premier degré à deux, trois ou encore plus d'inconnues. Il s'agit en règle générale de systèmes à coefficients numériques, d'où la qualification d'« élémentaires ». L'élève sera en mesure de résoudre de tels systèmes, et d'interpréter la solution obtenue dans le contexte du problème considéré.

La géométrie affine plane

L'élève aura une connaissance suffisante des résultats de base de la géométrie affine du plan (propriétés d'incidence et de parallélisme, configurations géométriques élémentaires et en particulier le théorème de Thalès, transformations, etc. ...).

Il aura effectué un premier apprentissage des notions de base (positions relatives, incidences, parallélismes) de la géométrie dans l'espace. Néanmoins le **THÈME I** reprendra ces notions et ces résultats dans un contexte approprié à leur traduction algébrique ultérieure.

Une première approche de la notion de vecteur dans le plan, si elle n'est évidemment pas nuisible, n'est pas indispensable pour la suite, comme on s'en rendra compte dans le **THÈME II**. Par contre, une familiarisation avec l'utilisation des coordonnées pour résoudre des problèmes géométriques élémentaires dans le plan semble nécessaire.

La géométrie euclidienne

L'élève aura une connaissance suffisante des résultats de base de la géométrie euclidienne du plan (isométries, théorème de Pythagore, trigonométrie du triangle quelconque).

En conséquence de ce qui a été signalé ci-dessus à propos de la notion de vecteur, le produit scalaire ne doit pas avoir été rencontré.

L'algèbre du second degré

L'élève aura une connaissance raisonnée du calcul des radicaux du second ordre, des propriétés de l'équation autant que de la fonction du second degré.

1.2.2 Les thèmes fondamentaux et les thèmes annexes

Le coeur de la partie " La géométrie de l'algèbre linéaire " est constitué par huit grands thèmes :

- I : Géométrie d'incidence de l'espace**
- II : Géométrie vectorielle élémentaire**
- III : Produit scalaire**
- IV : Nombres complexes et rotations du plan**
- V : Rotations de l'espace**
- VI : Volume, produit extérieur et déterminant**
- VII : Systèmes d'équations linéaires géométriques**
- VIII : Matrices et composition des transformations**

Il s'y greffe deux thèmes annexes :

- IX : Géométrie de la sphère**
- X : Géométrie projective**

La suite est consacrée à une description un peu plus détaillée de ces divers thèmes, pris l'un après l'autre. Cette description n'est pas exhaustive : on s'y est limité à mettre en valeur certaines constructions et certains résultats qui reflètent mieux que d'autres les orientations caractéristiques du projet.

Les thèmes étant reliés les uns aux autres par un grand nombre de relations, un diagramme résumant leur organisation logique est fourni à la page [44](#).

1.2.3 Thème I : Géométrie d'incidence de l'espace

Notre objectif est de rappeler les résultats élémentaires de géométrie affine de l'espace (caractérisation de points, droites, plans, incidences, parallélismes, notions de perpendicularité). Le problème des ombres au soleil ou des projections parallèles fournit l'occasion de mettre cet ensemble de résultats en situation.

Mais ce problème n'est pas traité de manière tout à fait classique.

On propose une méthode simple de représentation des objets de l'espace qui permet d'installer une intuition réelle des propriétés et de suggérer des solutions. Cette méthode consiste à construire et étudier la figure associée au problème dans un réseau cubique « bien adapté ».

La présence de ce réseau cubique permet de mieux visualiser la position relative des objets (points, droites, plans) étudiés. En particulier, les plans et les droites se prolongent plus naturellement, les faces du réseau servent de support aux constructions, et des méthodes de résolution sont suggérées.

Un exemple simple est celui du point de percée dans une face d'un cube d'une droite définie par deux points situés dans deux autres faces de ce cube : la solution habituelle équivaut à l'usage de coordonnées cubiques.

Il est bien clair que le seul usage de réseaux cubiques ne permet pas de résoudre simplement tous les problèmes élémentaires de géométrie de l'espace. La géométrie de la molécule de méthane est un exemple simple de problème non-cubique. Mais la technique cubique se transpose sans grand mal : on sait, en effet, quel rôle privilégié est dévolu à l'orthogonalité dans la géométrie du tétraèdre régulier. C'est à travers l'orthogonalité que la technique cubique se prolonge.

De plus, on observe assez facilement que même des réseaux non-orthogonaux se manipulent sans difficulté supplémentaire notable, et présentent les mêmes avantages.

Le recours à des réseaux cubiques, et la place réservée à l'orthogonalité permettent de préparer la mise en place de la notion de coordonnées, et de relier ainsi le plus tôt possible l'approche géométrique à l'approche algébrique.

En ce sens, le réseau cubique peut être assimilé à une structure visuelle géométrique au sens de Van Hiele (voir [49]), mais appropriée à la géométrie dans l'espace, et préalable à d'autres formes de représentations, plus algébriques.

1.2.4 Thème II : Géométrie vectorielle élémentaire

On dit qu'une variable y dépend linéairement d'une variable x s'il existe un nombre réel a tel que $y = a \cdot x$. Plus généralement, une variable y dépend linéairement des variables x_1, x_2, \dots, x_n , s'il existe des nombres réels a_1, a_2, \dots, a_n , tels que

$$y = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$$

Comme signalé dans l'introduction, un nombre suffisant de phénomènes linéaires ont déjà été rencontrés et étudiés dans les enseignements de mathématiques des années précédentes. Un des objectifs du cours d'algèbre linéaire est d'organiser maintenant tous ces résultats en les unifiant. Cette organisation s'entame avec la découverte du calcul vectoriel, et l'étude des premières incarnations géométriques de la notion de vecteur.

Partant de cette idée fondamentale de linéarité, un vecteur est (provisoirement) défini comme n'importe quel objet mathématique porteur ⁽³⁾ d'un calcul linéaire, de telle sorte qu'attribuer à un objet mathématique le statut de vecteur signifie : expliciter ses comportements caractéristiques en termes de linéarité.

Il est classique d'attribuer ce statut à trois types d'objets.

1. Le passage aux coordonnées est une clé essentielle pour introduire les différentes incarnations proprement géométriques de la notion de vecteur et, de cette façon, permettre de parler de ce calcul linéaire.

Dans un système de coordonnées quelconques du plan ou de l'espace, d'origine fixée en un point O , les coordonnées de deux points A et B , dès qu'elles s'additionnent, déterminent ainsi un nouveau point C . Cette addition formelle donne naissance à une figure géométrique remarquable : le parallélogramme $OACB$.

D'autre part, l'ensemble de tous les multiples des coordonnées d'un seul point $A \neq O$ coïncide avec l'ensemble des coordonnées des points de la droite AO .

Ces résultats justifient que, un système de coordonnées étant fixé, **le statut de vecteur soit attribué à tout triplet de nombres réels**, considéré comme coordonnées d'un point de l'espace. On note \mathbb{R}^3 l'espace de ces vecteurs.

2. Dans la construction précédente, les interprétations géométriques des deux opérations constitutives d'une relation linéaire, à savoir l'addition et la multiplication par un nombre réel, sont en fait indépendantes du choix d'un système de coordonnées.

⁽³⁾ Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que le mot vecteur provient de la racine latine *vec-* signifiant transporter. On parle ainsi en biologie d'un organisme vecteur du germe d'une maladie et dans le domaine militaire d'un missile vecteur d'une charge nucléaire. Le mot est apparu en astronomie dans la locution rayon vecteur (droite censée porter une planète dans son mouvement autour du soleil). Il est passé en géométrie dans le cadre de l'usage des coordonnées polaires. On consultera à ce sujet la notice du mot *vecteur* dans [7]

Il est donc normal que l'on attribue aussi le statut de vecteur à tout point de l'espace. L'addition de tels vecteurs est associée à la configuration du parallélogramme, et la multiplication par un nombre réel est associée à une homothétie de centre O .

3. Quel que soit le système de coordonnées considéré, une translation de l'espace ne se décrit pas par une ou plusieurs relations linéaires. Mais il est néanmoins tout à fait justifié de considérer la composition des translations ainsi que la multiplication des translations par un nombre réel, comme donnant lieu à un calcul linéaire.

Ces résultats justifient que l'on attribue encore le statut de vecteur à toute translation de l'espace.

Les correspondances décrites ci-dessus font référence à des isomorphismes. On rencontre ainsi cette idée fondamentale que des objets géométriques *a priori* différents peuvent être des incarnations d'une même notion, celle de vecteur, qui rend compte de manière unifiée de leurs caractéristiques essentielles.

Ultérieurement, un nouvel isomorphisme apparaît quand on attribue le statut de vecteur aux bipoints de l'espace pourvu qu'on identifie les bipoints équipollents, c'est-à-dire images les uns des autres par translations.

Les exemples précédents, concernant les aspects géométriques de la notion de vecteur, sont classiques et se retrouvent dans tous les apprentissages de l'algèbre linéaire. Mais d'autres, plus originaux, pourraient être abordés dans les thèmes ultérieurs :

- le bivecteur directeur, dans le THÈME VI,
- les solutions d'un système d'équations linéaires, dans le THÈME VII,
- les transformations linéaires dans le THÈME VIII, en prolongement de l'étude de l'espace des équations linéaires.

Avec une telle collection d'exemples, tous les phénomènes linéaires étudiés dans les cours de mathématiques des années précédentes auraient été rencontrés, unifiés, et substantiellement généralisés.

De plus, dès la construction des premiers exemples et des premiers concepts, la démarche devrait être inductive.

En résumé, ce thème propose une construction inductive du calcul vectoriel, qui s'arrête juste avant l'apparition de la structure d'espace vectoriel. Cette construction prend comme point de départ la géométrisation de la notion algébrique de phénomène linéaire. Elle explicite les isomorphismes entre les différentes incarnations géométriques de la notion de vecteur, pour faire percevoir le caractère unificateur de cette notion. Cela fait, les éléments fondamentaux de la géométrie de l'espace, tels que rappelés dans le THÈME I, sont disponibles pour ce « calcul géométrique » qui était le rêve de LEIBNIZ.

1.2.5 Thème III : Produit scalaire

Le produit scalaire est souvent perçu comme lié aux seules questions de perpendicularité dans l'espace. Le produit scalaire fait, bien sûr, mieux que cela : il règle la question de la mesure des angles quelconques dans l'espace.

La notion même de produit scalaire est une conséquence immédiate du théorème de Pythagore généralisé, et du calcul du module d'un vecteur en terme de ses composantes.

De manière un peu plus précise, si on travaille dans un système de coordonnées orthogonales d'origine O , et si on considère les points A , de coordonnées (a_1, a_2, a_3) et B de coordonnées (b_1, b_2, b_3) , le théorème de Pythagore généralisé dans le plan déterminé par A , O et B fournit la relation

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2 \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \cos \widehat{AOB}$$

d'où on tire immédiatement

$$|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \widehat{AOB} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

La richesse remarquable de cette relation, et en particulier le fait que le membre de gauche soit indépendant du choix d'un système de coordonnées (pourvu qu'elles soient orthogonales), justifie qu'on attribue un nom particulier à la quantité $|OA| \cdot |OB| \cdot \cos \widehat{AOB}$: c'est le produit scalaire des vecteurs A et B , noté $A \bullet B$.

Cette même relation permet de justifier toutes les propriétés usuelles du produit scalaire, dont la bilinéarité.

1.2.6 Thème IV : Nombres complexes et rotations du plan

Comme on le verra dans la description du THÈME V, les rotations de l'espace pourraient être étudiées à partir d'une extension appropriée de l'interprétation géométrique des nombres complexes. Ceci, en plus de leur importance fondamentale en mathématiques et en physique, explique qu'un thème consacré aux nombres complexes et aux rotations du plan trouve sa place ici.

Ce thème est classique, et suffisamment documenté pour qu'il ne soit pas utile de reprendre ici le détail de son développement. On se limitera dans la suite à deux commentaires.

D'abord, il semble essentiel de fournir une raison valable à l'existence des nombres complexes. L'étude de l'équation du troisième degré sous forme réduite

$$x^3 + px + q = 0$$

mène sans grande difficulté à la formule dite « de Cardan » pour en déterminer une racine. Mais l'application de cette formule à quelques exemples simples tels que

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x^3 - 7x - 6 = 0$$

dont on peut, indépendamment, déterminer toutes les racines, amène une conclusion paradoxale : la formule de Cardan, bien que manifestement correcte, ne peut pas s'appliquer, parce qu'elle nécessite l'extraction de la racine carrée d'un nombre négatif. Par contre, si l'on crée une racine carrée de -1, et qu'à part cela, on calcule comme d'habitude, on retrouve sans trop de peine les racines connues par ailleurs.

Une telle mise en situation permet d'expliquer autant les raisons de l'invention des nombres complexes que les règles de calcul qu'on leur impose ⁽⁴⁾.

D'autre part, le développement des propriétés des nombres complexes utilisera les notions de norme et de trace d'un nombre complexe. Pour mémoire, si a et b sont des nombres réels, et $z = a + bi$ un nombre complexe, on note $\bar{z} = a - bi$ le conjugué de z ; on appelle trace de z , et on note $Tr(z)$, le nombre réel défini par

$$Tr(z) = z + \bar{z} = 2a$$

et on appelle norme de z , et on note $N(z)$, le nombre réel défini par $N(z) = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

La trace de z est donc le double de la partie réelle de z , cependant que la norme en est le carré de la valeur absolue.

⁽⁴⁾ Par ailleurs, il est peut-être utile de signaler que le polynôme caractéristique d'une transformation linéaire de \mathbb{R}^3 est un polynôme du troisième degré, qu'une transformation (affine) de l'inconnue permet de ramener toujours à une forme réduite.

Réciproquement, la connaissance de la trace et de la norme d'un nombre complexe z permet de retrouver ce nombre en résolvant l'équation du second degré

$$Z^2 - Tr(z) \cdot Z + N(z) = 0$$

En particulier, si les deux nombres complexes $u = a + bi$ et $v = a' + b'i$ sont interprétés comme vecteurs de \mathbb{R}^2 , on a la formule

$$\frac{1}{2}Tr(u\bar{v}) = aa' + bb'$$

La forme $\frac{1}{2}Tr(u\bar{v})$ permet donc de retrouver l'expression du produit scalaire de deux vecteurs du plan.

1.2.7 Thème V : Les rotations de l'espace

Comme signalé dans la Problématique, ce thème serait consacré à un premier temps fort : l'étude des rotations de l'espace et de leur composition. En voici, de manière succincte, les étapes principales.

Les rotations élémentaires.

Lors de l'étude géométrique des nombres complexes, on observe que la multiplication par i s'interprète comme une rotation de $\frac{\pi}{2}$ radians. On généralise cette observation à l'espace de la manière suivante. On note :

I, J, K : un système orthonormé de trois vecteurs, orienté dans le sens direct,

- i : la rotation directe d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians définie dans le (seul) plan perpendiculaire à I ,
- j : la rotation directe d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians définie dans le (seul) plan perpendiculaire à J ,
- k : la rotation directe d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians définie dans le (seul) plan perpendiculaire à K .

On vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} i(J) &= K & i(K) &= -J \\ j(K) &= I & j(I) &= -K \\ k(I) &= J & k(J) &= -I \end{aligned}$$

De plus, on note $-i, -j, -k$ les rotations réciproques de i, j, k . Comme c'est le cas de i, j, k , ces rotations ne sont définies que dans un plan : i et $-i$ sont définies dans le plan perpendiculaire à I , etc.

On vérifie sans plus de peine que

$$\begin{aligned} -i(J) &= -K & -i(K) &= J \\ -j(K) &= -I & -j(I) &= K \\ -k(I) &= -J & -k(J) &= I \end{aligned}$$

Enfin, là où ces compositions ont du sens, on obtient facilement les formules

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 & ij &= -ji = k \\ j^2 &= -1 & \text{et surtout } jk &= -kj = i \\ k^2 &= -1 & ki &= -ik = j \end{aligned}$$

Des nombres complexes aux quaternions.

Par analogie avec la construction des nombres complexes et leur interprétation géométrique en termes de rotation du plan, on introduit alors l'ensemble

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

des quaternions de Hamilton, munis d'une opération d'addition terme à terme et d'une opération de multiplication induite des formules ci-dessus. L'observation fondamentale est que cette multiplication ne pourrait pas être commutative, et ce pour les raisons géométriques détaillées plus haut !

A part ce défaut de commutativité, l'essentiel des propriétés algébriques des nombres complexes est préservé. Le tableau suivant en résume quelques unes.

	Nombres complexes	Quaternions
Ecriture standard	$z = a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$	$q = a + bi + cj + dk$ où $a, b, c, d \in K$
Conjugué	$\bar{z} = a - bi$	$\bar{q} = a - bi - cj - dk$
Trace	$Tr(z) = z + \bar{z} = 2a$	$Tr(q) = q + \bar{q} = 2a$
Norme	$N(z) = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$	$N(q) = q \cdot \bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
	Norme multiplicative	Norme multiplicative
Inverse	$z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{N(z)}$	$q \neq 0 \Rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)}$
Corps	commutatif	non commutatif

Où l'on retrouve \mathbb{R}^3 ...

Le sous-espace

$$\mathbb{H}_0 = \{bi + cj + dk \mid b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

des quaternions appelés « purs » (par analogie avec les nombres imaginaires purs) est isomorphe à \mathbb{R}^3 .

Si $p = bi + cj + dk$ et $q = b'i + c'j + d'k$ sont deux quaternions purs, un petit calcul fournit la formule

$$\frac{1}{2}Tr(p\bar{q}) = bb' + cc' + dd'$$

qui montre que le sous-espace des quaternions purs, muni de la forme $\frac{1}{2}Tr(p\bar{q})$ est isométrique à muni du produit scalaire euclidien usuel ...

Et les vraies rotations.

Comme les quaternions ont une multiplication non commutative, il faut distinguer la multiplication à gauche par un quaternion q , qu'on notera g_q , de la multiplication à droite par ce quaternion q , qu'on notera d_q .

Le THÈME IV suggère que si θ est un angle quelconque, alors $g_{\cos\theta+i\sin\theta}$ correspond à une rotation d'angle θ dans le plan sous-tendu par 1 et i , tout comme $d_{\cos\theta+i\sin\theta}$. Mais l'effet de ces opérations dans le plan sous-tendu par j et k est légèrement différent : $g_{\cos\theta+i\sin\theta}$ correspond encore à une rotation d'angle θ dans le plan sous-tendu par j et k , tandis que $d_{\cos\theta+i\sin\theta}$ correspond à une rotation d'angle $-\theta$ dans ce même plan.

On saisit alors l'occasion, en composant une multiplication à gauche avec une multiplication à droite, de décrire non plus une rotation dans *un plan* de l'espace, comme au tout début de la construction, mais bien une rotation de l'espace.

Plus précisément, si q est un quaternion non nul, on note R_q l'application qui à tout quaternion p fait correspondre

$$R_q(p) = q \cdot p \cdot q^{-1}$$

On vérifie immédiatement, en vertu de la discussion précédente, que $R_{\cos\theta+i\sin\theta}$ est l'identité dans le plan sous-tendu par 1 et i , et correspond à une rotation d'angle 2θ dans le plan sous-tendu par j et k .

Or, si p est un nombre réel : $R_q(p) = p$, ce qui implique immédiatement que

$$R_q(\mathbb{H}_0) \subset \mathbb{H}_0$$

de telle sorte que l'application R_q induit aussi une application dans \mathbb{R}^3 . Cette application est manifestement linéaire. Il est alors clair que $R_{\cos\theta+i\sin\theta}$ représente une rotation complète (et non plus partielle comme plus haut) d'axe correspondant à i , et d'angle 2θ . On obtient une conclusion analogue pour $R_{\cos\theta+j\sin\theta}$ et $R_{\cos\theta+k\sin\theta}$.

Un résultat miraculeux.

On déduit de tout ce qui précède le résultat central de ce thème.

Si quel que soit le quaternion q de norme 1, on pose $q = \cos\theta + \sin\theta \cdot \nu_q$, où $\nu_q \in \mathbb{H}_0$ et $N(\nu_q) = 1$, alors R_q induit, par l'isométrie $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$, une rotation d'axe ν_q et d'angle 2θ dans \mathbb{R}^3 .

De plus, dans cette correspondance, la multiplication des quaternions de norme 1 correspond à la composition des rotations, c'est-à-dire que la rotation R_p suivie de R_q correspond à la rotation $R_{q \cdot p}$.

La deuxième partie du résultat fournit une paramétrisation remarquable de l'ensemble des rotations de \mathbb{R}^3 par l'ensemble des quaternions de norme 1. Cette paramétrisation se trouve en effet être l'une des meilleures possibles, au sens suivant : elle est rationnelle (sans dénominateur), sans singularité (les quaternions de norme 1 correspondent à la sphère unité de dimension trois) et elle rend compte de manière simple de la composition des rotations par la seule multiplication de ces « nombres géométriques » que sont les quaternions.

Les résultats qui seraient dégagés dans ce thème pourraient être prolongés dans le THÈME IX, consacré à la géométrie de la sphère.

1.2.8 Thème VI : Volume, produit extérieur et déterminant

Ce thème est l'occasion d'enrichir la collection d'objets qui méritent le statut de vecteurs, à partir de la notion de direction d'un plan. A nouveau, c'est le fait d'être porteur d'un calcul linéaire qui sera au centre de la discussion.

S'il s'agit de formaliser la notion de direction d'un plan, il convient d'abord de revenir sur la notion de direction d'une droite.

Dans l'espace, une droite vectorielle (c'est-à-dire passant par l'origine O) est entièrement déterminée par un vecteur non nul : le vecteur directeur de la droite.

Ce vecteur n'est pas unique, et il importe de bien comprendre ce que signifie cette non-unicité. Si U et V sont deux vecteurs directeurs d'une même droite, il existe un nombre réel k tel que $U = k \cdot V$. Ce nombre réel décrit deux propriétés géométriques simples, mais importantes, de la droite en question : sa valeur absolue permet de comparer les mesures de longueurs sur la droite, selon qu'on se sert de U ou de V comme unité, et son signe précise l'orientation sur cette droite.

La question est maintenant d'obtenir une description d'un plan vectoriel (c'est-à-dire passant lui aussi par l'origine O) aussi proche que possible de la description rappelée ci-dessus d'une droite vectorielle. Dans ce but, nous cherchons à définir ce qui pourrait s'appeler un élément directeur d'un plan vectoriel.

Or, si tous les vecteurs directeurs d'une même droite sont — pour une raison de dimension — naturellement proportionnels, les vecteurs situés dans un même plan ne le sont pas nécessairement : plus précisément, il faut deux vecteurs entre lesquels n'existe aucune relation linéaire pour déterminer un plan vectoriel et, si U et V sont deux tels vecteurs, alors deux vecteurs S et T détermineront le même plan pourvu qu'ils dépendent linéairement de U et V , c'est-à-dire qu'il existe des nombres réels k , l , m et n tels que

$$\begin{cases} S = k \cdot U + l \cdot V \\ T = m \cdot U + n \cdot V \end{cases} \quad \text{avec} \quad kn - ml \neq 0$$

La relation de proportionnalité est donc à première vue moins directement interprétable ! D'autre part, la notion de longueur n'est pas un aspect intrinsèque de la notion de plan, c'est plutôt la notion d'aire qui conviendrait. Enfin, la notion intuitive d'orientation d'un plan s'appuie, par exemple, sur la donnée d'un couple ordonné de vecteurs non colinéaires de ce plan.

Cet ensemble d'observations préside à la création d'un nouvel objet mathématique, associé à la direction d'un plan. C'est l'idée de mesure d'une aire qui est décisive, et on va l'étudier suivant la méthode déjà utilisée dans le cas du produit scalaire.

On travaille d'abord dans le plan, et on fixe un repère orthonormé d'origine O , et on considère les points A , de coordonnées (a_1, a_2) , B de coordonnées (b_1, b_2) , et le parallélogramme $OADB$, où $D = A + B$. Une mesure de l'aire de ce parallélogramme est alors donnée par $|OA| \cdot |OB| \cdot |\sin \theta|$ où θ est l'angle orienté \widehat{AOB} . La définition du produit scalaire donne

$$|\sin \widehat{AOB}| = \sqrt{1 - \left(\frac{A \bullet B}{\|A\| \cdot \|B\|} \right)^2} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|B\|} \sqrt{\|A\|^2 \cdot \|B\|^2 - (A \bullet B)^2}$$

d'où on tire

$$\|A\| \cdot \|B\| \cdot |\sin \widehat{AOB}| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2(b_1 + b_2)^2 - (a_1b_1 + a_2b_2)^2} = |a_1b_2 - a_2b_1|$$

La présence des valeurs absolues signale que, telle quelle, cette formule ne pourrait pas avoir une interprétation strictement linéaire.

On observe par la même occasion que l'expression $a_1b_2 - a_2b_1$ dépend de l'ordre dans lequel on considère les vecteurs A et B , et aussi de l'ordre dans lequel on considère les axes de coordonnée : une notion algébrique d'aire devrait donc être porteuse d'un signe associé à l'idée d'orientation, tant pour le système de coordonnées que pour les vecteurs qu'on considère.

On est ainsi amené à proposer la définition suivante. Si on considère deux vecteurs orthonormés E_1 et E_2 du plan tels que les coordonnées correspondantes des points A et B soient (a_1, a_2) et (b_1, b_2) , on note $A \wedge B$ l'« élément d'aire orientée » associé au parallélogramme $OADB$, et pareillement pour $E_1 \wedge E_2$. Si on convient alors de traduire l'idée géométrique d'orientation par celle algébrique d'antisymétrie,

$$\begin{aligned} A \wedge B &= -B \wedge A \\ E_1 \wedge E_2 &= -E_2 \wedge E_1 \end{aligned}$$

les observations faites ci-dessus se résument dans la formule

$$A \wedge B = (a_1b_2 - a_2b_1)(E_1 \wedge E_2)$$

qui présente l'avantage de décrire $a_1b_2 - a_2b_1$ comme un coefficient de proportionnalité entre deux éléments d'aire orientée.

D'autre part, si on explicite le membre de gauche de cette dernière formule

$$(a_1E_1 + a_2E_2) \wedge (b_1E_1 + b_2E_2) = (a_1b_2 - a_2b_1)E_1 \wedge E_2$$

et qu'on fait référence à l'hypothèse d'antisymétrie, cette formule apparaît comme l'expression d'une opération bilinéaire sur les vecteurs de V_2 : il suffit d'observer qu'il est tout à fait géométrique de prolonger l'antisymétrie aux cas dégénérés par $E_1 \wedge E_1 = E_2 \wedge E_2 = 0$.

Mais arrivé là, il se fait qu'on a obtenu beaucoup plus qu'on ne croit !

Plus précisément, à tout couple (U, V) de vecteurs du plan, on a associé un nouvel objet, noté $U \wedge V$, et caractérisé par

- une propriété d'antisymétrie : $U \wedge V = -(V \wedge U)$
- une propriété de linéarité : $(k \cdot U + l \cdot V) \wedge W = k \cdot (U \wedge W) + l \cdot (V \wedge W)$

d'où découle la formule $A \wedge B = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(E_1 \wedge E_2)$.

Mais ces propriétés elles-mêmes ne dépendent pas du choix d'un système de coordonnées ; elles sont en particulier valables sans que ce système soit orthonormé, et sans que cela n'enlève quoi que ce soit à l'interprétation de l'objet $U \wedge V$ comme « élément d'aire orienté ». La traduction en coordonnées permet même de comparer entre eux de tels éléments. En effet, si E_1 et E_2 sont deux vecteurs quelconques, alors quels que soient les vecteurs U et V décrits dans le système de coordonnées associé à E_1 et E_2 par

$$\begin{cases} U = k \cdot E_1 + l \cdot E_2 \\ V = m \cdot E_1 + n \cdot E_2 \end{cases}$$

on a

$$U \wedge V = (kn - lm) \cdot E_1 \wedge E_2$$

où $kn - lm$ s'interprète bien (au signe près) comme facteur de proportionnalité entre l'aire usuelle du parallélogramme associé à U et V et l'aire usuelle du parallélogramme associé à E_1 et E_2 .

Pour s'en convaincre si besoin est, il suffit de considérer deux vecteurs, orthonormés cette fois-ci, F_1 et F_2 de V_2 , et les nombres réels a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} E_1 = a \cdot F_1 + b \cdot F_2 \\ E_2 = c \cdot F_1 + d \cdot F_2 \end{cases}$$

on a alors les nouvelles relations de dépendance linéaire

$$\begin{cases} U = (ka + lc) \cdot F_1 + (kb + ld) \cdot F_2 \\ V = (ma + nc) \cdot F_1 + (mb + nd) \cdot F_2 \end{cases}$$

qui impliquent

$$U \wedge V = [(ka + lc)(mb + nd) - (kb + ld)(ma + nc)] \cdot (F_1 \wedge F_2)$$

et font de $|(ka + lc)(mb + nd) - (kb + ld)(ma + nc)|$ l'aire usuelle du parallélogramme associé à U et V . Or, on vérifie sans peine

$$(ka + lc)(mb + nd) - (kb + ld)(ma + nc) = (kn - lm)(ad - bc)$$

tandis que

$$E_1 \wedge E_2 = (ad - bc) \cdot (F_1 \wedge F_2)$$

fait de $|ad - bc|$ l'aire usuelle du parallélogramme associé à E_1 et E_2 . L'interprétation annoncée de la formule $U \wedge V = (kn - lm) \cdot E_1 \wedge E_2$ s'ensuit.

Toute cette construction, et la discussion qui l'a suivie, s'applique sans modification à l'espace : à tout couple (U, V) de vecteurs de l'espace, on associe l'objet, noté $U \wedge V$, et caractérisé par les propriétés

- d'antisymétrie : $U \wedge V = -(V \wedge U)$
- de linéarité : $(k \cdot U + l \cdot V) \wedge W = k \cdot U \wedge W + l \cdot V \wedge W$

Ce nouvel objet mathématique est appelé *produit extérieur*, ou *de Grassmann*, de U et V . La construction, toute linéaire qu'on en a donnée justifie qu'on attribue encore le statut de vecteur à ce nouvel objet, même s'il est intrinsèquement associé à l'idée de plan et d'aire, et non plus à la seule idée de ligne ou de segment. C'est pour signaler cette nuance qu'on utilise souvent la terminologie de *2-vecteur*, ou *bivecteur*.

On peut alors revenir à la question de décrire une notion d'élément directeur pour un plan vectoriel déterminé par deux vecteurs U et V , suivant les exigences de proportionnalité « élargie », d'aire et d'orientation détaillées au tout début de la description du thème. Et la réponse est maintenant immédiate : l'analogie du vecteur directeur est ici le produit extérieur $U \wedge V$, puisqu'il a toutes les propriétés requises.

Il reste encore à régler un problème qu'on peut qualifier de réciproque du précédent.

Considérons deux vecteurs U et V quelconques et soient E_1, E_2, E_3 , trois vecteurs que l'on peut, comme on l'a vu plus haut, supposer orthonormés sans nuire à la généralité. Si on a

$$\begin{cases} U = u_1 \cdot E_1 + u_2 \cdot E_2 + u_3 \cdot E_3 \\ V = v_1 \cdot E_1 + v_2 \cdot E_2 + v_3 \cdot E_3 \end{cases}$$

on calcule sans peine

$$U \wedge V = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot E_1 \wedge E_2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1) \cdot E_1 \wedge E_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot E_2 \wedge E_3$$

qui montre comment le bivecteur associé à un plan se décompose dans un système de coordonnées.

La réciproque établit que tout bivecteur est associé à un et un seul plan. Plus précisément

quel que soit le bivecteur $\omega = a \cdot E_1 \wedge E_2 + b \cdot E_1 \wedge E_3 + c \cdot E_2 \wedge E_3$, il existe au moins deux vecteurs U et V tels que $\omega = U \wedge V$; de plus, tous ces vecteurs U et V tels que $\omega = U \wedge V$ sont orthogonaux au vecteur $c \cdot E_1 - b \cdot E_2 + a \cdot E_3$.

On note $*\omega$ (« étoile de Hodge ») le vecteur $c \cdot E_1 - b \cdot E_2 + a \cdot E_3$ ainsi associé au bivecteur $\omega = a \cdot E_1 \wedge E_2 + b \cdot E_1 \wedge E_3 + c \cdot E_2 \wedge E_3$.

Dans le cas où le bivecteur ω est déjà décomposé, c'est-à-dire si U et V sont deux vecteurs comme ci-dessus, et $\omega = U \wedge V = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot E_1 \wedge E_2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1) \cdot E_1 \wedge E_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot E_2 \wedge E_3$

alors on appelle $*\omega$ le produit vectoriel de U et V , ce qu'on note $U \times V$; on a donc

$$U \times V = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot E_3 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot E_2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot E_1$$

On retrouve sans peine les propriétés bien connues du produit vectoriel. En particulier, on peut interpréter de manière classique le module de $U \times V$ comme mesure de l'aire du parallélogramme associé à U et V , mais dans l'espace cette fois-ci. Cela renforce, si besoin, l'idée qu'un bivecteur modélise un élément d'aire orienté.

Il n'est pas inutile de signaler que, si p et q sont deux quaternions purs

$$\begin{cases} p = bi + cj + dk \\ q = b'i + c'j + d'k \end{cases}$$

on calcule facilement

$$pq = -(bb' + cc' + dd') + (cd' - c'd)i - (bd' - b'd)j + (bc' - b'c)k$$

de telle sorte qu'à travers l'isomorphisme $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$, le produit des quaternions purs fournit à la fois, dans sa partie réelle, le produit scalaire, et dans sa partie pure, le produit vectoriel des vecteurs associés à p et q . Pour ce qui concerne le produit scalaire, cette observation avait permis d'établir dans le THÈME V l'isométrie $\mathbb{H}_0 \cong \mathbb{R}^3$ grâce à la forme $\frac{1}{2}Tr(p\bar{q})$.

Il reste à montrer que l'opération de produit extérieur peut être itérée, et qu'elle garde une interprétation géométrique analogue à celle dégagée ci-dessus.

Pour l'essentiel, si U, V, W sont trois vecteurs quelconques de l'espace, il s'agit de calculer une mesure du volume, au sens usuel, du parallélépipède qu'ils déterminent. Pour ce faire, on considère trois vecteurs E_1, E_2, E_3 qu'on suppose orthonormés (mais cela ne nuit pas davantage à la généralité qu'auparavant), et grâce auxquels on peut décomposer linéairement U, V, W :

$$\begin{cases} U = u_1 \cdot E_1 + u_2 \cdot E_2 + u_3 \cdot E_3 \\ V = v_1 \cdot E_1 + v_2 \cdot E_2 + v_3 \cdot E_3 \\ W = w_1 \cdot E_1 + w_2 \cdot E_2 + w_3 \cdot E_3 \end{cases}$$

Un raisonnement élémentaire montre que la mesure du volume du parallélépipède en question est donnée par la valeur absolue du nombre réel $(U \times V) \bullet W$.

Une telle formule est un peu hétéroclite : elle mêle deux produits différents, le produit vectoriel et le produit scalaire, dans le but d'évaluer une grandeur pour laquelle les trois vecteurs concernés devraient jouer des rôles équivalents. D'autre part,

$$(U \times V) \bullet W = (u_1v_2 - u_2v_1)w_3 - (u_1v_3 - u_3v_1)w_2 + (u_2v_3 - u_3v_2)w_1$$

qui présente des propriétés d'antisymétrie remarquables.

Tout cela, ajouté à un raisonnement analogue à celui qui a mené à la définition de bivecteur, mène à étendre l'opération de produit extérieur.

A tout triple (U, V, W) de vecteurs, on associe l'objet, noté $U \wedge V \wedge W$, et caractérisé par les deux propriétés

$$\begin{aligned} - U \wedge V \wedge W &= -V \wedge U \wedge W = -W \wedge V \wedge U \quad (\text{antisymétrie « graduée »}) \\ - (k \cdot U + l \cdot U') \wedge V \wedge W &= k \cdot U \wedge V \wedge W + l \cdot U' \wedge V \wedge W \quad (\text{linéarité}) \end{aligned}$$

Ce nouvel objet mathématique est encore appelé produit extérieur, ou de Grassmann, de U, V, W . Sa construction étant toujours celle d'un objet linéaire, il mérite comme auparavant le statut de vecteur, même s'il est cette fois intrinsèquement associé à l'idée de volume ou d'espace.

Avec les mêmes hypothèses que plus haut, et grâce aux deux seules propriétés d'antisymétrie et de linéarité, on obtient immédiatement

$$U \wedge V \wedge W = [(u_1v_2 - u_2v_1)w_3 - (u_1v_3 - u_3v_1)w_2 + (u_2v_3 - u_3v_2)w_1] \cdot E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$$

ce qui confirme toutes nos intuitions ! De plus, et encore une fois pour les mêmes raisons que dans le cas des bivecteurs, l'hypothèse d'orthonormalité n'a plus rien d'essentiel dans l'interprétation de cette formule.

Enfin, on appelle *déterminant* des vecteurs U, V, W (par rapport à E_1, E_2, E_3), et on note $\text{Dét}(U, V, W)$, le nombre réel défini par

$$U \wedge V \wedge W = \text{Dét}(U, V, W) \cdot E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$$

Une telle définition permet d'obtenir toutes les propriétés usuelles du déterminant à partir de raisonnements géométriques en termes de volumes. Il n'y a évidemment aucune difficulté supplémentaire pour définir pareillement la notion de déterminant 2×2 .

1.2.9 Thème VII : Systèmes d'équations linéaires

A la suite de ce qui précède, l'étude des systèmes d'équations linéaires n'est plus qu'un exercice . . . de géométrie.

On se limite dans la suite à l'étude des systèmes de deux équations à deux inconnues, qui permet déjà de voir à l'œuvre toutes les notions introduites depuis le début. Dans l'approche géométrique, les situations à plus de deux inconnues n'offrent pas de difficulté substantiellement nouvelle, pour la simple raison que la géométrie montre clairement le chemin à suivre, et qu'il est d'ailleurs déjà tout tracé!

On considère le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

On peut l'écrire vectoriellement : si E_1 et E_2 sont deux vecteurs linéairement indépendants, on introduit les « vecteurs colonnes »

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{11} \cdot E_1 + a_{21} \cdot E_2 \\ A_2 &= a_{12} \cdot E_1 + a_{22} \cdot E_2 \\ B &= b_1 \cdot E_1 + b_2 \cdot E_2 \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire le système sous la forme

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 = B$$

Cette écriture suggère immédiatement un procédé graphique de résolution du système en question : dans un système d'axes d'origine O associé aux vecteurs E_1 et E_2 , on dessine les vecteurs A_1 , A_2 et B , et on détermine x_1 et x_2 de telle sorte que $x_1 \cdot A_1$ et $x_2 \cdot A_2$ déterminent les côtés du parallélogramme dont B représente la diagonale issue de O .

L'écriture vectorielle alliée à la notion de produit extérieur fournit par ailleurs immédiatement les célèbres « formules de Cramer »

$$\begin{aligned} (x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2) \wedge A_2 &= B \wedge A_2 \Rightarrow x_1 \cdot \text{Dét} (A_1, A_2) = \text{Dét} (B, A_2) \\ (x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2) \wedge A_1 &= B \wedge A_1 \Rightarrow x_2 \cdot \text{Dét} (A_2, A_1) = \text{Dét} (B, A_1) \end{aligned}$$

dont le caractère antisymétrique revêt ainsi une signification géométrique.

Enfin, si le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

possède des solutions, celles-ci ne sont en général pas assujetties à un calcul linéaire, sauf si $b_1 = b_2 = 0$. Pour pallier cet inconvénient, et afin de pouvoir alors exploiter à fond les ressources du calcul linéaire, on commence par homogénéiser ou linéariser ce système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1t = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2t = 0 \end{cases}$$

Cette linéarisation a l'avantage de fournir un système qui a toujours au moins une solution, à savoir $x_1 = x_2 = t = 0$. Il reste à en déterminer toutes les solutions, et parmi celles-ci, à vérifier s'il en existe qui soient telles que $t = 1$.

