Troisième partie

Annexes

Annexe A

Le programme `Reseau.exe`

A.1. Introduction

Le programme `Reseau.exe` a pour premier objectif de fournir à l'enseignant un moyen simple pour réaliser des figures de géométrie de l'espace faisant appel à un réseau cubique et à l'usage de coordonnées. Il permet en particulier de réaliser la plupart des figures rencontrées dans le présent fascicule. Ses performances en tant qu'outil de construction de figures spatiales plus générales sont limitées.

Trois modes de représentation sont disponibles : la perspective centrale, la projection orthogonale et la perspective cavalière. A tout moment, il est possible de modifier en continu les paramètres de la représentation choisie, ce qui revient par exemple à faire tourner l'objet représenté sous les yeux de l'observateur. Ce procédé devrait se révéler une aide puissante pour former la perception spatiale de ceux qui éprouvent des difficultés à « voir dans l'espace ».

Par ailleurs, les figures apparaissant à l'écran peuvent être imprimées sans difficulté, ce qui constitue un moyen simple de fournir aux élèves des figures de base de bonne qualité, figures qu'ils peuvent compléter selon les activités réalisées en classe.

Le programme `Reseau.exe` est un programme DOS, qui doit pouvoir fonctionner sur n'importe quel ordinateur PC-IBM ou compatible, disposant d'une carte graphique VGA. Il est cependant à conseiller d'utiliser une machine assez rapide. En particulier, les routines permettant de faire tourner les objets à l'écran nécessitent beaucoup de calculs entre deux dessins successifs. Les ordinateurs équipés d'un processeur antérieur au modèle 486 ne donneront pas sur ce point de résultat satisfaisant.

Quant à l'impression, les meilleurs résultats seront obtenus avec des imprimantes de type postscript, ou des imprimantes comprenant le langage PCL5. Sur les autres imprimantes, l'impression est réalisée par copie d'écran.

On trouvera dans cette annexe une simple description du fonctionnement technique des différentes routines proposées par le programme. Pour des situations pédagogiques à illustrer par le programme, on se référera d'abord aux différentes fiches présentes dans ce fascicule, mais aussi à l'annexe 2.

Installation Pour installer le programme `Reseau.exe`, il suffit de le copier dans le répertoire de son choix.

A.2. La structure du programme

Lorsque le programme débute, l'utilisateur se trouve devant un écran comportant

- au long du bord supérieur : une ligne de menus,
- au long du bord gauche : une colonne d'icônes,
- au long des bords inférieur et droit : des ascenseurs,
- dans le coin inférieur droit : une icône représentant une bombe (!),
- au centre : un système d'axes et un cube.

Les menus concernent l'environnement général d'exécution du programme. Les icônes permettent de créer des objets géométriques. Les ascenseurs permettent de modifier les paramètres de la représentation. La bombe permet de détruire un objet.

Le système d'axes et le cube constituent la figure intéressante.

Nous allons passer en revue ces divers éléments.

A.3. Les menus

La barre de menus située en haut de l'écran comporte quatre éléments :

Projet	Transformation	Représentation	Couleurs

Le menu $\boxed{\text{Projet}}$ contient les routines permettant d'enregistrer ou de charger une situation, ainsi que celles qui gouvernent l'impression. Avec $\boxed{\text{Représentation}}$ et $\boxed{\text{Couleurs}}$, ce sont les paramétres de la représentation plane d'objet à trois dimensions et les couleurs utilisées qui sont modifiables. Enfin, $\boxed{\text{Transformation}}$ permet de définir un projecteur de l'espace sur un plan, parallèlement à une droite, une homothétie de l'espace, et une translation.

A.3.1 Le menu Projet

Ce menu comprend plusieurs sous-menus :

- **Nouveau** détruit tous les objets définis antérieurement, efface l'écran et réinitialise le programme.
- **Ouvrir** affiche la liste des fichiers d'extension « .res » disponibles dans le répertoire courant du disque dur. L'utilisateur peut en sélectionner un et charger son contenu. Il est possible de changer de répertoire ou de lecteur de disque. Pour quitter cette routine sans charger de fichier, appuyez sur la touche `End`.
- **Enregistrer** crée sur le disque dur un fichier d'extension « .res » contenant les informations nécessaires pour redessiner ultérieurement les figures actuellement présentes. Les paramétres de la représentation sont également stockés. L'extension « .res » ne doit pas être introduite par l'utilisateur. Si celui-ci choisit un nom déjà attribué à un fichier du répertoire courant du disque dur, un message lui demande de confirmer son choix.
- **Imprimante** permet de définir l'imprimante connectée à l'ordinateur, et de choisir entre imprimer directement sur imprimante, dans un fichier, ou sous forme d'une image de format `bmp` qui peut être récupérée dans un programme de traitement d'image.

  La boîte de dialogue suivante apparaît à l'écran :

Imprimante		
LaserJet	Epson FX80	Postscript
PaintJet	Epson JX80	PGL2 NB
DeskJet	Epson LQ24	PGL2 Col
Port		
LPT1	Fichier	

  1. Si vous désirez imprimer directement, choisissez d'abord. une imprimante.
     Commençons par décrire les sept cases qui correspondent à des imprimantes en noir et blanc. Si vous avez la chance d'avoir une imprimante qui comprend le langage Postscript, effectuez ce choix de préférence. Le choix PGL2 NB est opportun si vous avez une imprimante qui comprend le langage graphique PCL5 (ou postérieur) dont PGL2 est un sous-langage. C'est le cas des HP LaserJet III (ou postérieures). Si vous avez une HP LaserJet II (ou antérieure), sélectionnez la case LaserJet.

Les choix PaintJet et DeskJet sont évidemment destinés à ces imprimantes, tous modèles (mais si vous avez un modèle très récent, vérifiez s'il ne comprend pas le PCL5 et le PGL2).

Choisissez une des cases Epson si vous avez une imprimante à aiguilles. (Elles sont souvent compatibles avec les Epson). Les anciens modèles comportent généralment neuf aiguilles. Dans ce cas, choisissez Epson FX80. Les plus récentes en ont 24. Dans ce cas, utilisez Epson LQ24.

La dernière imprimante Epson prévue est la Epson JX80. C'est une imprimante couleurs à 9 aiguilles, assez ancienne. Elle est très peu fréquente. Enfin, si vous avez une imprimante couleurs récente qui comprend le PCL5, choisissez PGL2 Col. Ce choix convient par exemple pour les HP LaserJet Color et HP DeskJet 1200C et 1500C.

Après avoir choisi une imprimante, il vous reste à indiquer à quel port cette imprimante est connectée. Par défaut, la case intitulée « Port » comporte la mention « LPT1 », qui est le nom habituel du port parallèle. Généralement, il suffit de ne pas modifier cette mention.

Vérifiez enfin que les cases Fichier et Image .bmp n'ont pas été sélectionnées. Eventuellement, déselectionnez-les en cliquant dessus.