Mais l'intérêt premier de cette linéarisation est qu'elle permet d'attribuer le statut de vecteur à toute solution du système linéarisé, puisque ces solutions peuvent maintenant s'additionner entre elles pour donner de nouvelles solutions, et qu'en les multipliant par un nombre réel, on fabrique encore des solutions.

Ceci fait, si E_1 , E_2 et E_3 sont trois vecteurs linéairement indépendants, on introduit les « vecteurs lignes »

$$\begin{aligned} N_1 &= a_{11} \cdot E_1 + a_{21} \cdot E_2 - b_1 E_3 \\ N_2 &= a_{12} \cdot E_1 + a_{22} \cdot E_2 - b_2 E_3 \end{aligned}$$

et on montre que les solutions du système linéaire considéré sont les multiples du vecteur $*(N_1 \wedge N_2) = N_1 \times N_2$. L'interprétation géométrique de ce résultat à partir des vecteurs normaux aux plans vectoriels sous-jacents est bien connue.

Il faut signaler que pour un système qui, au départ, présente plus de deux inconnues, cette méthode de linéarisation préalable nécessite de travailler dans un espace à plus de trois dimensions. Mais pas plus les résultats que leur interprétation ne s'en trouvent modifiés.

L'interprétation géométrique de la discussion précédente pourrait se prolonger dans le THÈME X, consacré à une introduction à la géométrie projective, et plus particulièrement au théorème de Desargues et à sa signification en algèbre linéaire.

1.2.10 Thème VIII : Matrices et composition des transformations linéaires

Pour le calcul matriciel, l'un des points de départ pourrait être le suivant. Dans le thème précédent, on a considéré l'espace des solutions d'un système linéaire. Ici, il s'agirait aussi d'étudier le calcul linéaire sur les équations linéaires elles-mêmes, afin de pouvoir attribuer aux équations linéaires, puis aux applications linéaires, le statut de vecteur. Cela pourrait déboucher sur une première approche de la notion de dualité, par exemple à partir du produit scalaire. Quant au produit matriciel, il serait fait mention que ce n'est pas la première fois qu'un produit est défini sur des objets géométriques (ici, les substitutions linéaires) : les nombres complexes et les quaternions sont des nombres « géométriques » munis d'une multiplication dont on peut expliciter une représentation matricielle, et le produit extérieur permettrait d'introduire la notion de déterminant avec ses principales propriétés, y compris la multiplicativité (cfr. la discussion sur la « relativité » des éléments d'aire orientée).

Mais d'autre part, ce thème, quant à ce qui concerne les transformations linéaires et leur composition, aurait déjà été significativement exploré à travers les thèmes précédents. On peut citer dans cet ordre d'idées : les notions de dépendance linéaire, de rotations du plan et de l'espace avec leur composition, mais surtout les nombreuses discussions concernant la signification géométrique de toutes les notions introduites, et qui nécessitaient d'étudier l'effet du choix d'un système d'axes quant au sens de certaines formules, dans le cas du produit scalaire ou du produit extérieur par exemple.

Ainsi, ce dernier grand thème, serait autant un thème de synthèse qu'un thème de découverte.

1.2.11 Conclusions

Un certain nombre de raisons d'être de ce projet, tant pédagogiques que mathématiques, ont déjà été détaillées dans l'introduction et la première partie du chapitre 1 de ce rapport.

A l'issue de cette description résumée des grands thèmes, il est possible d'expliciter d'autres raisons encore, à la fois plus techniques et plus générales, qui ont présidé au choix des sujets.

L'algèbre linéaire a la réputation d'une discipline très abstraite, dont l'exploration, sinon la maîtrise devrait être réservée au seul (futur) mathématicien professionnel. En ce sens, elle ne figurerait pas dans ce bagage mathématique de base qu'on appelle « les mathématiques du citoyen ». Ce projet voudrait fournir quelques éléments de réflexion qui vont à l'encontre de cette croyance.

Nous sommes persuadés que l'algèbre linéaire fait partie de ces « mathématiques du citoyen » parce que son objet est de faire face avec les moyens les plus simples possible à des situations complexes, et qu'il est bien clair que cette complexité sans cesse croissante est une des caractéristiques premières du monde tel qu'un citoyen le voit évoluer sous ses yeux.

C'est un des parti-pris de notre projet que de faire face avec des moyens simples à des situations géométriques complexes.

Ainsi, comme la proportionnalité est une des bases des mathématiques élémentaires, c'est elle que nous avons choisie comme modèle simple pour arriver à la notion centrale de relation(s) de dépendance(s) linéaire(s). Comme on l'a vu, c'est cette notion qui permet de rassembler des situations mathématiques à priori bien différentes.

Déjà les coordonnées, les points ou les translations peuvent être vues comme incarnations d'un même objet, le vecteur, qui les exprime tous et qui simplifie les situations : le vecteur de la géométrie de l'espace n'est qu'un seul objet, qui en représente trois dès qu'on l'exprime dans un système d'axes. L'étude du produit extérieur a pareillement montré comment la pensée linéaire permet de dégager d'une situation complexe et multiple, deux règles simples, qui renferment en elles toutes l'information dont on a besoin. Le calcul matriciel n'a pas d'autre but que de permettre la manipulation d'informations multiples : une matrice 3×3 permet de traiter 9 nombres comme un seul.

Ainsi, une notion aussi élémentaire que la proportionnalité, bien utilisée, simplifie et ordonne les phénomènes !

A tous les moments cruciaux de la progression dans les thèmes, il a encore été fait mention, aussi explicitement que possible, du pourquoi des choses. Ainsi, les nombres complexes ne sont-ils pas apparus pour le plaisir, mais pour résoudre les paradoxes de Cardan, et les règles de leur calcul en ont été déduites. Pareillement, les quaternions de Hamilton ont vu le jour pour maîtriser les rotations de l'espace et leur composition. Le produit extérieur a été introduit pour rendre compte de la direction des plans, de la mesure des aires et des volumes, mais aussi pour unifier toutes les questions de résolutions de systèmes d'équations. Sans parler de l'invention même de la notion de vecteur . . .

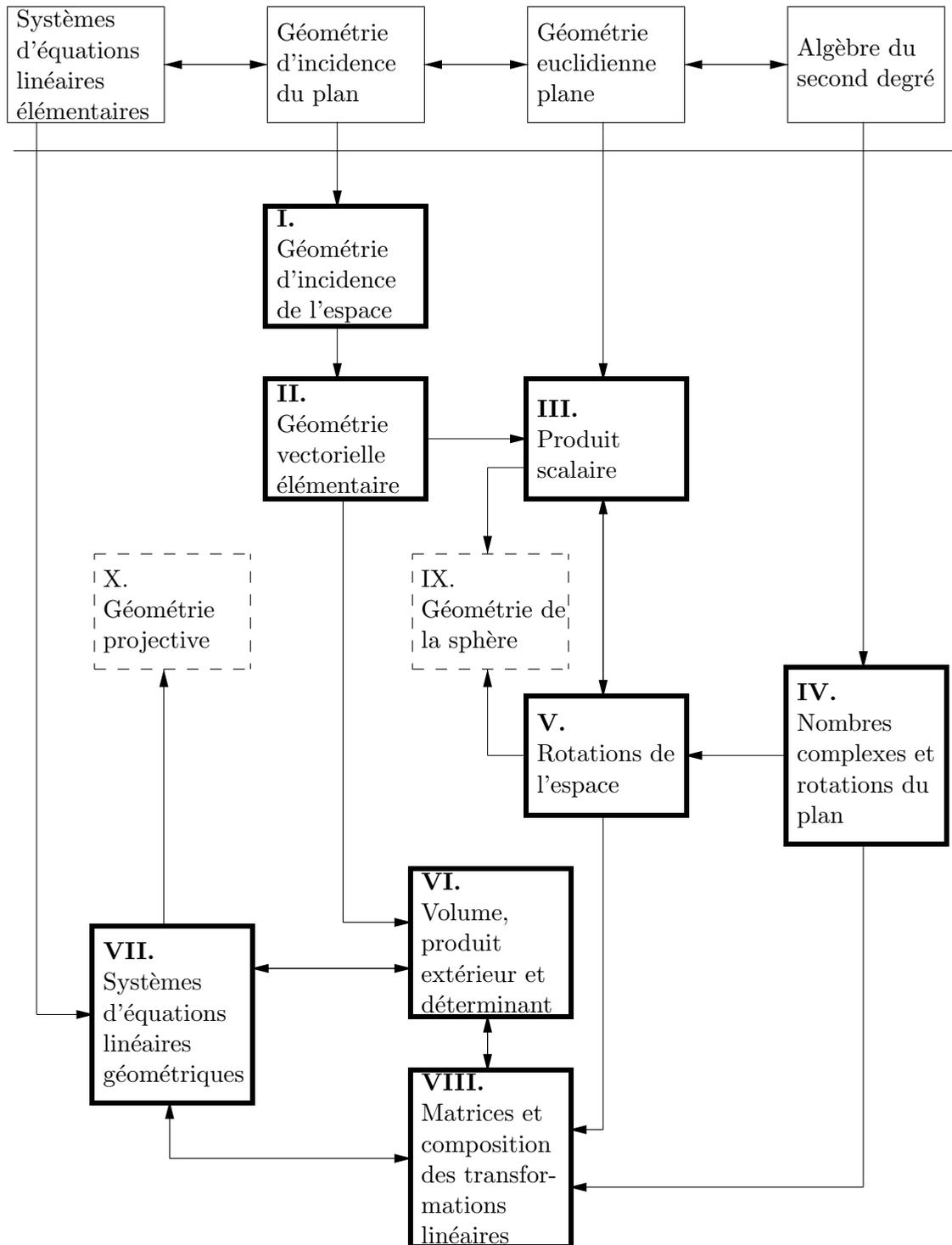
Une fois dévoilée leur raison d'être, ces objets soi-disant abstraits perdent de leur mystère, deviennent aussi réels que les autres, et à la portée de tout le monde.

Et ce qui n'a pas encore été dit, c'est que cet effort de projeter la seule idée de proportionnalité dans tous les recoins de la géométrie, est efficace. Cet effort libère la géométrie de l'obstacle de la représentation visuelle et, paradoxalement peut-être, en modélisant convenablement les objets géométriques les plus fondamentaux et les plus visuels ! L'obstacle de la pensée visuelle, déjà perceptible en dimension 3, et presque infranchissable au-delà, s'évanouit, dès qu'on pense linéairement. Car il y a moyen de montrer que tout ce qui a été fait dans ce projet se généralise à un nombre quelconque de dimensions sans aucune difficulté nouvelle, sans avoir à rien imaginer de nouveau.

Alors que c'était là que la complexité visuelle des situations géométriques nous arrêtaient, l'obstacle s'évanouit : la complexité est maîtrisée ! Bien sûr, toutes ces raisons ne rendent pas encore entièrement compte de la pertinence d'un enseignement de l'algèbre linéaire dans les deux dernières années de l'enseignement secondaire. Elles montrent en tout cas qu'à côté de ses innombrables applications, l'algèbre linéaire possède une réelle valeur formative, profondément adaptée à un projet éducatif.

C'est là une des meilleures raisons qui soient pour la défendre et l'illustrer !

1.3. Relations entre les thèmes



Chapitre 2

Les séquences d'enseignement

2.1	La géométrie d'incidence de l'espace	47
2.1.1	Introduction	48
2.1.2	Prérequis	49
2.1.3	Fiche n° 1 : Incidence et parallélisme (1)	52
2.1.4	Fiche n° 2 : Incidence et parallélisme (2)	56
2.1.5	Fiche n° 3 : Incidence et parallélisme (3)	60
2.1.6	Synthèse	65
2.2	La géométrie vectorielle élémentaire	68
2.2.1	Introduction	69
2.2.2	Fiche n° 4 : Projections et coordonnées	71
2.2.3	Fiche n° 5 : Équations vectorielles d'une droite	77
2.2.4	Fiche n° 6 : Équations vectorielles d'un plan	80
2.2.5	Synthèse	83
2.3	Systèmes d'équations linéaires et fonctions linéaires	86
2.3.1	Introduction	87
2.3.2	Fiche n° 7 : Point de percée d'une droite dans un plan	88
2.3.3	Fiche n° 8 : Équations cartésiennes d'un plan	92
2.3.4	Fiche n° 9 : Équations cartésiennes d'une droite	99
2.3.5	Fiche n° 10 : Projecteurs et équations cartésiennes	110
2.3.6	Fiche n° 11 : Formes linéaires (1)	116
2.3.7	Fiche n° 12 : Formes linéaires (2)	120
2.3.8	Synthèse	124

2.4	Le produit scalaire	126
2.4.1	Introduction	127
2.4.2	Fiche n° 13 : Le produit scalaire	128
2.4.3	Fiche n° 14 : Sphères et plans	138
2.4.4	Synthèse	148
2.5	Produit vectoriel, volume et déterminant	150
2.5.1	Introduction	151
2.5.2	Fiche n° 15 : Produit vectoriel, volume et déterminant	152
2.6	Les rotations de l'espace	165
2.6.1	Introduction	166
2.6.2	Fiche n° 16 : Les rotations cubiques	169
2.6.3	Fiche n° 17 : La représentation matricielle des rotations	180

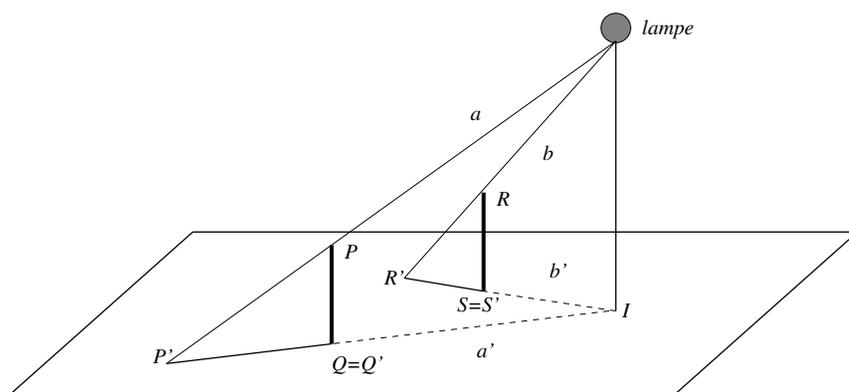
2.1. La géométrie d'incidence de l'espace

2.1.1 Introduction

Dans cette première section, nous rappelons quelques résultats élémentaires de la géométrie d'incidence de l'espace dans le cadre des ombres au soleil. C'est l'occasion d'établir quelques propriétés des projections parallèles et d'introduire l'usage de réseaux cubiques.

Il y a deux types d'ombres : les ombres au soleil et les ombres à la lampe, qui correspondent respectivement aux projections parallèles et aux projections centrales. On peut aisément faire le lien entre ces deux types de projections, ce qui permet de dégager une propriété caractéristique des projections parallèles. Voici en effet une petite expérience . . .

Considérons deux bâtons placés perpendiculairement à une table et une lampe placée sur cette table, à une hauteur plus grande que la taille des bâtons.



Nous observons une projection centrale, dont le centre de projection est la lampe.

En prolongeant mentalement les ombres $P'Q'$ et $R'S'$ des bâtons PQ et RS , nous obtenons deux droites a' et b' qui se rejoignent à la verticale de la lampe. A présent, éloignons la lampe de plus en plus des bases Q et S des bâtons. Le point d'intersection I des droites a' et b' s'éloigne en conséquence et les droites a' et b' tendent ainsi de plus en plus à être parallèles de même que les droites a et b . Dans ce cas extrême, on parle de projection parallèle ou affine.

Les ombres au soleil de segments verticaux sont donc parallèles. De manière plus générale, la projection sur un plan α d'un point P parallèlement à une droite d est le point d'intersection avec α de la parallèle à d passant par P .

Une telle projection conserve le parallélisme des droites.

REMARQUE 2.1.1 *Les ombres au soleil ou à la lampe ne conservent pas en général les distances. Les ombres au soleil, contrairement aux ombres à la lampe, conservent les rapports des longueurs de segments parallèles. Mais ni les ombres au soleil, ni les ombres à la lampe ne conservent les rapports des longueurs de segments quelconques.*

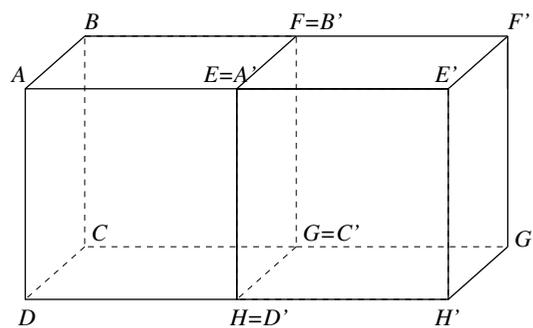
2.1.2 Prérequis

Les situations exploitées dans cette section reposent sur l'utilisation d'un réseau cubique. On peut en effet considérer que les élèves ont déjà eu très souvent l'occasion de manipuler un cube avant d'arriver dans le troisième cycle de l'enseignement secondaire. Cet objet leur étant familier, sa représentation graphique plane leur est plus facile à interpréter que bien d'autres figures *a priori* plus élémentaires. Par exemple, montrer deux droites gauches sur la représentation d'un cube en perspective cavalière possède une signification. Par contre, toute représentation isolée de deux droites gauches est toujours aussi celle soit de deux droites sécantes, soit celle de deux droites parallèles et ne peut donc aucunement contribuer à l'apprentissage de la « vision spatiale », c'est-à-dire de la capacité d'interpréter spatialement une représentation graphique plane.

De plus, les élèves ont d'un cube une connaissance intuitive sur laquelle nous pouvons nous appuyer pour dégager les propriétés que nous voulons mettre en évidence.

Nous utiliserons ainsi sans explications inutiles le fait que si deux cubes $ABCDEFGH$ et $A'B'C'D'E'F'G'H'$ de même taille sont placés de façon que la face $EFGH$ coïncide avec la face $A'B'C'D'$, alors les faces $ABFE$ et $A'B'F'E'$ sont coplanaires, ainsi que $AEHD$ et $A'E'H'D'$, etc

De même, les faces $ABCD$, $EFGH$, $A'B'C'D'$, et $E'F'G'H'$ sont parallèles, ainsi que les droites AD , BC , EH , FG , $A'D'$, $B'C'$,...



Nous admettons aussi que deux éléments (l'un situé dans le cube $ABCDEFGH$, l'autre dans le cube $A'B'C'D'E'F'G'H'$) qui se correspondent par translation au long d'une arête sont parallèles et ont même longueur (s'il s'agit de segments). Nous pensons que ces propriétés ne doivent pas nécessairement être explicitées dans un premier temps.

Cependant, si les élèves posent des questions, il convient évidemment de leur répondre. et de toutes façons, certaines démonstrations devant être données dans un second temps, une synthèse devra être rédigée.

Pour tenir compte de ce double point de vue, les traitements de certaines des situations (fiche n°1, et dernier exercice de la fiche n°3) ont reçu une présentation « en deux passages ». Dans un premier passage, on donne des justifications reposant sur les constatations intuitives exploitant la situation particulière du réseau cubique, en particulier l'invariance de certains éléments par translation. Le second passage fournit des justifications plus complètes, ne recourant pas aux translations qui conservent un réseau cubique et ne faisant appel, en dehors des propriétés élémentaires d'un cube (angles droits, arêtes parallèles et de même longueur) qu'aux définitions et axiomes mentionnés ci-dessous. On énonce alors explicitement les propriétés devant faire l'objet d'une synthèse et auxquelles il sera fait appel dans les situations suivantes. Cette méthode permet de motiver les développements théoriques en les insérant dans la résolution d'un problème.

Nous pensons que quel que soit le niveau de la classe, il est utile pour la formation de l'intuition spatiale de faire d'abord appel aux raisonnements liés au réseau cubique. Selon les circonstances, le professeur décidera ensuite du niveau de rigueur qu'il désire atteindre avec les élèves, en présentant éventuellement les justifications valables en dehors de la situation initiale. Ces justifications reposent sur les définitions et axiomes suivants :

Axiomes

AXIOME I : Par deux points de l'espace passe une et une seule droite. (*axiome de droite*)

AXIOME II : Par trois points distincts non-alignés de l'espace passe un et un seul plan, et toute droite passant par deux points d'un plan est entièrement incluse à ce plan. (*axiome de plan*)

AXIOME III : Il existe quatre points non coplanaires.

AXIOME IV : Deux plans qui ont un point commun ont une droite commune passant par ce point.

AXIOME V : Toute propriété géométrique *du* plan est valable dans tous les plans de l'espace. (*axiome d'extension*)

Les axiomes III et IV signifient, ensemble, que l'espace est de dimension 3.

Définitions

Parallélisme :

DÉFINITION 2.1.2 Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires disjointes, ou confondues.

DÉFINITION 2.1.3 Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun, ou qu'ils sont confondus.

DÉFINITION 2.1.4 *Une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est contenue dans ce plan ou qu'elle en est disjointe.*

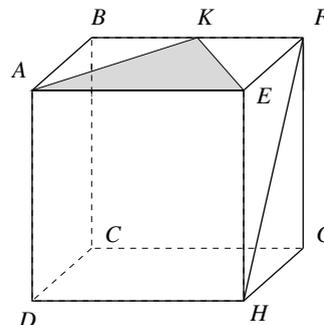
Projection :

DÉFINITION 2.1.5 *La projection sur un plan α d'un point P parallèlement à une droite d est le point d'intersection avec α de la parallèle à d passant par P .*

Dans toute la suite de ce fascicule, les passages en italique sont spécialement destinés au professeur. Quant au signe ■, il marque la fin des démonstrations.

2.1.3 Fiche n° 1 : Incidence et parallélisme (1)

Soit K le milieu de l'arête $[BF]$. Construire l'ombre projetée par le triangle AKE sur le plan $CDGH$, les rayons du soleil étant orientés dans la direction de la droite FH .



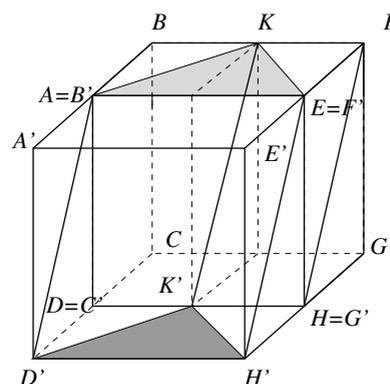
2.1.3.1 Solution commentée

Principe de la construction :

Nous allons dessiner les ombres des points A , K et E . Puis, nous les relierons pour connaître l'ombre du triangle AKE .

Résolution utilisant de façon informelle les propriétés du réseau cubique

Construisons un nouveau cube $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sur la face $AEDH$. Notons K' le milieu du segment $[DH] = [C'G']$.



La construction enchaîne les étapes suivantes :

1. Tracer les diagonales $[AD']$ et $[EH']$. Les droites AD' , EH' et KK' sont parallèles à FH car elles se correspondent par translation au long d'arêtes du réseau cubique. Elles sont donc parallèles entre elles.
2. L'ensemble des parallèles à FH passant par les points de AK constitue le plan $AKK'D'$. C'est le plan PROJETANT de AK .
3. La projection de la droite AK sur $CGDH$ parallèlement à FH est la droite $D'K'$ car c'est l'intersection des plans $AKK'D'$ et $CGDH$.
4. La projection du segment $[AK]$ sur $CGDH$ parallèlement à FH est le segment $[D'K']$. En effet, dans le plan $AKK'D'$ comme dans tout autre plan, la projection d'un segment sur une droite parallèlement à une autre droite est un segment.

5. De même, les projections des segments $[KE]$ et $[AE]$ sont les segments $[K'H']$ et $[D'H']$, et la projection du triangle AKE est le triangle $D'K'H'$.

■

2.1.3.2 Justifications complètes et propriétés à retenir

Seules les étapes 1 et 2 de la construction nécessitent des justifications complémentaires. Elles constituent aussi l'occasion d'introduire les premières propriétés de la géométrie d'incidence. Vu le caractère classique de la plupart des démonstrations, nous laissons au lecteur le soin de réaliser lui-même des figures illustratives. Mais nous insistons sur l'idée de placer ces figures dans le contexte d'un réseau cubique, ce qui facilite la perception spatiale.

1. **Pourquoi les droites KK' , AD' , EH' et FH sont-elles deux à deux parallèles ?**

Le quadrilatère $KFHK'$ est un parallélogramme car les côtés $[KF]$ et $[K'H]$ sont parallèles et de même longueur. Puisque tout théorème de géométrie plane est valable dans tout plan de l'espace (axiome V), $KK' // FH$. De même, $EH' // FH$ et $AD' // FH, \dots$

Nous pourrions de la sorte établir les six relations de parallélisme entre les quatre droites KK' , AD' , EH' et FH . Il est plus économique et surtout plus utile de prouver la transitivité du parallélisme, ce qui nécessite des propositions intermédiaires importantes en elles-mêmes.

PROPOSITION 2.1.6 (Euclide) *Par tout point de l'espace passe une et une seule parallèle à une droite FH .*

Soit P un point. Si $P \in FH$, la seule parallèle à FH passant par P est FH (par la définition du parallélisme de deux droites).

Si $P \notin FH$, toute parallèle à FH passant par P est dans le plan PFH . Et dans ce plan, on trouve effectivement une et une seule parallèle à FH passant par P (via l'axiome d'Euclide dans le plan et l'axiome V).

■

PROPOSITION 2.1.7 *Une droite a parallèle à une droite b d'un plan α est parallèle au plan α .*

Supposons $a // b$ et $b \subset \alpha$. Si $a = b$ alors $a \subset \alpha$ donc $a // \alpha$. Si $a \neq b$, le plan ab coupe α selon la droite b (axiomes II et IV). Donc tout point de a qui appartiendrait à α serait sur b , ce qui est impossible. Ainsi $a // \alpha$.

■

PROPOSITION 2.1.8 *Si la droite a est parallèle au plan α , tout plan β passant par a et non parallèle à α coupe α suivant une parallèle à a .*

Soit β un plan passant par a . Si $a \subset \alpha$, alors $\alpha \cap \beta = a$ et la thèse est prouvée.

Si $a \not\subset \alpha$, l'intersection de α et β est une droite d'après l'axiome IV. La droite a ne saurait avoir aucun point commun avec cette intersection qui est donc une droite parallèle à a . ■

PROPOSITION 2.1.9 *Soient a et b deux droites parallèles distinctes et P un point non situé dans le plan ab . Les plans Pa et Pb se coupent selon une parallèle à a et b .*

Posons $d = Pa \cap Pb$. Puisque $a \parallel b$, a est parallèle au plan Pb . D'après la proposition précédente, la droite d est parallèle à a . De même, d est parallèle à b . ■

PROPOSITION 2.1.10 *Soient a , b et c trois droites telles que $a \parallel b$ et $b \parallel c$, alors $a \parallel c$.*

Si la droite c est incluse au plan ab , on sait que c est parallèle à a car la transitivité du parallélisme des droites dans le plan est connue.

Si $c \not\subset ab$, soit P un point de c non situé dans ab . D'après la proposition 2.1.9, l'intersection de Pa et de Pb est une droite parallèle à a et à b . C'est donc la parallèle à b passant par P , c'est-à-dire la droite c elle-même. Par conséquent, $c \parallel a$.

2. Pourquoi les parallèles à FH passant par les points de AK constituent-elles un plan ?

On établit d'abord l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2.1.11 *Soient c et d deux droites non parallèles. Par deux points distincts A et B de c , on trace les parallèles a et b à d . Alors les droites a , b et c sont coplanaires.*

Vu la transitivité du parallélisme, nous savons déjà que a et b sont coplanaires. Et la droite c est incluse au plan ab puisqu'elle contient un point de a et un point de b . ■

La proposition suivante fournit un peu plus que la réponse à la question 2 :

PROPOSITION 2.1.12 *Etant données deux droites non parallèles a et d , il existe un et un seul plan passant par a et parallèle à d .*

Soit P un point de a . Par P , traçons la parallèle p à d . d'après la proposition 2.1.9, toute parallèle à d passant par un point de a est dans le plan pa . Les parallèles constituent donc le plan pa , et celui-ci est parallèle à d .

Il reste à prouver qu'il n'y a qu'un seul plan passant par a et parallèle à d . Supposons qu'il y en ait deux, α et β .

Si P est un point de a , d'après la proposition 2.1.8, Pd coupe aussi bien α que β selon une parallèle à d . Ainsi, toutes les parallèles à d passant par les points de a sont à la fois dans α et β de sorte que $\alpha = \beta$.

■

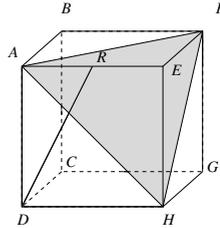
Puisque les parallèles à une droite d , passant par les points d'une droite a constituent un plan, on a immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.1.13 *Si a et d sont deux droites non parallèles et si α est un plan non parallèle à d , la projection de a sur α parallèlement à d est une droite.*

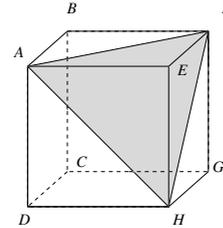
■

2.1.4 Fiche n° 2 : Incidence et parallélisme (2)

Construire les ombres au soleil de triangles dont les sommets sont situés sur les faces d'un cube.

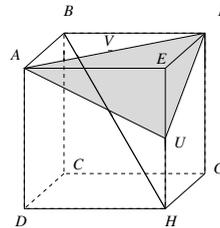


1. Projeter AFH sur $CDGH$ parallèlement à RD . (R est le milieu du segment $[AE]$)



2. Projeter AFH sur $CDGH$ parallèlement à AH .

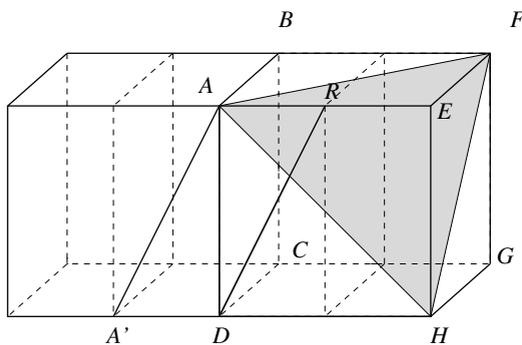
3. Projeter AFU sur $CDGH$ parallèlement à BH . (U est le milieu du segment $[EH]$)



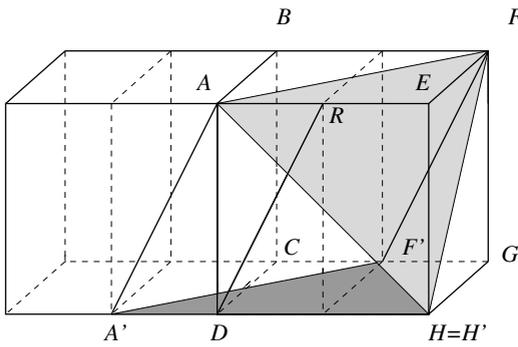
2.1.4.1 Solution commentée

Projection de AFH parallèlement à RD

Cherchons l'ombre du triangle AFH sur le plan $CGHD$ en supposant que le soleil éclaire dans la direction de la droite RD .

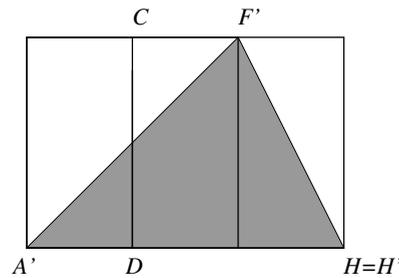


Sur la face $ABCD$, construisons un nouveau cube, et coupons-le en deux. Le point A joue dans l'un de ces demi-cubes le même rôle que R dans le demi-cube contenant $ABCD$ et R . On trouve ainsi facilement que la projection de A est A' ($ARDA'$ est un parallélogramme).



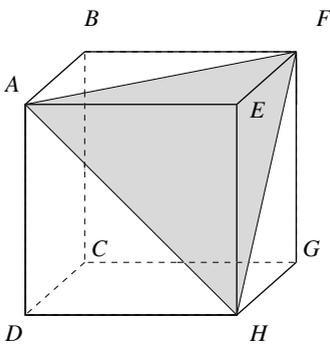
De même, on trouve que l'image de F est F' (milieu du segment $[CG]$). Comme le point H fait partie du sol, il est sa propre image. En reliant A' , F' et G' , on trouve l'ombre du triangle.

Remarquons que le triangle AFH est équilatéral. En effet, comme les segments $[AF]$, $[AH]$ et $[HF]$ sont des diagonales de carrés de même taille, ils ont même longueur. Cependant, son ombre n'est pas un triangle équilatéral, comme on peut le voir sur la vue aérienne du sol ci-dessous. Ceci est à rapprocher de la remarque faite dans l'introduction.



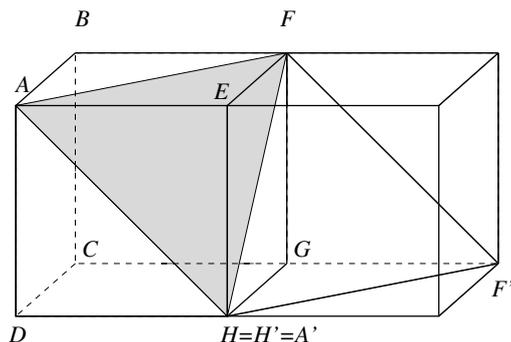
Projection de AFH parallèlement à AH

Cherchons l'ombre du triangle AFH sur le sol en supposant que le soleil donne dans la direction de la droite AH .



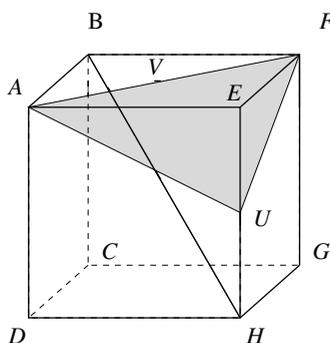
Remarquons que cette fois, le côté $[AH]$ du triangle est parallèle à la direction de projection. Les projections de A et H sont donc confondues. L'image du triangle est un segment de droite inclus à l'intersection des plans AFH et $CGDH$. Il reste à construire l'image de F .

Construisons un nouveau cube sur la face $EFGH$ afin que le point F puisse jouer le rôle de A dans la face $AEDH$. On trouve immédiatement que l'image de F est F' : $AFF'H$ est un parallélogramme.

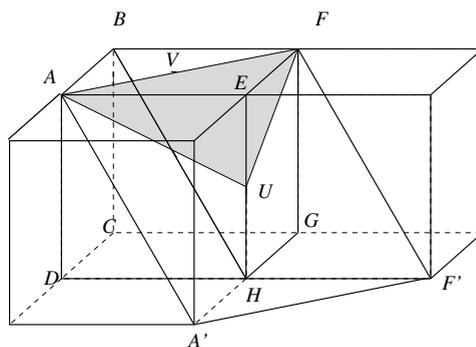


Projection de AUF parallèlement à BH

Cherchons l'ombre du triangle AUF sur le sol en supposant que le soleil éclaire dans la direction de la droite BH .

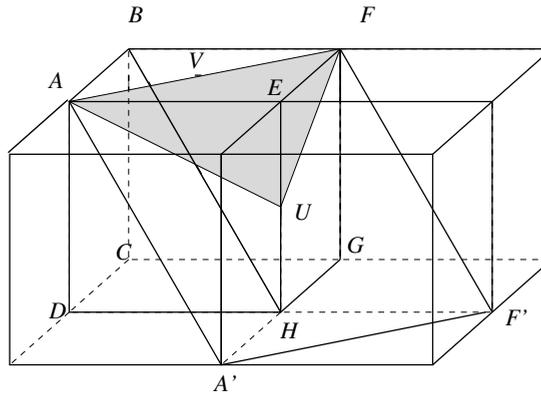


Nous allons faire jouer le rôle de B à A et F . Pour ce faire, nous allons construire de nouveaux cubes sur les faces $AEDH$ et $EFGH$. Par translation, on trouvera les images des points A et F , donc l'ombre de $[AF]$.



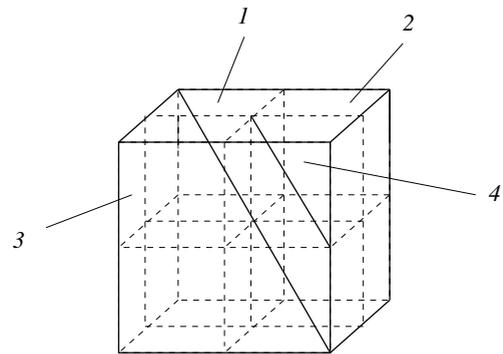
Notons V le milieu de $[AF]$ et remarquons que la droite BH est parallèle à la droite UV .

Centrons notre attention sur le plan diagonal BEH et plus particulièrement sur le triangle BEH . La droite VU joint les milieux des deux côtés de ce triangle. D'après le théorème de Thalès (dans le plan de ce triangle), VU est parallèle à BH .



REMARQUE 2.1.14 Nous pouvons aussi visualiser ce résultat sur un réseau cubique plus fin que le premier, comme dans la figure ci-dessous à droite.

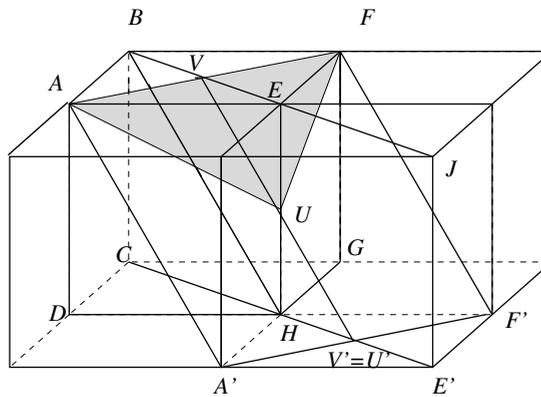
BH est la droite qui supporte la diagonale du petit cube 1. Par translation, cette diagonale est parallèle à la même diagonale du petit cube 4, qui n'est autre que UV .



Puisque $UV \parallel BH$, les points U et V ont la même ombre.

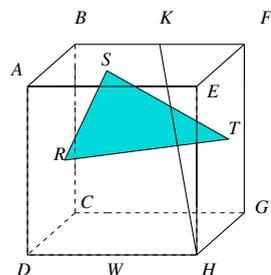
Or l'ombre de V , qui est le centre du carré $ABFE$, est le point V' , centre du carré $A'HF'E'$. Cette ombre appartient donc à $[A'F']$.

Il en résulte que l'ombre du triangle AFU est le segment $[A'F']$.



2.1.5 Fiche n° 3 : Incidence et parallélisme (3)

Soit K le milieu du segment $[BF]$. Construire l'ombre au soleil du triangle RST sur le plan $CDGH$, le soleil étant dans la direction de la droite KH .



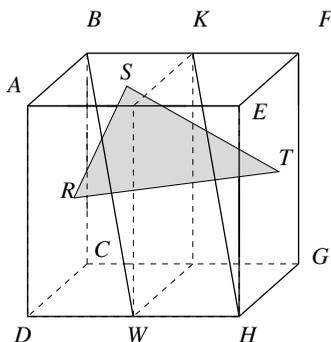
2.1.5.1 Solution commentée

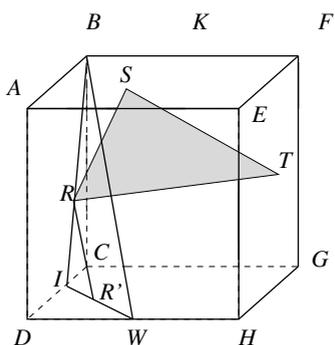
K est le milieu du segment $[BF]$. Cherchons l'ombre du triangle RST sur le sol en supposant que le soleil éclaire dans la direction de la droite KH , sachant que $R \in ABCD$, $S \in CBF$ et $T \in EFGH$.

Dans les énoncés précédents, le triangle dont on cherchait l'ombre était toujours particulier en ce que ses sommets étaient soit des sommets du cube, soit situés au milieu d'une arête. Nous rencontrons ici le cas général : les sommets du triangle ne sont plus des points particuliers du cube. Nous le traiterons par deux méthodes différentes. La première repose sur la considération de sections du cube par des plans particuliers, la seconde exploite les propriétés associées à un réseau cubique.