2. Vous pourriez souhaiter imprimer dans un fichier par exemple pour pouvoir réimprimer une figure ultérieurement sans devoir relancer le programme. Dans ce cas, choisissez d'abord une imprimante comme ci-dessus, puis cochez la case Fichier. Le fichier qui sera créé aura une extension indiquant à quelle imprimante il est destiné. Le tableau qui suit reprend ces extensions :

LaserJet : LJ	Epson FX80 : FX	Postscript : eps
PaintJet : PJ	Epson JX80 : JX	PGL2 NB : plt
DeskJet : DJ	Epson LQ24 : LQ	PGL2 Col : plt

Il est un autre cas où il peut s'avérer utile d'imprimer d'abord dans un fichier : celui où votre ordinateur fait partie d'un réseau et n'a accès à une imprimante qu'à travers ce réseau. Dans ces conditions, il semblerait normal de remplacer « LPT1 » par la dénomination du port-réseau dans la boîte de dialogue. L'expérience montre que cela n'est pas toujours suffisant pour pouvoir imprimer. Si vous avez des difficultés de ce genre, essayez d'imprimer votre image dans un fichier, puis imprimez le fichier à l'aide d'un autre logiciel que `reseau.exe`. Il suffit normalement de revenir sous `DOS` et d'utiliser alors soit l'instruction `print`, soit l'instruction `copy`. Si vous travaillez sous `Windows 95`, des difficultés sont à craindre, car ce système d'exploitation semble s'être ingénié à compliquer les tâches d'impression directe (même quand on ne travaille pas dans un réseau). dans ce cas, copiez d'abord l'écran dans une image de format `bmp` (voyez plus loin), puis récupérez cette image dans un programme de traitement d'images tel que `Paintbrush`, et imprimez-la à partir de là. Nous ne garantissons pas que des distorsions ne se seront pas produites entretemps ...

- Imprimer permet, comme le nom l'indique, d'imprimer la figure. Si une imprimante a déjà été sélectionnée, le logiciel considère d'office que c'est encore cette imprimante-là qui va être utilisée. De même, le choix « Imprimante » ou « Fichier » est conservé. Si ces choix doivent être modifiés, il est nécessaire de repasser par la la routine Imprimante.

  Si l'imprimante choisie est de l'un des types Postscript, PGL2 NB ou PGL2 Col, une boîte de dialogue apparaîtra dans laquelle l'utilisateur pourra indiquer les dimensions de la figure imprimée. Ceci permet de corriger d'éventuelles distorsions de la figure.

  Enfin, si l'utilisateur a choisi d'imprimer dans un fichier, le nom de celui-ci lui sera demandé. L'extension ne doit pas être indiquée.
- Image Après avoir fait ce choix, vous serez invité à donner un nom à l'image. Elle sera alors sauvée dans un fichier d'extension `bmp` que vous pourrez ensuite retravailler dans un logiciel de traitement d'image ou utiliser dans un film video ...
- DOS permet de quitter temporairement le programme pour lancer une commande DOS. On revient au programme par la commande EXIT.
- Quitter est la routine qui permet de stopper le programme. Il est tout aussi simple de pousser sur la touche `End`. Les paramètres de configuration du programme (mode de représentation, imprimante, couleurs) sont alors conservés pour une session ultérieure.
- Aide affiche un panneau rappelant que pour chaque élément de menu, une aide est acessible à l'écran en utilisant la touche `F1`, lorsque cet élément est affiché en surbrillance.

A.3.2 Le menu Transformation

Ce menu donne accès à trois sous-menus :

1. Projecteur

   Pour définir un projecteur (sur un plan parallèlement à une droite), on devra d'abord définir la direction de projection. Ceci se fait en cliquant sur deux points déjà présents à l'écran.

   > Sélectionner un point dans le plan de l'écran ne permet pas de déterminer un point de l'espace puisque, quel que soit le mode de représentation utilisé, toute une droite de l'espace correspond au même point de l'écran. Aussi, le programme ne peut choisir effectivement que des points qui ont déjà été marqués, et dont il connaît les coordonnées.
   >
   > Lorsque le curseur de la souris indique un point de l'écran qui correspond à un point connu de l'espace, d'une part le curseur change de forme, d'autre part les coordonnées spatiales du point apparaissent sous le curseur de la souris. C'est seulement dans ce cas qu'il est utile de presser le bouton (gauche).

   Aprés avoir défini la direction de projection, il est encore nécessaire de sélectionner trois points afin de déterminer le plan de projection. La procédure est analogue à la précédente. Le projecteur est alors bien défini, mais cela n'apparaît pas d'une quelconque façon à l'écran.
   Si l'utilisateur a choisi une direction de projection parallèle au plan de projection, le fait lui est signalé, et il est invité à recommencer.

2. Homothétie Pour définir une homothétie, on sélectionne d'abord un point, qui en sera le centre. Ensuite on introduit le rapport d'homothétie dans une boîte de dialogue.

3. Translation Pour définir une translation, il suffit de sélectionner un point et son image.

Chacune des routines Projecteur, Homothétie et Translation peut être utilisée autant de fois qu'on le désire, mais pour chacune d'entre elles, seule la transformation introduite en dernier lieu est mémorisée. On peut ainsi avoir simultanément en mémoire une transformation de chaque espèce, et une seule.

> Si vous voulez abandonner l'exécution d'une routine que vous avez entamée par erreur, essayez la touche `Escape`. Parfois on interrompt ainsi l'exécution intempestive.

A.3.3 Le menu Représentation

Ce menu permet

- de choisir le mode de représentation graphique des solides de l'espace : en perspective centrale, en projection orthogonale ou en perspective cavalière,
- de zoomer,
- de choisir le mode de représentation des arèes des cubes : en vu et caché, en transparent ou en opaque,
- de choisir l'orientation du trièdre de référence.

1. Mode de représentation des solides :
   Les trois éléments du menu sont les suivants :

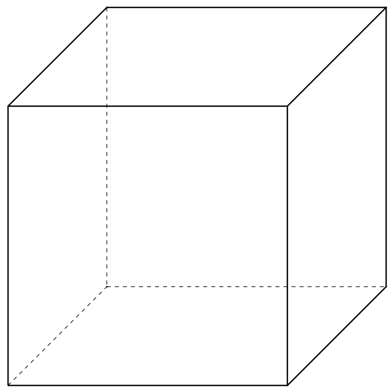
Perspective	Proj. orthog.	Persp. cav

   Le choix d'une représentation plane de figures spatiales est un peu une question de circonstances. On peut conseiller de choisir, si possible, une représentation qui conserve celles des caractéristiques d'une figure que l'on veut étudier.

   Par exemple, la perspective cavalière et la projection orthogonale sont des projections affines. Elles conservent la linéarité, le parallélisme, les rapports de longueurs de segments parallèles. Mais elles ne conservent pas les valeurs des angles, sauf si les côtés de ces angles sont situés dans des plans parallèles au plan de projection. La perspective centrale est une transformation projective. Elle ne conserve guère que l'alignement, la concourance et ...le birapport. On ne la rencontre pas souvent dans l'enseignement secondaire. Et cependant, c'est elle qui correspond le mieux à notre vision, comme l'ont finalement compris les peintres de la renaissance. Elle peut donner lieu à une réflexion intéressante, ayant tant des aspects artistiques que scientifiques.

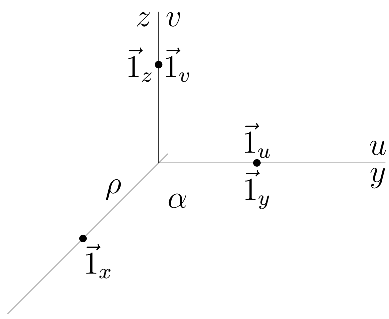
   a. La représentation la plus populaire est la perspective cavalière. Elle convient particulièrement bien pour représenter un cube dont deux faces sont parallèles au plan de représentation. Elle permet donc des dessins assez simples dans ce contexte là.

Elle est par ailleurs assez peu réaliste, en ce sens que l'image d'un objet qui se forme sur notre rétine, puis dans notre cerveau, n'est pas une perspective cavalière de cet objet. On s'en convainc aisément en faisant varier les paramètres de la représentation.



La perspective cavalière est une projection affine de l'espace sur un plan dans laquelle la direction de projection est quelconque. Par contre, nous choisissons toujours le même plan de projection : le plan YOZ. Seule, la direction de projection est donc à définir : elle l'est par le point $\vec{1}_x$ et son image.

Deux paramètres suffisent donc pour définir une perspective cavalière : nous choisissons les coordonnées polaires (ρ et α) de l'image de $\vec{1}_x$ dans le plan yoz.
Pour simplifier, nous appelons (u, v) les coordonnées cartésiennes dans le plan image YOZ et par conséquent $\vec{1}_u = \vec{1}_y$ et $\vec{1}_v = \vec{1}_z$



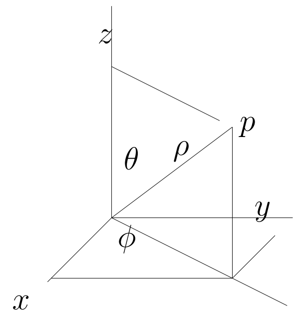
La perspective cavalière de paramètres ρ et α est l'application linéaire qui applique le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sur le point de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\alpha & 1 & 0 \\ \rho\sin\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les deux paramètres ρ et α, dénommées respectivement « Coefficient » et « Angle » peuvent être modifiés à volonté en déplaçant des curseurs au long d'ascenseurs. Il en est de même pour les paramètres qui commandent les autres routines de représentation.

b. La projection orthogonale correspond à la vision que nous avons d'un objet situé très loin. Un observateur est supposé se trouver à l'infini, définissant ainsi une direction, la direction du regard. Les figures spatiales sont projetés sur un plan π, orthogonal à cette direction passant par l'origine des axes.

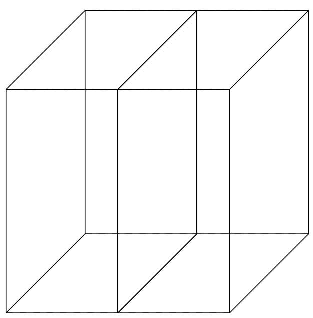
La direction de projection, c'est-à-dire la direction du regard de l'observateur, est déterminée selon le système des coordonnées polaires de l'espace par deux angles : la colatitude θ et la longitude ϕ.



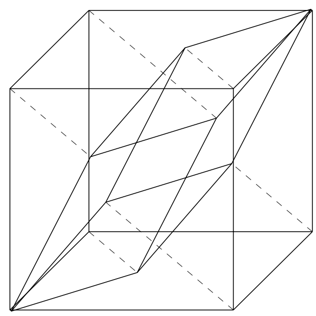
Une base orthonormée $(\vec{1}_u, \vec{1}_v)$ est choisie dans le plan π. Clairement, elle n'est déterminée qu'à une rotation près, ce qui introduit un troisième paramètre σ, que nous appellerons l'angle de *pivotement*. En faisant varier cet angle, on donne l'impression que la figure observée effectue un mouvement de rotation autour de la droite joignant l'origine à l'œil de l'observateur.

Les formules permettant de calculer les coordonnées (u, v) de la projection sur π d'un point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace sont les suivantes, dans le cas où $\sigma = 0$ (sinon, on compose avec une rotation d'angle σ :

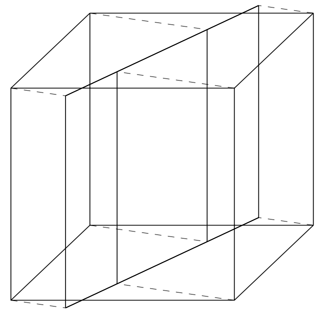
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & \sin\phi\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



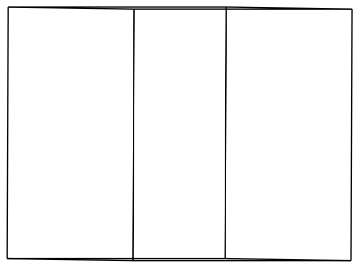
Le cube est projeté sur un de ses plans médians, orthogonalement à ce plan. La direction de projection est donc celle d'une arête du cube et l'image est un carré médian.



Le cube est projeté sur un plan passant par son centre, qui n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à une face. L'image ne présente aucun angle droit.

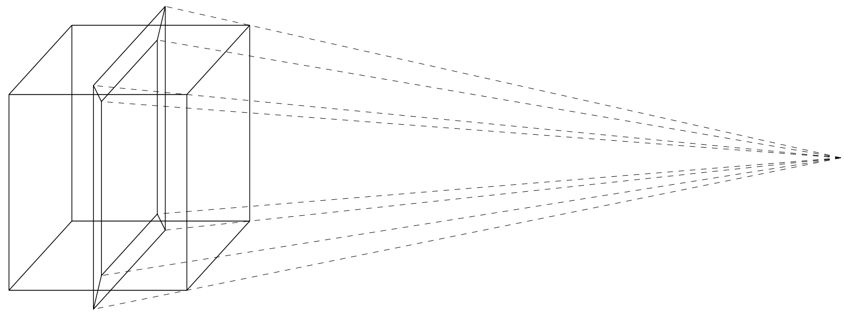


Le cube est projeté sur un plan perpendiculaire à une face. Ce plan est donc parallèle à quatre arêtes et certains angles droits sont conservés.