PREMIÈRE MÉTHODE

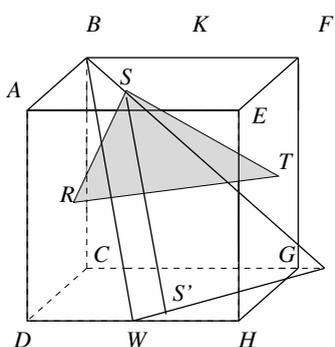
Notons W le milieu du segment $[DH]$. On remarque par translation que la droite BW est parallèle à la droite KH . Par conséquent, elles déterminent toutes deux la même projection parallèle.



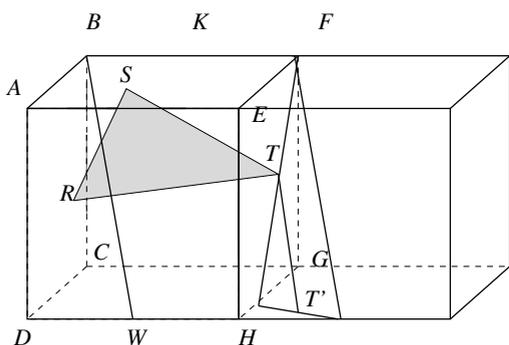


Les points B , R et W déterminent un plan, dont l'intersection avec la face $CDHG$ s'obtient de la manière suivante : comme B et R sont tous deux dans la face $ABCD$, la droite BR coupe la face $CDHG$ en un point I de l'arête CD . L'intersection demandée est le segment $[IW]$.

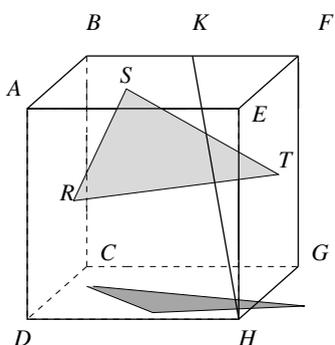
L'image R' de R est l'intersection de IW avec la parallèle à BW passant par R .



On procède de même pour le point S . On trouve S' .

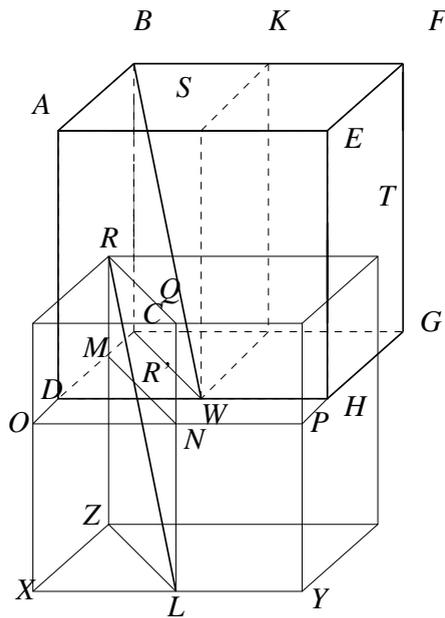


Les points T et B ne se trouvent pas dans une même face. Afin de trouver la projection de T , nous construisons un nouveau cube sur la face $EFGH$. Le point F joue le rôle de B , et en procédant à présent comme pour les deux autres points, on trouve T' .



Si nous rassemblons les précédents graphiques et joignons les points trouvés, nous voyons apparaître l'ombre du triangle RST .

SECONDE MÉTHODE



Dessignons un nouveau cube, translaté de $ABCDEFGH$, de telle sorte que R joue le rôle de B . Si L est le milieu de $[XY]$, alors, par translation, RL est parallèle à BW . La projection de R sur le plan $CDHG$ est le point d'intersection de RL avec ce plan.

Or, le plan $RQLZ$ coupe la face $CDHG$ suivant MN , où M est sur CD et N est sur OP (on peut en déduire que MN est parallèle à CW).

L'intersection R' de MN avec RL est la projection du point R . On procède de même pour construire les projections de S et T .

2.1.5.2 Commentaires et prolongements

Dans cette construction, nous avons utilisé — subrepticement — le fait que si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre. Ce résultat est évidemment très intuitif et dans certaines circonstances, on pourrait être tenté d'en omettre la démonstration. Dans d'autres circonstances, il n'y aurait aucune raison de l'éviter. Nous allons donc énoncer et démontrer formellement ce résultat. Il repose notamment sur la chaîne de propositions qui suit.

PROPOSITION 2.1.15 *Toute droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection.*

Soient α et β deux plans sécants, d leur intersection et x une droite parallèle tant à α qu'à β .

Si d n'était pas parallèle à x , d'après la proposition 2.1.12 (fiche 1), par d il ne pourrait passer qu'un seul plan parallèle à x , alors qu'ici nous en avons deux : α et β . Donc $d \parallel x$. ■

PROPOSITION 2.1.16 *Soient α , β et γ tels que $\alpha \parallel \beta$ et $\beta \parallel \gamma$. Alors $\alpha \parallel \gamma$ (transitivité du parallélisme de plans).*

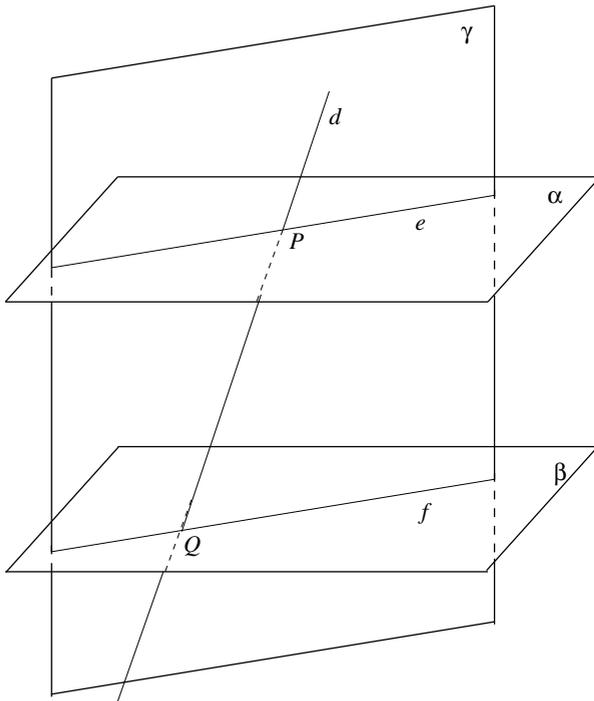
Supposons que α et γ ne sont pas parallèles. Notons alors x leur intersection. D'après la proposition précédente, toute droite du plan β devrait être parallèle à x , ce qui est évidemment impossible. ■

PROPOSITION 2.1.17 *Si α et β sont deux plans parallèles, tout plan γ qui coupe α coupe aussi β et les intersections $\alpha \cap \gamma$ et $\beta \cap \gamma$ sont deux droites parallèles.*

D'après la transitivité du parallélisme de plans, le plan γ coupe le plan β dès qu'il coupe α et que α et β sont parallèles. Toute droite du plan α étant parallèle à β , la proposition 2.1.8 entraîne que les deux droites $\alpha \cap \gamma$ et $\beta \cap \gamma$ sont parallèles. ■

PROPOSITION 2.1.18 *Si deux plans α et β sont parallèles, toute droite d qui coupe l'un coupe l'autre.*

Supposons que la droite d coupe le plan α en un point P . Soit γ un plan contenant d .



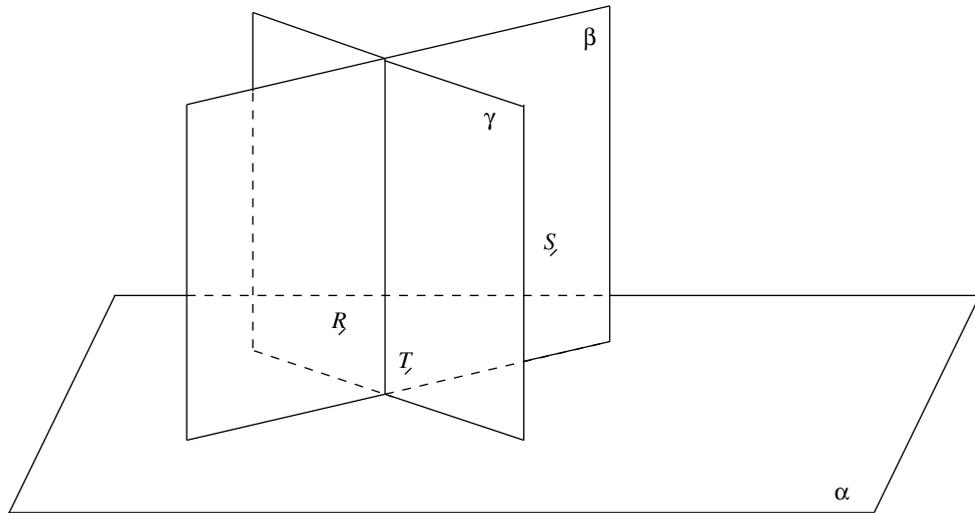
Le plan γ n'est pas confondu avec α (sinon d serait contenue dans α) et n'est pas parallèle à α (sinon d ne couperait pas α). Par conséquent, γ coupe α . Vu la proposition précédente, γ coupe aussi β et les deux droites $\alpha \cap \gamma$ et $\beta \cap \gamma$ sont parallèles. La droite d étant dans le même plan γ et ayant un point commun avec $\alpha \cap \gamma$ coupe nécessairement aussi $\beta \cap \gamma$ et a donc un point commun avec β .

REMARQUE 2.1.19 *Nous venons de décrire comment projeter un triangle sur un plan parallèlement à une direction donnée dans le cas où les sommets du triangle appartiennent aux plans des faces d'un cube et où le plan sur lequel on projette est lui-même une face du cube. Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que étant donné un triangle RST et un plan α sur lequel on veut projeter RST , on peut toujours trouver un cube dont l'une des faces est dans le plan α et dont les faces (éventuellement prolongées) contiennent les points R , S et T .*

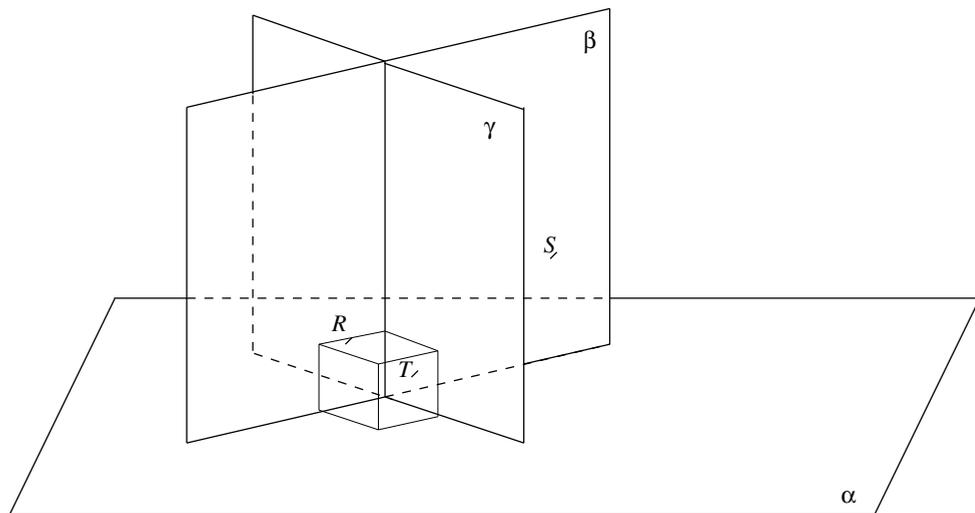
La construction s'organise de la manière suivante :

1. Construction d'un trièdre trirectangle adapté

Par R et S , on mène le plan β perpendiculaire au plan α . Par T , on mène le plan γ perpendiculaire à α et à β . Les trois plans α , β et γ forment des trièdres trirectangles.



2. Construction d'un cube



La distance d'un des points R , S ou T au plan α détermine, par exemple, l'arête d'un cube qui répond à la question. Un tel cube n'est pas unique ! Mais on remarque que la solution proposée est telle qu'un des côtés du triangle RST (dans notre cas, c'est $[RS]$) est entièrement dans le plan d'une face du cube.

2.1.6 Synthèse

A l'issue de l'étude des situations décrites dans les fiches 1 à 3, nous retiendrons les résultats suivants :

A propos des projections

DÉFINITION 2.1.2 : On appelle *projection d'un point P sur un plan α parallèlement à une droite d non parallèle à α* le point d'intersection avec α de la parallèle à d passant par P .

PROPOSITION 2.1.13 : La projection d'une droite sur un plan parallèlement à une droite est une droite (sauf dans le cas dégénéré où la direction de d est la direction de projection).

A propos du parallélisme de droites

PROPOSITION (Euclide) 2.1.6 : Par tout point de l'espace passe une et une seule parallèle à une droite donnée.

PROPOSITION 2.1.10 : Soient a , b , et c trois droites telles que $a \parallel b$ et $b \parallel c$, alors $a \parallel c$. (Transitivité du parallélisme de droites.)

A propos du parallélisme de plans

PROPOSITION 2.1.16 : Soient α , β et γ tels que $\alpha \parallel \beta$ et $\beta \parallel \gamma$. Alors $\alpha \parallel \gamma$. (Transitivité du parallélisme de plans.)

A propos du parallélisme de droites et plans

PROPOSITION 2.1.7 : Une droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan.

PROPOSITION 2.1.8 : Si la droite a est parallèle au plan α , tout plan β passant par a et non parallèle à α coupe α suivant une parallèle à a .

PROPOSITION 2.1.12 : Etant données deux droites non parallèles a et d , il existe un et un seul plan passant par a et parallèle à d .

PROPOSITION 2.1.15 : Toute droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection.

PROPOSITION 2.1.17 : Si α et β sont deux plans parallèles, tout plan γ qui coupe α coupe aussi β et les intersections $\alpha \cap \gamma$ et $\beta \cap \gamma$ sont deux droites parallèles.

PROPOSITION 2.1.18 : Si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.

Cette liste est strictement limitée à des propriétés importantes dont on a eu besoin pour traiter complètement les situations des fiches 1 à 3. D'autres résultats doivent venir s'ajouter aux résultats précédents. Ils peuvent assez aisément être illustrés dans des situations liées à un réseau cubique. Nous nous contenterons de mentionner les propositions suivantes.

PROPOSITION 2.1.20 *Si une droite a est parallèle à un plan α , et si $P \in \alpha$, la parallèle à a passant par P est entièrement contenue dans α .*

C'est un corollaire de la proposition 2.1.8 : le plan Pa coupe le plan α suivant une parallèle à a , qui est donc LA parallèle à a passant par P . ■

PROPOSITION 2.1.21 *Tout plan β parallèle à deux droites sécantes a et b d'un plan α est parallèle à α .*

Si α et β étaient sécants, d'après la proposition 2.1.15, les droites a et b sont toutes les deux parallèles à la droite $\alpha \cap \beta$, ce qui est impossible puisqu'elles sont sécantes. ■

PROPOSITION 2.1.22 *Par tout point P de l'espace passe un et un seul plan parallèle à un plan α donné.*

Vu la transitivité du parallélisme des plans de l'espace, l'unicité du plan cherché est évidente. Il suffit donc d'établir qu'il existe bien un plan β contenant P et parallèle à α .

Considérons deux droites sécantes a et b du plan α et la parallèle d à a passant par P . D'après la proposition 2.1.12, il existe un (et un seul) plan β passant par d et parallèle à b . Ce plan β étant parallèle à deux droites sécantes de α est parallèle à α . ■

PROPOSITION 2.1.23 *Les projections sur un plan α de deux droites parallèles a et b , parallèlement à une droite d sont, sauf si $a // d // b$, deux droites parallèles.*

En ces projections sont les intersections avec α des plans parallèles à d passant par a et b , et ces deux plans sont parallèles. ■

On illustre facilement sur un réseau cubique le fait que deux droites non parallèles peuvent très bien avoir comme projections des droites parallèles.

REMARQUE 2.1.24 *D'autres propriétés encore pourraient être énoncées. Par exemple, de la proposition 2.1.20 et de la transitivité du parallélisme de droites, on déduit trivialement que si deux droites a et b sont parallèles, et si a est parallèle à un plan α , alors b est parallèle à α . Par contraposition, on trouve alors que si deux droites a et b sont parallèles, tout plan α qui coupe a coupe aussi b .*

Nous ne croyons pas formateur d'accumuler des résultats tellement proches les uns des autres et d'encombrer ainsi la mémoire des élèves en leur donnant l'impression d'une théorie lourde et complexe. Ne vaut-il pas mieux leur apprendre à organiser leurs connaissances en ne retenant qu'un petit nombre d'énoncés à partir desquels on peut aisément retrouver tous les autres ?

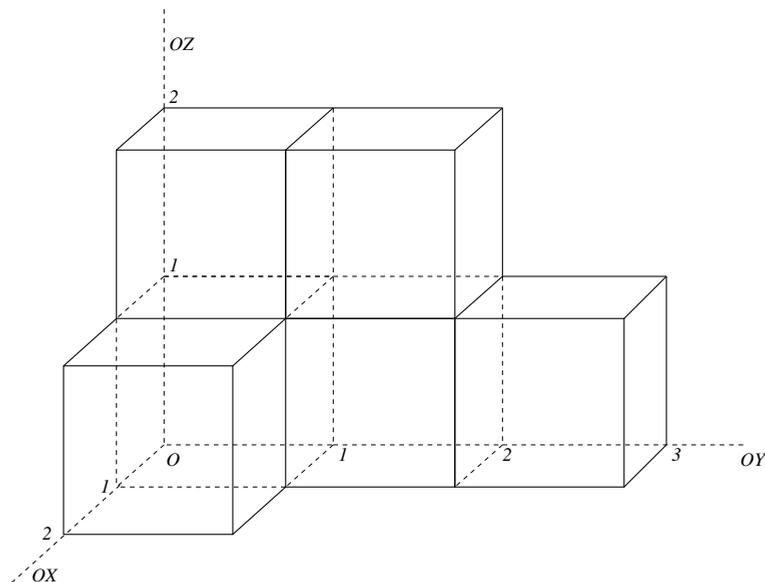
2.2. La géométrie vectorielle élémentaire

2.2.1 Introduction

L'objectif des fiches qui suivent est de familiariser l'élève avec le calcul vectoriel et la notion de linéarité. A partir des réseaux cubiques employés dans les fiches précédentes qui induisent un repère orthonormé, nous allons déduire les propriétés du calcul vectoriel, en particulier la notion de combinaison linéaire.

Prenons un réseau cubique, et intéressons-nous à un cube en particulier (bien choisi). Un des sommets de la face inférieure est appelé *origine* et noté O . Les droites supportant les côtés du cube passant par O sont les *axes*. Nous les différencions en les baptisant OX , OY et OZ .

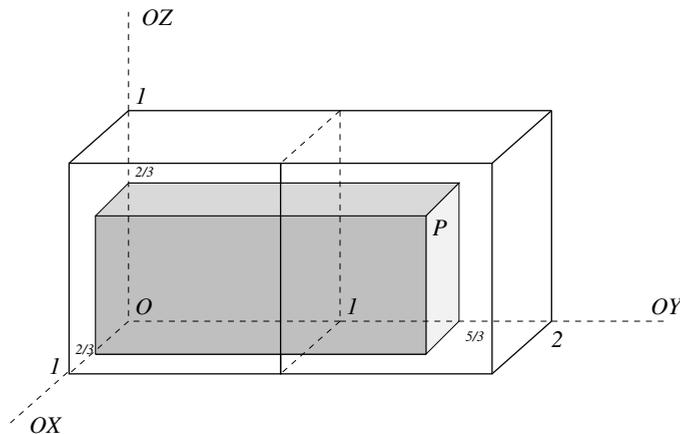
En prenant pour unité le côté d'un cube, nous associons un nombre réel à chaque point de l'axe OX . Nous faisons de même pour les deux autres axes.



Grâce à ces indications, nous pouvons repérer chaque point P du réseau par un triplet de nombres :

- Le premier de ceux-ci fixe la projection du point sur l'axe X parallèlement au plan YZ (nous savons par la fiche N° 1 qu'il n'existe qu'un et un seul plan parallèle au plan YZ qui passe par le point considéré ; cette projection est donc unique). Nous l'appellerons *abscisse* de P .
- Le deuxième nombre fixe la projection du point P sur l'axe Y parallèlement au plan XZ . C'est l'*ordonnée* de P
- Enfin, le troisième nombre fixe la projection de P sur l'axe Z parallèlement au plan XY . C'est la *hauteur* de P

Prenons par exemple le point P suivant.



Ses projections sur les axes X , Y et Z sont respectivement $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Nous adoptons la notation suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Nous identifions donc le point P à la colonne de ses *coordonnées cartésiennes*. Le choix de cette notation n'est pas innocent : il permet de justifier la notation $P + Q$ utilisée pour désigner le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sommets sont P , O et Q .

Dans la suite, nous étudions les projections parallèles en termes de coordonnées. A partir de là, nous construisons pas à pas les équations vectorielles et cartésiennes des droites et des plans de l'espace.

Nous avons vu dans les activités de la fiche n° 1 des méthodes qui nous permettent de construire des projections de points. Ces méthodes constitueront le point de départ des fiches de cette section.

2.2.2 Fiche n° 4 : Projections et coordonnées

On donne les points $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

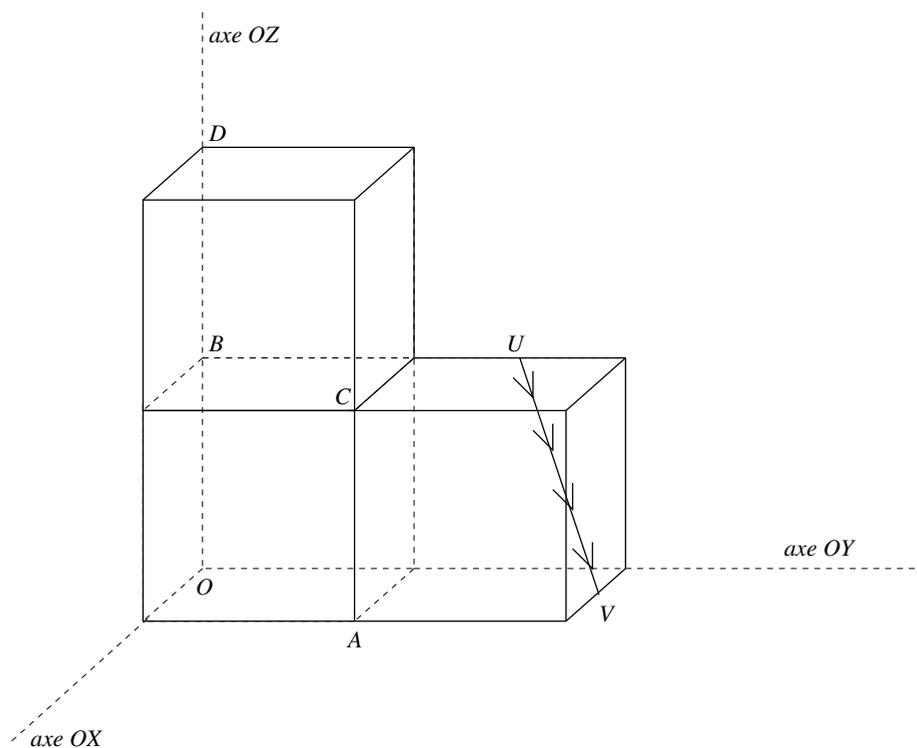
Calculer les coordonnées des projections sur le plan OXY parallèlement au segment $[UV]$ des points suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une formule qui calcule les coordonnées de la projection d'un point quelconque.

2.2.2.1 Solution commentée

Avant toute chose, visualisons la situation sur un réseau cubique.



Le point A est confondu avec sa projection A' car il se trouve dans le plan OXY , donc

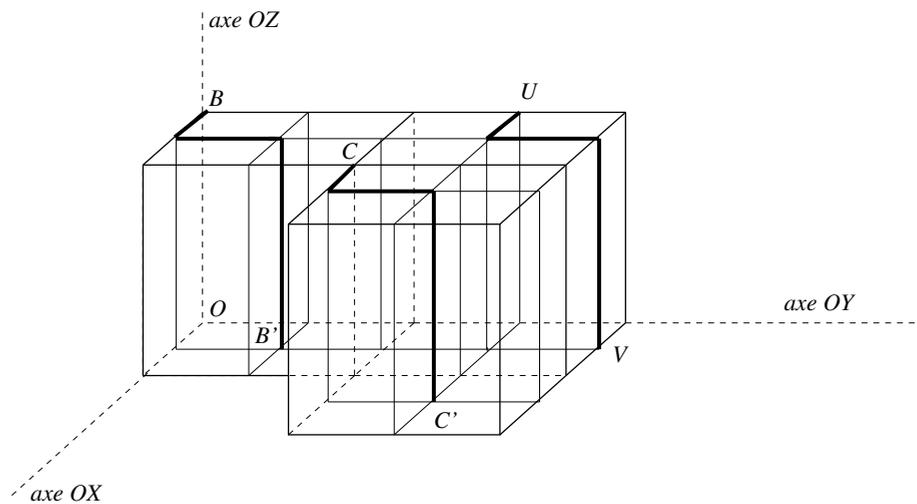
$$A' = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Regardons à présent les points B et C . Ils ont même hauteur que le point U , c'est-à-dire 1. Construisons leurs projections B' et C' , à l'aide de translations appropriées du prisme de diagonale $[UV]$ (cfr. fiche N° 3 « Projection de RST parallèlement à KH », seconde méthode).

Cette construction implique immédiatement que les coordonnées de B' et C' s'obtiennent à *chaque fois* à partir d'un même procédé, encodé dans le prisme de diagonale $[UV]$:

- Avancer de $\frac{1}{2}$ parallèlement à l'axe OX
- Avancer de $\frac{1}{2}$ parallèlement à l'axe OY
- Descendre de 1 (c'est-à-dire avancer de -1) parallèlement à l'axe OZ

Ce procédé s'applique à tous les points de hauteur 1.

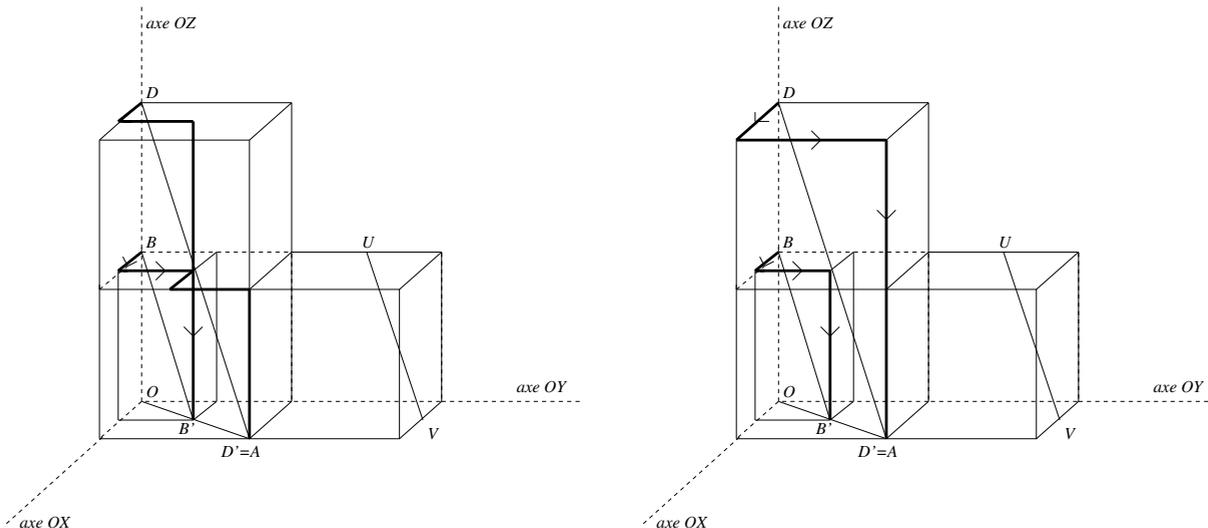


Il s'agit maintenant d'étudier comment ce procédé peut se généraliser à d'autres points que ceux de même hauteur que U .

Commençons par le point D . Une situation similaire a déjà été rencontrée dans la fiche N° 2 (Projection de AUF parallèlement à BH), et il est facile d'en déduire que la projection D' de D coïncide avec A (ou A').

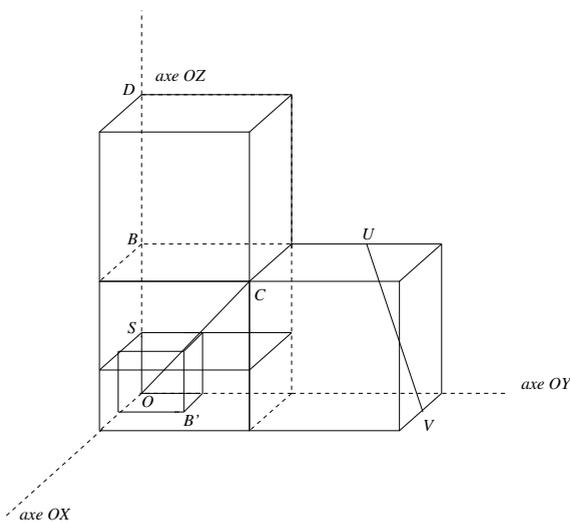
On peut atteindre la même conclusion en observant la similitude des pavés de diagonale $[BB']$ et de diagonale $[DA]$. Le point D étant de hauteur 2, sa projection D' s'obtient par le même procédé que celui dégagé plus haut, *pourvu qu'il soit répété deux fois*. Cette conclusion subsiste pour tous les points de hauteur 2, c'est-à-dire de même hauteur que D .

Au total, on passe de D à D' en avançant de 1 parallèlement à OX , de 1 parallèlement à OY et en descendant de 2 (c'est-à-dire en avançant de -2) parallèlement à OZ .



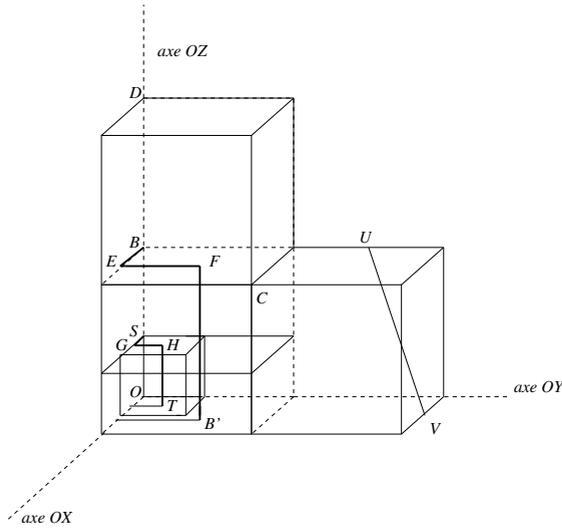
Il reste à traiter le cas d'un point S de hauteur z quelconque (et donc non nécessairement entière), mais comme on s'en aperçoit vite, cela ne présente plus aucune difficulté.

Commençons par le cas où le point S appartient à l'axe OZ .



L'homothétie de centre O et de rapport z amène le *cube unité* de diagonale $[OC]$ sur un cube dont S est un sommet.

REMARQUE 2.2.1 Si la notion d'homothétie de l'espace est inconnue des élèves, il est possible de présenter le raisonnement ci-dessus en se bornant à évoquer le théorème de Thalès dans les trois plans OBE , OEF et OFB' . C'est aussi une bonne occasion de parler d'homothétie.



L'homothétie envoie le prisme de diagonale $[BB']$ sur le prisme de diagonale $[ST]$. Il s'ensuit, par le même raisonnement que précédemment, que la projection du point S est le point T .

On passe de S à T en avançant de $\frac{z}{2}$ parallèlement à OX , de $\frac{z}{2}$ parallèlement à OY , puis en descendant de z parallèlement à OZ .

On en déduit, toujours comme précédemment, la projection d'un point quelconque P , de hauteur z : elle s'obtient à partir de P par le même chemin qui mène de S à T .

En conclusion, la projection parallèlement à UV du point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur le plan OXY est donnée par la formule :

$$\text{proj}_{OXY}^{//UV}(P) = \begin{pmatrix} x + z \cdot \frac{1}{2} \\ y + z \cdot \frac{1}{2} \\ z + z \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

2.2.2.2 Prolongements : points, translations et triplets de nombres.

Dans la formule ci-dessus, la notation $\text{proj}_{OXY}^{//UV}$ désigne le « projecteur sur le plan OXY parallèlement à la direction de la droite UV ». Cette formule a une écriture remarquablement homogène : on ajoute terme à terme le triplet

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et le triplet $\begin{pmatrix} z \cdot \frac{1}{2} \\ z \cdot \frac{1}{2} \\ z \cdot (-1) \end{pmatrix}$.

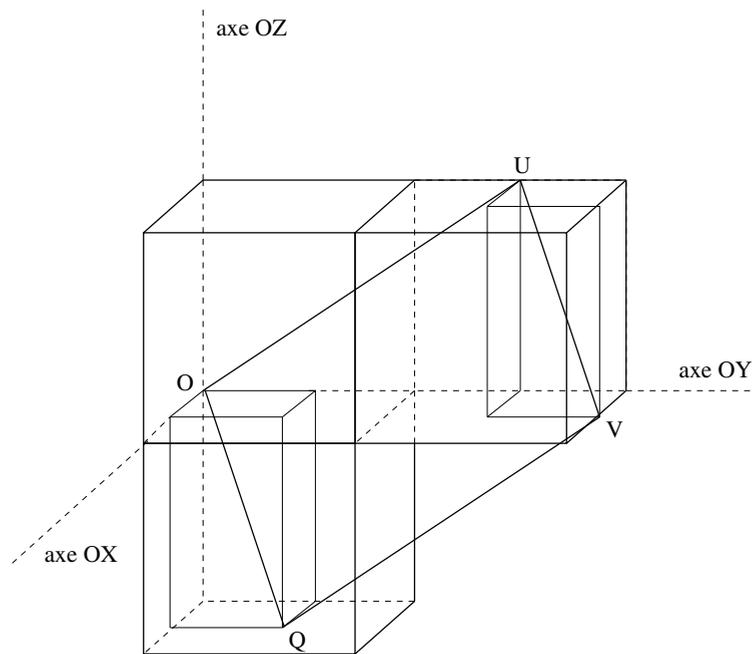
Il s'agit de donner un sens géométrique à une écriture aussi remarquable. Pour tous les points P de hauteur 1, on a :

$$\text{proj}_{OXY}^{//UV}(P) = \text{proj}_{OXY}^{//UV} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ y + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Le procédé géométrique correspondant est une *translation*, décrite par l'addition, terme à terme, du triplet $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, un triplet de nombres réels reçoit une nouvelle interprétation : celle d'opérateur de translation. Comment relier cette nouvelle interprétation à celle, première, de coordonnées d'un point ?

Notons Q le *point* de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$. Il y a deux observations à faire.

1. Si on situe Q , U et V sur la même figure, la considération des pavés de diagonale $[UV]$ et de diagonale $[OQ]$ montre que $OUVQ$ est un parallélogramme. La translation qui envoie U sur V est donc déterminée par le seul point Q .



2. Les coordonnées de U et V , $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ déterminent par soustraction celles du point Q :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ 2 - \frac{3}{2} \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

De ces deux observations, il résulte que les deux interprétations d'un triplet de nombres réels que suggérait la formule (2.1) sont équivalentes.

Mais — et c'est là son principal intérêt — cette équivalence étant établie, il y a alors moyen d'écrire les formules (2.1) et (2.2) sous forme bien plus économique, en termes d'addition ou de soustraction de (coordonnées) de points :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = V - U$$

et

$$\text{proj}_{OXY}^{//UV}(P) = \begin{pmatrix} x + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ y + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = P + Q = P + V - U$$

Dans le même ordre d'idées, il est facile d'observer que la multiplication par un même nombre k de toutes les coordonnées d'un point correspond géométriquement à l'application à ce point d'une homothétie de centre O et de rapport k .

Cela permet de récrire la formule (2.1) sous la forme condensée

$$\boxed{\text{proj}_{OXY}^{//UV}(P) = P + z \cdot (V - U)}$$

où z est la hauteur de P .

Cette formule contient à la fois le procédé algébrique de calcul de $\text{proj}_{OXY}^{//UV}(P)$, et la signification géométrique de ce procédé (« on fait descendre P le long de la direction de UV de telle sorte qu'on arrive à la hauteur 0 »).

REMARQUE 2.2.2 *Le fait que z soit la hauteur de P dans la formule ci-dessus provient de ce que la 3^e coordonnée de $V - U$ est -1 , car nous avons vu dans cette fiche que la méthode pour descendre d'un étage se reproduit pour n'importe quelle hauteur. C'est une homothétie de rapport z qui nous a permis de ramener la situation générale à celle du cube de hauteur 1.*

2.2.3 Fiche n° 5 : Équations vectorielles d'une droite

On considère le même projecteur qu'à la fiche N° 4 : la direction de projection est celle de la droite UV , le plan de projection est le plan OXY .

De plus, $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer tous les points ayant même projection que A .
- b. Déterminer les coordonnées de tous les points se projetant sur un point quelconque du plan OXY .
- c. Plus généralement, étant donné un point quelconque de l'espace, comment déterminer les coordonnées de tous les points ayant même projection que lui ?

2.2.3.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Suivant les axiomes et les définitions rappelés dans l'introduction de la section A, l'ensemble de points en question est la droite d_A parallèle à UV et contenant le point A .

Cette droite d_A est appelée *droite projetante* du point A .

Si le point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à d_A , les conclusions de la fiche N° 4 donnent immédiatement :

$$A = M + z.(V - U)$$

Puisque $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + z. \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z. \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$M = A - z.(V - U)$$

Utilisant la lettre k à la place de z , nous pouvons écrire l'équivalence

$$\boxed{M \in d_A \iff M = A + k.(U - V)}$$

Nous dirons que $M = A + k.(U - V)$ est l'équation vectorielle de d_A .

Réponse à la question b

Le principe sera le même qu'à la question *a*, mais cette fois, nous ne connaissons plus les coordonnées du point sur lequel nous projetons.

Notons $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point G situé dans le plan OXY et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point quelconque M de sa droite projetante d_G .

Nous avons directement :

$$\boxed{M = G + k.(U - V)}$$

Réponse à la question c

M et N sont deux points quelconques de la droite projetante de G , il existe des réels k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{aligned} M &= G + k_1.(U - V) \\ N &= G + k_2.(U - V) \end{aligned}$$

d'où

$$M - N = (k_1 - k_2)(U - V)$$

Cette égalité exprime en termes vectoriels que la droite projetante de G est parallèle à la droite UV .

Mais cette égalité ne fait plus référence au point G , de telle sorte que nous pouvons l'interpréter de la manière suivante :

Quel que soit le point N de l'espace, la droite projetante de N est l'ensemble des points M tels qu'il existe l réel avec

$$M = N + l.(U - V)$$

2.2.3.2 Commentaires et prolongements

1. Nous venons d'élaborer l'équation vectorielle d'une droite projetante, mais il est remarquable que nous pouvons à présent abandonner le qualificatif « projetant ». Toute droite MN est en effet projetante pour tout projecteur parallèlement à MN . Nous retiendrons donc de ce qui précède l'énoncé suivant :

Soit UV une droite et N un point. Un point M appartient à la parallèle à UV passant par N si et seulement s'il existe un réel l tel que $M = N + l.(U - V)$

Dans la formule $M = N + l.(U - V)$, nous pouvons interpréter le réel l comme étant l'abscisse du point M sur la droite parallèle à UV passant par le point N , pour autant que le point N soit choisi comme point d'abscisse 0 et $N + U - V$ comme point d'abscisse 1.

2. Si nous notons Q le point $N + U - V$, la droite parallèle à UV passant par N est la droite NQ , et l'équation vectorielle de cette droite s'écrit :

$$M = N + l.(Q - N)$$

Cette notation, d'une part, fait mieux apparaître le fait qu'une droite est déterminée par deux points et d'autre part remet en mémoire les deux interprétations d'un triplet de nombres, comme point et comme translation.