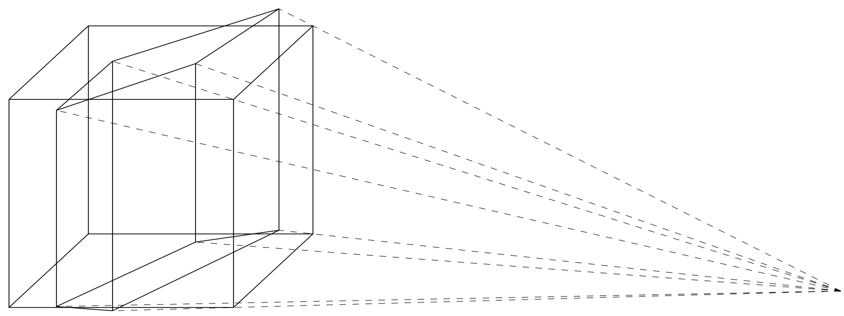


Projection affichée par le logiciel dans le cas de la figure ci-contre.

c. La perspective centrale est basée sur le même principe que la projection orthogonale à ceci près que l'observateur, au lieu d'être à l'infini, est à distance finie. La figure spatiale à représenter est donc projetée sur un plan, à partir d'un point fixe assimilé à l'oeil d'un observateur.

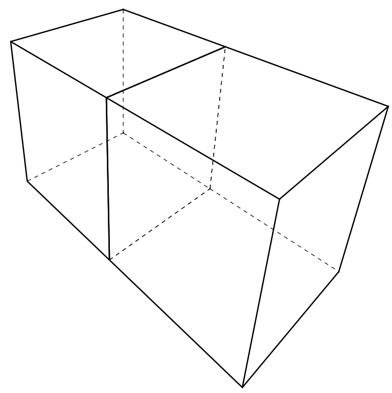


L'œil est à la hauteur du centre du cube, le plan de projection est parallèle une face.



L'oeil est dans le plan de base du cube dont aucune face n'est parallèle au plan sur lequel on projette.

Dans le logiciel `Reseau.exe`, le plan sur lequel on projette passe par l'origine et est perpendiculaire à la direction de l'œil de l'observateur. Cette direction est déterminée par les trois mêmes paramètres angulaires que dans le cas de la projection orthogonale. Un quatrième paramètre intervient : la distance de l'observateur à l'origine des axes. En modifiant cette distance, on peut réaliser des effets de perspective saisissants.



Deux cubes isométriques

2. Zoom Ce menu n'appelle guére de commentaires : en déplaçant un curseur au long d'un ascenseur, on modifie à volonté la taille de la figure. Le coefficient de proportionnalité varie de 0 à 2.
3. Les trois éléments suivants du menu sont relatifs au mode de dessin des arêtes cachées des cubes (et uniquement de ces arêtes). Trois possibilités sont proposées :

   Vu et caché | Transparent | Opaque

   Par défaut, le mode de fonctionnement est le mode « Vu et caché » Les arêtes vues sont dessinées en traits pleins, les arêtes cachées en pointillés. Les dessins se conforment strictement à ces conventions tant qu'ils ne comprennent ni polygones (autres que les faces des cubes) ni cubes imbriqués l'un dans l'autre.

   Le dessin est encore correct si les cubes dessinés forment ensemble un polyèdre convexe, et cela même si des polygones y figurent. Dans les autres cas, le programme mériterait d'être amélioré.

   Le mode « Transparent » ne pose aucun problème : toutes les arêtes sont représentées en traits pleins.

   Le mode « Opaque » ne présente de faiblesses qu'au cas où l'utilisateur a défini des cubes imbriqués l'un dans l'autre. Mais en mode opaque, on ne peut évidemment rien apercevoir des objets situés à l'intérieur des cubes !
4. Dernier élément de ce menu : Tr. lévogyre

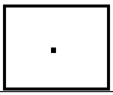
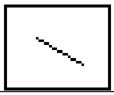
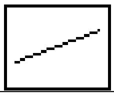
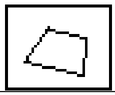
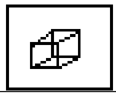
   Ce choix permet de modifier l'orientation du trièdre de référence. Au départ, ce trièdre est *dextrogyre*, et l'indication qui apparaît au menu est « Tr. lévogyre ». Si on effectue ce choix, l'indication sera remplacée par « Tr. dextrogyre ». Le menu indique donc toujours l'orientation opposée à celle qui est en cours.

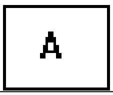
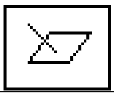
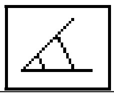
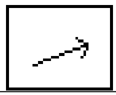
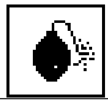
A.3.4 Le menu $\boxed{\text{Couleurs}}$

Ce menu ne pose guère de problèmes. Il permet à l'utilisateur de modifier à volonté les couleurs utilisées. Après avoir sélectionné $\boxed{\text{Couleurs}}$, l'écran affiche des rectangles des seize couleurs possibles. En cliquant sur une quelconque d'entre elles, on accède aux ascenseurs qui permettent de modifier les composantes rouge, verte et bleue de la couleur choisie.

A.4. Les icônes

Les icônes (y compris la bombe) sont au nombre de 10. Nous les répertorions dans le tableau suivant :

Point	Segment	Droite	Polygone	Cube
				

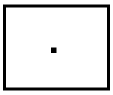
Lettre	Projecteur	Homothétie	Translation	Bombe
				

Ces neuf icônes se répartissent en trois groupes :

1. les icônes de création : Point, Segment, Droite, Polygone et Cube,
2. l'icône de dénomination : Lettre,
3. les icônes d'exécution : Projecteur, Homothétie, Translation, Bombe.

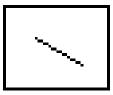
A.4.1 Les icônes de création

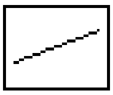
Comme le nom l'indique, ces icônes servent à créer des objets géométriques. De façon plus précise encore, l'icône « Point » sert à créer un point, ...Indiquons comment elles fonctionnent.

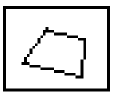
 En cliquant sur cette icône, vous faites apparaître deux messages successifs. Le premier vous demande de sélectionner deux points déjà existants. A noter qu'au lancement du programme, des points sont déjà définis (sans quoi nous serions en présence d'un cercle vicieux). Il s'agit des points de coordonnées entières, comprises entre -3 et 3. Seuls sont dessinés les huit sommets du cube originel.

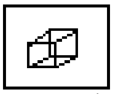
Après avoir choisi deux points, donc une droite, vous devrez indiquer une abscisse dans une boîte de dialogue. Il s'agit de l'abscisse du point sur la droite choisie (les points d'abscisses 0 et 1 étant respectivement le premier et le deuxième point que vous avez sélectionés). Par exemple, si vous choisissez l'abscisse $\frac{1}{2}$, vous aurez défini le milieu du segment. L'abscisse -1 correspond au symétrique du deuxième point par rapport au premier, etc.

De cette façon, vous pourrez définir des points avec toute la précision voulue, et par la même occasion, vous combinez travail de géométrie pure et travail plus algébrique.

 Cette icône vous permet de définir un segment simplement en désignant deux points.

 Ici aussi, il suffit de désigner deux points. Une droite se différencie graphiquement d'un segment par le fait qu'elle est dessinée d'un bord à l'autre de l'écran.

 Pour définir un polygone, vous devrez indiquer d'abord le nombre de sommets dans une boîte de dialogue. Ensuite, vous sélectionnerez ces sommets un à la fois.

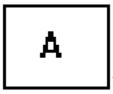
 permet de définir un cube en une seule étape. Pour bien comprendre son fonctionnement, il faut savoir que tout cube construit de cette manière étant de côté unité, sa position est déterminée par celle du sommet dont les coordonnées sont les plus petites, appelé ici le sommet initial. En sélectionnant le point $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme sommet initial, on détermine donc le cube dont les sept autres sommets sont

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ c+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b+1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ b \\ c+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ b+1 \\ c+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ b+1 \\ c \end{pmatrix}$$

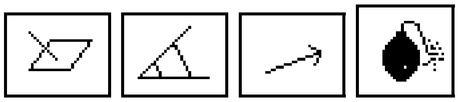
Dès que vous cliquez sur l'icône, le curseur de la souris se transforme en un cube. Déplacez ce cube de manière à l'amener à l'endroit souhaité. Chaque fois que le sommet initial occupe une position connue du logiciel, les coordonnées de cette position apparaissent à l'écran. En cliquant à ce moment du bouton gauche, le cube est créé et fixé à l'emplacement choisi.

A noter que si vous avez choisi le mode de représentation en perspective, le cube-curseur est de taille réduite. Il prendra sa taille normale lorsque vous sélectionnerez un sommet.

A.4.2 L'icône de dénomination

Cette icône est . Elle permet de marquer un point d'une lettre. Après que vous ayez cliqué sur l'icône, le programme vous demandera de sélectionner un point et d'introduire son nom (deux lettres maximum) dans une boîte de dialogue.

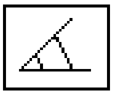
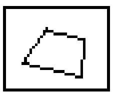
A.4.3 Les icônes d'exécution



Ces icônes vous permettent de construire l'image d'un objet par une transformation, ou de détruire un objet. Les quatre actions possibles sont :

1. appliquer à l'objet choisi le projecteur défini à l'aide du menu Projection,
2. appliquer à l'objet choisi l'homothétie définie à l'aide du menu Homothétie,
3. appliquer à l'objet choisi la translation définie à l'aide du menu Translation,
4. détruire l'objet choisi.

Elles fonctionnent de façon analogue. Supposons par exemple que vous vouliez construire l'image d'un polygone par une homothétie. Il faut que le polygone et l'homothétie aient été définis au préalable. Si c'est le cas :

1. Cliquez sur l'icône 
2. Un message apparaît vous demandant à quel type d'objet vous voulez appliquer l'homothétie définie en dernier lieu. (Si aucune homothétie n'a été définie, rien ne se passe.)
3. Cliquez sur l'icône 
4. Un nouveau message vous demande de choisir le polygone, ce que vous ferez à l'aide de la souris. Chaque fois que celle-ci pointera avec précision sur le premier point ayant servi à définir un polygone, celui-ci clignotera. C'est à ce moment que vous pouvez le sélectionner, simplement en pressant le bouton gauche de la souris. L'homothétie lui est alors appliquée.

Insistons sur le fait que dans la dernière étape, c'est nécessairement sur le premier point ayant servi à définir le polygone que vous devez pointer la souris pour que le polygone soit sélectionnable. Si vous avez oublié quel est ce premier sommet, il vous reste à les essayer tous, les uns après les autres. Plus gênante serait la situation si vous aviez défini plusieurs polygones ayant le même premier sommet. Dans ce cas, seul le premier introduit de ces polygones serait accessible à une quelconque transformation. Il ne devrait pas être trop difficile d'éviter une telle situation.

Nous avons ainsi effectué une rapide présentation technique du logiciel. A vous de jouer !

Annexe B

Les sections de cube

B.1. Introduction

Construire la section d'un cube par un plan déterminé par trois points situés sur les faces du cube est une des activités rencontrées normalement dans un cours de géométrie de l'espace. Elle permet d'illustrer et d'utiliser les propriétés d'incidence et de parallélisme. Elle nécessite un enchaînement rigoureux de ces propriétés ainsi qu'une bonne vision spatiale. A travers cette activité, ce sont à la fois des compétences d'analyse et de synthèse qui sont mises en jeu.

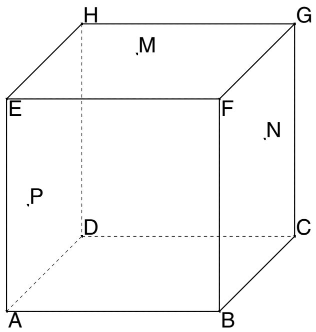
Notre propos dans cette annexe est de montrer comment la construction d'une section d'un cube peut être réalisée à l'aide du logiciel `reseau.exe`. Nous indiquerons trois méthodes différentes. La première est générale et très proche de la méthode traditionnelle. La deuxième utilise de façon plus systématique les propriétés d'un réseau cubique. Elle s'applique essentiellement lorsque parmi les trois points définissant le plan de section, certains sont dans une même face. La troisième méthode fait intervenir de façon explicite et intensive le calcul vectoriel.

Selon la position des points sur les faces du cube, la section est plus ou moins facile à construire. Nous ne chercherons pas à traiter tous les cas possibles, laissant à l'utilisateur le plaisir de la découverte.

Nous considérerons donc un cube $ABCDEFGH$ et trois points M, N et P.

B.2. La méthode synthétique

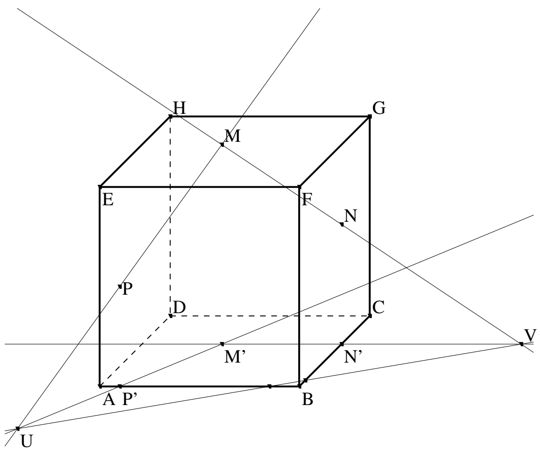
Si les points M, N, P occupent des positions particulières, sur les arêtes par exemple, il est souvent possible de déterminer la section par une méthode plus simple que celle qui va être décrite. Plaçons-nous dans le cas général où les points M, N et P sont situés dans des faces différentes et non sur des arêtes. Par exemple, $M \in EFGH$, $N \in BCGF$ et $P \in ABFE$.