2.2.4 Fiche n° 6 : Équations vectorielles d'un plan

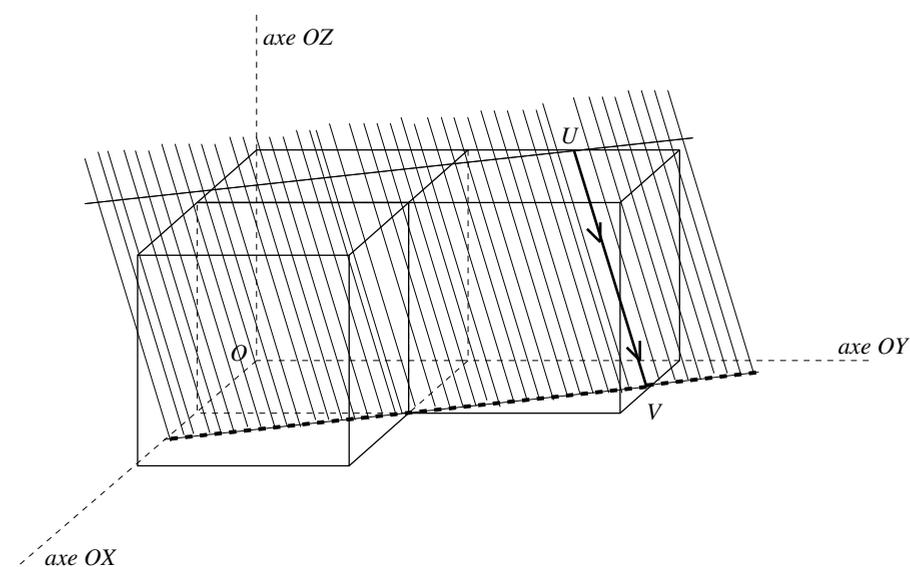
Dans cette fiche également, nous conservons la situation de la fiche N° 4.

- Déterminer les coordonnées de tous les points dont la projection est située sur la droite AV .
- Soient N , P et Q trois points distincts de l'espace. On considère la droite d passant par N et parallèle à PQ . Trouver l'équation vectorielle du plan passant par d et parallèle à UV .

2.2.4.1 Solution commentée

Réponse à la question a

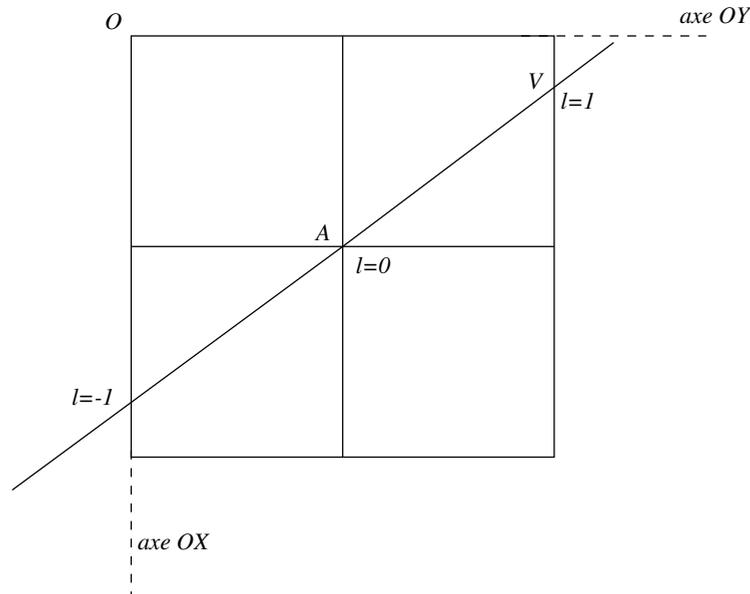
La droite AV est distincte de la droite UV , les activités rencontrées dans le thème A ont montré que l'ensemble des points recherchés est un plan parallèle à la droite UV , et contenant la droite AV . Ce plan est appelé *plan projetant* de la droite AV .



L'idée qui permet de résoudre le problème est de faire pour tous les points situés sur la droite AV ce qui a déjà été réalisé dans la fiche N° 5 pour un seul point du plan OXY .

Mais cela nécessite au préalable de décrire l'ensemble des coordonnées des points de la droite AV . Nous pouvons appliquer la remarque finale de la fiche N° 5 : la droite AV est la droite passant par A et parallèle à AV . Par conséquent, un point Q' appartient à AV si et seulement s'il existe un réel l tel que $Q' = A + l.(V - A)$

Observons que pour $l = 0$ (respectivement $l = 1$), on obtient $Q' = A$ (respectivement $Q' = V$).



Nous pouvons à présent en revenir à l'idée évoquée plus haut. Toujours d'après les résultats de la fiche N° 5, et quel que soit le point Q' situé sur la droite AV :

un point M appartient à la droite projetante de Q' si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que

$$M = Q' + k.(U - V)$$

Dès lors, le plan projetant de la droite AV est l'ensemble des points M pour lesquels il existe deux nombres réels k et l tels que :

$$M = A + l.(V - A) + k.(U - V)$$

Remarquons que pour $l = 0$, nous retrouvons l'équation de la droite d de la question *a*.

Réponse à la question b

On sait que la droite d a pour équation $M_1 = N + l.(Q - P)$. On sait aussi que la parallèle à UV passant par N a pour équation $M_2 = N + k.(V - U)$.

Le plan α défini par ces deux droites sécantes (puisqu'elles ont le point N en commun) est le plan voulu. Il a pour équation vectorielle $M_3 = N + l.(Q - P) + k.(V - U)$.

Nous pouvons faire jouer un rôle particulier au point N , intersection des deux droites qui déterminent le plan α , en choisissant des points A et B , respectivement situés sur d et sur la parallèle à UV passant par N et vérifiant les égalités suivantes : $A - N = Q - P$ et $B - N = V - U$, on peut alors écrire l'équation vectorielle du plan sous la forme $M_3 = N + l.(A - N) + k.(B - N)$.

2.2.4.2 Commentaires et prolongements

L'équation $M = N + l.(A - N) + k.(B - N)$ caractérise les points du plan α . Nous entendons par là qu'est valide l'équivalence logique

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \exists l, k : M = N + l.(A - N) + k.(B - N)$$

que l'on résume par l'expression consacrée « $M = N + l.(A - N) + k.(B - N)$ est une *équation vectorielle* de α »

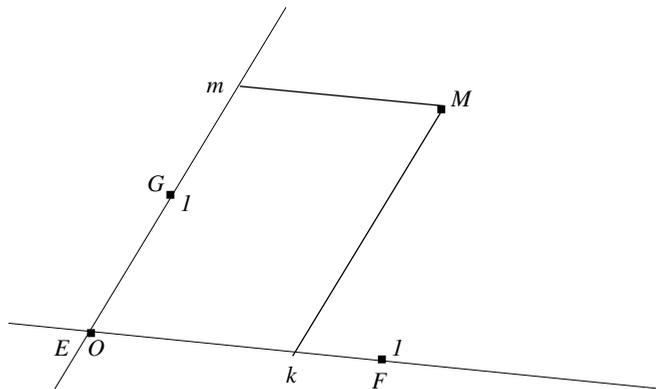
L'équation vectorielle ci-dessus montre aussi la possibilité de construire un point quelconque M du plan α en appliquant au point N successivement les deux translations $l.(A - N)$ et $k.(B - N)$.

D'une façon générale, n'importe quel plan déterminé par trois points E , F et G admet une équation vectorielle, du type :

$$M = E + k.(F - E) + m.(G - E)$$

En effet, on peut toujours considérer le plan EFG comme étant le plan projetant de la droite EF parallèlement à FG sur n'importe quel plan passant par EG .

On dit que $k.(F - E) + m.(G - E)$ est une *combinaison linéaire* de $F - E$ et $G - E$.



Dans le repère constitué de l'origine E et de ces deux translations, nous pouvons interpréter (k, m) comme les coordonnées du point M dans le plan EFG pour autant que les points F et G aient respectivement les coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

2.2.5 Synthèse

A l'issue de l'étude des situations décrites dans les fiches 4 à 6, nous retiendrons les constructions et les résultats suivants :

A propos des opérations sur les coordonnées

Deux opérations ont été définies sur les colonnes de coordonnées :

- L'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$$

- La multiplication par un nombre réel

$$k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a \\ k.b \\ k.c \end{pmatrix}$$

Les deux opérations s'effectuent composante par composante. Elles jouissent des propriétés usuelles de l'addition de deux réels et de la multiplication d'un réel par un réel fixé, à savoir :

- Associativité de l'addition

- Existence d'un neutre (ici, il s'agit de la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

- Existence pour tout élément $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'un opposé $\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$

- Commutativité de l'addition

- Associativité de la multiplication par un réel

- Distributivité de la multiplication par un réel sur l'addition

- Distributivité de l'addition sur la multiplication par un réel

- La multiplication par 1 est l'identité

On peut figurer les calculs sur les points représentant les colonnes de coordonnées, en leur appliquant les règles de calcul rappelées ci-dessus.

Dans ce contexte, on appelle translation définie par le point $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ l'opération qui consiste à additionner à un point quelconque le point A .

De même, si k est un nombre réel, on appelle homothétie de rapport k l'opération qui consiste à multiplier un point quelconque par k .

A propos de vecteurs

Ces définitions et règles de calculs s'appliquent à d'autres objets mathématiques que les seules colonnes de coordonnées.

On appelle *vecteur* n'importe quel objet mathématique porteur d'un calcul linéaire, c'est-à-dire d'une addition et d'une multiplication par un réel, ces opérations respectant les propriétés décrites ci-dessus.

On appelle *combinaison linéaire* d'un ensemble fini de vecteurs $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ n'importe quelle expression du type :

$$a_1.v_1 + a_2.v_2 + \dots + a_n.v_n$$

où les coefficients a_i sont des réels.

Ainsi, l'espace des colonnes est un exemple d'espace de vecteurs, ou encore d'espace vectoriel. Par extension, on qualifie de *vectoriel* tout objet, propriété, équation défini en terme de vecteurs.

A propos de l'équation vectorielle d'une droite

- L'équation vectorielle d'une droite d passant par les deux points distincts A et B s'écrit :

$$X \in d \iff \exists k \in \mathbb{R} : X = A + k.(B - A)$$

On dit alors que d est munie du repère (A, B) au sens où le point A est obtenu pour la valeur $k = 0$ du paramètre et est appelé *origine* du repère, et le point B est obtenu pour la valeur $k = 1$ du paramètre.

La valeur de k correspondant à un point X est appelée *abscisse* du point X dans le repère (A, B) .

Le point $B - A$ est appelé *vecteur directeur* de la droite AB .

- L'équation vectorielle d'une droite d passant par le point A et parallèle à la droite CD (avec $C \neq D$) :

$$X \in d \iff \exists k \in \mathbb{R} : X = A + k.(D - C)$$

A propos de l'équation vectorielle d'un plan

L'équation vectorielle d'un plan α passant par les trois points distincts A , B et C non alignés s'écrit :

$$X \in \alpha \iff \exists k, l \in \mathbb{R} : X = A + k.(B - A) + l.(C - A)$$

On dit alors que α est muni du repère (A, B, C) au sens où le point A est obtenu pour les valeurs $k = 0$ et $l = 0$ des paramètres et est appelé *origine* du repère. Quant aux points B et C , ils sont respectivement obtenus pour les valeurs $k = 1, l = 0$ et $k = 0, l = 1$.

Les valeurs de k et l correspondant à un point X sont appelées les *coordonnées* du point X dans le repère (A, B, C) .

2.3. Systèmes d'équations linéaires et fonctions linéaires

2.3.1 Introduction

L'étude des systèmes d'équations linéaires n'est vraisemblablement pas celle qui pose le plus de problèmes aux enseignants. La théorie en est bien connue et ne nécessite guère de commentaires. Nous avons donc opté dans ces fiches pour une présentation pratique, à travers des situations géométriques. De façon plus précise, nous rencontrerons des systèmes d'équations linéaires à de nombreuses reprises, via des problèmes de détermination d'intersections de droites et plans. Ce sera aussi l'occasion d'introduire l'équation cartésienne d'un plan.

Si cette façon de faire a l'avantage d'intégrer l'étude de l'algèbre linéaire à celle de la géométrie, elle a le gros inconvénient de limiter la taille des systèmes d'équations rencontrés à 2 ou 3. Or, dans la pratique quotidienne des applications, les systèmes d'équations de taille nettement plus élevée sont monnaie courante. Il nous semble donc important que les élèves soient durant leur scolarité mis au moins une fois en présence d'un système de taille appréciable.

Faute de temps, nous n'avons pu rédiger une application significative qui nécessite la manipulation de systèmes d'équations de taille supérieure à 2 ou 3. Le lecteur pourra se reporter à la bibliographie, notamment à un récent document de la Commission Pédagogique de la SBPMef, [8].

Le travail avec les équations linéaires à trois inconnues ne peut guère être séparé de celui avec les fonctions linéaires, c'est-à-dire les applications linéaires de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} . Ces fonctions s'introduisent naturellement via la considération des projecteurs sur une droite parallèlement à un plan. C'est à ce sujet que sont consacrées les fiches 10 à 12.

Comme déjà signalé plus haut, le choix des sujets abordés dans les fiches qui suivent n'a rien d'exhaustif, et peut donc être considéré comme arbitraire. Par exemple, les systèmes d'équations cartésiennes permettant de décrire une droite ont été directement envisagés sous la forme la plus générale possible. Il aurait peut-être été plus classique de partir du système d'équations cartésiennes : $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ (avec $l.m.n \neq 0$) qui décrit une

droite passant par le point $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et qui s'obtient immédiatement à partir de l'équation vectorielle de cette droite. Le fond du problème n'en aurait pas été modifié.

2.3.2 Fiche n° 7 : Point de percée d'une droite dans un plan

Soient les points suivants : $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
 $G = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- a. Trouver le point de percée de la droite CD dans le plan OXY (le sol).
- b. Trouver le point de percée de la droite CD dans le plan EFG .
- c. Trouver le point de percée de la droite HI dans le plan EFG .
- d. Trouver le point de percée de la droite JK dans le plan EfG .

2.3.2.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Il s'agit d'appliquer les résultats des fiches N° 4 et N° 5. L'équation vectorielle de la droite CD est :

$$\begin{aligned} P &= C + k.(D - C) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k. \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 5 - 3 \\ 6 - 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k. \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

P est le point de percée de CD dans le sol si et seulement si sa hauteur vaut 0, ainsi :

$$P \in OXY \iff 5 + k = 0 \iff k = -5$$

D'où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 5. \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 5 \\ 3 - 10 \\ 5 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réponse à la question b

D'après les conclusions de la fiche N° 6 :

$$M \in EFG \iff \exists r, s \in \mathbb{R} : M = E + r.(G - E) + s.(F - E)$$

Les points M de ce plan ont donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6.r \\ 4.r + s \\ 2.r + 2.s \end{pmatrix}$ où r et s sont des paramètres réels. Le point de percée cherché est l'un de ces points M .

Or, par la fiche N° 5, nous savons que :

$$\begin{aligned} M \in CD &\iff \exists q \in \mathbb{R} : M = C + q.(D - C) \\ M &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 1 - q \\ 3 + 2.q \\ 5 + q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Afin de trouver le point de percée de la droite CD dans le plan EFG , nous devons trouver des réels r , s et q tels que :

$$\begin{cases} 1 - q = 6.r \\ 3 + 2.q = 4.r + s \\ 5 + q = 2.r + 2.s \end{cases}$$

La 1^{re} équation nous donne $r = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}.q$ de sorte qu'en remplaçant r par cette expression dans les deux équations suivantes, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} r = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}.q \\ 3 + 2.q = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}.q + s \\ 5 + q = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.q + 2.s \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} r = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}.q \\ s = \frac{8}{3}.q + \frac{7}{3} \\ s = \frac{2}{3}.q + \frac{7}{3} \end{cases}$$

Les deux dernières équations impliquent $q = 0$, d'où résultent $r = \frac{1}{6}$ et $s = \frac{7}{3}$. Le point de percée cherché est donc le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \cdot \frac{1}{6} \\ 4 \cdot \frac{1}{6} + \frac{7}{3} \\ 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 25 \\ 6 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire le point C .

Dans la fiche N° 6, nous avons rencontré une condition nécessaire et suffisante pour que le point C fasse partie du plan défini par les trois points E , F et G .

$C - E$ doit être une combinaison linéaire de $F - E$ et $G - E$. Comme $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nous voyons que C est une combinaison linéaire des points F et G . Plus précisément, $C = \frac{1}{6} \cdot G + \frac{7}{3} \cdot F$.

Réponse à la question c

$$\begin{aligned} M \in HI &\iff \exists u \in \mathbb{R} : M = I + u \cdot (H - I) \\ M &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \cdot u \\ -6 + 10 \cdot u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Essayons de trouver des réels r , s et u tels que :

$$\begin{cases} 6 = 6 \cdot r \\ 5 \cdot u = 4 \cdot r + s \\ -6 + 10 \cdot u = 2 \cdot r + 2 \cdot s \end{cases}$$

La 1^{re} équation nous donne $r = 1$. En remplaçant r par 1 dans les deux autres équations, nous obtenons deux équations équivalentes : $5u = 4 + s$. Le système se réduit donc à :

$$\begin{cases} r = 1 \\ u = \frac{4+s}{5} \end{cases}$$

Il nous reste deux équations pour trois inconnues. La valeur de r étant déterminée, nous pouvons choisir à notre guise l'une des deux inconnues restantes.

Si $s = 0$, alors $u = \frac{4}{5}$, si $s = 1$, alors $u = 1$, etc. Ou encore, si $u = 0$, alors $s = -4$, si $u = 1$, alors $s = 1$, etc. Ainsi

Quelle que soit la valeur de u , on peut trouver des nombres r et s tels que

$$I + u \cdot (H - I) = E + r \cdot (G - E) + s \cdot (F - E)$$

Nous constatons que tous les points de la droite HI appartiennent au plan EFG . L'intersection est donc la droite HI elle-même.

Réponse à la question d

$$\begin{aligned} M \in JK &\iff \exists v \in \mathbb{R} : M = J + v \cdot (K - J) \\ M &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} -1 + 6.u \\ -2 + 6.u \\ -8 + 6.u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Essayons de trouver des réels r , s et u tels que :

$$\begin{cases} -1 + 6.u = 6.r \\ -2 + 6.u = 4.r + s \\ -8 + 6.u = 2.r + 2.s \end{cases}$$

La 1^{re} équation nous donne $r = \frac{-1}{6} + u$. En remplaçant r par cette expression dans les deux autres équations, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} r = \frac{-1}{6} + u \\ u = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot s \\ u = \frac{23}{12} + \frac{1}{2} \cdot s \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, ce système est impossible. Il n'y a donc pas de point de percée, la droite JK est disjointe et parallèle au plan EFG .

2.3.3 Fiche n° 8 : Équations cartésiennes d'un plan

Soit α le plan passant par l'origine et les points $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a. On note m , n et p les droites d'intersection de α avec les plans OXZ , OYZ et OXY . On demande les équations vectorielles de m , n et p .

b. Calculer la hauteur d'un point quelconque P de α en fonction de l'abscisse x et de l'ordonnée y de sa projection sur le plan OXY .

c. Suivre une démarche analogue afin de caractériser les coordonnées d'un point quelconque du plan β passant par l'origine et les points R et $S = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.3.3.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Un point quelconque de α a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

où d et e sont des réels. Ce point appartient à OXZ si et seulement si $d + 3e = 0$.

Un point quelconque P de $m = \alpha \cap OXZ$ est donc donné par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3e \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Nous avons trouvé une équation vectorielle de m .

De même, un point quelconque Q de $n = \alpha \cap OYZ$ est donné par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}e \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Et un point quelconque R de $p = \alpha \cap OXY$ est donné par :

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{4}e. \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + e. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = e. \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

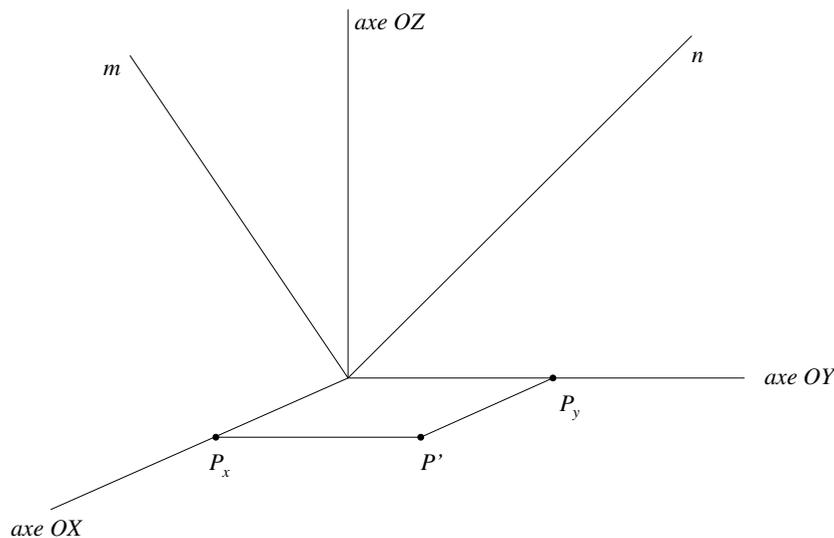
Remarquons que nous nous sommes à chaque fois ramenés à des points dont une coordonnée est nulle.

Cela signifie notamment que la droite m est dans le plan $y = 0$. Dans ce plan, elle a pour équation $z = 2x$.

De même, n est située dans le plan $x = 0$. Dans ce plan, elle a pour équation $z = y$.

Idem pour la droite p située dans le plan $z = 0$ et qui, dans ce plan, a pour équation $x = -2y$.

Réponse à la question b



Commençons par tracer les parallèles m' et n' à m et n passant par le point P . Les droites n' et m se coupent en A , et les droites m' et n se coupent en B .

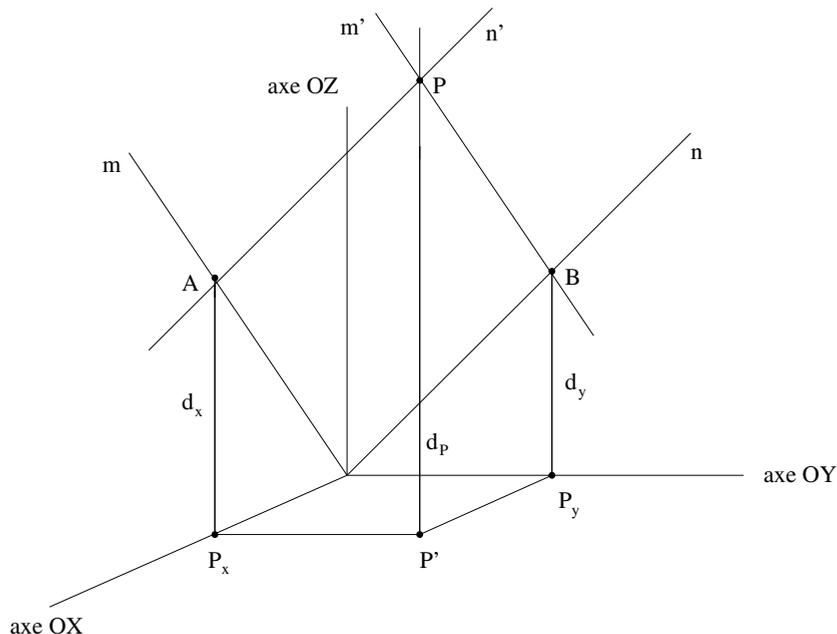
Le parallélogramme $OAPB$ se projette parallèlement à OZ sur le plan OXY selon un rectangle $OP_xP'P_y$.

Si $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $P' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ et $P_y = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus, d'après ce que

nous avons vu en a, $A = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$.

Enfin, puisque $P = A + B$, on a

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x}{2} + y \end{pmatrix}$$



Les coordonnées d'un point quelconque du plan α sont donc caractérisées par la relation :

$$z = \frac{x}{2} + y$$

Nous l'appellerons *une équation cartésienne* du plan α .

Réponse à la question c

Un point quelconque de β a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

où d et e sont des réels.

Ce point appartient à OXZ si et seulement si $3d - 6e = 0$. Un point quelconque P de $\beta \cap OXZ$ est donc donné par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Cette intersection est donc l'axe OZ , le plan β est vertical. Par conséquent, l'intersection $\beta \cap OYZ$ est aussi l'axe OZ .

Enfin, un point quelconque R de $p = \alpha \cap OXY$ est donné par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}e. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + e. \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = e. \begin{pmatrix} -\frac{48}{5} \\ -\frac{36}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière droite a donc pour équation cartésienne dans le plan OXY :

$$y = \frac{3}{4}x$$

Mais cette équation caractérise aussi tous les points du plan β , qu'ils soient dans OXY ou non. Ainsi, $y = \frac{3}{4}x$ (ou $3x = 4y$) est aussi une équation cartésienne du plan β .

2.3.3.2 Commentaires et prolongements

Equation cartésienne d'un plan passant par l'origine

Nous venons d'obtenir deux exemples de relations liant les coordonnées d'un point quelconque situé dans un plan passant par l'origine. En général, une telle relation est du type :

$$ax + by + cz = 0$$

où a , b et c sont des réels fixés.

Nous appellerons une telle relation une *équation cartésienne* du plan considéré. Comme c'est le cas pour les équations vectorielles rencontrées précédemment, une équation cartésienne doit être interprétée comme *l'abréviation d'une équivalence logique* : dire que $ax + by + cz = 0$ est une équation cartésienne d'un plan α signifie très exactement

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \alpha \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$$

Montrons que la réciproque est également vraie : une équation de ce type est l'équation d'un plan, pour autant que l'un au moins des nombres a , b , c soit différent de 0.

1. Dans un premier temps, supposons $c \neq 0$. On a alors :

$$ax + by + cz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ceci montre que la relation $ax + by + cz = 0$ est une équation cartésienne du plan passant par l'origine et par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$.

Remarquons que si $a = 0$, le plan d'équation $by + cz = 0$ contient l'axe OX . De même, si $b = 0$, le plan d'équation $ax + cz = 0$ contient l'axe OY .

2. Supposons à présent $c = 0$. Un au moins des coefficients a et b est différent de 0. Admettons par exemple $a \neq 0$. L'équation s'écrit $ax + by = 0$ et on a :

$$\begin{aligned} ax + by = 0 &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}y \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{b}{a}y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $ax + by = 0$ est l'équation cartésienne du plan passant par $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ce plan contient l'axe OZ .

Nous venons de voir que tout plan α comprenant l'origine admet une équation cartésienne du type $ax + by + cz = 0$ et que toute équation de ce type est l'équation d'un plan comprenant l'origine du moment qu'un au moins des coefficients a, b, c n'est pas nul.

Mais il est clair que si k est un réel non nul, on a l'équivalence $ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow kax + kby + kc z = 0$ de sorte que l'équation d'un plan α n'est certainement pas unique. Il importe de remarquer que deux équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ qui caractérisent le même plan α sont nécessairement proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe un réel non nul k tel que $a = ka'$, $b = kb'$ et $c = kc'$.

Pour vérifier cette assertion, considérons l'intersection du plan α et du plan OXY . Il s'agit d'une droite de ce plan. Si α admet les deux équations cartésiennes précitées, la droite $OXY \cap \alpha$ aura dans ce plan les deux équations cartésiennes $ax + by = 0$ et $a'x + b'y = 0$. Ces équations sont donc équivalentes : tout point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui vérifie l'une vérifie aussi l'autre. Par exemple, le point $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ vérifie la première équation : $a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$. Par conséquent, on a $a' \cdot (-b) + b' \cdot a = 0$ ou $a'b = ab'$.

En considérant les intersections de α avec les plans OXZ et OYZ , on obtient de même $a'c = ac'$ et $b'c = bc'$. Si les trois nombres a , b et c sont différents de 0, on en déduit les égalités

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

La valeur commune k de ces trois rapports ne peut être nulle puisque l'un au moins des coefficients a' , b' et c' n'est pas nul. Les deux équations sont donc proportionnelles.

Si deux seulement des coefficients a , b et c ne sont pas nuls, par exemples a et b , on a de même $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. On a aussi dans ce cas $c' = 0$ puisque $c = 0$, $ac' = a'c = 0$ et $a \neq 0$. Les deux équations sont donc aussi proportionnelles dans ce cas.

Enfin, si un seul des coefficients a , b , c n'est pas nul, par exemple a , alors b' et c' sont aussi nuls puisque $ab' = a'b = 0$ et $ac' = a'c = 0$. Nous obtenons encore la proportionnalité des deux équations.

Ainsi, dans tous les cas :

Les équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ déterminent le même plan si et seulement si elles sont proportionnelles : il existe un réel non nul k tel que $a = ka'$, $b = kb'$ et $c = kc'$.

Equation cartésienne d'un plan quelconque

Un plan quelconque α est toujours parallèle à un plan α_0 passant par l'origine. Il existe donc toujours au moins une translation qui applique α_0 sur α . Si cette translation s'écrit

$P \mapsto P + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, le point $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ appartient à α en tant qu'image de l'origine par la

translation. De plus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \alpha \iff \exists \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \alpha_0 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \\ z - w \end{pmatrix} \in \alpha_0$$

Si $ax' + by' + cz' = 0$ est une équation cartésienne de α_0 , on a donc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \alpha &\iff a.(x - u) + b.(y - v) + c.(z - w) = 0 \\ &\iff ax + by + cz = au + bv + cw \end{aligned}$$

Le second membre étant une constante, une équation cartésienne de α est du type :

$$ax + by + cz = d$$

où $d \in \mathbb{R}$.

Nous avons vu qu'un plan comprenant l'origine peut être caractérisé par une infinité d'équations définies à un facteur près. Il en est clairement de même dans le cas des plans ne comprenant pas l'origine.

D'une part, tout point de α qui vérifie l'équation $ax + by + cz = d$ vérifie aussi $kax + kby + kcz = kd$.

D'autre part, si les équations $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$ caractérisent toutes deux le plan α , alors le plan parallèle à α passant par l'origine est déterminé par $ax + by + cz = 0$ aussi bien que par $a'x + b'y + c'z = 0$. Ces deux équations sont donc proportionnelles : il existe $k \neq 0$ tel que $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$. Montrons qu'on a alors

aussi $d = kd'$: si $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un point quelconque du plan α , on a

$$d = ax + by + cz = ka'x + kb'y + kc'z = k(a'x + b'y + c'z) = kd'$$

Nous dirons encore que les équations $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$ sont proportionnelles lorsque

$$\exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} a = ka' \\ b = kb' \\ c = kc' \\ d = kd' \end{cases}$$

2.3.4 Fiche n° 9 : Équations cartésiennes d'une droite

Soient les points suivants : $A = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $G = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

- a. Quelle est l'intersection des plans OXY et OBC ?
- b. Quelle est l'intersection des plans OXY et ABC ?
- c. Quelle est l'intersection des plans ABC et EFG ?
- d. Quelle est l'intersection des plans AFD et EBG ?

2.3.4.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Suivant les méthodes de la fiche N° 8, nous obtenons sans peine :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in OXY \cap OBC \iff \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 4k \\ y = 2k \\ z = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ces équations sont les équations cartésiennes des plans OXY et OBC . Les points de l'intersection de ces plans doivent donc satisfaire aux deux équations. Ensemble, elles constituent *un système d'équations cartésiennes* de la droite passant par O et $B - 3.C$.

Réponse à la question b

Le plan OXY a pour équation cartésienne : $z = 0$. Quant au plan ABC , nous savons que :

$$M \in ABC \iff \exists k, l \in \mathbb{R} : M = A + k.(B - A) + l.(C - A)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8k + 6l - 7 \\ 9k + 7l - 7 \\ 5k + 3l - 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La recherche d'une équation cartésienne de ABC peut passer par l'élimination "classique" de k et l à partir de l'équation vectorielle. La méthode suivante, plus élégante, s'appuie sur les résultats de la fiche N° 8.

Déterminons d'abord une équation cartésienne du plan α parallèle à ABC et passant par l'origine. Ce plan α a pour équation vectorielle :

$$M = k.(B - A) + l.(C - A) = k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Un point de l'intersection de α avec OYZ est déterminé par l'équation $8k + 6l = 0$.

Choisissons par exemple $k = 3$ et $l = -4$. Le point $N = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient à $\alpha \cap OYZ$.

De même, on constate que le point $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ appartient à $\alpha \cap OXZ$. Ainsi, nous avons une nouvelle équation vectorielle de α :

$$M = m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \\ -m \\ 3m + 8n \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons une équation cartésienne de α :

$$z = -3y + 4x$$

Une équation cartésienne de ABC est donc du type : $4x - 3y - z = k$. Or $\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \in ABC$,

d'où : $4 \cdot (-7) - 3 \cdot (-7) - (-2) = k$ et $k = -5$.

Une équation cartésienne de ABC est finalement :

$$z = 4x - 3y + 5$$

Un système d'équations cartésiennes de l'intersection des plans OXY et ABC est par conséquent :

$$\begin{cases} z = 0 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

Réponse à la question c

Nous connaissons déjà l'équation cartésienne du plan ABC , trouvons-en une pour le plan EFG .

$$\begin{aligned} L \in EFG &\iff \exists g, h \in \mathbb{R} : L = E + g.(F - E) + h.(G - E) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + g. \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + h. \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7g + 6h \\ -14g + 2h + 5 \\ h + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer ici la méthode précédente pour obtenir une équation cartésienne de EFG . Néanmoins, vu que la hauteur z de L ne fait intervenir que le paramètre h , une élimination traditionnelle est plus rapide :

$$\begin{cases} h = z - 2 \\ x = 7g + 6.(z - 2) \\ y = -14g + 2.(z - 2) + 5 \end{cases}$$

d'où $2x + y = 12.(z - 2) + 2.(z - 2) + 5 = 14.(z - 2) + 5$. Une équation cartésienne de EFG est donc

$$2x + y - 14z = -23$$

Un système d'équations cartésiennes de l'intersection des plans EFG et ABC est alors :

$$\begin{cases} z = 4x - 3y + 5 \\ 2x + y - 14z = -23 \end{cases}$$

Réponse à la question d

$$M \in AFD \iff \exists k, l \in \mathbb{R} : M = A + k.(F - A) + l.(D - A)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14k + 13l - 7 \\ -2k + l - 7 \\ -4k + 3l - 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Considérons le plan β déterminé par l'origine et les points $F - A$ et $D - A$. Cherchons des points N et P situés respectivement dans les intersections de β avec OXZ et OYZ .

$$\begin{aligned}
N &= \begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ n_2 \end{pmatrix} = k_n \cdot (F - A) + l_n \cdot (D - A) \\
P &= \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = k_p \cdot (F - A) + l_p \cdot (D - A)
\end{aligned}$$

Nous trouvons par exemple :

$$\begin{aligned}
N &= (F - A) + 2 \cdot (D - A) \\
P &= -13 \cdot (F - A) + 14 \cdot (D - A)
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi une nouvelle équation vectorielle du plan AFD :

$$\begin{aligned}
M \in AFD &\iff \exists m, n \in \mathbb{R} : M = A + (-13m + n) \cdot (F - A) + (14m - 2n) \cdot (D - A) \\
&= \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ -10 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 40n - 7 \\ 40m - 7 \\ -10m + 10n - 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cherchons à présent une équation cartésienne de AFD : nous posons $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et éliminons les paramètres m et n .

$$\begin{cases} x = 40n - 7 \\ y = 40m - 7 \\ z = -10m + 10n - 2 \end{cases}$$

Les deux premières équations nous donnent :

$$\begin{cases} n = \frac{y+7}{40} \\ m = \frac{x+7}{40} \end{cases}$$

En remplaçant m et n par ces valeurs dans la troisième équation, l'équation cartésienne souhaitée apparaît :

$$z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - 2$$

De même :

$$\begin{aligned} L \in EBG &\iff \exists g, h \in \mathbb{R} : L = E + k.(B - E) + h.(G - E) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + g. \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + h. \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g + 6h \\ -3g + 2h + 5 \\ g + h + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cherchons comme précédemment des points Q et R vérifiant les conditions.

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_2 \end{pmatrix} = g_q.(B - E) + h_q.(G - E) \\ R &= \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = g_r.(B - E) + h_r.(G - E) \end{aligned}$$

Nous trouvons par exemple :

$$\begin{aligned} Q &= 2.(B - E) + 3.(G - E) \\ P &= -6.(B - E) + (G - E) \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi une nouvelle équation vectorielle du plan EBG :

$$\begin{aligned} L \in EBG &\iff \exists m, n \in \mathbb{R} : L = E + (2m - 6n).(B - E) + (3m + n).(G - E) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + m. \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + n. \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20m \\ 20n + 5 \\ 5m - 5n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remplaçons L par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x = 20m \\ y = 20n + 5 \\ z = 5m - 5n + 2 \end{cases}$$

Les deux premières équations nous donnent :

$$\begin{cases} m = \frac{x}{20} \\ n = \frac{y-5}{20} \end{cases}$$

En remplaçant m et n par ces valeurs dans la troisième équation, l'équation souhaitée apparaît :

$$z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{13}{4}$$

Le système d'équations cartésiennes que l'on obtient ainsi pour l'intersection des plans AFD et EBG est

$$\begin{cases} z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - 2 \\ z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{13}{4} \end{cases}$$

Ce système n'a aucune solution puisqu'on a deux fois la même équation au terme indépendant près.

L'intersection des plans AFD et EBG est donc vide, ce qui signifie que l'on a affaire à deux plans parallèles.

Remarquons que l'on pouvait voir immédiatement que $F - A$ et $D - A$ sont des combinaisons linéaires de $B - E$ et $G - E$. En effet, $F - A = 2.(B - E) + 2.(G - E)$ et $D - A = (B - E) + 2.(G - E)$.

2.3.4.2 Commentaires et prolongements

Des combinaisons linéaires de points

A plusieurs reprises dans ce qui précède, nous avons remplacé une équation vectorielle d'un plan par une autre équation vectorielle du même plan, se prêtant mieux aux calculs que nous avons à effectuer.

Par exemple, dans la résolution de la question *b*, nous connaissions une équation vectorielle du plan α :

$$M = k.(B - A) + l.(C - A) = k. \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + l. \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors déterminé un point $N = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, appartenant à $\alpha \cap OYZ$ et un point

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ appartenant à $\alpha \cap OXZ$, ce qui nous fournissait une nouvelle équation vectorielle de α :

$$M = m. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + n. \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \\ -m \\ 3m + 8n \end{pmatrix}$$

Les points N et P étaient des combinaisons linéaires de $B - A$ et $C - A$:

$$N = 3 \cdot (B - A) - 4 \cdot (C - A) \text{ et } P = 7 \cdot (B - A) - 9 \cdot (C - A)$$

On remarque immédiatement que tout point combinaison linéaire de N et P est en effet une combinaison linéaire de $B - A$ et $C - A$ et appartient donc à α : si $X = a \cdot N + b \cdot P$, alors $X = (3a + 7b) \cdot (B - A) - (4a + 9b) \cdot (C - A)$. Ainsi toute combinaison linéaire de N et P est bien un point de α .

Mais il y a plus : toute combinaison linéaire de $B - A$ et $C - A$, c'est-à-dire tout point de α est une combinaison linéaire de N et P . Nous pouvons en effet *inverser* les relations

$$\begin{cases} N = 3 \cdot (B - A) - 4 \cdot (C - A) \\ P = 7 \cdot (B - A) - 9 \cdot (C - A) \end{cases}$$

Par exemple, en multipliant la première équation par 7, la seconde par 3 et en les soustrayant, on obtient $-(C - A) = 7N - 3P$. De façon analogue, $-(B - A) = 9N - 4P$.

$$\begin{cases} B - A = -9N + 4P \\ C - A = -7N + 3P \end{cases}$$

C'est cette possibilité d'inverser les formules donnant N et P en fonction de $B - A$ et $C - A$ qui justifie que l'on peut utiliser à volonté une quelconque des deux équations vectorielles $M = k.(B - A) + l.(C - A)$ ou $M = m.N + n.P$ pour étudier le plan α , car ces deux équations caractérisent le même plan.