La méthode consiste à déterminer l'intersection du plan MNP et du plan de l'une des faces. On choisit souvent la face $ABCD$.
Pour trouver les points de percée des droites MN et MP dans le plan de la face $ABCD$, on détermine d'abord les projections orthogonales. M', N' et P' de M, N et P sur $ABCD$.

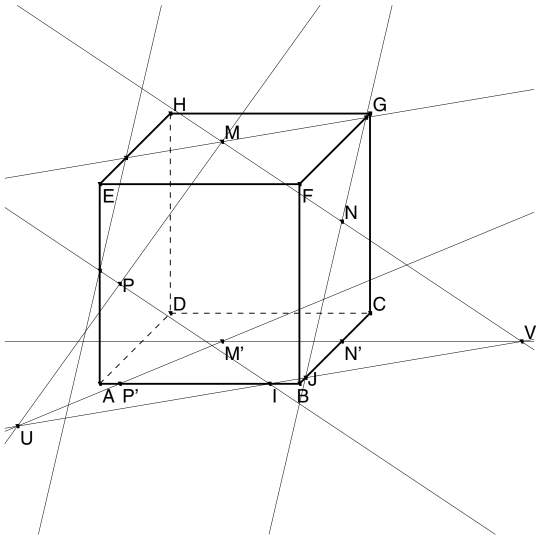
Le logiciel permet de construire M', N' et P' en définissant le projecteur $\text{proj}_{ABC}^{//EA}$ et en l'appliquant aux points M, N, P. On peut aussi définir successivement les trois translations de vecteurs $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{EP}$, les appliquer au segment EA, construisant ainsi des segments MM', NN'' et PP''. Le point N' est alors l'intersection de NN'' et BC, cependant que P' est l'intersection de PP'' et AB.

L'intersection des plans MNP et $ABCD$ est la droite UV, où $\{U\} = MP \cap M'P'$ et $\{V\} = MN \cap M'N'$.



Tous les points définis en tant qu'intersection de deux droites ou de deux segments ont été construits automatiquement par le logiciel, mais non renforcés à l'écran. Ils sont néanmoins disponibles pour définir de nouvelles droites ou segments. Si on veut les renforcer, il suffit de positionner le pointeur de la souris sur le point visé et de cliquer (une fois) du bouton droit.

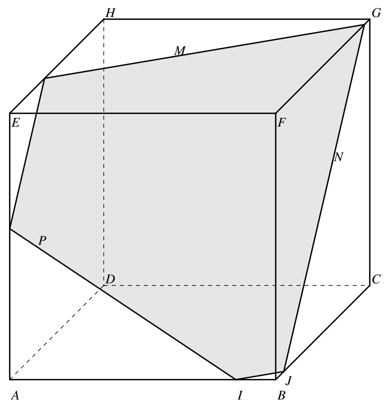
Après que la droite UV ait été déterminée, la section se construit de proche en proche. Dans le cas de la figure, UV coupe les arêtes AB et BC en I et J. On peut par conséquent dessiner les droites IP, intersection du plan MNP avec la face $ABFE$, et JN, intersection de MNP avec $BCGF$.



Comme JN coupe l'arête $[FG]$, on a un deuxième point de l'intersection de MNP avec $EFGH$, ce qui permet de terminer la section.

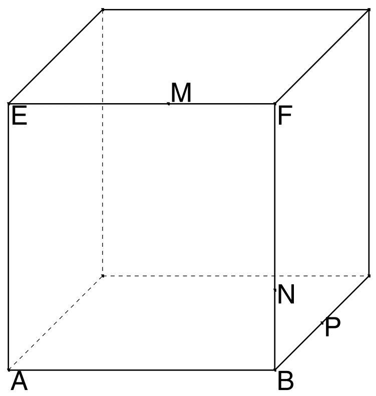
Dans certains cas, il serait nécessaire de tracer une droite parallèle à une droite déjà tracée. Il suffirait pour ce faire, de définir une translation appliquant la seconde droite sur la première, et d'exécuter cette translation.

Il reste enfin à redessiner la section en tant que polygone et effacer les éléments devenus inutiles.

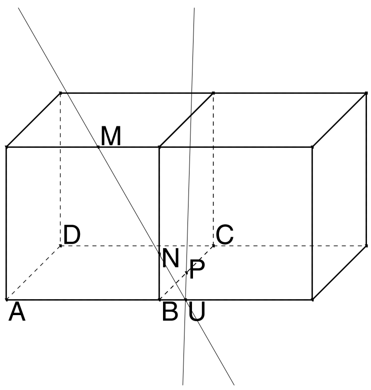


B.3. Une méthode basée sur le réseau cubique

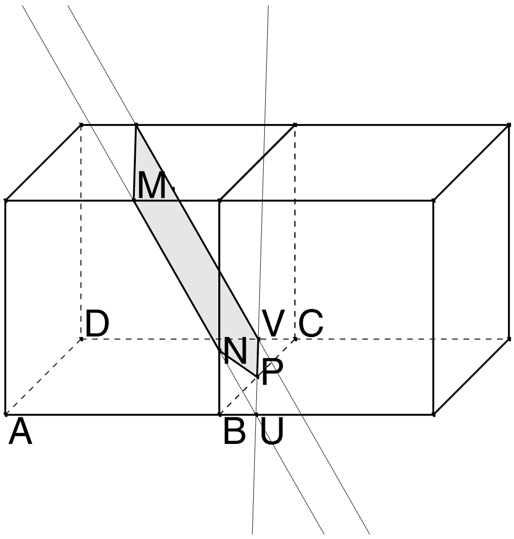
Cette méthode est moins générale car elle suppose que les points M, N et P sont situés sur des arêtes, ou tout au moins que certains des segments $[MN]$, $[NP]$ et $[MP]$ sont sur les faces du cube.

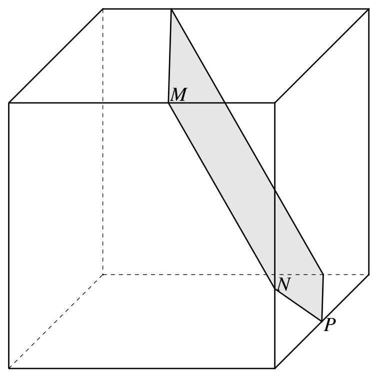


Par exemple, si le segment $[MN]$ est situé sur la face $ABFE$, il est possible de trouver l'intersection de la droite MN avec les côtés de cette face, simplement en prolongeant éventuellement ces côtés. Et de tels prolongements sont facilement réalisés en construisant un (ou des) cube(s) adjacent(s) au premier, ce qui fournit de plus un support visuel appréciable.