D'une façon générale, supposons qu'un plan β (passant par l'origine) soit donné par une équation vectorielle $X = aU + bV$ et que P et Q soient des combinaisons linéaires de U et V (donc appartiennent au plan β) :

$$\begin{cases} P = k.U + l.V \\ Q = m.U + n.V \end{cases}$$

Nous pouvons alors nous demander si ces formules sont inversibles, de sorte que le même plan β aurait aussi pour équation vectorielle $X = a'P + b'Q$. D'un point de vue géométrique, il est clair que la condition est que les deux points P et Q ne soient pas alignés avec l'origine, sans quoi les combinaisons linéaires de P et Q ne rempliraient pas β . Les couples $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ ne peuvent donc pas être proportionnels, ce qui s'exprime par la condition

$$kn - ml \neq 0$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier qu'effectivement si cette quantité n'est pas nulle, les points U et V s'expriment comme combinaisons linéaires de P et Q :

$$\begin{cases} U = \frac{1}{kn - lm}(n.P - l.Q) \\ V = \frac{1}{kn - lm}(-m.P + k.Q) \end{cases}$$

Des combinaisons linéaires d'équations

Nous avons vu dans cette fiche qu'une droite est caractérisée par un système de deux équations cartésiennes. Il est important de noter que ces équations ne peuvent être quelconques. Chacune d'entre elles caractérise un plan. Associer un système de deux équations cartésiennes à une droite, c'est lui associer un système de deux plans dont la droite est l'intersection. Les deux plans ne peuvent être confondus. Leurs équations ne peuvent donc être proportionnelles.

Ainsi, le système de deux équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

caractérise une droite si et seulement si l'un au moins des trois nombres $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ n'est pas nul.

Par ailleurs, toute droite d de l'espace peut s'exprimer de nombreuses façons comme l'intersection de deux plans et possède donc, non *un* mais *des* systèmes d'équations cartésiennes du type :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

On peut alors se demander comment construire, à partir de l'un d'entre eux, *tous* les systèmes de deux équations cartésiennes du type précédent qui représentent la droite d .

En abordant cette question, on remarque immédiatement que si un point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifie les deux équations ci-dessus, il vérifie également toute équation $ux + vy + wz = q$ obtenue par combinaison linéaire des deux précédentes, c'est-à-dire toute équation pour laquelle on peut trouver deux réels k et l tels que

$$\begin{cases} u = ka_1 + la_2 \\ v = kb_1 + lb_2 \\ w = kc_1 + lc_2 \\ q = kd_1 + ld_2 \end{cases}$$

En effet si de tels nombres k et l existent, on a évidemment, quel que soit le point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de d ,

$$ux + vy + wz = k(a_1x + b_1y + c_1z) + l(a_2x + b_2y + c_2z) = kd_1 + ld_2 = q$$

Donc

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array} \right\} \Rightarrow ux + vy + wz = q$$

L'interprétation géométrique de cette implication est claire : le plan d'équation $ux + vy + wz = q$ contient la droite intersection des plans α et β d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$.

Il se fait — et c'est la clé de la réponse à notre problème — que, réciproquement, tout plan passant par la droite intersection des deux plans α et β possède une équation cartésienne qui est combinaison linéaire de celles de ces deux plans.

La vérification de cette propriété utilise le fait que les deux équations cartésiennes données ne sont pas proportionnelles puisqu'elles sont celles de deux plans sécants. L'un au moins des nombres $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$, $b_1c_2 - b_2c_1$ est donc différent de zéro. Admettons qu'on ait $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Dans ce cas, la droite d n'est pas horizontale. En effet, la condition $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ entraîne que le système de deux équations linéaires en deux inconnues

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 - c_1z \\ a_2x + b_2y = d_2 - c_2z \end{cases}$$

admet une solution unique quels que soient les seconds membres. Autrement dit, il est possible d'exprimer l'abscisse et l'ordonnée des points de la droite d en fonction de leur hauteur. Si la droite était horizontale, tous ses points auraient la même hauteur, donc aussi la même abscisse et la même ordonnée, ce qui est manifestement impossible.

La condition $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ entraîne aussi que le couple $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des couples $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire qu'il existe des réels k et l tels que

$$\begin{cases} u = ka_1 + la_2 \\ v = kb_1 + lb_2 \end{cases}$$

On a en effet $ub_2 - va_2 = k(a_1b_2 - b_1a_2)$, ce qui permet de déterminer k . Le second coefficient l est déterminé de façon semblable.

A présent, si le point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifie les deux équations $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, donc aussi l'équation $ux + vy + wz = q$, il vérifie également l'équation

$$k(a_1x + b_1y + c_1z) + l(a_2x + b_2y + c_2z) - (ux + vy + wz) = kd_1 + ld_2 - q$$

laquelle n'est autre que

$$(kc_1 + lc_2 - w)z = kd_1 + ld_2 - q$$

Comme la droite d n'est pas horizontale, l'équation ci-dessus ne peut être vérifiée par tous les points de d que si $kc_1 + lc_2 - w = 0$ et $kd_1 + ld_2 - q = 0$. Ainsi, l'équation $ux + vy + wz = q$ est une combinaison linéaire de $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ q \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Nous venons d'établir que

Un plan γ passe par l'intersection de deux plans α et β si et seulement si toute équation cartésienne de γ est une combinaison linéaire des équations de α et β .

Nous pouvons à présent déterminer dans quel cas deux systèmes de deux équations linéaires caractérisent la même droite :

Les deux systèmes de deux équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z = q_1 \\ u_2x + v_2y + w_2z = q_2 \end{cases}$$

déterminent la même droite si et seulement si chacune des équations d'un système est une combinaison linéaire des deux équations de l'autre système.

Autrement dit, il doit exister des réels k, l, m, n et k', l', m' et n' tels que

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = k' \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + l' \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = m' \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + n' \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Visiblement nous nous retrouvons dans une situation analogue à celle rencontrée plus haut, qui était relative aux combinaisons linéaires de points. La seule différence est que nous manipulons à présent des colonnes de quatre nombres au lieu de colonnes de trois nombres !

Ces calculs débouchent inévitablement sur l'introduction des matrices $\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} k' & l' \\ m' & n' \end{pmatrix}$ et sur le fait que ces matrices sont inverses l'une de l'autre ...

2.3.5 Fiche n° 10 : Projecteurs et équations cartésiennes

On considère quatre points non coplanaires $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et le projecteur sur la droite OC parallèlement au plan OAB .

- Quelles sont les coordonnées de la projection P' du point $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$?
- Si nous munissons la droite OC d'un repère en choisissant O comme origine et C comme point d'abscisse 1, quelle est l'abscisse du point P' ?
- Répondre aux mêmes questions pour le point $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2.3.5.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Le point cherché P' est le point de percée de la droite OC dans le plan parallèle à OAB passant par P .

Puisque P' appartient à ce plan, il existe des réels a et b tels que $P' = P + a.A + b.B$.

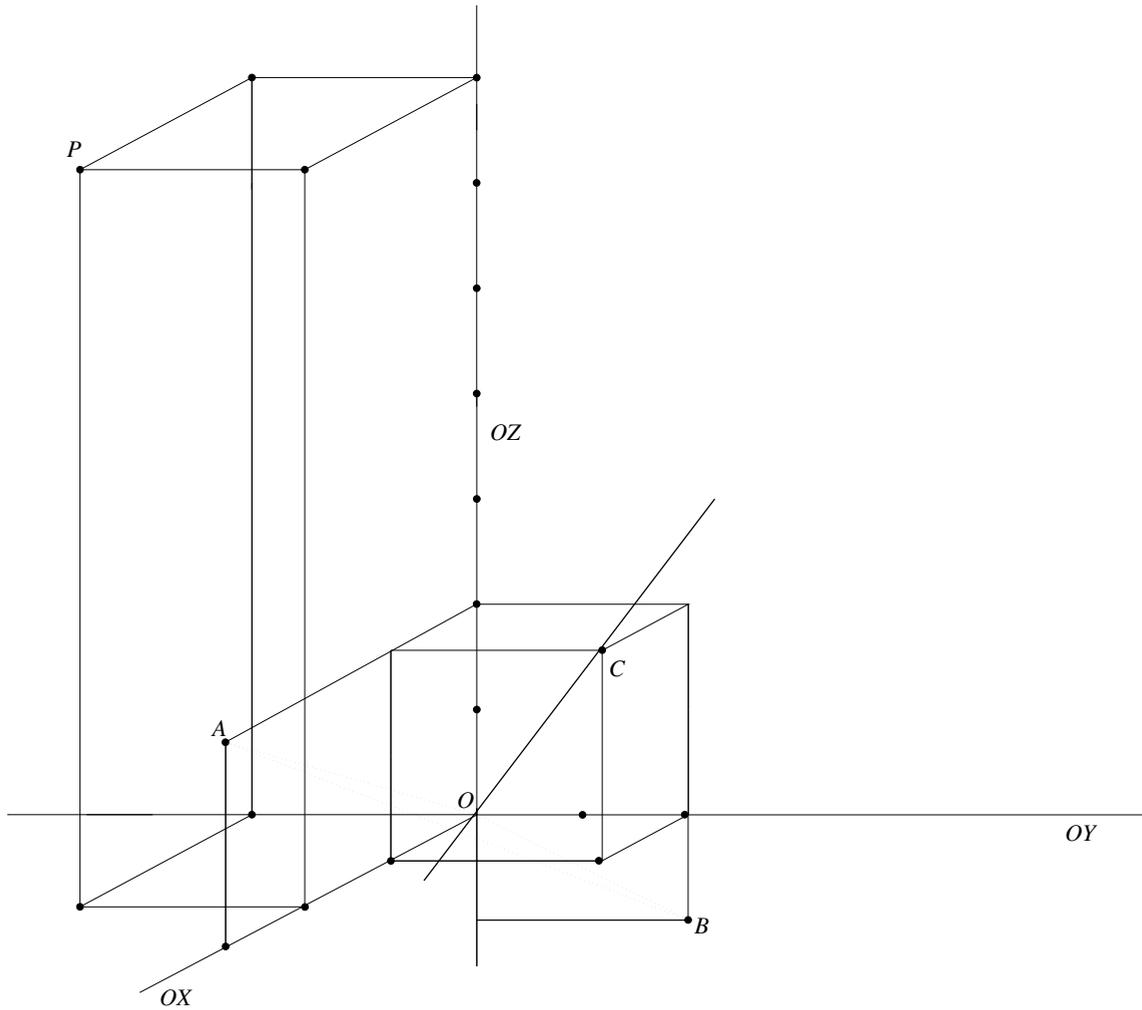
Puisque P' appartient à OC , il existe un réel k tel que $P' = k.C$.

Les réels a , b , k doivent donc vérifier la condition

$$P + a.A + b.B = k.C$$

On peut écrire la condition ci-avant :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + a. \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = k. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



ou encore

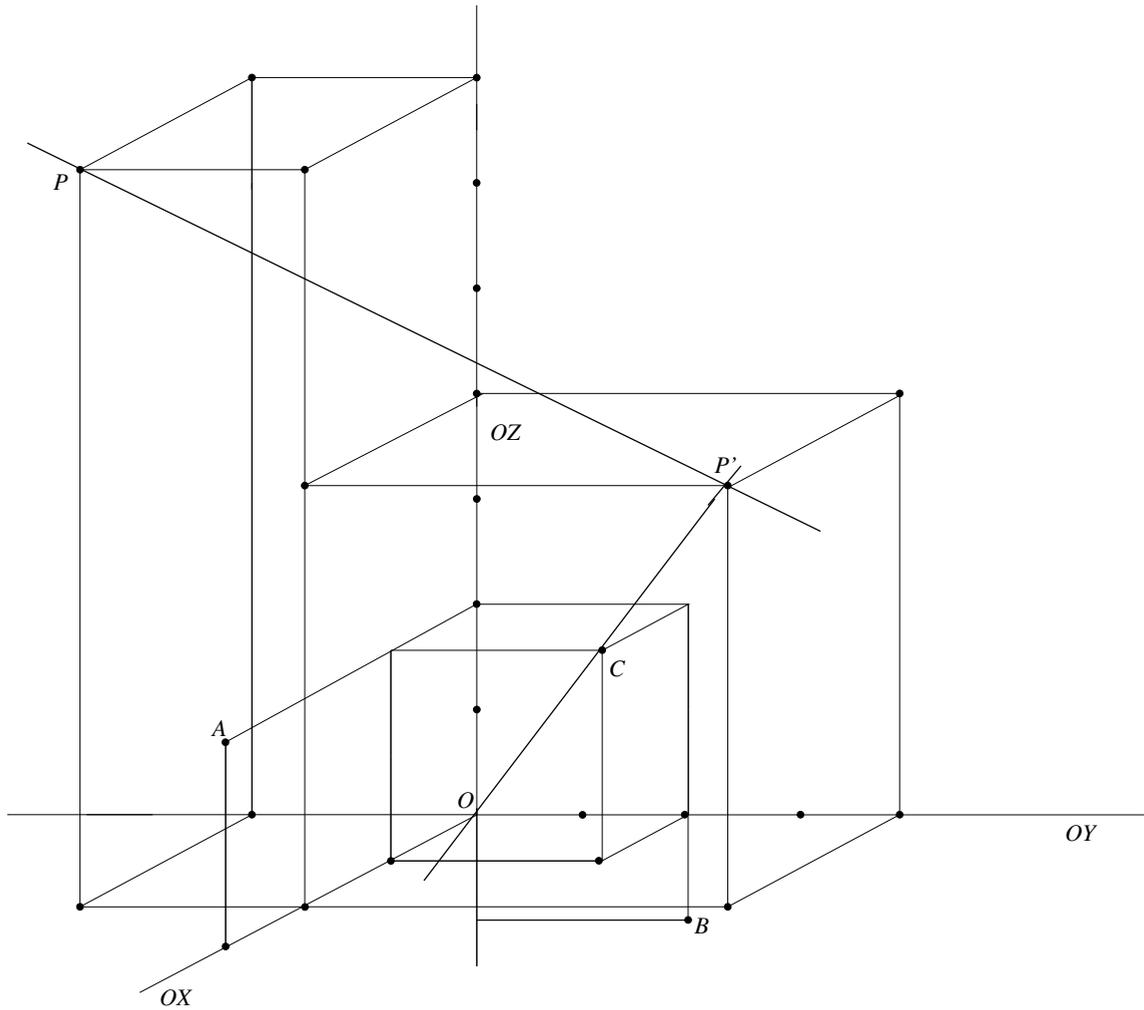
$$\begin{cases} 2 + a.3 + b.0 = k.1 \\ -2 + a.0 + b.2 = k.2 \\ 7 + a.2 + b.(-1) = k.2 \end{cases}$$

De la première équation, on déduit $a = \frac{k-2}{3}$, et de la deuxième, $b = k + 1$. En remplaçant a et b par ces expressions dans la troisième équation, on obtient $\frac{2k-4}{3} - k - 1 + 7 = 2k$, d'où

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \\ k = 2 \end{cases}$$

Ainsi

$$P' = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Réponse à la question b

Puisque $P' = 2.C$, l'abscisse de P' par rapport au repère de OC (obtenu en choisissant O comme origine et C comme point d'abscisse 1) vaut 2.

Réponse à la question c

Le point cherché Q' est le point de percée de la droite OC dans le plan parallèle à OAB passant par Q .

Un raisonnement identique à celui effectué en *a* nous mène à la condition

$$Q + a.A + b.B = k.C$$

qui peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a. \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = k. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{cases} x + a.3 + b.0 = k.1 \\ y + a.0 + b.2 = k.2 \\ z + a.2 + b.(-1) = k.2 \end{cases}$$

On en déduit $a = \frac{k-x}{3}$, $b = \frac{2k-y}{2}$. En remplaçant a et b par ces expressions dans la troisième équation, on obtient $\frac{2k-2x}{3} - \frac{2k-y}{2} + z = 2k$, d'où

$$k = \frac{-4x + 3y + 6z}{14}$$

et

$$a = \frac{-6x + y + 2z}{14} \quad b = \frac{-2x - 2y + 3z}{7}$$

Le point Q' cherché est

$$Q' = k.C = \frac{-4x + 3y + 6z}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4x+3y+6z}{14} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \end{pmatrix}$$

Son abscisse par rapport au repère de OC obtenu en choisissant O comme origine et C comme point d'abscisse 1 vaut $\frac{-4x + 3y + 6z}{14}$.

2.3.5.2 Commentaires et prolongements

A nouveau l'équation cartésienne d'un plan

Nous venons de trouver l'abscisse sur OC de la projection du point $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\frac{-4x + 3y + 6z}{14}$$

Par exemple, pour $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, cette abscisse vaut $\frac{-4.2+3.(-2)+6.7}{14} = 2$, ainsi que nous l'avions trouvé précédemment.

Nous pouvons à présent caractériser algébriquement le plan α , parallèle à OAB et passant par P car ce plan est constitué de *tous* les points de l'espace qui ont même projection sur

OC que le point $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \frac{-4x + 3y + 6z}{14} = 2 \Leftrightarrow 4x - 3y - 6z = -28$$

La considération du projecteur parallèlement au plan α nous a ainsi amenés à retrouver une équation cartésienne de ce plan.

En même temps, il apparaît clairement que l'équation de tout plan parallèle à α ne diffère de celle de α que par le terme indépendant. En effet, un plan parallèle à α se projette en un point de OC d'abscisse différente de 2, par exemple u et est alors caractérisé par l'équation $\frac{-4x + 3y + 6z}{14} = u$.

Des questions apparaissent cependant légitimes : l'équation cartésienne du plan α obtenue par ce procédé dépend-elle du point choisi comme point unité sur la droite OC ? Et que se passe-t-il lorsqu'on utilise le projecteur parallèle à α sur une autre droite que OC ?

Les réponses à ces questions sont *a priori* connues à la suite des résultats obtenus dans les fiches précédentes. Nous y avons montré en effet que *toutes* les équations cartésiennes de α sont multiples l'une de l'autre. Le changement du repère choisi sur la droite OC ou de la droite OC elle-même ne saurait donc entraîner d'autre modification à l'équation cartésienne obtenue que la multiplication de tous les coefficients par la même constante. La réponse traitera cependant cette question directement, sans supposer connue l'unicité (à un facteur près) de l'équation cartésienne d'une droite.

Les équations d'un projecteur

Les activités proposées dans la présente fiche ont également fait apparaître un nouveau type de représentation d'une transformation géométrique. Considérons toujours le point

$Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et son image par le projecteur $\text{proj}_{OC}^{//OAB}$, sur OC parallèlement à OAB .

Nous avons calculé cette image et obtenu

$$\begin{pmatrix} \frac{-4x + 3y + 6z}{14} \\ \frac{-4x + 3y + 6z}{7} \\ \frac{-4x + 3y + 6z}{7} \end{pmatrix}$$

Si nous notons $Q' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, nous pouvons donc écrire

$$\begin{cases} x' = \frac{-4x + 3y + 6z}{14} \\ y' = \frac{-4x + 3y + 6z}{7} \\ z' = \frac{-4x + 3y + 6z}{7} \end{cases}$$

Ce système d'équations peut raisonnablement être appelé *un système d'équations du projecteur* mais il convient de préciser « relativement au repère de l'espace », puisque x, y, z ainsi que x', y', z' sont des coordonnées relatives au repère choisi dans l'espace.

Nous pourrions aussi tenir compte de ce que le projecteur $\text{proj}_{OC}^{//OAB}$ applique l'intégralité de l'espace sur la droite OC et qu'une seule coordonnée suffit pour repérer un point sur une droite. C'est ainsi que nous avons déterminé l'abscisse de Q' lorsqu'on choisit sur OC le point O comme origine et le point C comme point d'abscisse 1. Cette abscisse est alors donnée par la formule

$$k = \frac{-4x + 3y + 6z}{14}$$

que nous pouvons appeler *l'équation du projecteur* $\text{proj}_{OC}^{//OAB}$ *relativement au repère usuel de l'espace et au repère (O, C) de la droite OC .*

2.3.6 Fiche n° 11 : Formes linéaires (1)

Reprenons la situation de la fiche n°10 : $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- a. Sur OC , choisissons le repère $(O, p.C)$ où $p \in \mathbb{R}$. Calculer les abscisses de $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(P)$ et $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(Q)$.
- b. Soit $D = C + l.A + m.B$ où $l, m \in \mathbb{R}$. Sur OD , choisissons le repère (O, D) . Calculer les abscisses de $\text{proj}_{OD}^{//OAB}(P)$ et $\text{proj}_{OD}^{//OAB}(Q)$.
- c. Soit $E = p.C + l.A + m.B$ où $k, l, m \in \mathbb{R}$. Sur OE , choisissons le repère (O, E) . Calculer les abscisses de $\text{proj}_{OE}^{//OAB}(P)$ et $\text{proj}_{OE}^{//OAB}(Q)$.

2.3.6.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Le cheminement est le même que celui de la fiche précédente. On connaît deux expressions des coordonnées de l'image de P et Q . Si s est l'abscisse de P' par rapport au repère (O, pC) , on a $P' = s.pC$, d'où :

$$P' = s \cdot \begin{pmatrix} p \\ 2p \\ 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De même

$$Q' = s \cdot \begin{pmatrix} p \\ 2p \\ 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4x+3y+6z}{14} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \\ \frac{-4x+3y+6z}{7} \end{pmatrix}$$

Ainsi l'abscisse de P' par rapport au repère (O, pC) est $\frac{2}{p}$ et celle de Q' est $\frac{-4x+3y+6z}{14.p}$. Dans

ces conditions, le plan α parallèle à OAB et passant par le point $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est caractérisé

comme suit :

$$M \in \alpha \iff \frac{-4x + 3y + 6z}{14.p} = \frac{2}{p} \iff \frac{-4x + 3y + 6z}{14} = 2$$

Remarquons que l'on retrouve là l'équation de la fiche N° 10 : *cette équation est indépendante du point choisi d'abscisse 1 sur OC.*

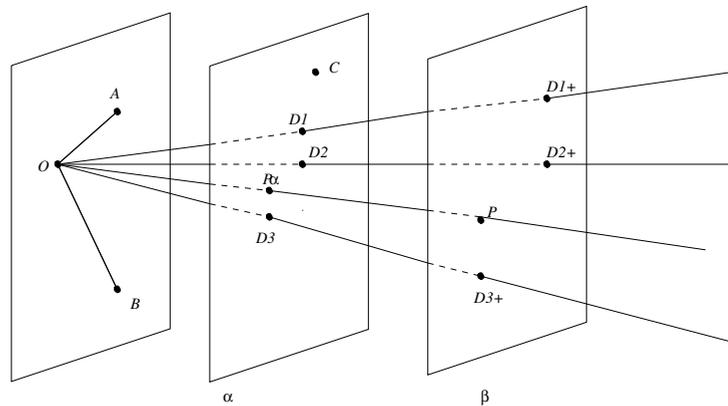
Réponse à la question b

Par calcul, si nous suivons toujours la méthode de la fiche précédente, nous trouvons le système suivant dans lequel r est l'abscisse de la projection de P sur OD par rapport au repère (O, D) .

$$\begin{cases} 2 + a.3 + b.0 = r.(1 + 3.l) \\ -2 + a.0 + b.2 = r.(2 + 2.m) \\ 7 + a.2 + b.(-1) = r.(2 + 2.l - m) \end{cases}$$

Nous en déduisons $a = \frac{r+3.r.l-2}{3}$, $b = \frac{2.r+2.m.r+2}{2}$. En remplaçant a et b par ces expressions dans la troisième équation, il vient $r = 2$

Nous retrouvons donc, comme prévu, la même abscisse que sur la droite OC . Il n'est pas inutile de donner une interprétation géométrique de ce fait. Il est d'abord clair que le point D appartient au plan α parallèle à OAB passant par C puisque $D - C = l.A + m.B$.



Quelle que soit la position du point D dans le plan α , l'abscisse de la projection du point P sur OD par rapport au repère (O, D) sera toujours la même.

En effet, soit β le plan parallèle à OAB passant par P . Considérons trois points D_1 , D_2 et D_3 de α , ainsi que les points de percée D_{1+} , D_{2+} et D_{3+} des trois droites OD_1 , OD_2 et OD_3 dans le plan β . Chacun des points D_n^+ est la projection de P sur OD_n parallèlement à OAB .

Soit P_α le point de percée de la droite OP dans α . Via le théorème de Thalès, nous voyons que :

$$\frac{|OP|}{|OP_\alpha|} = \frac{|OD_{1+}|}{|OD_1|} = \frac{|OD_{2+}|}{|OD_2|} = \frac{|OD_{3+}|}{|OD_3|}$$

Par conséquent, tous les points D_n^+ ont même abscisse pour autant que l'on prenne à chaque fois le point D_n comme point d'abscisse 1 sur la droite OD_n , et cette abscisse commune est aussi l'abscisse du point P lui-même sur la droite OP lorsqu'on choisit sur cette droite le repère (O, P_α) .

Quant au point Q , l'abscisse de sa projection sur OD s'obtient en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} x + a.3 + b.0 = r.(1 + 3.l) \\ y + a.0 + b.2 = r.(2 + 2.m) \\ z + a.2 + b.(-1) = r.(2 + 2.l - m) \end{cases}$$

On obtient à nouveau $r = \frac{-4x+3y+6z}{14}$. L'équation cartésienne du plan α parallèle à OAB et passant par le point $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ qui se déduit de ces calculs est encore

$$\frac{-4x + 3y + 6z}{14} = 2$$

Réponse à la question c

Le point E est le point d'abscisse k de la droite relativement au repère (O, C) . Ce cas généralise ainsi ceux rencontrés en a (où $l = m = 0$) et b (où $k = 1$). Des calculs analogues aux précédents montrent que l'abscisse de $\text{proj}_{OE}^{//OAB}(P)$ n'est autre que $\frac{2}{p}$ et que celle de $\text{proj}_{OE}^{//OAB}(Q)$ est $\frac{-4x+3y+6z}{14.p}$.

L'équation cartésienne du plan α est donc, encore et toujours

$$\frac{-4x + 3y + 6z}{14} = 2$$

2.3.6.2 Commentaires et prolongements

Nous venons d'obtenir par un procédé direct la confirmation de ce que l'équation cartésienne d'un plan, considéré comme plan projetant, ne dépend ni de la droite sur laquelle on projette, ni du repère choisi sur cette droite.

Le travail réalisé nous a également fourni une interprétation nouvelle de l'équation cartésienne d'un plan ou plus exactement de ce qui est commun aux équations cartésiennes de plans parallèles, c'est-à-dire les termes du premier degré de ces équations. Expliquons-nous :

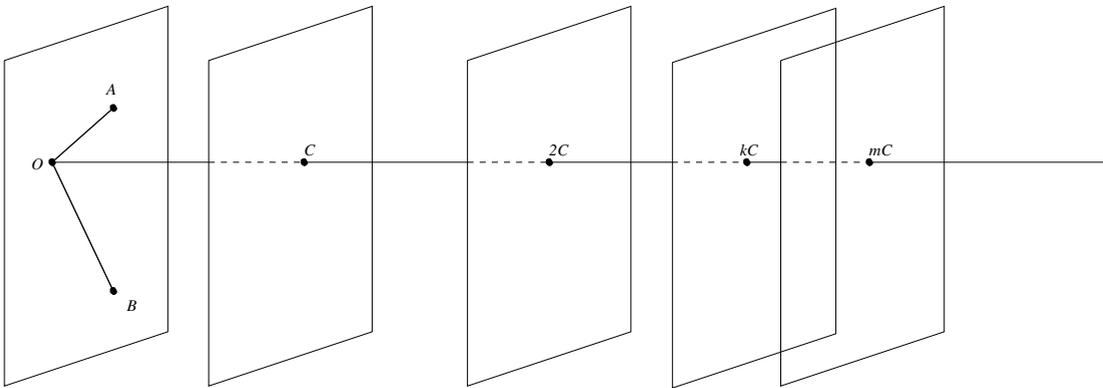
Considérons un plan passant par l'origine, α_0 (α_0 était noté OAB dans les activités ci-dessus) et une droite OC sécante avec α . Si P est un point de OC , notons α_P le plan parallèle à α passant par P .

Clairement, tous les plans α_P ont une équation cartésienne du type

$$ax + by + cz = f(P)$$

où les coefficients a , b et c ne dépendent pas du point P choisi sur OC . (Nous savons que l'équation d'un plan n'est définie qu'à un facteur près, mais nous décidons de choisir ici la même expression $ax + by + cz$ quel que soit $P \in OC$, de sorte que seul le terme indépendant $f(P)$ varie selon la position de P sur la droite OC .)

De plus, il résulte des problèmes traités dans cette fiche, d'une part que la valeur de $f(P)$ ne dépend ni du choix de la droite OC , pourvu qu'elle soit sécante à α_0 , ni du repère choisi sur OC et d'autre part que cette valeur de $f(P)$ est *proportionnelle à l'abscisse de P sur OC* .



En conséquence, si nous choisissons comme point unité sur OC le point de percée de OC dans le plan de la famille (α_P) dont l'équation est $ax + by + cz = 1$, la valeur de $f(P)$ est exactement l'abscisse de P au long de OC .

Nous obtenons ainsi une interprétation géométrique intéressante de la fonction

$$(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$$

qui figure aux premiers membres des équations des plans de la famille (α_P) et dont nous dirons que c'est une *forme linéaire* associée aux plans de cette famille : pour autant que le repère de OC soit choisi de la manière indiquée, si nous considérons deux points

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \text{ la valeur absolue}$$

$$|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_2 + by_2 + cz_2)|$$

n'est autre que la longueur de la projection du segment $[P_1, P_2]$ sur la droite OC .

Cette expression représente en quelque sorte la distance entre les deux plans α_{P_1} et α_{P_2} mesurée au long de la droite OC .

Une telle interprétation de la fonction $ax + by + cz$ est particulièrement intéressante lorsque la droite OC est perpendiculaire aux plans α_P . Elle débouche sur l'équation normale d'un plan, comme on le verra dans les fiches consacrées au produit scalaire.

2.3.7 Fiche n° 12 : Formes linéaires (2)

Soit un repère $OXYZ$ fixé. On considère la fonction :

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2x + 3y + 5z$$

Existe-t-il un plan OAB et une droite OC tels que l'abscisse de la projection $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(P)$ d'un point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soit $L(P)$?

2.3.7.1 Solution commentée

D'après la fiche N° 11, si un tel plan OAB et une telle droite OC existent, nous pouvons écrire que la projection sur OC parallèlement à OAB d'un point quelconque $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace est donnée par :

$$\text{proj}_{OC}^{//OAB}(P) = (2x + 3y + 5z) \cdot C$$

Car $2x + 3y + 5z$ est dans ce cas l'abscisse du point P sur la droite OC par rapport au repère (O, C) .

Puisque $\text{proj}_{OC}^{//OAB}(C) = C$, le point C cherché doit satisfaire à l'équation $2x + 3y + 5z = 1$. Prenons par exemple :

$$C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même, les points A et B se projettent sur l'origine et doivent tous deux satisfaire à l'équation : $2x + 3y + 5z = 0$. Nous pouvons prendre par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation cartésienne $2x + 3y + 5z = 1$ est donc celle du plan parallèle à OAB passant par le point C .

Et nous avons ainsi répondu à la question.

2.3.7.2 Commentaires et prolongements

Dans cette fiche, nous adoptons la démarche réciproque de celles des deux fiches précédentes. Dans celles-ci, nous avons d'abord montré que tout projecteur sur une droite parallèlement à un plan détermine une forme linéaire, c'est-à-dire une fonction du type $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$, dès qu'un repère a été choisi dans l'espace et un autre sur la droite image du projecteur. Nous avons aussi remarqué qu'en modifiant la droite sur laquelle on projette ou le repère choisi sur cette droite, la forme linéaire associée était simplement multipliée par une constante. Nous pouvons donc dire que

La donnée d'un repère dans l'espace permet d'associer à tout plan un ensemble de formes linéaires que nous pouvons appeler « proportionnelles ».

Il s'agissait dans la présente fiche d'établir que réciproquement, toute forme linéaire $L : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ est en effet associée de la façon qui vient d'être indiquée à un projecteur sur une droite OC parallèlement à un plan que nous noterons α . Nous désignerons ce projecteur par la notation simplifiée Pr .

Le repère sur la droite OC étant bien choisi, pour $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la valeur de $L(P) = L(x, y, z)$ est exactement l'abscisse de la projection de P sur OC . Si le point C est le point d'abscisse 1 de la droite OC , on a donc

$$Pr(P) = L(P).C$$

Comme dans les commentaires de la fiche 11, notons α_0 le plan parallèle à α contenant l'origine, c'est-à-dire le plan d'équation $ax + by + cz = 0$. Nous noterons aussi α_P le plan parallèle à α contenant un point P .

Ainsi, le plan α_0 est l'ensemble des points dont l'image par la projection $Pr = \text{proj}_{OC}^{//OAB}$ est l'origine O . Et α_P est l'ensemble des points qui ont même projection que P sur OC .

Plusieurs constatations sont immédiates.

- Par exemple du théorème de Thalès résulte facilement que, pour tout réel h , l'abscisse du point $Pr(hP)$ est h fois l'abscisse de $Pr(P)$, ce que nous pouvons écrire

$$Pr(h.P) = hPr(P)$$

Le calcul suivant est encore plus immédiat :

$$L(h.P) = a(hx) + b(hy) + c(hz) = h(ax + by + cz) = hL(P)$$

Les deux résultats sont *évidemment* équivalents puisque Pr et L sont liés par la formule $Pr(P) = L(P).C$.

- Si R et Q appartiennent au même plan α_P , la droite RQ est parallèle à α_0 et le point $R - Q$ appartient à α_0 . On a donc *tout aussi évidemment* que plus haut :

$$Pr(R) = Pr(Q) \text{ et } Pr(R - Q) = 0$$

d'où résulte

$$L(R) = L(Q) \text{ et } L(R - Q) = 0$$

Cette remarque nous permet d'écrire

$$Pr(R - Q) = Pr(R) - Pr(Q) \text{ et } L(R - Q) = L(R) - L(Q)$$

Mais alors,

$$Pr(R + Q) = Pr(R - (-Q)) = Pr(R) - Pr(-Q)$$

et comme

$$Pr(-Q) = Pr((-1).Q) = (-1).Pr(Q) = -Pr(Q)$$

il vient

$$Pr(R + Q) = Pr(R) + Pr(Q)$$

Cette propriété géométrique du projecteur Pr entraîne automatiquement la propriété correspondante de la forme linéaire L :

$$L(R + Q) = L(R) + L(Q)$$

Cette dernière formule aurait aussi pu être obtenue par un simple calcul sur les coordonnées :

$$\begin{aligned} L(R + Q) &= L \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= a.(x_1 + x_2) + b.(y_1 + y_2) + c.(z_1 + z_2) \\ &= ax_1 + by_1 + cz_1 + ax_2 + by_2 + cz_2 \\ &= L(R) + L(Q) \end{aligned}$$

- Les formules qui viennent d'être établies peuvent être condensées à l'aide du formalisme des *combinaisons linéaires*

Quels que soient les points Q et R , et quels que soient les réels h et k :

$$Pr(h.Q + k.R) = hPr(Q) + kPr(R)$$

$$L(h.Q + k.R) = hL(Q) + kL(R)$$

Introduisons à présent un repère (O, A, B) dans le plan α_0 et soit P un point quelconque de l'espace. Soit $P' = Pr(P)$.

Si h est l'abscisse de P' sur OC , on a alors $P' = h.C$. De plus le point $P - P'$ appartient à α_0 . Il existe donc des réels a et b tels que

$$P - h.C = a.A + b.B$$

ou encore

$$P = a.A + b.B + h.C$$

On a ainsi montré que A, B et C engendrent \mathbb{R}^3 , ce qui signifie que tout point de l'espace est une combinaison linéaire de A, B et C .

De plus, ils sont *linéairement indépendants*, ce qui signifie qu'aucun d'entre eux n'est une combinaison linéaire des deux autres :

1. C n'est pas une combinaison linéaire de A et B car C n'appartient pas au plan OAB .
2. B n'appartient pas au plan OAC , sinon C appartiendrait à OAB .
3. De même A n'appartient pas à OBC .

Cette propriété d'indépendance linéaire de A, B et C a pour conséquence que deux de ces trois points ne sont pas suffisants pour engendrer l'espace par combinaisons linéaires : par exemple en combinant linéairement A et B , on n'obtient que des points du plan OAB et jamais C ni aucun multiple de C , ni aucun point qui s'écrit $a.A + b.B + h.C$ avec $h \neq 0$.

2.3.8 Synthèse

A l'issue de l'étude des situations décrites dans les fiches 7 à 12, nous retiendrons les résultats suivants :

A propos de l'intersection d'une droite et d'un plan

On considère une droite AB (avec $A \neq B$) et un plan MNP (avec M, N et P non alignés). trois cas peuvent se présenter :

- La droite AB est *dans* le plan MNP
 $\iff \forall u \in \mathbb{R} \exists v, w \in \mathbb{R}$ tels que $A + u.(B - A) = M + v.(N - M) + w.(P - M)$
- La droite AB *coupe* le plan MNP
 $\iff \exists u, v, w \in \mathbb{R}$ tels que $A + u.(B - A) = M + v.(N - M) + w.(P - M)$
- La droite AB *n'a aucun* point commun avec le plan MNP
 $\iff \forall u, v, w \in \mathbb{R} : A + u.(B - A) \neq M + v.(N - M) + w.(P - M)$

A propos de l'équation cartésienne d'un plan

- l'équation cartésienne d'un plan π s'écrit $ax + by + cz = d$ et signifie :
 π est un plan si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ (non tous nuls) et $d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X \in \pi \iff ax + by + cz = d$$

- Deux équations cartésiennes déterminent un même plan si et seulement si elles sont proportionnelles.

Cela signifie que les équations cartésiennes $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

représentent le même plan si et seulement si la colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$ est multiple de la

colonne $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$.

A propos des positions relatives des plans en termes d'équations cartésiennes

Plusieurs cas s'offrent à nous :

- Deux équations cartésiennes $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ déterminent deux plans sécants si et seulement si un *au moins* des nombres $a_1b_2 - a_2b_1, a_1c_2 - a_2c_1, b_1c_2 - b_2c_1$ est différent de 0.
- Deux équations cartésiennes $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ déterminent deux plans parallèles si et seulement si les trois nombres $a_1b_2 - a_2b_1, a_1c_2 - a_2c_1, b_1c_2 - b_2c_1$ sont nuls (les deux plans peuvent être éventuellement confondus).

A propos des relations entre les équations cartésiennes et vectorielles d'un plan

On obtient une équation cartésienne d'un plan à partir d'une équation vectorielle exprimée en coordonnées en y éliminant les deux paramètres.

Si $ax + by + cz = d$ est une équation cartésienne d'un plan π , alors en posant :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ d - a \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ d - b \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

une équation vectorielle du plan s'écrit :

$$X = D + x.(U - D) + y.(V - D)$$

De cette manière, les paramètres x et y deviennent les coordonnées d'un point quelconque du plan dans le repère (D, U, V) .

A propos des équations cartésiennes des plans passant par une droite donnée

Un plan γ contient l'intersection des plans α et $\beta \iff$ toute équation cartésienne de γ est une combinaison linéaire de celles de α et β .

A propos de projecteurs et de formes linéaires

La donnée d'un repère dans l'espace permet d'associer à tout plan un ensemble de formes linéaires proportionnelles.

Pour plus de détails, cfr les commentaires de la fiche N° 12.

2.4. Le produit scalaire

2.4.1 Introduction

Dans les deux fiches qui suivent, nous allons construire et utiliser le produit scalaire. La formule fondamentale reliant le produit scalaire à l'une de ses expressions en termes de coordonnées sera directement extraite du théorème de Pythagore sous sa forme généralisée.