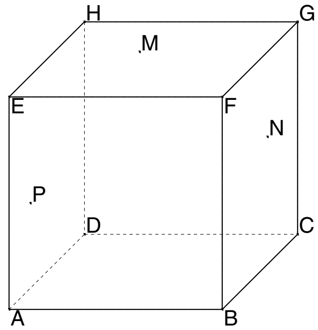
Les droites MN et AB se coupent en le point U. La droite UP est alors l'intersection des plans MNP et $ABCD$. Elle coupe le côté CD en V. Il reste à tracer (par translation) la parallèle à MN passant par V, et à terminer le dessin.


M
D
V
C
N
P
A
B
U


M
N
P

B.4. Une méthode vectorielle

La méthode utilisée par le logiciel `reseau.exe` pour définir un point a pour conséquence que, à tout moment, les coordonnées de tout point sont accessibles à l'utilisateur, et que ces coordonnées sont généralement assez simples.



Nous reprendrons ci-dessous la situation du premier paragraphe. Il est alors possible de déterminer directement par exemple le point de percée V de la droite MN dans le plan $ABCD$ sans aucune construction, mais à l'aide d'un calcul préalable. Il nous suffit de trouver l'abscisse de V sur la droite MN par rapport au repère (M, N).

Autrement dit, nous devons trouver le rapport $\frac{\overrightarrow{MV}}{\overrightarrow{MN}}$. Or, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\overrightarrow{MV}}{\overrightarrow{NV}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\overrightarrow{NN'}}$$

La hauteur de M étant 1, nous n'avons besoin que de la hauteur de N. Notons la z_n. Nous obtenons ainsi

$$\overrightarrow{MV} = \frac{1}{z_n}\overrightarrow{NV} = \frac{1}{z_n}(\overrightarrow{MV} - \overrightarrow{MN})$$

On en déduit finalement

$$\overrightarrow{MV} = \frac{1}{1 - z_n}\overrightarrow{MN}$$

Le point V s'obtient donc directement à l'aide de la routine de définition d'un point, sans devoir construire M' ni N', et *a fortiori* sans devoir tracer les droites MN et $M'N'$.

Le résultat ci-dessus aurait aussi pu être obtenu directement en utilisant l'équation vectorielle de la droite MN : si nous appelons ℓ l'abscisse de V par rapport au repère (M, N), nous avons

$$V = M + \ell(N - M)$$

Par conséquent

$$0 = 1 + \ell(z_n - 1)$$

Cette technique permet de déterminer sans difficultés les différents points d'intersection qui interviennent dans la méthode synthétique.

Nous pouvons aussi exploiter jusqu'au bout l'idée vectorielle et chercher directement le point de percée de la droite CG dans le plan MNP. Nous sommes ainsi amenés à utiliser les techniques développées dans le thème B, en écrivant l'équation vectorielle

$$C + h(G - C) = M + \ell(N - M) + m(P - M)$$

ou

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} x_n - x_m \\ 1 - y_m \\ z_n - 1 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 1 - x_m \\ y_p - y_m \\ z_p - 1 \end{pmatrix}$$

D'où le système

$$\begin{aligned} 0 &= x_m + k(x_n - x_m) + \ell(1 - x_m) \\ 1 &= y_m + k(1 - y_m) + \ell(y_p - y_m) \\ h &= 1 + k(z_n - 1) + \ell(z_p - 1) \end{aligned}$$

Les deux premières équations fournissent les valeurs de k et ℓ. En remplaçant dans la troisième équation, on obtient l'abscisse h du point de percée de CG dans le plan de la section. Si h est compris entre 0 et 1, le point appartient à l'arête CG, en le joignant à N, on trouve l'un des côtés de la section. Sinon on cherche de la même manière le point de percée d'une autre arête de la face $CDHG$ dans le plan MNP. On procède de la même façon avec les autres faces.

B.5. Une conclusion ?

Les deux premières méthodes qui viennent d'être décrites ont l'avantage d'être plus visuelles, plus géométriques. La seconde n'est pas tout à fait générale, mais est suffisante pour les cas traités le plus souvent dans les classes. Ces deux méthodes ont les inconvénients qui correspondent à leurs avantages : elles ne sont guère généralisables à des polyèdres plus compliqués qu'un cube ou un tétraèdre. Elles sont par là-même moins puissantes que la méthode vectorielle. C'est toute la différence entre géométrie synthétique et géométrie analytique.

Conformément à la philosophie développée dans l'introduction de ce fascicule, nous préconisons de munir les élèves de plusieurs méthodes différentes d'attaque d'un problème, de manière à ce qu'ils puissent choisir celle qui convient le mieux à la situation particulière qu'ils ont à traiter. C'est dans cet esprit que nous pensons que les trois méthodes décrites ci-dessus pourraient être rencontrées à travers le logiciel `reseau.exe`*.*

Annexe C

Bibliographie commentée

Avertissement

Les références précises des ouvrages mentionnés dans cette annexe se trouvent dans la bibliographie située à la fin du fascicule.

C.1. A.Kostrikin : Introduction à l'algèbre

Dans cet ouvrage très généraliste, trois chapitres nous intéressent plus particulièrement.

Le premier d'entre eux, *la génèse de l'algèbre*, nous parle de transformations de systèmes d'équations linéaires en systèmes équivalents avant de parler des déterminants (sur lesquels on peut faire les mêmes transformations).

Puis, toujours sur de tels systèmes, Kostrikin introduit la méthode de réduction à la forme « en échelon » (ou « quasi-triangulaire »).

Sous cette forme, un système sera dit *compatible* dès qu'il ne contient pas d'équation de la forme $b_t \; = 0$ (avec un b_t par ailleurs non-nul).

On explique en fait la méthode d'élimination des inconnues de Gauss, que l'on reprend par après de façon plus formelle en passant par des déterminants d'ordre peu élevés.

Le déterminant 2×2 est introduit sans réelle motivation. Cependant, Kostrikin présente de manière simple la méthode de Cramer pour le cas 2×2, puis la généralise au cas 3×3.

La façon d'introduire le déterminant 3×3 est pratique, mais il n'y a pas de vraie justification des valeurs données aux déterminants C_1, C_2 et C_3 de la méthode de Cramer :

On sait que $\frac{-C_1}{C_3} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{32} & a_{22} \\ a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}$ et $\frac{-C_2}{C_3} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{21} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}$ de là, on pose

$$\begin{cases} C_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\ C_2 = -\begin{vmatrix} a_{32} & a_{22} \\ a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} \\ C_3 = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \end{cases}$$

où le coefficient a_{ij} est au croisement de la i^e ligne et de la j^e colonne de la matrice considérée.

Mais on ne parle pas du développement selon une ligne ou une colonne !

Le deuxième chapitre traite des espaces vectoriels.

Pour commencer, Kostrikin y introduit les combinaisons linéaires, sans motivation particulière. Puis, la dépendance et l'indépendance linéaires sont présentées avant d'en arriver à la notion de dimension et de base.

On ne parle pas de partie génératrice. En lieu et place, on dit que « l'enveloppe linéaire » (ce qui est engendré par la partie considérée) coïncide avec l'espace vectoriel.