Les applications étudieront entre autres certaines fonctions associées à des mesures d'angles, le critère d'orthogonalité entre droites et plans, la notion de plan tangent et de distance en géométrie de la sphère.

2.4.2 Fiche n° 13 : Le produit scalaire

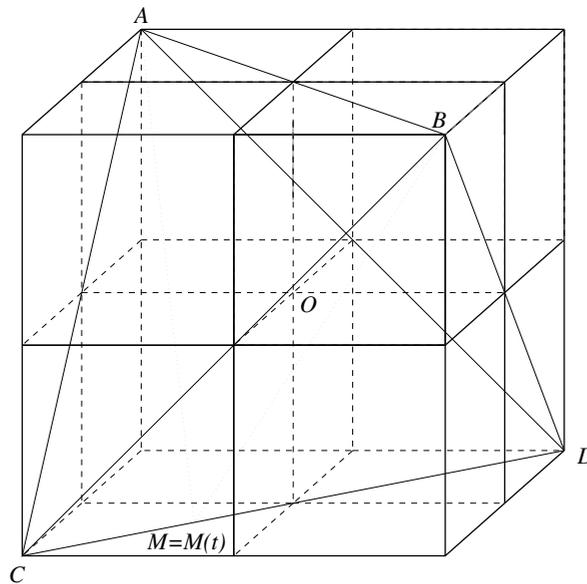
On considère les points :

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Etudier les variations de l'amplitude des angles \widehat{AMB} et \widehat{CMB} lorsque le point M parcourt la droite CD . Représenter les deux fonctions obtenues sur le même graphique.

2.4.2.1 Solution commentée

Visualisons tout d'abord la situation sur un dessin.



Pour calculer l'amplitude d'un angle dans un triangle (quelconque), on utilise la forme généralisée du théorème de Pythagore dès que l'on connaît la longueur de tous les côtés.

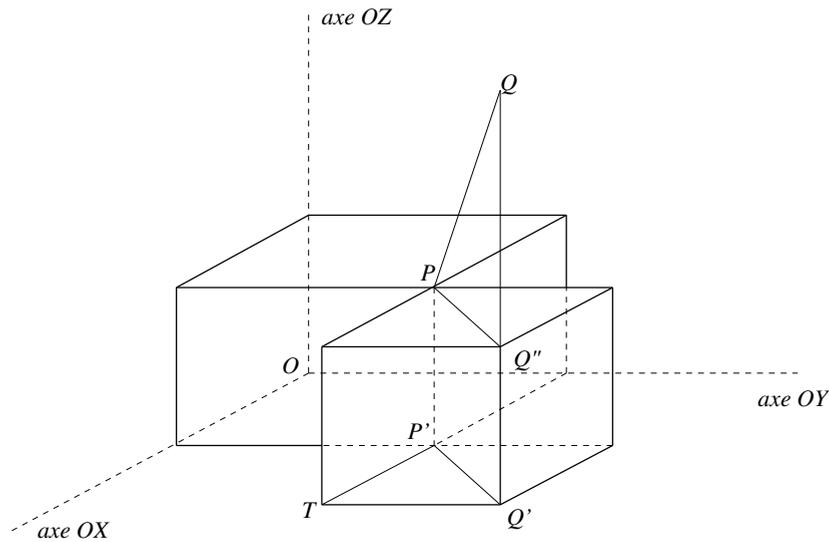
L'énoncé permet évidemment de supposer que les coordonnées des points A et B sont connues, ainsi que celles du point $M = M(t)$, ces dernières étant des fonctions d'un paramètre t déduites de l'équation vectorielle de la droite CD .

Cela suggère d'obtenir d'abord une formule permettant de calculer la distance qui sépare deux points en termes de leurs coordonnées et d'en déduire ensuite, à partir de la forme généralisée du théorème de Pythagore, une formule permettant de calculer l'amplitude d'un angle déterminé par trois points en termes de leurs coordonnées.

Distance entre deux points

On considère deux points :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$



L'application du théorème de Pythagore dans les triangles rectangles $PQ''Q$ et $P'TQ'$ donne :

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PQ''|^2 + |Q''Q|^2 \\ &= |P'Q'|^2 + |Q''Q|^2 \\ &= |P'T|^2 + |TQ'|^2 + |Q''Q|^2 \\ &= (q_1 - t_1)^2 + (q_2 - t_2)^2 + (q_3 - t_3)^2 \end{aligned}$$

On appelle norme du vecteur-colonne $Q - P$ et on note $\|Q - P\|$ la distance qui sépare le point P du point Q .

La formule précédente s'écrit alors :

$$\boxed{|PQ|^2 = (q_1 - t_1)^2 + (q_2 - t_2)^2 + (q_3 - t_3)^2 = \|Q - P\|^2}$$

et on l'appelle parfois la *formule de la norme*.

Dans le cas particulier où $Q = O$, on obtient :

$$|OP|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \|P\|^2$$

qui calcule la distance séparant le point P de l'origine des coordonnées.

Angle déterminé par trois points

On commence par considérer le cas particulier de l'angle formé par les deux points :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

avec l'origine O .

On utilise la forme généralisée du théorème de Pythagore dans le triangle OUV afin d'y déterminer l'angle \widehat{UOV} :

$$|UV|^2 = |OU|^2 + |OV|^2 - 2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos \widehat{UOV}$$

Grâce à la formule de la norme, on en tire :

$$(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - 2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos \widehat{UOV}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} v_1^2 - 2 \cdot v_1 \cdot u_1 + u_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_2 \cdot u_2 + u_2^2 + v_3^2 - 2 \cdot v_3 \cdot u_3 + u_3^2 \\ = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2 \cdot |OU| \cdot |OV| \cdot \cos \widehat{UOV} \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient l'égalité remarquable :

$$|OU| \cdot |OV| \cdot \cos \widehat{UOV} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

que l'on peut aussi écrire en termes de vecteurs-colonnes :

$$\|U\| \cdot \|V\| \cdot \cos \widehat{UOV} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

On considère maintenant les trois points :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

et il s'agit de déterminer l'angle \widehat{PRQ} .

On introduit les points U et V définis par :

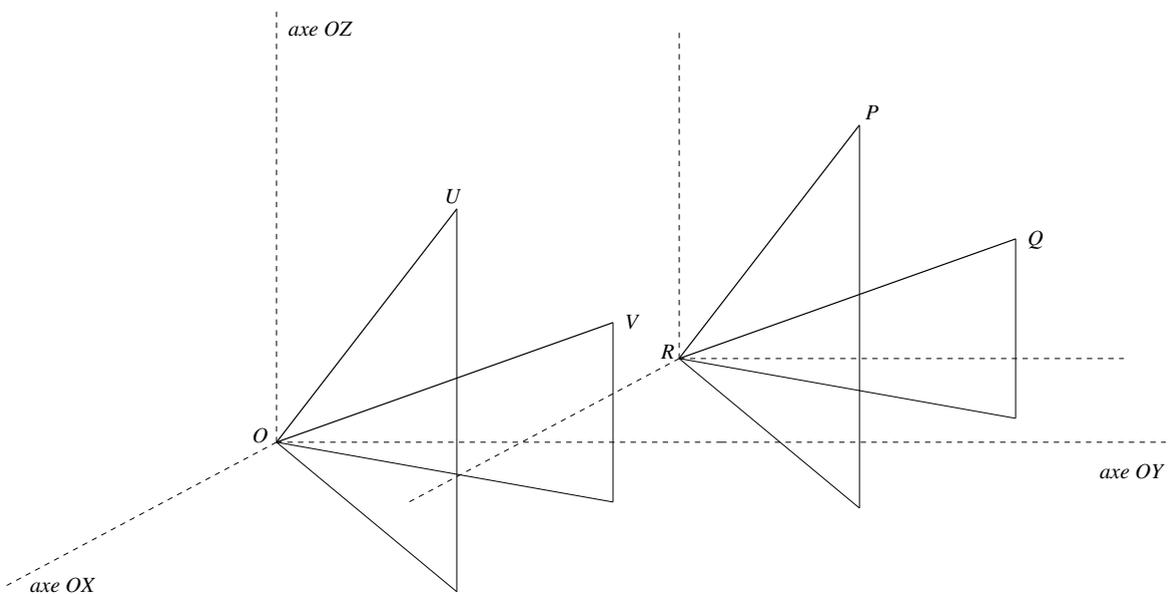
$$U = P - R$$

$$V = Q - R$$

La translation qui applique l'origine O sur le point R envoie le point U sur le point P et le point V sur le point Q , puisque :

$$U + (R - O) = P - R + R = P$$

$$V + (R - O) = Q - R + R = Q$$



On en déduit :

$$\widehat{PRQ} = \widehat{UOV}$$

d'où :

$$\|U\| \cdot \|V\| \cdot \cos \widehat{UOV} = \|P - R\| \cdot \|Q - R\| \cdot \cos \widehat{PRQ}$$

D'autre part, d'après l'égalité remarquable obtenue plus haut :

$$\|U\| \cdot \|V\| \cdot \cos \widehat{UOV} = (p_1 - r_1) \cdot (q_1 - r_1) + (p_2 - r_2) \cdot (q_2 - r_2) + (p_3 - r_3) \cdot (q_3 - r_3)$$

Ainsi :

$$\|P - R\| \cdot \|Q - R\| \cdot \cos \widehat{PRQ} = (p_1 - r_1) \cdot (q_1 - r_1) + (p_2 - r_2) \cdot (q_2 - r_2) + (p_3 - r_3) \cdot (q_3 - r_3)$$

Cela permet de calculer l'angle formé par les trois points P , R et Q en fonction de leurs coordonnées :

$$\cos \widehat{PRQ} = \frac{(p_1 - r_1) \cdot (q_1 - r_1) + (p_2 - r_2) \cdot (q_2 - r_2) + (p_3 - r_3) \cdot (q_3 - r_3)}{\sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_2 - r_2)^2 + (p_3 - r_3)^2} \cdot \sqrt{(q_1 - r_1)^2 + (q_2 - r_2)^2 + (q_3 - r_3)^2}}$$

Notion de produit scalaire

Dans le raisonnement précédent, le résultat-clef est l'égalité :

$$\|U\| \cdot \|V\| \cdot \cos \widehat{UOV} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Cette égalité est remarquable parce que le membre de gauche est indépendant des coordonnées des points U et V , alors que le membre de droite ne dépend — et très symétriquement — *que* des coordonnées de U et V .

Par ailleurs, on peut observer que la forme de cette égalité ne permet pas seulement de calculer un angle. En effet, dans le cas particulier où on y fait :

$$U = V = Q - P$$

alors :

$$\widehat{UOV} = 0$$

et

$$\|U\| \cdot \|V\| \cdot \cos \widehat{UOV} = \|U\|^2 = \|Q - P\|^2$$

tandis que :

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2$$

de telle sorte que l'égalité permet aussi de retrouver la formule de la norme :

$$\|Q - P\|^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2$$

La possibilité d'attacher à une expression simple qui ne dépend que des coordonnées une signification géométrique en termes de mesures d'angles et de distances souligne l'intérêt très particulier que revêt cette égalité.

Ainsi, et en conclusion, on appelle *produit scalaire* des vecteurs-colonnes U et V , et on note $U \bullet V$, le nombre réel défini par :

$$U \bullet V = \|U\| \cdot \|V\| \cdot \cos \widehat{UOV}$$

et on a alors la formule :

$$U \bullet V = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

On déduit immédiatement de la définition ou de la formule les propriétés suivantes :

- Si U et $V \neq 0$: $U \bullet V = 0 \iff OU$ est perpendiculaire à OV .
- $U \bullet V = V \bullet U$ (commutativité)
- $(a.U + b.V) \bullet W = a.(U \bullet W) + b.(V \bullet W)$ (linéarité ou plutôt *bilinéarité*, compte tenu de la commutativité)

Retour à l'énoncé

On commence par calculer les coordonnées du point variable M sur la droite déterminée par les points C et D .

De l'équation vectorielle :

$$M = M(t) = C + t.(D - C)$$

on tire :

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t. \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ -1 + 2t \\ -1 \end{pmatrix}$$

Avant d'utiliser le produit scalaire, on calcule d'abord :

$$\begin{aligned} A - M(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ -1 + 2t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2t \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix} \\ B - M(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ -1 + 2t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 - 2t \\ 2 \end{pmatrix} \\ C - M(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ -1 + 2t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On calcule alors successivement les angles $\widehat{AM(t)B}$ et $\widehat{CM(t)B}$:

1. Ecrivons le produit scalaire

$$(A - M(t)) \bullet (B - M(t)) = 2t \cdot (-2 + 2t) + (2 - 2t)(-2t) + 2 \cdot 2 = 8t^2 - 8t + 4$$

D'autre part, par la formule de la norme :

$$\|A - M(t)\| = \|B - M(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (2 - 2t)^2 + (2)^2} = \sqrt{8t^2 - 8t + 8}$$

Ainsi finalement :

$$\begin{aligned} \cos \widehat{AM(t)B} &= \frac{(B - M(t)) \bullet (A - M(t))}{\|B - M(t)\| \cdot \|A - M(t)\|} \\ &= \frac{8t^2 - 8t + 4}{8t^2 - 8t + 8} \\ &= \frac{2t^2 - 2t + 1}{2t^2 - 2t + 2} \\ &= 1 - \frac{1}{2t^2 - 2t + 2} \\ &= 1 - \frac{1}{2 \cdot t^2 - t + 1} \end{aligned}$$

Le plus grand angle $\widehat{AM(t)B}$ possible est celui dont le cosinus est minimal. C'est le cas lorsque $t^2 - t + 1$ est minimal, en $t = \frac{1}{2}$ comme nous l'indique la dérivée de cette expression.

Pour $t = \frac{1}{2}$, on a $\cos(\widehat{AM(t)B}) = 1 - \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$. L'angle maximal vaut donc $\arccos \frac{1}{3} = 1.230959417$ rad ou encore $70^\circ 31' 43'' 6$.

2. De façon analogue, on a

$$(C - M(t)) \bullet (B - M(t)) = (2t) \cdot (2t) + (2 - 2t)(-2t) + (0 \cdot 2) = 8t^2 - 4t$$

et

$$\|C - M(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4t^2} = 2\sqrt{2}|t|$$

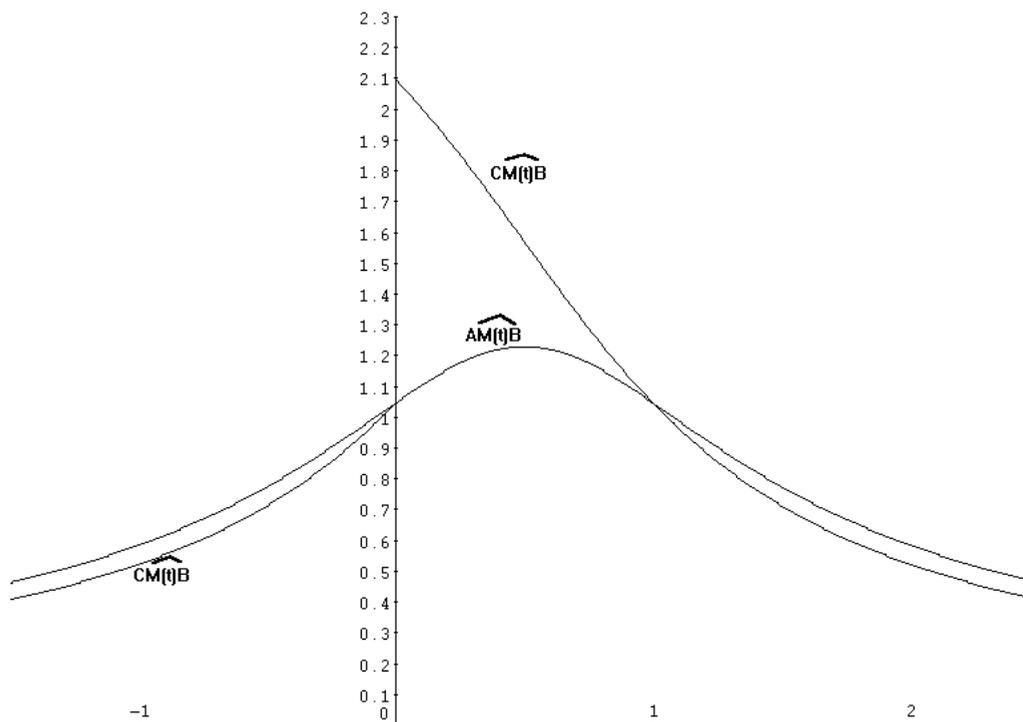
Le vecteur $C - M(t)$ est nul si $t = 0$. Il est difficile de parler dans ce cas de l'angle $\widehat{CM(t)B}$. Les calculs qui suivent supposent donc $t \neq 0$.

On a alors,

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{CM(t)B}) &= \frac{(C - M(t)) \bullet (B - M(t))}{\|C - M(t)\| \cdot \|B - M(t)\|} \\ &= \frac{4t(2t - 1)}{2\sqrt{2}|t|\sqrt{8t^2 - 8t + 8}} \\ &= \frac{4t(2t - 1)}{8|t|\sqrt{t^2 - t + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \frac{2t - 1}{\sqrt{t^2 - t + 1}} \end{aligned}$$

où $\text{sgn}(t)$ est le *signe de t* : $+1$ si t est positif, -1 si t est négatif.

On remarque immédiatement que la fonction $\cos(\widehat{CM(t)B})$ vaut 0, donc que l'angle $\widehat{CM(t)B}$ vaut un droit, si $t = 1/2$. Lorsque t tend vers $\pm\infty$, le cosinus tend vers 1 et l'angle vers 0. Une autre caractéristique remarquable est que la fonction $\widehat{CM(t)B}$ est discontinue en 0.



La représentation des deux fonctions sur le même graphique fait apparaître clairement que l'angle $\widehat{AM(t)B}$ est maximal lorsque $B - M(t)$ est perpendiculaire à CD . On notera que dans ce cas, $A - M(t)$ est aussi perpendiculaire à CD et que $M(t)$ est le milieu de $[C, D]$.

2.4.2.2 Commentaires et prolongements

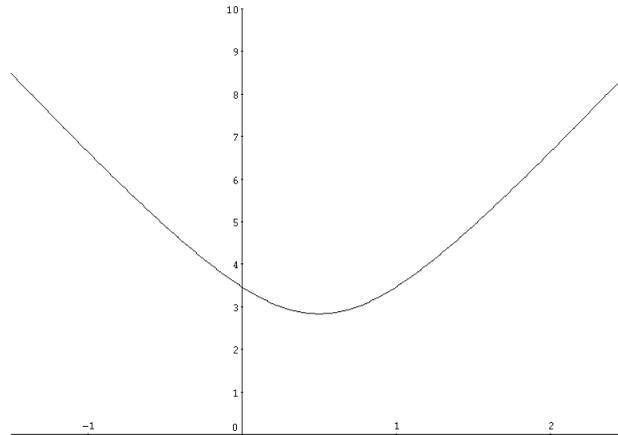
Le rectiligne d'un dièdre

Il est clair qu'avec la situation qui vient d'être étudiée, nous sommes à un cheveu de la définition du rectiligne d'un dièdre, c'est-à-dire de l'angle de deux plans. Mais auparavant, il convient de rencontrer les propriétés élémentaires de la perpendicularité entre droites et plans. C'est ce que prépare la fiche n° 14. La bilinéarité du produit scalaire jouera un rôle crucial dans cette étude.

Encore une variation de fonction

Avec les mêmes données que précédemment, étudions la variation de la mesure de l'aire du triangle AMB . On a :

$$\begin{aligned}
 S = S(t) &= \frac{1}{2} \cdot |BM(t)| \cdot |AM(t)| \cdot |\sin \widehat{AM(t)B}| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \|A - M(t)\|^2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{AM(t)B}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (8t^2 - 8t + 8) \cdot \sqrt{1 - \frac{2t^2 - 2t + 1}{2t^2 - 2t + 2}} \\
 &= 2 \cdot \sqrt{4t^2 - 4t + 3}
 \end{aligned}$$



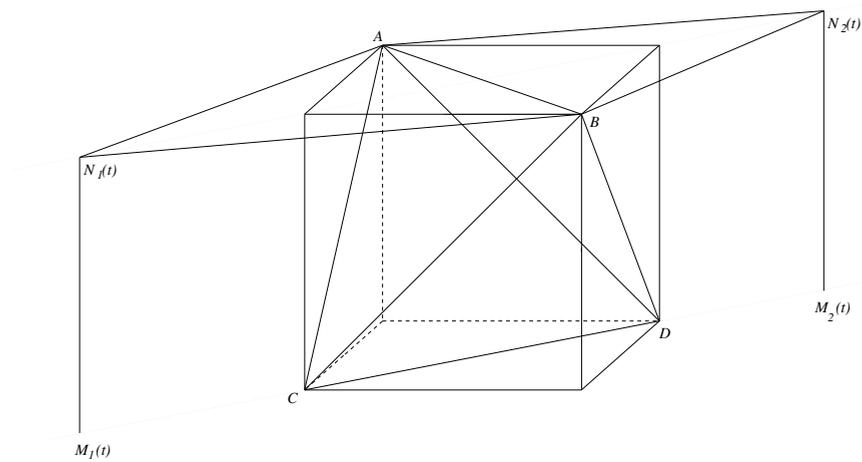
On observera que :

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \widehat{AM(t)B} &= 0 \\
 \lim_{t \rightarrow \pm\infty} S(t) &= \infty
 \end{aligned}$$

Le graphe de la fonction $S(t)$ admet deux asymptotes obliques :

$$S = \pm 2 \cdot (2t - 1)$$

puisque $S(t) = 2 \cdot \sqrt{(2t - 1)^2 + 2}$. Ces asymptotes ont une interprétation géométrique : $2 \cdot (2t - 1)$ est précisément l'aire du triangle $AN(t)B$, où $N(t)$ est le point situé à la verticale du point $M(t)$ sur la médiatrice de AB parallèle à la droite CD .



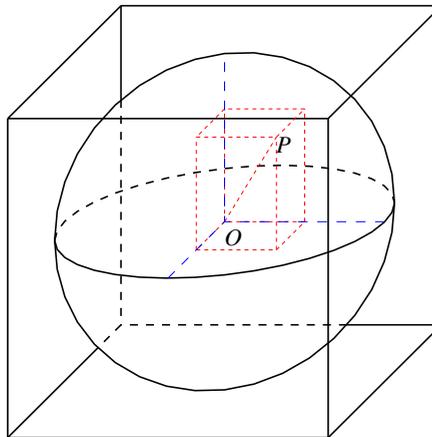
2.4.3 Fiche n° 14 : Sphères et plans

Existe-t-il un plan n'ayant qu'un seul point commun avec une sphère ?
Comment le caractériser ?

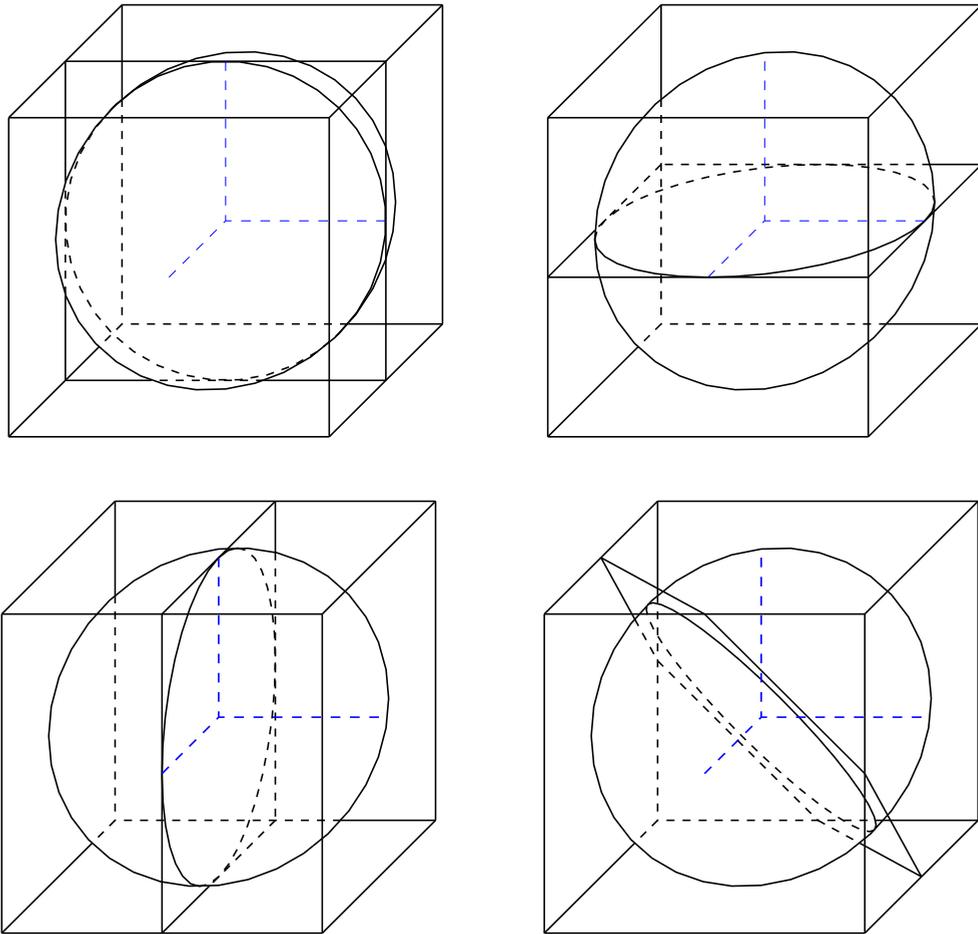
2.4.3.1 Solution commentée

On note $S^2(R)$ la sphère de rayon R centrée en l'origine des coordonnées. C'est le lieu géométrique des points de l'espace situés à une distance R de l'origine :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in S^2(R) \iff \|P\|^2 = R^2 \text{ ou } p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = R^2$$



Tout plan *passant par l'origine* coupe la sphère suivant une courbe plane dont tous les points sont encore situés à la même distance R de l'origine. Cette courbe est donc un cercle de même rayon que celui de la sphère : on l'appelle un *grand cercle*, au sens où il est manifestement impossible de trouver un cercle qui soit une section plane de la sphère et dont le rayon soit (strictement) supérieur à R .

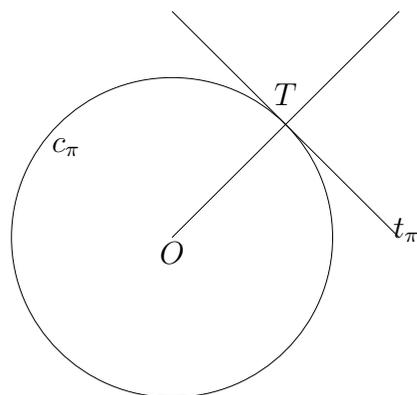


Soit T un point quelconque sur la sphère. On note :

π un plan contenant les points O et T ,

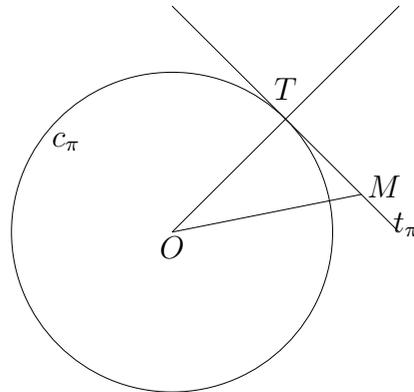
c_π le grand cercle déterminé par le plan π ,

t_π la perpendiculaire (dans le plan π) en T à la droite OT .



La droite t_π n'a que le point T comme point commun avec le cercle c_π :

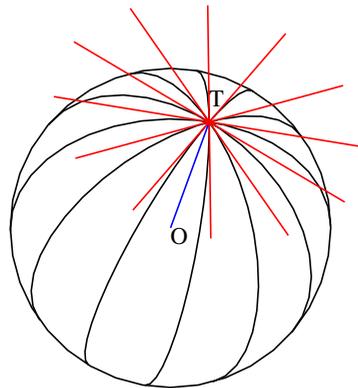
$$\forall M \in t_\pi : M \neq T \iff \|M - O\| > R$$



Cela résulte facilement par exemple du théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OTM .

Cette droite est *tangente dans le plan π* au grand cercle c_π . Chaque plan π passant par O et T contient ainsi une (seule) droite t_π

- qui est perpendiculaire à la droite OT en T
- dont aucun des points — sauf T — n'appartient à la sphère $S^2(R)$.



Il s'agit de montrer que l'ensemble des points de toutes ces droites est un plan. Notons τ l'ensemble des points de toutes ces droites : il existe des ensembles de droites toutes concourantes en un même point et qui *ne* sont *pas* coplanaires. Par exemple, un cône (circulaire droit) est formé de droites toutes concourantes au sommet du cône.

Par définition de τ , si X est un point différent de T , on a

$$X \in \tau \iff TX \perp OT$$

ou encore, en utilisant le produit scalaire :

$$X \in \tau \iff (X - T) \bullet T = 0$$

puisque dès que $X \neq T : X \in \tau \iff \widehat{OTX} = \frac{\pi}{2}$.

Or, si on pose :

$$T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in S^2(R) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$(X - T) \bullet T = 0 \iff (x_1 - a_1).a_1 + (x_2 - a_2).a_2 + (x_3 - a_3).a_3 = 0$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} (x_1 - a_1).a_1 + (x_2 - a_2).a_2 + (x_3 - a_3).a_3 &= a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\ &= a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 - R^2 \end{aligned}$$

puisque $T \in S^2(R)$, de telle sorte que :

$$(X - T) \bullet T = 0 \iff a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 = R^2$$

Cette dernière relation est une équation cartésienne d'un *plan* passant par le point T .

En conclusion, on a ainsi établi que l'ensemble τ est un *plan*, dont le seul point de contact avec la sphère $S^2(R)$ est le point T .

2.4.3.2 Commentaires et prolongements

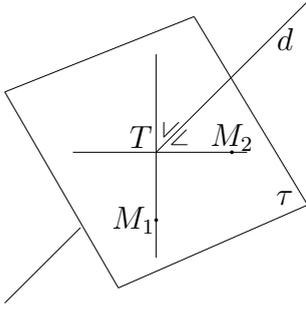
Perpendicularité droite–plan

Commençons par établir la propriété suivante :

PROPOSITION 2.4.1 Une droite d est perpendiculaire en un point T à deux droites d_1 et d_2 sécantes en T , si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan déterminé par d_1 et d_2 passant par T .

Il suffit évidemment de démontrer la seule propriété : Si la droite d est perpendiculaire à d_1 et d_2 , elle est perpendiculaire à toute droite du plan déterminé par d_1 et d_2 passant par T .

On peut établir ce résultat *sans* passer par l'équation *cartésienne* du plan déterminé par les droites d_1 et d_2 .



On note τ le plan déterminé par les deux droites d_1 et d_2 sécantes en T , et on considère des points M_1 et M_2 vérifiant les conditions :

$$M_1 \in d_1, \quad M_1 \neq T \quad M_2 \in d_2 \quad M_2 \neq T$$

Puisque d est perpendiculaire à d_1 et d_2 :

$$\forall D \in d : \begin{cases} (D - T) \bullet (M_1 - T) = 0 \\ (D - T) \bullet (M_2 - T) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de prouver que pour tout $M \in \tau$ et pour tout $D \in d$:

$$(D - T) \bullet (M - T) = 0$$

Or

$$M \in \tau \implies \exists k, l \in \mathbb{R} : M - T = k.(M_1 - T) + l.(M_2 - T)$$

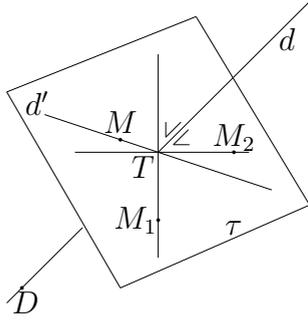
Dès lors, quel que soit $D \in d$:

$$\begin{aligned} (D - T) \bullet (M - T) &= (D - T) \bullet (k.(M_1 - T) + l.(M_2 - T)) \\ &= k.((D - T) \bullet (M_1 - T)) + l.((D - T) \bullet (M_2 - T)) \\ &= k.0 + l.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La proposition est ainsi établie. Cette proposition ne règle pas complètement la question de la perpendicularité d'une droite et d'un plan. Nous venons de voir que si la droite d est perpendiculaire à d_1 et d_2 , elle est perpendiculaire à toute droite du plan engendré par d_1 et d_2 et passant par le point T . Il reste à prouver que toute droite d' passant par T et perpendiculaire à d est située dans le plan engendré par d_1 et d_2 .

De cette façon, nous pourrions dire que le plan engendré par d_1 et d_2 est exactement l'ensemble des points M tels que $d \perp MT$.

PROPOSITION 2.4.2 *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, toute droite d' perpendiculaire en T à d est située dans le plan déterminé par d_1 et d_2 .*



Considérons un point $M \in d'$ avec $M \neq T$ ainsi qu'un point $D \in d$ avec $D \neq T$. Les points M_1, M_2, D et T sont non coplanaires : il existe donc r, s et $t \in \mathbb{R}$ tels que :

$$M - T = r.(M_1 - T) + s.(M_2 - T) + t.(D - T)$$

Dès lors, puisque $d \perp d'$:

$$\begin{aligned} 0 &= (D - T) \bullet (M - T) \\ &= r.(D - T) \bullet (M_1 - T) + s.(D - T) \bullet (M_2 - T) + t.(D - T) \bullet (D - T) \\ &= r.0 + s.0 + t.(D - T) \bullet (D - T) \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'égalité :

$$0 = t.\|D - T\|^2$$

Mais $D \neq T$. Dès lors $t = 0$, et

$$M - T = r.(M_1 - T) + s.(M_2 - T)$$

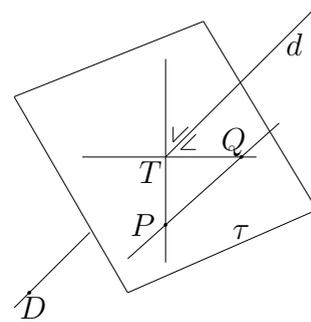
Autrement dit le point M appartient au plan engendré par d_1 et d_2 , et la droite d' est située dans ce même plan.

Les deux propositions précédentes justifient la définition de « droite perpendiculaire à un plan » :

DÉFINITION 2.4.3 Une droite d est perpendiculaire à un plan τ si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites de τ qu'elle lui sont sécantes.

REMARQUE

Si la droite d est perpendiculaire au plan τ , si $d \cap \tau = \{T\}$ et si D est un point de d différent de T , alors quels que soient les points P et $Q \in \tau$, on a :



$$\begin{aligned} (Q - P) \bullet (D - T) &= (Q - T + T - P) \bullet (D - T) \\ &= (Q - T) \bullet (D - T) + (T - P) \bullet (D - T) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

DÉFINITION 2.4.4 On dit que la droite Δ déterminée par P et Q est orthogonale à la droite d lorsqu'elle est incluse dans un plan perpendiculaire à d sans avoir nécessairement de point commun avec d .

Vecteur orthogonal à un plan

Considérons à présent un plan α d'équation cartésienne

$$ax + by + cz = d$$

et cherchons à déterminer *toutes* les droites perpendiculaires à ce plan.

Il est tout à fait remarquable que la réponse est consignée intégralement dans l'équation cartésienne elle-même. Considérons d'abord le plan α_0 parallèle à α et passant par l'origine. Il a pour équation cartésienne

$$ax + by + cz = 0$$

Nous en déduisons l'équivalence logique

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \alpha_0 \Leftrightarrow M \bullet A = 0$$

où A est le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ou encore :

Le point M appartient au plan α_0 si et seulement si les droites OM et OA sont perpendiculaires.

Le plan α_0 est donc le plan perpendiculaire à OA passant par l'origine.

Au lieu de $OM \perp OA$, nous écrirons

$$M \perp A$$

et nous dirons que les vecteurs M et A sont perpendiculaires (ou orthogonaux). Ainsi

$$M \in \alpha_0 \iff M \perp A \iff M \bullet A = 0$$

Le plan α_0 est donc entièrement déterminé par le vecteur A , ce qui est normal puisque les coordonnées de A sont les coefficients de l'équation de α_0 , mais ce qui fournit de plus une interprétation géométrique extrêmement importante de l'équation cartésienne d'un plan.

Nous voyons aussi que deux vecteurs perpendiculaires à α_0 sont nécessairement proportionnels : si $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont tous deux perpendiculaires à α_0 , ce plan admet les deux équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$. Ces deux équations sont donc proportionnelles, autrement dit les deux vecteurs A et A' sont eux-mêmes proportionnels.

A présent, nous pouvons affirmer que les droites perpendiculaires à α sont simplement les droites parallèles à OA . Une telle droite d possède une équation vectorielle $P = U + kA$. Si son point de percée dans α est V , et si M est un point quelconque de α , on a

$$(M - V) \bullet (V - U) = (M - V) \bullet (kA) = k \cdot ((M - V) \bullet A)$$

et ce résultat vaut 0 puisque $M - V \in \alpha_0$.

Distance sphérique

Avant d'abandonner la géométrie de la sphère, il nous semble opportun de parler un peu du problème de la plus courte distance entre deux points *sur* une sphère.

Nous allons esquisser une démonstration analytique du résultat suivant :

Si A et B sont deux points distincts et non diamétralement opposés sur une sphère, la distance minimale qui sépare A de B (mesurée sur une section plane) est obtenue sur l'unique arc de grand cercle passant par A et B .

La démonstration s'effectue en trois étapes

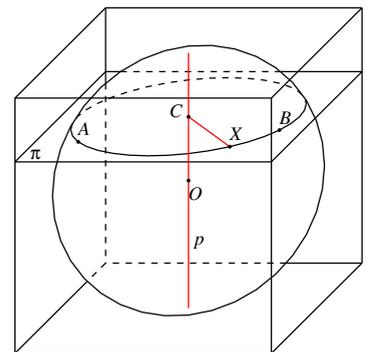
- Toute section plane de la sphère $S^2(R)$ est un cercle de rayon $0 \leq \rho \leq R$.

Soit π un plan quelconque passant par A et B ; on trace la droite p perpendiculaire au plan π et issue de O (la fiche suivante étudiera en détails cette construction). La droite p coupe le plan π au point C .

Quel que soit $X \in S^2(R) \cap \pi$, et par construction, la droite déterminée par X et C est perpendiculaire à la droite déterminée par O et C , de telle sorte qu'on obtient par le théorème de Pythagore :

$$|XC|^2 = |OX|^2 - |OC|^2 = R^2 - |OC|^2$$

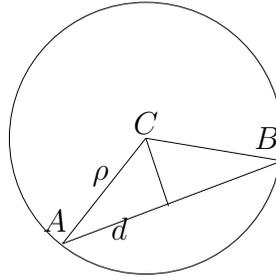
L'intersection $S^2(R) \cap \pi$ est donc le cercle de centre C et de rayon $\rho = \sqrt{R^2 - |OC|^2}$



- Si A et B sont deux points distincts de la sphère $S^2(R)$ séparés d'une distance rectiligne de $2d$ (avec $0 < d \leq R$) alors leur distance sphérique mesurée sur une section plane de rayon $\rho \leq R$ est donnée par :

$$\ell(\rho) = 2\rho \cdot \arcsin \frac{d}{\rho}$$

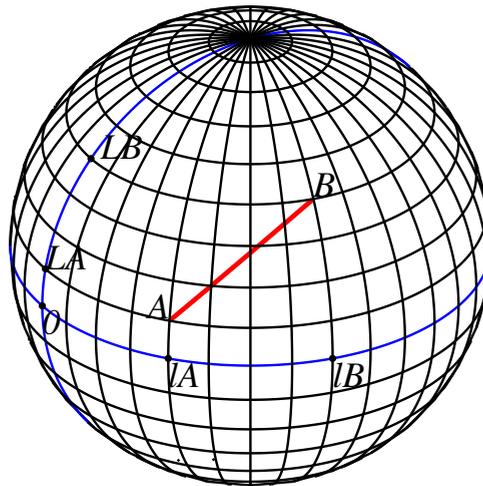
C'est une conséquence immédiate de la figure suivante :



- La fonction $\ell(\rho)$ est une fonction décroissante de ρ .
En effet, si ρ augmente, alors $\frac{d}{\rho} = \sin \frac{\ell(\rho)}{2}$ diminue. Mais la fonction sin est croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, de telle sorte que $\frac{\ell(\rho)}{2}$ diminue.

Comme la plus grande valeur que ρ puisse atteindre est R , cela correspond à la section plane passant par A , B et $C = 0$, c'est-à-dire un grand cercle.

Application : Distance de deux points sur le globe terrestre en fonction de leurs latitudes L et longitudes ℓ .



Si les données sont rapportées à une sphère de rayon 1 :

$$A = \begin{pmatrix} \cos L_A \cdot \cos \ell_A \\ \cos L_A \cdot \sin \ell_A \\ \sin L_A \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \cos L_B \cdot \cos \ell_B \\ \cos L_B \cdot \sin \ell_B \\ \sin L_B \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\cos \widehat{AOB} &= A \bullet B \\ &= \cos L_A \cdot \cos \ell_A \cdot \cos L_B \cdot \cos \ell_B + \cos L_A \cdot \sin \ell_A \cdot \cos L_B \cdot \sin \ell_B + \sin L_A \cdot \sin L_B \\ &= \cos L_A \cdot \cos L_B \cdot \cos(\ell_B - \ell_A) + \sin L_A \cdot \sin L_B\end{aligned}$$

Si R est le rayon terrestre, on obtient :

$$dist_{S^2(R)}(A, B) = R \cdot \arccos(\cos L_A \cdot \cos L_B \cdot \cos(\ell_B - \ell_A) + \sin L_A \cdot \sin L_B)$$

2.4.4 Synthèse

A l'issue des situations décrites dans les fiches 13 et 14, nous retiendrons les constructions et les résultats suivants :

A propos du produit scalaire

On appelle produit scalaire des vecteurs colonnes

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

et on note $U \bullet V$ le nombre réel :

$$\|U\| \cdot \|V\| \cdot \cos \widehat{UOV} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Le produit scalaire jouit des propriétés suivantes :

- Si U et $V \neq 0$: $U \bullet V = 0 \iff OU$ est perpendiculaire à OV .
- $U \bullet V = V \bullet U$ (commutativité)
- $(a.U + b.V) \bullet W = a.(U \bullet W) + b.(V \bullet W)$ (linéarité ou plutôt *bilinéarité*, compte tenu de la commutativité)

A propos de la perpendicularité entre droite et plan

DÉFINITIONS

- Une droite d est perpendiculaire à un plan τ si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites de τ qui lui sont sécantes.
- On dit que la droite Δ déterminée par P et Q est *orthogonale* à la droite d lorsqu'elle est incluse dans un plan perpendiculaire à d sans avoir nécessairement de point commun avec d .

THÉORÈMES

- Une droite d est perpendiculaire en un point T à deux droites d_1 et d_2 sécantes en T , si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan déterminé par d_1 et d_2 passant par T .
- Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, toute droite d' perpendiculaire en T à d est située dans le plan déterminé par d_1 et d_2 .

A propos d'un vecteur orthogonal à un plan

Si α est le plan d'équation cartésienne

$$ax + by + cz = d$$

si α_0 le plan parallèle à α passant par l'origine et donc d'équation cartésienne

$$ax + by + cz = 0$$

et si $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors :

- Le plan α_0 est le plan perpendiculaire à OA passant par l'origine.
- $M \in \alpha_0 \iff M \bullet A = 0$
- Le vecteur $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan α_0 et donc aussi au plan α .

Toutes les droites perpendiculaires à α sont les droites parallèles à OA .

2.5. Produit vectoriel, volume et déterminant

2.5.1 Introduction

Cette section ne comporte qu'une seule fiche, consacrée au calcul du volume d'un prisme. C'est l'occasion d'introduire le produit vectoriel et le produit mixte ou déterminant dans un contexte géométrique. Différents commentaires et prolongements consacrés à l'équation normale d'un plan et aux questions d'orientation clotent cette section et préparent la suivante.

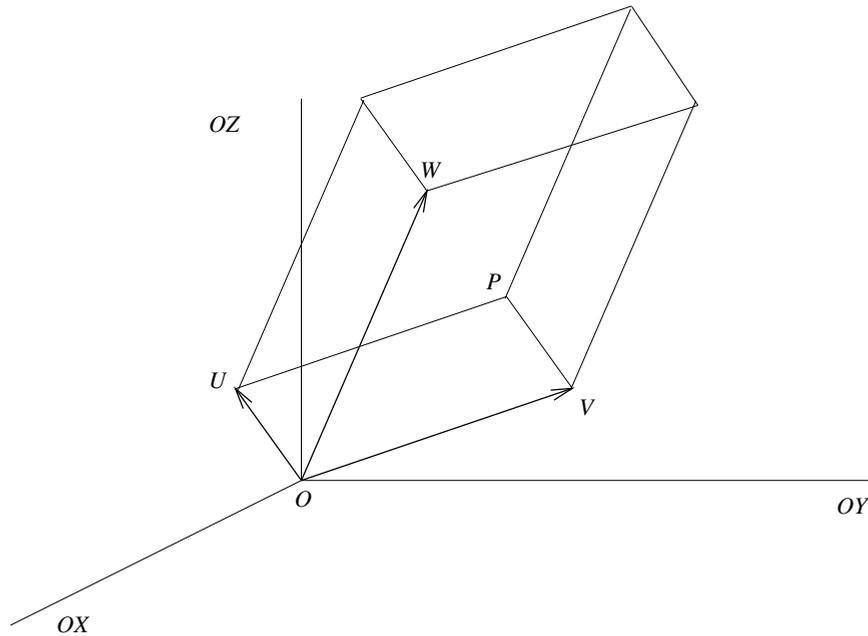
Il n'a pas été rédigé de synthèse pour cette section, les propriétés essentielles du produit vectoriel et du déterminant étant reprises également dans les commentaires et prolongements.

2.5.2 Fiche n° 15 : Produit vectoriel, volume et déterminant

On considère les points :

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a. Déterminer le volume du prisme de côtés OU , OV et OW .
- b. Plus généralement, si U , V et W sont trois points *quelconques* de l'espace, déterminer le volume du prisme de côtés OU , OV et OW en fonction des coordonnées de U , V et W .



2.5.2.1 Solution commentée

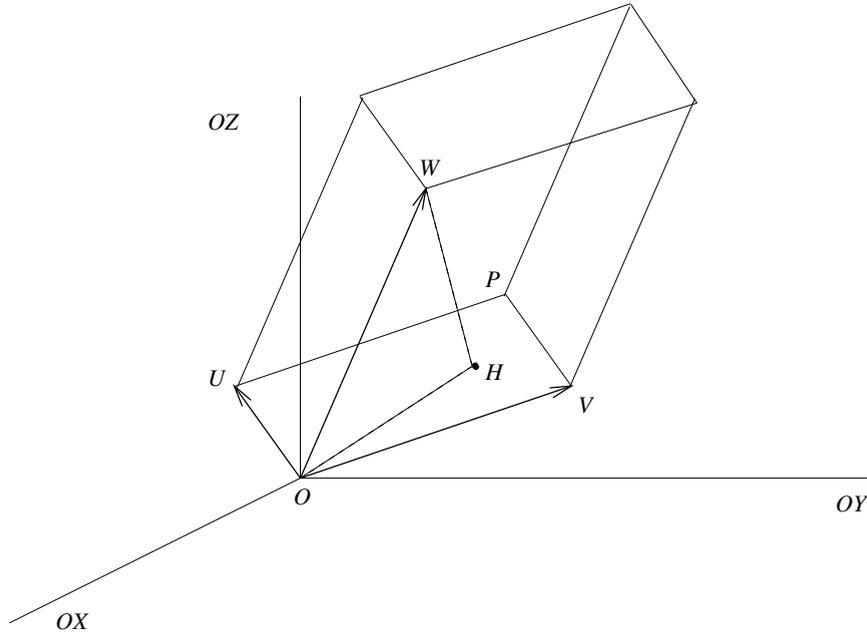
On sait que le volume d'un prisme se calcule grâce à la formule :

$$\text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante}$$

Il s'agit donc de calculer :

- L'aire du parallélogramme $OUPV$

- La longueur du segment WH , où H est le pied de la perpendiculaire issue de W au plan OUV .



Aire du parallélogramme $OUPV$

On obtient l'aire du parallélogramme $OUPV$ grâce à la formule :

$$\text{aire } OUPV = \text{base} \times \text{hauteur} = \|U\| \cdot \|V\| \cdot |\sin \widehat{UOV}|$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (\text{aire } OUPV)^2 &= \|U\|^2 \cdot \|V\|^2 \cdot \sin^2 \widehat{UOV} \\ &= \|U\|^2 \cdot \|V\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \widehat{UOV}) \\ &= \|U\|^2 \cdot \|V\|^2 - \|U\|^2 \cdot \|V\|^2 \cdot \cos^2 \widehat{UOV} \\ &= \|U\|^2 \cdot \|V\|^2 - (U \bullet V)^2 \end{aligned}$$

Dès lors, si

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

alors la forme précédente devient :

$$\begin{aligned} (\text{aire } OUPV)^2 &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ &= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2 - u_1^2 v_1^2 - u_2^2 v_2^2 - u_3^2 v_3^2 - \\
& 2.u_1 v_1 u_2 v_2 - 2.u_1 v_1 u_3 v_3 - 2.u_2 v_2 u_3 v_3 \\
= & u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2.u_1 v_1 u_2 v_2 + u_1^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 - 2.u_1 v_1 u_3 v_3 + \\
& u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_2^2 - 2.u_2 v_2 u_3 v_3 \\
= & (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une formule permettant de calculer l'aire du parallélogramme déterminé par les points O , U et V à partir de leur coordonnées :

$$\text{aire } OUPV = \sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2}$$

Perpendiculaire à un plan issue d'un point de ce plan

Cette question a été étudiée dans les prolongements de la fiche n°14. Considérons donc un plan $\pi = OUV$ déterminé par trois points non alignés dont un est l'origine des coordonnées et dont les deux autres sont donnés par leurs coordonnées :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

On demande de déterminer la perpendiculaire π_P^\perp au plan π passant par le point $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \pi$.

La connaissance de l'équation cartésienne de π nous fournirait immédiatement un vecteur perpendiculaire à π . Mais nous ne disposons pas de cette équation. Nous allons donc directement rechercher un vecteur N qui soit perpendiculaire à U et à V , qui satisfasse donc aux équations

$$\begin{cases} N \bullet U = 0 \\ N \bullet V = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = 0 \\ N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 = 0 \end{cases}$$

C'est un système de *deux* équations du premier degré en *trois* inconnues : N_1 , N_2 et N_3 dont nous savons qu'il admet des solutions non nulles puisque les deux équations ne sont pas proportionnelles, les points U et V n'étant pas alignés avec l'origine. L'un au moins des nombres $u_1 v_2 - u_2 v_1$, $u_2 v_3 - u_3 v_2$ et $u_3 v_1 - u_1 v_3$ est donc non nul. Admettons que ce soit $u_1 v_2 - u_2 v_1$.

La solution algébrique du système est particulièrement intéressante, et ce, y compris du point de vue géométrique.

Si on multiplie la première équation par v_2 , la seconde par u_2 et que l'on soustrait membre à membre, on obtient :

$$(u_1v_2 - u_2v_1).N_1 + (u_3v_2 - u_2v_3).N_3 = 0$$

Pareillement, si on multiplie la première équation par v_1 et la seconde équation par u_1 et que l'on soustrait membre à membre, on obtient :

$$(u_1v_2 - u_2v_1).N_2 + (u_1v_3 - u_3v_1).N_3 = 0$$

D'où un nouveau système de deux équations du premier degré à trois inconnues : N_1 , N_2 et N_3 .

$$\begin{cases} (u_1v_2 - u_2v_1).N_1 + (u_3v_2 - u_2v_3).N_3 = 0 \\ (u_1v_2 - u_2v_1).N_2 + (u_1v_3 - u_3v_1).N_3 = 0 \end{cases}$$

Maintenant, puisque nous avons supposé $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$, on obtient immédiatement :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{N_3}{u_1v_2 - u_2v_1} \cdot (u_2v_3 - u_3v_2) \\ N_2 = -\frac{N_3}{u_1v_2 - u_2v_1} \cdot (u_1v_3 - u_3v_1) \end{cases}$$

En choisissant $N_3 = u_1v_2 - u_2v_1$, on arrive à la solution :

$$N = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Au cas où on aurait $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$ mais $u_2v_3 - u_3v_2 \neq 0$ un calcul analogue aboutirait au même résultat. Il en serait encore de même si c'était $u_3v_1 - u_1v_3$ qui était différent de 0.

Nous avons ainsi déterminé un vecteur N perpendiculaire au plan déterminé par O , U et V . Mais — et c'est tout aussi remarquable — la formule obtenue plus haut et qui permettait de calculer l'aire du parallélogramme déterminé par les points O , U et V s'interprète maintenant par :

$$\text{aire } OUPV = \|N\|$$

On appelle *produit vectoriel* des vecteurs $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ le vecteur noté

$U \times V$ défini par :

$$U \times V = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

dont on a ci-dessus établi les propriétés suivantes :

- $U \times V$ est perpendiculaire à OU et OV .
- $\|U \times V\|$ est l'aire du parallélogramme déterminé par O , U et V . En particulier :

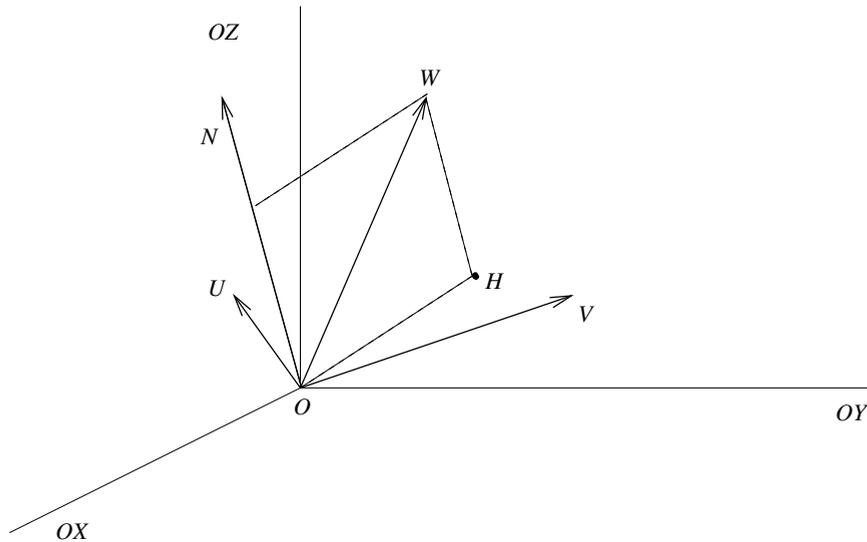
$$\|U \times V\| = \|U\| \cdot \|V\| \cdot |\sin \widehat{UOV}|$$

D'autres propriétés du produit vectoriel sont étudiées dans les prolongements qui suivent cette solution commentée.

Distance d'un point à un plan

Si W est un point quelconque de l'espace et H est le pied de la perpendiculaire abaissée de W sur le plan OUV , on déduit immédiatement de tout ce qui précède :

$$\begin{aligned} |N \bullet W| &= \|N\| \cdot \|W\| \cdot |\cos \widehat{NOW}| \\ &= \|N\| \cdot |WH| \end{aligned}$$



d'où :

$$|WH| = \frac{|N \bullet W|}{\|N\|}$$

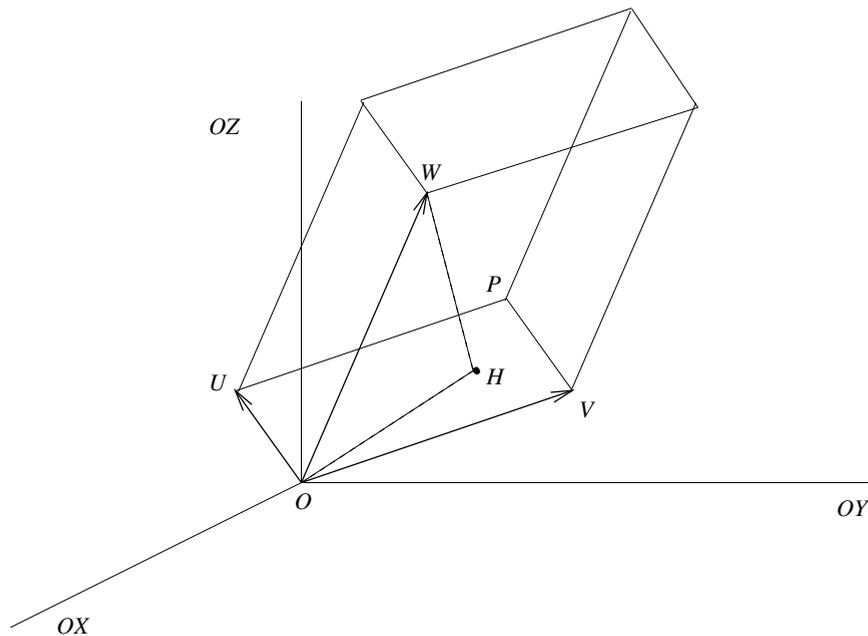
Retour au volume d'un prisme

Commençons par répondre à la question *b* en écrivant la formule *générale* à laquelle on arrive en conséquence des résultats déjà obtenus. Si on considère trois points :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{aligned} \text{vol } OUVW &= (\text{aire } OUPV) \cdot |WH| \\ &= \|U \times V\| \cdot \frac{|N \bullet W|}{\|N\|} \\ &= \|U \times V\| \cdot \frac{|(U \times V) \bullet W|}{\|U \times V\|} \\ &= |(U \times V) \bullet W| \end{aligned}$$



Or, on a :

$$U \times V = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned} (U \times V) \bullet W &= (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot w_1 - (u_1v_3 - u_3v_1) \cdot w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot w_3 \\ &= u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - \\ &\quad u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1 \end{aligned}$$

On appelle *déterminant* des trois vecteurs colonnes

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

le nombre réel noté $\det(U, V, W)$ défini par :

$$\begin{aligned} \det(U, V, W) &= (U \times V) \bullet W \\ &= u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_3 v_2 w_1 - v_3 w_2 u_1 - w_3 u_2 v_1 \end{aligned}$$

Le volume demandé à la question *a* s'écrit donc finalement :

$$\text{vol } OUVW = |8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2| = 4$$

D'autres propriétés du déterminant sont étudiées dans les prolongements ci-après.

2.5.2.2 Commentaires et prolongements

Equation normale d'un plan

Nous avons établi plus haut que le vecteur $U \times V$ est perpendiculaire au plan OUV et que sa norme est l'aire du parallélogramme $OUPV$. Il en résulte que le vecteur

$$n_\pi = \frac{U \times V}{\|U \times V\|}$$

est un vecteur de norme 1 également perpendiculaire à OUV . On l'appelle *le vecteur normal* au plan $\pi = OUV$.

De manière générale, la distance qui sépare un point W d'un plan π déterminé par trois points non alignés T , U et V est donc donnée par la formule :

$$\text{dist}(W, \pi) = |n_\pi \bullet (W - T)|$$

où

$$n_\pi = \frac{(U - T) \times (V - T)}{\|(U - T) \times (V - T)\|}$$

Si le plan π en question est décrit par une équation cartésienne :

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + B = 0$$

alors on tire facilement de tout ce qui précède que :

$$n_\pi = \frac{\pm 1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

et que pour tout point T de π ,

$$\begin{aligned} n_\pi \bullet T &= \pm \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} A \bullet T \\ &= \pm \frac{-B}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \end{aligned}$$

de telle sorte que si $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \text{dist}(W, \pi) &= |n_\pi \bullet (W - T)| \\ &= |n_\pi \bullet W - n_\pi \bullet T| \\ &= \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \cdot |A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3 + B| \end{aligned}$$

Une équation cartésienne d'un plan π :

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + B = 0$$

pour laquelle $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1$ est appelée une *équation normale* de ce plan. Dans ce cas, la formule qui exprime la distance du point W au plan est particulièrement simple :

$$\text{dist}(W, \pi) = |A_1 w_1 + A_2 w_2 + A_3 w_3 + B|$$

Propriétés du produit vectoriel

On a défini plus haut le produit vectoriel de $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ par

$$U \times V = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Une signification géométrique de ce nouveau produit a été dégagée à partir de deux propriétés établies en même temps que sa définition :

- $U \times V$ est orthogonal à U ainsi qu'à V ,
- $\|U \times V\| = \|U\| \cdot \|V\| \cdot |\sin \widehat{UOV}|$ est l'aire du parallélogramme déterminé par O , U et V .

La seule définition de produit vectoriel entraîne immédiatement quelques propriétés remarquables.

D'abord, le produit vectoriel est bilinéaire, c'est-à-dire que, quels que soient les nombres réels a , b et c :

$$\begin{aligned} U \times (a \cdot X + b \cdot Y) &= a \cdot (U \times X) + b \cdot (U \times Y) \\ (a \cdot X + b \cdot Y) \times V &= a \cdot (X \times V) + b \cdot (Y \times V) \end{aligned}$$

Ensuite, le produit vectoriel est *antisymétrique*, c'est-à-dire

$$U \times V = -V \times U$$

Cette antisymétrie implique

$$U \times U = 0$$

Mais on a aussi plus généralement

$$U \times V = 0 \Leftrightarrow O, U \text{ et } V \text{ sont alignés}$$

On déduit par exemple de ces propriétés que dès que les trois points O , U et V ne sont pas alignés, alors $(U, V, U \times V)$ est une *base* de l'espace pointé en O , et que si (U, V) est une base orthonormée d'un plan contenant le point O , alors $(U, V, U \times V)$ est une base orthonormée de l'espace pointé en O .

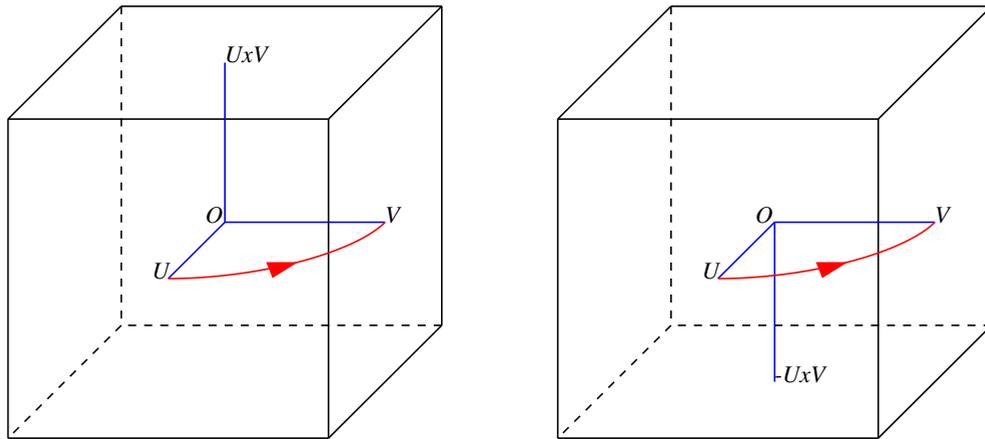
Orientation dans un plan

La propriété d'antisymétrie du produit vectoriel permet de définir une notion d'*orientation* dans un plan, de la manière suivante.

On appelle *axe* dans l'espace toute droite munie d'un repère. On note $(O; P)$ l'axe obtenu en munissant la droite OP du repère pour lequel O est le point d'abscisse 0 et P est le point d'abscisse 1. Si $(O; P)$ est un axe, et Π un plan contenant le point O et perpendiculaire à l'axe, on dit qu'une base de Π définit une *orientation positive* de ce plan par rapport à l'axe, si le produit vectoriel $U \times V$ est un multiple positif de $P - O = P$. On dit alors aussi que le plan Π est *orienté conformément à l'axe* par le choix de la base (U, V) .

Dans le cas où le produit vectoriel $U \times V$ est un multiple négatif de $P - O = P$, on dit que la base (U, V) définit une *orientation négative* du plan Π par rapport à l'axe, ou que le plan Π est *orienté contrairement à l'axe* par le choix de la base (U, V) .

La propriété d'antisymétrie du produit vectoriel signifie alors qu'une permutation des éléments de la base (U, V) choisie change l'orientation du plan Π considéré.



D'un point de vue « physique », un observateur dont les pieds sont en O et la tête au point $U \times V$, et qui regarde le mouvement qui amène U sur V décrira ce mouvement comme allant « de la droite vers la gauche » (dextrogyre) ou « de la gauche vers la droite » (lévogyre) selon la position relative des points U et V par rapport à lui. Un observateur dont les pieds sont en O et la tête en $-U \times V$, et qui regarde le même mouvement le décrira allant dans le sens opposé du précédent. Le changement de sens du mouvement est traduit par le changement de signe dans le produit vectoriel. La définition donnée ci-dessus de l'orientation d'un plan peut être formulée *sans* faire référence à un axe.

Si (U, V) et (W, Z) sont deux bases d'un même plan pointé en O , il existe donc quatre nombres réels a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} W = a \cdot U + b \cdot V \\ Z = c \cdot U + d \cdot V \end{cases}$$

On calcule alors, grâce à la bilinéarité et à l'antisymétrie du produit vectoriel :

$$\begin{aligned} W \times Z &= (a \cdot U + b \cdot V) \times (c \cdot U + d \cdot V) \\ &= ac \cdot (U \times U) + ad \cdot (U \times V) + bc \cdot (V \times U) + bd \cdot (V \times V) \\ &= (ad - bc) \cdot (U \times V) \end{aligned}$$

Ainsi, les bases (U, V) et (W, Z) définissent la *même* orientation du plan qu'elles engendrent dès que la quantité $ad - bc$ est *positive*, et elles définissent des orientations *opposées* de ce plan dès que la quantité $ad - bc$ est *négative*. Il est par ailleurs facile de constater que $ad - bc$ ne peut pas évaluer 0, car sinon les points O, W et Z seraient alignés ...

La notion d'orientation d'un plan est ainsi une notion *relative* : elle permet de préciser quand deux bases d'un même plan définissent une même orientation de ce plan, ou deux orientations opposées de ce plan.

Angle orienté dans un plan orienté

On convient dans la suite d'exprimer les angles en radians, et donc de les représenter par des nombres réels compris entre $-\pi$ et π .

Le produit scalaire permet de calculer le cosinus de l'angle déterminé par deux vecteurs, d'où on peut déduire la *valeur absolue* de cet angle.

Le produit vectoriel permet de définir le *signe* de cet angle, pourvu que le plan déterminé par les deux vecteurs soit muni d'une orientation.

Plus précisément, si Π est un plan contenant l'origine O des coordonnées et orienté par le choix d'une base (U, V) de ce plan, et si X et Y sont deux points de ce plan avec $X \neq O$, $Y \neq O$, l'angle orienté \widehat{XOY} est, par définition, l'unique nombre réel tel que

$$\begin{cases} -\pi < \widehat{XOY} \leq \pi \\ \cos \widehat{XOY} = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \cdot \|Y\|} \\ X \times Y = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \sin \widehat{XOY} \cdot K \end{cases}$$

où K est le vecteur unitaire de même sens que $U \times V$:

$$K = \frac{1}{\|U\| \cdot \|V\|} \cdot U \times V$$

Aire orientée dans un plan orienté

Si Π est un plan contenant l'origine O des coordonnées et orienté par le choix d'une base (U, V) de ce plan, et si X et Y sont deux points de ce plan, on appelle *aire orientée* déterminée par X et Y , et on note $A(X, Y)$, le *nombre réel* défini par

$$X \times Y = A(X, Y) \cdot K$$

où, comme ci-dessus, $K = \frac{1}{\|U\| \cdot \|V\|} \cdot U \times V$ est le vecteur unitaire de même sens que $U \times V$.

En ce sens, il s'agit d'une mesure d'aire *relative* à la base (U, V) .

Dans le cas particulier où (U, V) est une base orthonormée du plan Π , et si

$$\begin{cases} X = a \cdot U + b \cdot V \\ Y = c \cdot U + d \cdot V \end{cases}$$

on calcule comme plus haut :

$$\begin{aligned} X \times Y &= (a \cdot U + b \cdot V) \times (c \cdot U + d \cdot V) \\ &= ac \cdot (U \times U) + ad \cdot (U \times V) + bc \cdot (V \times U) + bd \cdot (V \times V) \\ &= (ad - bc) \cdot (U \times V) \\ &= (ad - bc) \times K \end{aligned}$$

de telle sorte qu'alors

$$A(X, Y) = ad - bc$$

Dans ce contexte d'un plan orienté par une base orthonormée, on appelle parfois l'aire orientée $A(X, Y)$: le déterminant 2×2 de X et Y .

Propriétés du déterminant 3×3

On a défini plus haut le déterminant de $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ par

$$\begin{aligned} \text{Dét}(U, V, W) &= (U \times V) \bullet W \\ &= \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\ &= u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1 \end{aligned}$$

On appelle parfois ce produit $(U \times V) \bullet W$ le produit mixte de U et V par W .

Une signification géométrique de ce produit a aussi été dégagée en même temps que sa définition : $|\text{Dét}(U, V, W)| = |(U \times V) \bullet W|$ est le volume du parallélépipède déterminé par U , V et W .

La seule définition du déterminant entraîne encore une fois quelques propriétés remarquables, et qui résultent de calculs élémentaires.

D'abord, le déterminant est trilineaire, ou *multilinéaire*, c'est-à-dire que, quels que soient les nombres réels a , b et c :

$$\begin{aligned} \text{Dét}(U, V, a \cdot X + b \cdot Y) &= a \cdot \text{Dét}(U, V, X) + b \cdot \text{Dét}(U, V, Y) \\ \text{Dét}(U, a \cdot X + b \cdot Y, W) &= a \cdot \text{Dét}(U, X, W) + b \cdot \text{Dét}(U, Y, W) \\ \text{Dét}(a \cdot X + b \cdot Y, V, W) &= a \cdot \text{Dét}(X, V, W) + b \cdot \text{Dét}(Y, V, W) \end{aligned}$$

Ensuite, le déterminant est *antisymétrique*, au sens où

$$\begin{aligned} \text{Dét}(U, V, W) &= -\text{Dét}(U, W, V) = -\text{Dét}(V, U, W) \\ &= \text{Dét}(V, W, U) = \text{Dét}(W, U, V) = -\text{Dét}(W, V, U) \end{aligned}$$

ce qui implique que, dès que deux parmi les trois éléments U , V et W sont égaux, on a $\text{Dét}(U, V, W) = 0$.

Plus généralement, l'interprétation en termes de volume entraîne aisément

$$\text{Dét}(U, V, W) = 0 \Leftrightarrow O, U, V \text{ et } W \text{ sont coplanaires}$$

Orientation de l'espace

Les propriétés d'antisymétrie du déterminant permettent de définir une notion d'*orientation relative* de l'espace, sur le modèle de celle d'orientation *relative* dans un plan.

Si (U, V, W) et (X, Y, Z) sont deux bases de l'espace pointé en O , elles définissent la même orientation de l'espace si $\frac{\text{Dét}(U, V, W)}{\text{Dét}(X, Y, Z)}$ est positif et elles définissent deux orientations opposées si $\frac{\text{Dét}(U, V, W)}{\text{Dét}(X, Y, Z)}$ est négatif.

Encore une fois, il est impossible que $\text{Dét}(U, V, W)$ ou $\text{Dét}(X, Y, Z)$ soient nuls, puisqu'alors O, U, V et W ou O, X, Y et Z seraient coplanaires, et donc (U, V, W) ou (X, Y, Z) ne serait pas une base.

Il s'ensuit, par exemple, que si les points O, U et V ne sont pas alignés, alors la base

$(U, V, U \times V)$ est de même orientation que la base canonique (I, J, K) où $I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$J = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puisque $\text{Dét}(I, J, K) = 1$ et

$$\text{Dét}(U, V, U \times V) = (U \times V) \bullet (U \times V) = \|U \times V\|^2 \geq 0$$

Volume orienté dans un espace orienté

Si l'espace pointé en O est orienté par le choix d'une base (U, V, W) , et si X, Y et Z sont trois points, on appelle volume orienté déterminé par X, Y et Z , et on note $V(X, Y, Z)$, le *nombre réel* défini par

$$\text{Dét}(X, Y, Z) = V(X, Y, Z) \cdot \text{Dét}(U, V, W)$$

Dans le cas particulier où $(U, V, W) = (I, J, K)$ est la base canonique décrite plus haut, le volume orienté s'identifie au déterminant.

REMARQUE 2.5.1 *Un exposé au Séminaire de Didactique des Mathématiques du C.D.S. à Mons, le 25 mars 1997, intitulé « Bivecteur, produit vectoriel, volume, déterminant ... », a été consacré à une présentation des mêmes thèmes que ceux abordés dans cette fiche, mais à partir de la notion de produit extérieur [44].*

2.6. Les rotations de l'espace

2.6.1 Introduction

Cette section est consacré à la description des rotations de l'espace qui laissent globalement invariant un cube donné et à la représentation matricielle des rotations.

Cela nécessite quelques préliminaires, rassemblés ci-dessous.

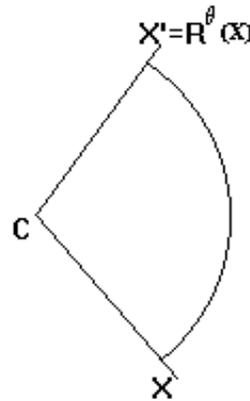
Il est fait un usage fréquent dans tout ce thème des résultats obtenus dans la fiche 15.

Les rotations planes

DÉFINITION 2.6.1 Dans un plan orienté pointé en C , on appelle rotation d'angle orienté θ et de centre C la transformation de ce plan, notée R^θ , définie de la manière suivante : si X est un point quelconque de ce plan,

$$R^\theta(X) = X' \Leftrightarrow \begin{cases} \|X\| = \|R^\theta(X)\| = \|X'\| \\ \widehat{XCX'} = \theta \end{cases}$$

et on pose $R^\theta(C) = C$.



Une rotation plane conserve le produit scalaire

Une rotation plane étant définie à partir d'une égalité de longueurs et d'une mesure d'angle, il est naturel de considérer son effet sur le produit scalaire de deux vecteurs.

La propriété fondamentale des rotations planes est qu'elles laissent invariant le produit scalaire. Plus précisément, si R^θ est une rotation d'angle orienté θ et de centre C , alors quels que soient les points X et Y :

$$X \bullet Y = R^\theta(X) \bullet R^\theta(Y)$$

En effet, si on note $R^\theta(X) = X'$ et $R^\theta(Y) = Y'$ alors,

$$\begin{aligned} R^\theta(X) \bullet R^\theta(Y) &= \|R^\theta(X)\| \cdot \|R^\theta(Y)\| \cdot \cos \widehat{X'CY'} \\ &= \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos(\widehat{X'CX} + \widehat{XCY} + \widehat{YCY'}) \\ &= \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos(-\theta + \widehat{XCY} + \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \cos(\widehat{XCY}) \\
&= X \bullet Y
\end{aligned}$$

Les rotations de l'espace

Définitions

Dans l'espace pointé en un point O , on appelle *axe* toute droite passant par O munie d'un repère, c'est-à-dire d'un point P d'abscisse 1. Comme détaillé dans les compléments de la fiche 15, un axe induit une *orientation* sur tout plan qui lui est perpendiculaire.

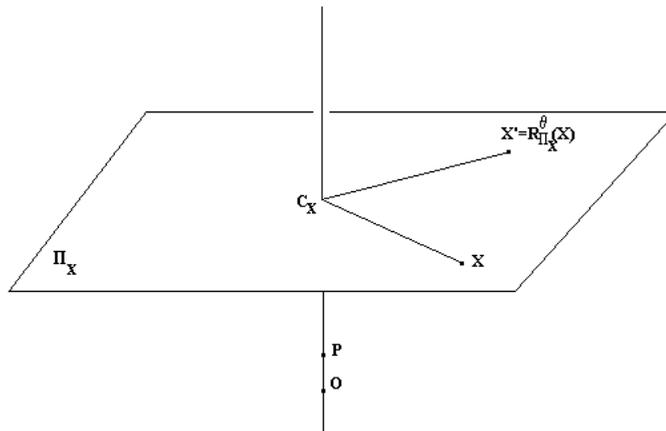
Dans l'espace pointé en un point O , on appelle *rotation d'angle orienté θ et d'axe OP* la transformation de l'espace, notée R_P^θ , définie de la manière suivante : si X est un point quelconque, on note

- Π_X : le plan perpendiculaire à la droite OP contenant X , *orienté* conformément à l'axe OP ,
- C_X : le point de percée de la droite OP dans le plan Π_X ,
- $R_{\Pi_X}^\theta$: la rotation *plane* d'angle orienté θ et de centre C_X dans le plan Π_X ,

et alors

$$R_P^\theta(X) = X' \Leftrightarrow R_{\Pi_X}^\theta = X'$$

Cette définition implique que, dès que X est un point *sur* la droite OP : $R_P^\theta(X) = X$.



Une rotation de l'espace conserve le produit scalaire

Les rotations de l'espace laissent encore le produit scalaire *invariant*, c'est-à-dire : si R_P^θ est une rotation d'angle orienté θ et d'axe la droite OP , alors quels que soient les points X et Y :

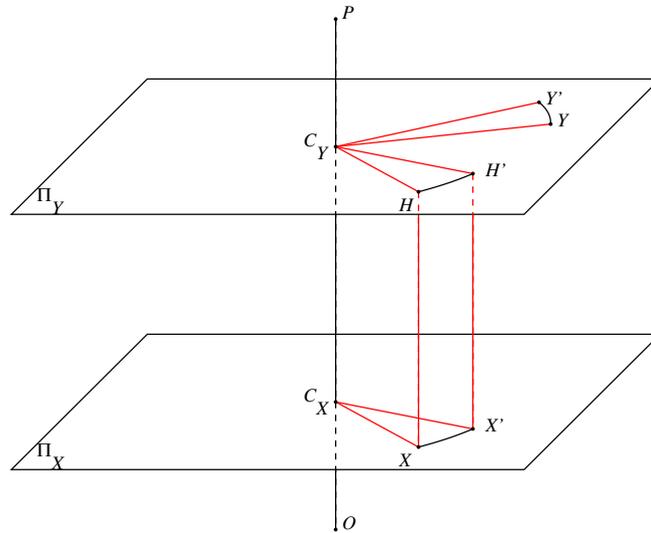
$$X \bullet Y = R_P^\theta(X) \bullet R_P^\theta(Y)$$

La démonstration de ce résultat est plus élaborée que dans le cas des rotations planes. Si on note $R_P^\theta(X) = X'$ et $R_P^\theta(Y) = Y'$ alors,

$$\begin{aligned}
X' \bullet Y' &= (C_X + (X' - C_X)) \bullet (C_Y + (Y' - C_Y)) \\
&= C_X \bullet C_Y + (X' - C_X) \bullet (Y' - C_Y)
\end{aligned}$$

car les droites $X'C_X$ et $Y'C_Y$ sont perpendiculaires à la droite OP . D'autre part, la translation qui amène C_X sur C_Y permet d'écrire (cfr. figure) :

$$X' - C_X = H' - C_Y$$



d'où

$$\begin{aligned} X' \bullet Y' &= C_X \bullet C_Y + (H' - C_Y) \bullet (Y' - C_Y) \\ &= C_X \bullet C_Y + R_{\Pi_Y}^\theta(H) \bullet R_{\Pi_Y}^\theta(Y) \\ &= C_X \bullet C_Y + (H - C_Y) \bullet (Y - C_Y) \end{aligned}$$

grâce à l'invariance du produit scalaire pour la rotation plane $R_{\Pi_Y}^\theta$.

Or, on a aussi

$$\begin{aligned} X \bullet Y &= (C_X + (X - C_X)) \bullet (C_Y + (Y - C_Y)) \\ &= C_X \bullet C_Y + (X - C_X) \bullet (Y - C_Y) \\ &= C_X \bullet C_Y + (H - C_Y) \bullet (Y - C_Y) \end{aligned}$$

puisque $X - C_X = H - C_Y$, ce qui achève d'établir l'invariance du produit scalaire pour les rotations de l'espace.

Cette invariance traduit (en partie) l'image intuitive d'une rotation de l'espace comme *mouvement rigide* : lors d'un tel mouvement, ni les longueurs, ni les positions relatives des objets ne peuvent changer.

REMARQUE 2.6.2 *Il faut prendre garde à ce qu'une transformation de l'espace qui laisse invariant le produit scalaire n'est pas nécessairement une rotation. En anglais, le terme « rigid motion » est traditionnellement réservé aux rotations de l'espace.*

2.6.2 Fiche n° 16 : Les rotations cubiques

Problème

Dans un système d'axes orthonormé centré en un point O , on considère le cube dont les trois points

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des centres de faces.

a. Décrire *toutes* les rotations de l'espace qui laissent ce cube (globalement) invariant ; on qualifiera désormais une telle rotation de « cubique ». Expliciter l'image

d'un point quelconque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ par une telle rotation.

b. Comment ces rotations se composent-elles ? Expliciter l'image d'un point quel-

conque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ par une telle composition.

c. Comment ces propriétés de composition permettent-elles d'exprimer l'ensemble de toutes les rotations cubiques à partir d'un sous-ensemble (le plus petit possible) de telles rotations ? Expliciter les éléments d'un tel sous-ensemble.

2.6.2.1 Solution commentée

Réponse à la question a

Considérons la rotation $R_I^{\pi/2}$, d'angle orienté égal à $\frac{\pi}{2}$ radians et dont l'axe est la droite OI , munie du repère où le point I est d'abscisse 1.

Le cube étant entièrement déterminé par la donnée des points I , J et K , on va d'abord déterminer l'effet de la rotation sur eux.

On a évidemment

$$R_I^{\pi/2}(I) = I$$

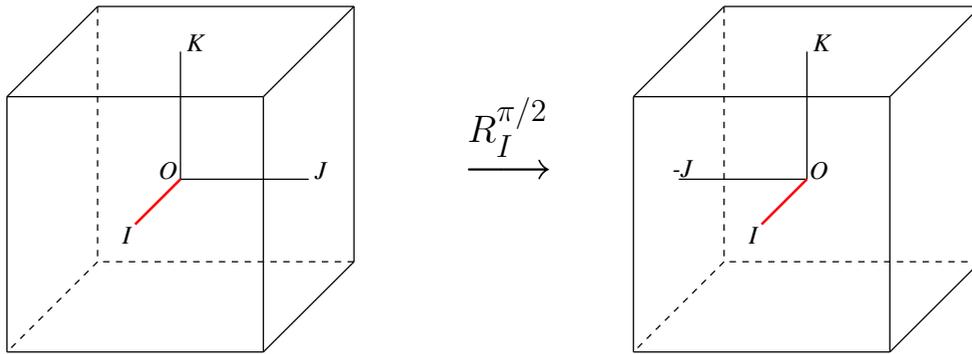
Ensuite

$$R_I^{\pi/2}(J) = K \text{ et } R_I^{\pi/2}(K) = -J$$

On observe aussi facilement l'effet de la rotation $R_I^{\pi/2}$ sur les sommets du cube. Par exemple, le sommet $I + J + K$ a comme image

$$R_I^{\pi/2}(I + J + K) = I - J + K$$

On réalise sans trop de peine en poursuivant ce genre d'observations que la rotation considérée laisse le cube globalement invariant.



Mais il y a mieux ! Si on remarque dans le dernier résultat que

$$I - J + K = R_I^{\pi/2}(I) + R_I^{\pi/2}(J) + R_I^{\pi/2}(K)$$

on en déduit la formule

$$R_I^{\pi/2}(I + J + K) = R_I^{\pi/2}(I) + R_I^{\pi/2}(J) + R_I^{\pi/2}(K)$$

D'autre part, on a aussi

$$R_I^{\pi/2}(-J) = -K \text{ et } R_I^{\pi/2}(-K) = J$$

d'où on déduit encore les formules

$$R_I^{\pi/2}(-J) = -R_I^{\pi/2}(J) \text{ et } R_I^{\pi/2}(-K) = -R_I^{\pi/2}(K)$$

Ces observations, et toutes celles qu'on peut faire pareillement sur d'autres points remarquables du cube, suggèrent deux hypothèses concernant la rotation $R_I^{\pi/2}$.

Première hypothèse : La rotation $R_I^{\pi/2}$ est entièrement déterminée par son effet sur les seuls points I , J et K .

Seconde hypothèse — qui tient compte de la première — :

$$\text{si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K, \text{ alors}$$

$$R_I^{\pi/2}(X) = x_1 \cdot R_I^{\pi/2}(I) + x_2 \cdot R_I^{\pi/2}(J) + x_3 \cdot R_I^{\pi/2}(K)$$

La démonstration de cette formule peut être considérée comme un exercice de lecture!

En effet, la rotation $R_I^{\pi/2}$ préserve le produit scalaire. La base orthonormée (I, J, K) de l'espace pointé en O est donc transformée en une nouvelle *base*

$$(R_I^{\pi/2}(I), R_I^{\pi/2}(J), R_I^{\pi/2}(K)) = (I, K, -J)$$

encore orthonormée. Et la conservation du produit scalaire signifie que $R_I^{\pi/2}(X)$ doit s'exprimer en fonction de $(R_I^{\pi/2}(I), R_I^{\pi/2}(J), R_I^{\pi/2}(K))$ exactement de la même manière que X s'exprime en fonction de (I, J, K) .

Autrement dit, comme $X = x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K$ *équivalent* à

$$\begin{cases} x_1 = X \bullet I \\ x_2 = X \bullet J \\ x_3 = X \bullet K \end{cases}$$

et qu'on a, par invariance du produit scalaire par rotation

$$\begin{cases} X \bullet I = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(I) \\ X \bullet J = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(J) \\ X \bullet K = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(K) \end{cases}$$

on en déduit qu'on a aussi

$$\begin{cases} x_1 = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(I) \\ x_2 = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(J) \\ x_3 = R_I^{\pi/2}(X) \bullet R_I^{\pi/2}(K) \end{cases}$$

d'où résulte la formule annoncée

$$R_I^{\pi/2}(X) = x_1 \cdot R_I^{\pi/2}(I) + x_2 \cdot R_I^{\pi/2}(J) + x_3 \cdot R_I^{\pi/2}(K)$$

Or, ce *raisonnement* est manifestement tout à fait *indépendant* de la rotation particulière $R_I^{\pi/2}$ considérée! En d'autres mots, on a aussi établi que si P est un point quelconque et R_P^θ la rotation d'angle orienté θ et d'axe OP , alors

$$R_P^\theta(X) = R_P^\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R_P^\theta(x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K) = x_1 \cdot R_P^\theta(I) + x_2 \cdot R_P^\theta(J) + x_3 \cdot R_P^\theta(K)$$

Cette propriété de linéarité est *indépendante du choix de la base* (I, J, K) . C'est ce qui est démontré dans le prolongement de cette fiche.

La propriété de linéarité permet de calculer l'image d'un point quelconque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

par la rotation $R_I^{\pi/2}$. En effet, on a :

$$R_I^{\frac{\pi}{2}}(I) = I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_I^{\frac{\pi}{2}}(J) = K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_I^{\frac{\pi}{2}}(K) = -J = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où, par la formule de linéarité :

$$R_I^{\frac{\pi}{2}}(X) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

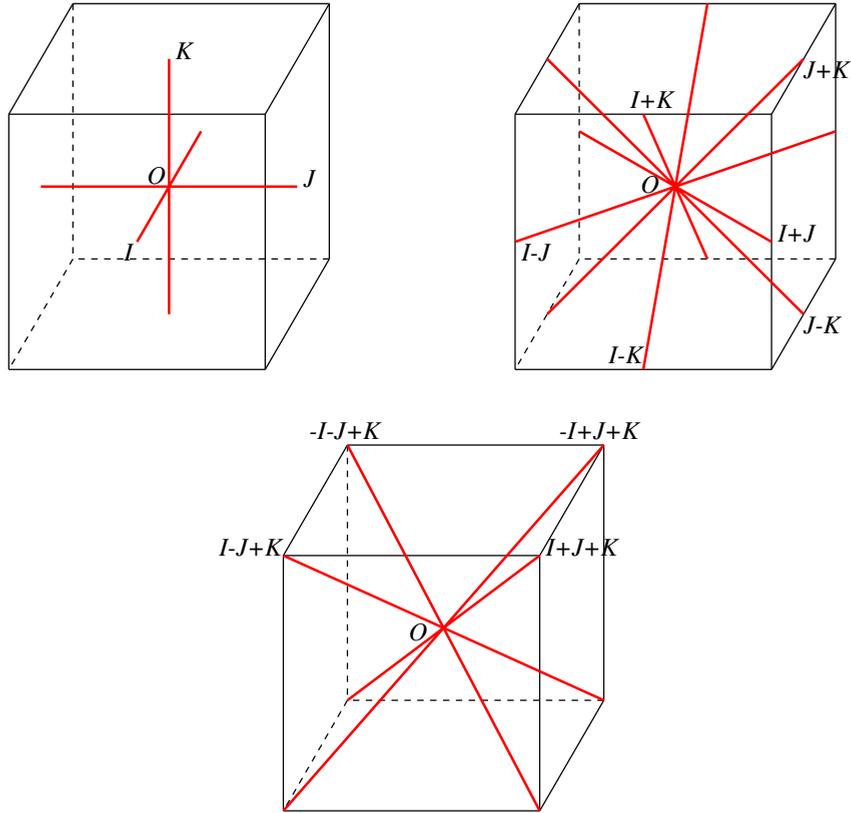
On fait de même pour les autres rotations cubiques.

Mais il reste à établir une *liste* de toutes les rotations de l'espace qui laissent le cube donné globalement invariant. Une telle liste s'obtient à partir des deux observations suivantes.

- Le centre du cube doit être invariant pour *toutes* les rotations : *tous* les axes sont donc des droites passant par l'origine O .
- Si on appelle « élément » de la surface latérale du cube : un sommet, une arête ou une face de ce cube, alors l'intersection d'un axe de symétrie avec un élément de la surface latérale est un *centre de symétrie* de cet élément.

On en déduit la liste de toutes les droites qui peuvent supporter un axe de rotation :

- les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux centres I , J et K de faces du cube ;
- les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux points $I + J$, $I - J$, $J + K$, $J - K$, $I + K$, $I - K$ qui sont les milieux des arêtes du cube ;
- les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux sommets $I + J + K$, $-I + J + K$, $-I - J + K$, $I - J + K$; ces droites sont les diagonales du cube.



Il reste à préciser, pour chacune de ces droites : les axes eux-mêmes, leur repère et les angles de rotation possibles pour chacun de ces axes.

On observe d'abord que, sur une droite, le repère opposé à un repère donné ne permet pas de créer des rotations différentes de celles associées à ce repère lui-même, de telle sorte qu'on peut se limiter dans la suite au repère associé au « centre de symétrie » choisi pour déterminer la droite.

Commençons par les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux points I , J et K .

Si l'axe est la droite OI munie du repère où le point I est d'abscisse 1, alors les seuls angles de rotation possibles — excepté l'angle nul — sont : $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, et π . Les rotations ainsi décrites sont notées

$$R_I^{\pi/2}, \quad R_I^{-\pi/2}, \quad \text{et } R_I^\pi = (R_I^\pi)^{-1}$$

On obtient de manière analogue les rotations

$$R_J^{\pi/2}, \quad R_J^{-\pi/2}, \quad \text{et } R_J^\pi = (R_J^\pi)^{-1}$$

et

$$R_K^{\pi/2}, \quad R_K^{-\pi/2}, \quad \text{et } R_K^\pi = (R_K^\pi)^{-1}$$

Pour ce type d'axes, on trouve ainsi neuf rotations différentes.

Poursuivons avec les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux points $I + J$, $I - J$, $J + K$, $J - K$, $I + K$, $I - K$.

Si l'axe est la droite joignant l'origine des coordonnées au point $I + J$, et munie du repère où le point $I + J$ est d'abscisse 1, alors le seul angle de rotation possible — toujours en dehors de l'angle nul — est π . La rotation ainsi décrite est notée

$$R_{I+J}^\pi = (R_{I+J}^\pi)^{-1}$$

On obtient pareillement

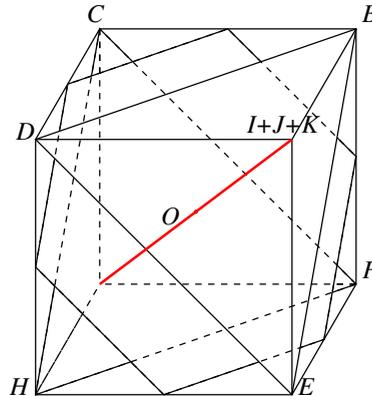
$$\begin{aligned} R_{I-J}^\pi &= (R_{I-J}^\pi)^{-1} \\ R_{J+K}^\pi &= (R_{J+K}^\pi)^{-1} \text{ et } R_{J-K}^\pi = (R_{J-K}^\pi)^{-1} \\ R_{I+K}^\pi &= (R_{I+K}^\pi)^{-1} \text{ et } R_{I-K}^\pi = (R_{I-K}^\pi)^{-1} \end{aligned}$$

Pour ce type d'axes, on trouve ainsi six rotations différentes.

Il reste à considérer les droites obtenues en joignant l'origine des coordonnées aux points $I + J + K$, $-I + J + K$, $-I - J + K$ et $I - J + K$.

Si l'axe est la droite joignant l'origine des coordonnées au point $I + J + K$, et munie du repère où ce point est d'abscisse 1, alors les seuls angles de rotation possibles sont — toujours en dehors de l'angle nul — : $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

On s'en convainc sans trop de peine en construisant le plan perpendiculaire à l'axe considéré et passant par l'origine : il découpe sur la surface latérale du cube un hexagone régulier. Les triangles EBD et CHF sont situés dans des plans parallèles à celui de cet hexagone.



Les deux rotations ainsi décrites sont notées

$$R_{I+J+K}^{2\pi/3} \text{ et } R_{I+J+K}^{-2\pi/3} = (R_{I+J+K}^{2\pi/3})^{-1}$$

On obtient de la même manière les rotations

$$R_{-I+J+K}^{2\pi/3} \text{ et } R_{-I+J+K}^{-2\pi/3} = (R_{-I+J+K}^{2\pi/3})^{-1}$$

$$R_{-I-J+K}^{2\pi/3} \text{ et } R_{-I-J+K}^{-2\pi/3} = (R_{-I-J+K}^{2\pi/3})^{-1}$$

$$R_{I-J+K}^{2\pi/3} \text{ et } R_{I-J+K}^{-2\pi/3} = (R_{I-J+K}^{2\pi/3})^{-1}$$

Pour ce (dernier) type d'axes on trouve ainsi huit rotations différentes.

Au total, et si on n'oublie pas l'identité, qui est une rotation comme les autres (et qui est, elle, d'angle nul et d'axe quelconque), on a obtenu ainsi $9 + 6 + 8 + 1 = 24$ rotations.

Elles laissent le cube globalement invariant, et il n'y en a pas d'autres qui fassent de même !

Avertissement

Lorsqu'on étudie l'effet d'une rotation donnée sur le cube, il faut évidemment « garder en mémoire » une trace de la position antérieure du cube.

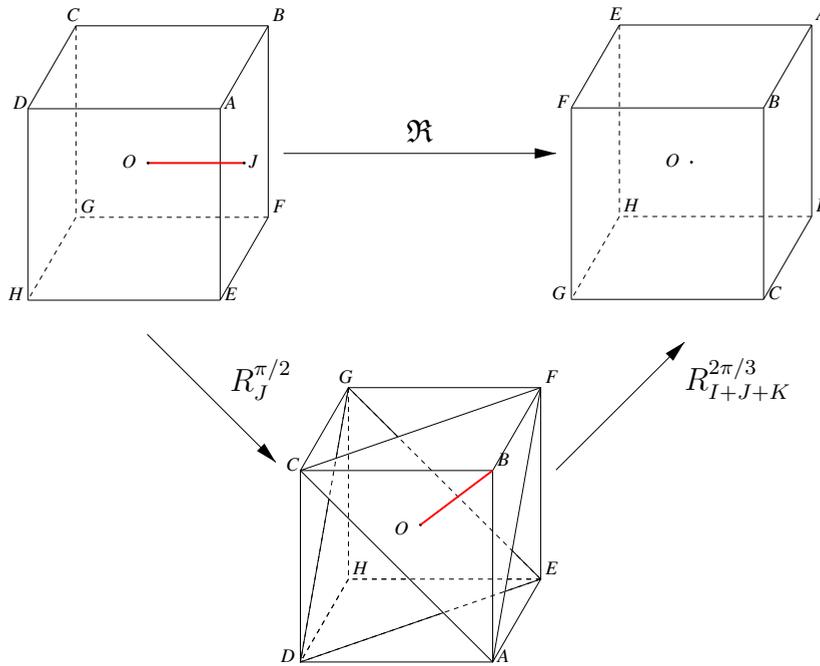
A cet effet, on convient de NE PAS faire tourner le REPÈRE formé par les trois points I , J et K . En accord avec cette convention, les lettres I , J et K sont exclusivement réservées dans la suite aux points qui déterminent ce repère. Ces points et leurs combinaisons linéaires, EN TANT QU'ILS DÉTERMINENT CE REPÈRE OU SONT LIÉS À CELUI-CI, ne sont donc PAS affectés par les rotations et restent TOUJOURS fixes.

Mais considérés en tant que points liés au cube, ils subissent alors l'effet de la rotation. Le bon sens, et le contexte des questions, devraient permettre de ne pas être égaré par ces abus de langage.

Réponse à la question b

Tant qu'on se limite aux rotations cubiques, il n'y a pas de grandes difficultés à vérifier que la composée de deux telles rotations est encore une rotation cubique.

Vérifions-le en étudiant la transformation composée $R_{I+J+K}^{2\pi/3} \circ R_J^{\pi/2}$ qui sera provisoirement notée \mathfrak{R} .



Dans la position où se trouve le cube après que la transformation lui ait été appliquée, les points milieux des segments $[AB]$ et $[HG]$ n'ont pas bougé : la transformation admet donc un axe, à savoir la droite obtenue en joignant l'origine des coordonnées au point $J + K$.

On identifie alors facilement $\mathfrak{R} = R_{I+J+K}^{2\pi/3} \circ R_J^{\pi/2}$ à R_{J+K}^π .

Comme la composée de deux rotations cubiques est encore une rotation cubique, la formule de linéarité permet de calculer comme dans la réponse à la question *a* l'image d'un point quelconque par la composée de deux rotations cubiques.

Réponse à la question c

La solution de cette dernière partie du problème est affaire de patience et de méthode.

Dans la liste connue des 24 rotations cubiques (décrites à la fin de la solution commentée à la question *a*), on supprime chaque rotation qui apparaît comme composée d'au moins deux autres rotations présentes dans cette liste.

Après avoir exhibé assez de relations de ce genre, on arrive à la conclusion qu'il y a moyen de décrire toutes les rotations cubiques à partir de la composition de *seulement deux* d'entre elles.

On peut même se permettre d'oublier la signification géométrique de ces deux rotations génératrices, pourvu qu'on tienne compte de certaines relations simples entre ces deux rotations, relations qui traduisent l'essentiel de la géométrie de la situation. Voici, en bref, une présentation d'un tel résultat.

On choisit par exemple les deux rotations $R_{I+J+K}^{2\pi/3}$ et $R_I^{\pi/2}$. On a d'abord

$$R_{I+J+K}^{2\pi/3} \circ R_I^{\pi/2} = R_{I+J}^\pi$$

Notons pour abrégier $\beta = R_{I+J+K}^{2\pi/3}$ et $\gamma = R_I^{\pi/2}$.

La relation précédente se note $\beta\gamma = R_{I+J}^\pi$ pourvu qu'on convienne de juxtaposer — ou multiplier — les lettres β et γ pour symboliser l'opération « \circ » de composition, et qu'on prenne bien garde à l'*ordre* d'écriture, puisque

$$\gamma\beta = R_I^{\pi/2} \circ R_{I+J+K}^{2\pi/3} = R^\pi I + K \neq R_{I+J}^\pi = \beta\gamma$$

Si on convient encore de noter « 1 » pour l'identité, on fait apparaître des relations dont le contenu géométrique est clair :

$$\begin{cases} \beta^3 = 1 \\ \gamma^4 = 1 \\ (\beta\gamma)^2 = 1 \end{cases}$$

Ces deux rotations génératrices, à savoir β et γ , et les trois relations précédentes permettent de retrouver les 24 rotations cubiques. Plus précisément, on déduit de ces trois relations les relations « dérivées » :

$$\begin{cases} \beta^{-1} = \beta^2 \\ \gamma^{-1} = \gamma^3 \end{cases}$$

d'où aussi

$$\begin{cases} \gamma\beta\gamma = \beta^{-1} = \beta^2 \\ \beta\gamma\beta = \gamma^{-1} = \gamma^3 \end{cases}$$

Il s'agit alors de dresser une liste de représentants de tous les mots formés avec les deux seules lettres β et γ , et en tenant compte autant de l'ordre d'écriture que des trois relations précédentes et de toutes celles qu'on peut en déduire.

Ainsi par exemple, le mot $\gamma^3\beta^2\gamma$ peut être simplifié :

$$\gamma^3\beta^2\gamma = (\beta\gamma\beta)\beta^2\gamma = \beta\gamma^2$$

et le mot $\gamma\beta^2\gamma^2\beta$ peut être rendu équivalent à beaucoup d'autres, entre autres à $\beta\gamma^2\beta^2\gamma$:

$$\gamma\beta^2\gamma^2\beta = \gamma(\gamma\beta\gamma)\gamma^2\beta = \gamma^2\beta\gamma^3\beta = \gamma^2\beta(\beta\gamma\beta)\beta = \gamma^2\beta^2\gamma\beta^2 = \gamma^2(\gamma\beta\gamma)\gamma\beta^2 = \gamma^3\beta\gamma^2\beta^2 = (\beta\gamma\beta)\beta\gamma^2\beta^2 = \beta\gamma\beta^2\gamma^2\beta^2 = \beta\gamma(\gamma\beta\gamma)\gamma^2\beta^2 = \beta\gamma^2\beta^2\gamma^3\beta^2 = \beta\gamma^2\beta(\beta\gamma\beta)\beta^2 = \beta\gamma^2\beta^2\gamma$$

Avec — comme annoncé — un peu de patience et de méthode, on obtient un ensemble de représentants de tous les mots possibles, classés d'après le degré croissant des mots :

1					
β		γ			
β^2	$\beta\gamma$	$\beta\gamma^2$	$\gamma\beta$	γ^2	$\gamma^2\beta$
$\beta^2\gamma$	$\beta\gamma^2$	$\beta\gamma^2\beta$	$\gamma^2\beta$	$\gamma\beta^2\gamma^3$	$\gamma^3\beta$
$\gamma\beta^2\gamma$	$\beta^2\gamma^2$	$\beta\gamma^2\beta$	$\gamma^2\beta^2$	$\beta\gamma^3$	$\gamma^3\beta$
$\gamma^2\beta^2\gamma$	$\gamma\beta^2\gamma^2$	$\beta^2\gamma^2\beta$	$\beta\gamma^2\beta^2$	$\beta\gamma^3\beta$	
$\beta\gamma^2\beta^2\gamma$					

On compte ainsi 24 mots différents, et on vérifie que chacun d'entre eux correspond à exactement une rotation cubique. C'est la *concision* du procédé de description qui fait l'intérêt du résultat. On peut le résumer de la manière suivante : le groupe (fini, et non commutatif) des rotations cubiques, noté Γ , est le groupe à deux générateurs β et γ soumis aux trois relations

$$\begin{cases} \beta^3 = 1 \\ \gamma^4 = 1 \\ (\beta\gamma)^2 = 1 \end{cases}$$

En notations condensées :

$$\Gamma = \langle \{\beta, \gamma : \beta^3 = \gamma^4 = (\beta\gamma)^2 = 1\} \rangle$$

On trouvera dans les compléments qui suivent une démonstration complète de ce que l'ensemble des rotations de l'espace forme aussi un groupe pour la composition des rotations, dont Γ est donc un sous-groupe fini. Il en résultera que l'ensemble correspondant des matrices 3×3 , dont on donnera à cette occasion une caractérisation purement matricielle, forme un groupe pour la multiplication des matrices.

2.6.2.2 Commentaires et prolongements

Comme annoncé dans la réponse à la question *a*, démontrons que toute rotation R_P^θ est une application linéaire, c'est-à-dire que quels que soient les points X et Y et le nombre réel a :

$$\begin{aligned} R_P^\theta(X + Y) &= R_P^\theta(X) + R_P^\theta(Y) \\ R_P^\theta(a \cdot X) &= a \cdot R_P^\theta(X) \end{aligned}$$

On considère une base orthogonale (U, V, W) de l'espace pointé en O . Comme la rotation R_P^θ conserve le produit scalaire, le triplet $(R_P^\theta(U), R_P^\theta(V), R_P^\theta(W))$ est encore une base orthogonale de l'espace.

On calcule alors, grâce à la bilinéarité du produit scalaire, et à son invariance sous la rotation R_P^θ :

$$\begin{aligned} &(R_P^\theta(X + Y) - R_P^\theta(X) - R_P^\theta(Y)) \bullet R_P^\theta(U) \\ &= ((R_P^\theta(X + Y) \bullet R_P^\theta(U)) - (R_P^\theta(X) \bullet R_P^\theta(U)) - (R_P^\theta(Y) \bullet R_P^\theta(U))) \\ &= ((X + Y) \bullet U) - (X \bullet U) - (Y \bullet U) = 0 \end{aligned}$$

Pareillement

$$\begin{aligned} &(R_P^\theta(X + Y) - R_P^\theta(X) - R_P^\theta(Y)) \bullet R_P^\theta(V) \\ &= ((R_P^\theta(X + Y) \bullet R_P^\theta(V)) - (R_P^\theta(X) \bullet R_P^\theta(V)) - (R_P^\theta(Y) \bullet R_P^\theta(V))) \\ &= ((X + Y) \bullet V) - (X \bullet V) - (Y \bullet V) = 0 \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} &(R_P^\theta(X + Y) - R_P^\theta(X) - R_P^\theta(Y)) \bullet R_P^\theta(W) \\ &= ((R_P^\theta(X + Y) \bullet R_P^\theta(W)) - (R_P^\theta(X) \bullet R_P^\theta(W)) - (R_P^\theta(Y) \bullet R_P^\theta(W))) \\ &= ((X + Y) \bullet W) - (X \bullet W) - (Y \bullet W) = 0 \end{aligned}$$

L'élément $R_P^\theta(X + Y) - R_P^\theta(X) - R_P^\theta(Y)$ étant ainsi orthogonal aux *trois* éléments d'une *base* de l'espace doit être identiquement nul, d'où

$$R_P^\theta(X + Y) = R_P^\theta(X) + R_P^\theta(Y)$$

On procède de même pour établir

$$R_P^\theta(a \cdot X) = a \cdot R_P^\theta(X)$$

ce qui achève de démontrer que toute rotation de l'espace est une application linéaire.

Dans l'espace, toute *application linéaire* qui laisse invariant le produit scalaire, c'est-à-dire les longueurs et la valeur absolue des angles orientés, est appelée une isométrie de l'espace.

La signification géométrique de la propriété de linéarité est élémentaire, mais fondamentale. En vertu de ce que l'on sait de l'équation vectorielle ou des équations paramétriques d'une droite ou d'un plan, cette linéarité signifie que toute rotation de l'espace transforme une droite en une droite, et un plan en un plan.

2.6.3 Fiche n° 17 : La représentation matricielle des rotations

2.6.3.1 Liminaire

La fiche suivante peut être conçue comme un prolongement de la fiche N° 16 consacrée aux rotations cubiques. Elle développe la représentation matricielle des rotations *quelconques* de l'espace sans épuiser le sujet. En particulier, on n'y étudie pas la caractérisation algébrique des rotations de l'espace.

S'il a semblé plus approprié de ne pas aborder ce sujet en même temps que l'étude des rotations cubiques, c'est parce que la représentation matricielle des *seules* rotations cubiques n'offre pas grand intérêt.

Mais d'autre part, l'interprétation matricielle des transformations linéaires, lorsqu'elle est introduite à partir des matrices de rotation, met en évidence *le rôle du produit scalaire dans le produit matriciel*. C'est ce qui est détaillé dans la fiche qui suit. Du produit scalaire à la forme linéaire associée, il n'y a qu'un pas, et on sait que pour les transformations linéaires *quelconques*, c'est par le biais des formes linéaires (c'est-à-dire de la dualité des espaces vectoriels) que l'on arrive à comprendre la raison d'être géométrique des règles du calcul matriciel. Mais c'est là une autre histoire...

Au vu de son objectif, cette dernière fiche n'a pas le même ton que les précédentes. Elle est plus proche d'un exposé que d'une situation-problème. On peut éventuellement la proposer aux élèves comme exercice de lecture et de compréhension d'un texte mathématique.

2.6.3.2 Situation générale

On note :

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la *base canonique* de \mathbb{R}^3 .

On considère une rotation quelconque R_P^θ d'axe OP et d'angle orienté θ . On se propose d'étudier l'image d'un point $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1.I + x_2.J + x_3.K$ quelconque par cette rotation.

2.6.3.3 Notion de matrice

En vertu de la formule de linéarité (voir fiche précédente), la rotation R_P^θ étant entièrement déterminée par la donnée de

$$R_P^\theta(I) = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix}, \quad R_P^\theta(J) = \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} \text{ et } R_P^\theta(K) = \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix}$$

on la représente par le tableau, appelé « matrice 3×3 »

$$M_P^\theta = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

dont les *colonnes* sont les coordonnées de $R_P^\theta(I)$, $R_P^\theta(J)$ et $R_P^\theta(K)$.

On déduit immédiatement de la linéarité de la rotation R_P^θ :

$$\begin{aligned} R_P^\theta(X) &= R_P^\theta(x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K) \\ &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} \\ x_1 \cdot r_{21} + x_2 \cdot r_{22} + x_3 \cdot r_{23} \\ x_1 \cdot r_{31} + x_2 \cdot r_{32} + x_3 \cdot r_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qu'on note matriciellement

$$R_P^\theta(X) = M_P^\theta \cdot X = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} \\ x_1 \cdot r_{21} + x_2 \cdot r_{22} + x_3 \cdot r_{23} \\ x_1 \cdot r_{31} + x_2 \cdot r_{32} + x_3 \cdot r_{33} \end{pmatrix}$$

et qui décrit explicitement l'effet de la rotation R_P^θ sur un point $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2.6.3.4 L'action d'une matrice sur un vecteur colonne

La *forme* particulière de la colonne qui donne cette expression explicite de $R_P^\theta(X)$ mérite que l'on s'y attarde un peu : il semble en effet difficile de ne pas reconnaître un produit scalaire dans chacune des coordonnées de $R_P^\theta(X)$. Plus précisément,

$$x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} \text{ ou, matriciellement } (r_{11} \ r_{12} \ r_{13}) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot r_{21} + x_2 \cdot r_{22} + x_3 \cdot r_{23} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} \text{ ou, matriciellement } (r_{21} \ r_{22} \ r_{23}) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot r_{31} + x_2 \cdot r_{32} + x_3 \cdot r_{33} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix} \text{ ou, matriciellement } (r_{31} \ r_{32} \ r_{33}) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Il reste à donner une *interprétation géométrique* aux trois « nouveaux » points, de coordonnées

$$\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire aux lignes de la matrice M_P^θ :

$$(r_{11} \ r_{12} \ r_{13}), \quad (r_{21} \ r_{22} \ r_{23}) \text{ et } (r_{31} \ r_{32} \ r_{33})$$

C'est l'objet du point suivant.

2.6.3.5 Rotations inverses et matrices transposées

La rotation R_P^θ admet une rotation *inverse*, c'est-à-dire une rotation, notée $(R_P^\theta)^{-1}$ dont la composée avec R_P^θ est l'identité : c'est la rotation de même axe, mais d'angle orienté $-\theta$. On notera donc

$$(R_P^\theta)^{-1} = R_P^{-\theta}$$

Mais d'autre part, on a

$$x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} = R_P^\theta(X) \bullet I = R_P^\theta(X) \bullet (R_P^\theta \circ R_P^{-\theta}(I)) = X \bullet R_P^{-\theta}(I)$$

puisque toute rotation de l'espace laisse le produit scalaire invariant. Et donc

$$x_1 \cdot r_{11} + x_2 \cdot r_{12} + x_3 \cdot r_{13} = X \bullet R_P^{-\theta}(I)$$

Comme cette dernière formule est vraie quel que soit le point X, on en déduit, en posant successivement $X = I, J$ ou K , l'interprétation géométrique cherchée du point $\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}$,

ou de la ligne $(r_{11} \ r_{12} \ r_{13})$, à savoir :

$$R_P^{-\theta}(I) = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} \text{ ou } (r_{11} \ r_{12} \ r_{13})$$

Pareillement

$$R_P^{-\theta}(J) = \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} \text{ ou } (r_{21} \ r_{22} \ r_{23})$$

$$R_P^{-\theta}(K) = \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix} \text{ ou } (r_{31} \ r_{32} \ r_{33})$$

En conclusion, la rotation $(R_P^\theta)^{-1} = R_P^{-\theta}$, inverse de la rotation R_P^θ , est entièrement déterminée par la donnée de sa matrice

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}$$

appelée transposée de la matrice M_P^θ , et notée ${}^t M_P^\theta$, obtenue en permutant les lignes avec les colonnes de la matrice M_P^θ .

2.6.3.6 Remarque importante

On prendra bien garde à ne pas croire que la transposée d'une matrice quelconque en est toujours l'inverse. Comme nous venons de le démontrer, cette propriété est propre aux matrices qui représentent une transformation orthogonale, c'est-à-dire une transformation qui respecte le produit scalaire.

2.6.3.7 Quelques exemples

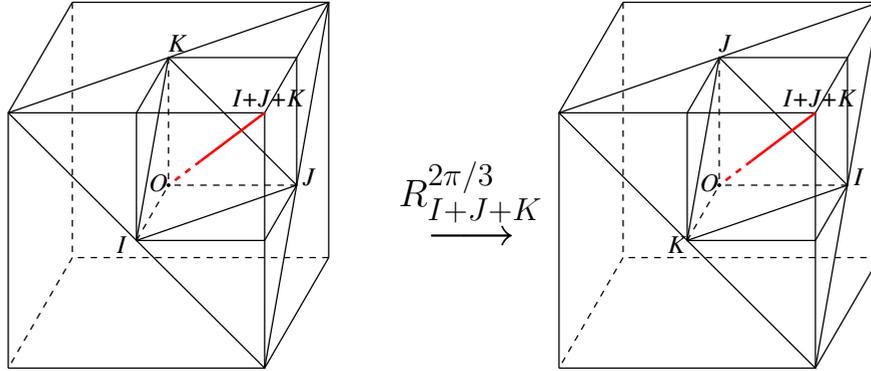
Voici l'expression *matricielle* de quelques rotations cubiques, exprimées dans la base (I, J, K) :

$$M_J^{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ puisque la rotation } R_J^{\pi/2} \text{ envoie } I \text{ sur } -K, \text{ fixe } J \text{ et envoie } K \text{ sur } I.$$

$$M_{J+K}^\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ puisque la rotation } R_{J+K}^\pi \text{ envoie } I \text{ sur } -I, \text{ et permute } K \text{ et } J;$$

$$M_{I+J+K}^{2\pi/3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ puisque la rotation } R_{I+J+K}^{2\pi/3} \text{ envoie } I \text{ sur } J, J \text{ sur } K \text{ et } K \text{ sur } I.$$

Etc.



2.6.3.8 Composition des rotations et produit matriciel

Considérons deux rotations quelconques R_P^θ et R_Q^φ où les points P et Q , et les angles orientés θ et φ , sont arbitraires. On se propose de décrire l'effet de la transformation composée $R_Q^\varphi \circ R_P^\theta$ sur un point quelconque.

La linéarité de chacune de ces transformations implique la linéarité de la composée, et permet de calculer

$$\begin{aligned} R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(X) &= R_Q^\varphi \circ R_P^\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K) \\ &= R_Q^\varphi(x_1 \cdot R_P^\theta(I) + x_2 \cdot R_P^\theta(J) + x_3 \cdot R_P^\theta(K)) \\ &= x_1 \cdot (R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(I)) + x_2 \cdot (R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(J)) + x_3 \cdot (R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(K)) \end{aligned}$$

Si, à nouveau, on souhaite effectuer le calcul pratique de l'effet de cette composition sur un point quelconque de l'espace, on commence par associer

$$\begin{aligned} \text{la matrice } M_P^\theta &= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \text{ à la rotation } R_P^\theta, \\ \text{la matrice } M_Q^\varphi &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \text{ à la rotation } R_Q^\varphi. \end{aligned}$$

En vertu de la linéarité de la transformation composée $R_Q^\varphi \circ R_P^\theta$, la matrice correspondante doit être constituée des colonnes

$$R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(I), \quad R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(J) \text{ et } R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(K)$$

Notons-la

$$M_{Q,P}^{\varphi,\theta} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Chacun des termes de cette matrice est encore le résultat d'un calcul de produit scalaire. Par exemple

$$t_{32} = (R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(J)) \bullet K = (R_Q^\varphi \circ R_P^\theta(J)) \bullet (R_Q^\varphi \circ R_Q^{-\varphi}(K)) = R_P^\theta \circ R_Q^{-\varphi}(K)$$

puisque toute rotation de l'espace laisse le produit scalaire invariant. Le terme s'obtient donc en faisant le produit scalaire de $(s_{31} \ s_{32} \ s_{33})$ par $\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix}$.

De manière explicite

$$M_{Q,P}^{\varphi,\theta} = \begin{pmatrix} s_{11} \cdot r_{11} + s_{12} \cdot r_{21} + s_{13} \cdot r_{31} & s_{11} \cdot r_{12} + s_{12} \cdot r_{22} + s_{13} \cdot r_{32} & s_{11} \cdot r_{13} + s_{12} \cdot r_{23} + s_{13} \cdot r_{33} \\ s_{21} \cdot r_{11} + s_{22} \cdot r_{21} + s_{23} \cdot r_{31} & s_{21} \cdot r_{12} + s_{22} \cdot r_{22} + s_{23} \cdot r_{32} & s_{21} \cdot r_{13} + s_{22} \cdot r_{23} + s_{23} \cdot r_{33} \\ s_{31} \cdot r_{11} + s_{32} \cdot r_{21} + s_{33} \cdot r_{31} & s_{31} \cdot r_{12} + s_{32} \cdot r_{22} + s_{33} \cdot r_{32} & s_{31} \cdot r_{13} + s_{32} \cdot r_{23} + s_{33} \cdot r_{33} \end{pmatrix}$$

Ainsi est défini le produit de $M_Q^\varphi = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ par $M_P^\theta = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$,

qu'on note $M_{Q,P}^{\varphi,\theta} = M_Q^\varphi \cdot M_P^\theta$.

2.6.3.9 La non commutativité du produit matriciel

Ce produit matriciel n'est pas commutatif, de la même manière que la composition des rotations (et plus généralement des transformations linéaires) n'est pas commutative.

On vérifie par exemple que

$$R_J^{\pi/2} \circ R_{I+J+K}^{2\pi/3} = R_{I+J}^\pi$$

alors que, comme on l'a vu plus haut

$$R_{I+J+K}^{2\pi/3} \circ R_J^{\pi/2} = R_{J+K}^\pi$$

En terme de matrices, on vérifie de même que

$$M_J^{\pi/2} \cdot M_{I+J+K}^{2\pi/3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M_{I+J}^\pi$$

tandis que

$$M_{I+J+K}^{2\pi/3} \cdot M_J^{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{J+K}^\pi$$