Le lien est ensuite fait entre le rang d'une matrice et les inconnues principales dans un système d'équations linéaires.

Remarquons que ce n'est que bien longtemps après avoir vu les matrices que l'on définit les applications linéaires. (Cette façon de faire n'est peut-être pas la plus appropriée quant à la sinification des notions.)

Cependant, le produit matriciel est vu parallèlement à la composition de deux applications linéaires, de même pour les matrices inverses. Kostrikin en profite pour montrer la non-commutativité du produit matriciel.

Ce chapitre se termine par l'étude de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène (dimension de $ker\phi$, etc...).

La définition du déterminant est raffinée peu à peu dans le troisième chapitre. On utilise la récurrence pour construire les déterminants $n \times n$, la définition finale étant celle donnée par les trois propriétés suivantes :

- $\det A$ est une fonction multilinéaire des lignes de la matrice A,
- $\det A$ est une fonction symétrique gauche des lignes de la matrice A (ce qui signifie que $\det(A_1, ..., A_i, A_{i+1}, ..., A_n) = -\det(A_1, ..., A_{i+1}, A_i, ..., A_n)$),
- le déterminant de la matrice identité vaut 1.

On y développe le déterminant par rapport à la première colonne, puis on montre que le résultat est semblable avec n'importe quelle ligne ou colonne.

Puis, on étudie les variations du déterminant d'une matrice A lorsqu'on modifie les colonnes et les lignes de A.

Enfin, Kostrikin donne des applications des déterminants (critère de régularité d'une matrice, forme générale de l'inverse d'une matrice, méthode de Cramer, rang d'une matrice...).

C.2. N.Kuiper : Linear Algebra and Geometry

Dans cet ouvrage, le but de Nicolaas Kuiper est de mener le lecteur à la géométrie projective et aux plans non-euclidiens dans le cadre de l'algèbre et de la géométrie.

Il part de la notion de vecteur, puis de rapports sur les figures géométriques avant de définir les combinaisons et applications linéaires (les matrices n'intervenant que bien après). Kuiper donne d'intéressants exercices de rapport de section concernant des figures à deux et à trois dimensions (point d'intersection des médianes d'un triangle, application d'un corollaire du théorème de Ceva, etc...).

Le théorème de Desargues est présenté avec trois preuves différentes (dans des cas différents aussi) faisant intervenir la géométrie avec plus ou moins d'importance, et ce à la suite des théorèmes de Menelaus et de Ceva.

Le birapport de quatre points à pour expression :

$$(abcd) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$$

Kuiper utilise ce rapport avec des fonctions linéaires, et en conclusion en dégage le théorème de Pappus.

Regardons à présent les entiers modulo 5 : $0, 1, 2, 3$ et 4. Sur ces nombres, on peut construire un plan affine fini ayant 25 éléments, chaque point de ce plan étant donné par un couple de coordonnées (ϵ, η).

Dans ce plan, une droite ne peut être obtenue que par les fonctions qui envoient un point sur ϵ ou sur $\eta + k.\epsilon$ (où k est un entier de 0 à 4).

Il n'existe donc que six fonctions de ce type.

Une droite sera par exemple $\eta + \epsilon = 3$, composée des points $(4, 4)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(3, 1)$.

Il introduit plus loin les matrices comme étant des représentations des morphismes d'espaces vectoriels. Les propriétés des matrices (y compris leur multiplication) sont présentées comme des conséquences des propriétés respectives des morphismes.

On parle des quaternions comme un ensemble particulier de matrices de type :

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & \delta \\ \beta & \alpha & -\delta & -\gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ -\delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

où les lettres grecques représentent des réels.

Soient e, i, j et k des matrices 4×4 (e est l'unité) telles que $q = \alpha.e + \beta.i + \gamma.j + \delta.k$, alors on retrouve ce que l'on connait des quaternions.

Une définition équivalente est de parler de l'ensemble des matrices :

$$\begin{pmatrix} A & -C \\ \bar{C} & \bar{A} \end{pmatrix}$$

Où $A = \alpha.u + \beta.i$ et $C = \gamma.u + \delta.i$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ce n'est qu'après avoir vu les matrices d'un peu plus près que Kuiper les applique à la résolution de systèmes d'équations linéaires. Et il discute des cas où des systèmes ont une solution avant d'introduire les déterminants en tant que rapports de fonctions n-linéaires antisymétriques.

Le problème est que ces fonctions antisymétriques sont présentées de façon générale, et on ne voit le lien avec les morphismes et les matrices que bien longtemps après. Il faudrait plutôt motiver cette matière par l'intérêt de trouver une fonction *déterminant*.

Kuiper utilise ensuite les déterminants sur des problèmes de volumes, notamment de simplexes, et termine leurs applications par la méthode de Cramer.

Puis, on passe au produit scalaire de deux vecteurs après avoir vu la théorie des fonctions quadratiques. Mais on en avait déjà parlé auparavant, le but étant ici de généraliser en sens et en dimension.

Pour finir, Kuiper applique l'algèbre linéaire au monde des statistiques (coefficients de corrélation), parle des vecteurs et valeurs propres d'endomorphismes, et va jusqu'aux formes de Jordan.

Il consacre un chapitre à l'étude des groupes d'isométries et termine avec la représentation en géométrie projective des ellipses, des paraboles et des hyperboles.

C.3. T.Banchoff, J.Wermer : Linear Algebra through Geometry

Comme son titre l'indique, cet ouvrage entraine le lecteur dans le monde de l'algèbre linéaire grâce à de forts soutiens de géométrie, d'abord à une, puis deux et surtout trois dimensions, le but étant d'en arriver à de la géométrie vectorielle à n dimensions.

Au fil de l'ouvrage, la matière progresse par des exercices et des questions posées aux élèves.

Toute une théorie s'établit tout d'abord à deux dimensions, et est décalquée par après à trois dimensions.

Dès le départ, les auteurs introduisent une notion de base dans un repère, mais en la *parachutant* de manière peu convaincante.

Puis, ils donnent le produit scalaire usuel, sans définir *un* produit scalaire par ses propriétés (mais au niveau du secondaire, il est peu utile d'en connaître d'autres). Cependant, une interprétation géométrique de ce produit scalaire par les coordonnées polaires est développée plus loin.

On définit des distances en partant de la géométrie mais en se basant sur l'algèbre linéaire, et en suivant une utilisation très logique des vecteurs qui mène, juste après, à la résolution de systèmes de deux équations linéaires homogènes à deux inconnues.

Les coordonnées polaires servent à nouveau, cette fois pour introduire une idée sous-jacente de matrice dans les rotations.

Remarquons que cette idée n'est vraiment exploitée que quelques pages plus loin, où l'on reprend des exemples de transformations du plan vus précédemment (projection, symétrie, rotation, homothétie) pour en tirer côte à côte les définitions des applications linéaires et des matrices.

Signalons que les applications linéaires ne sont pas définies par les deux propriétés classiques, mais sont données comme étant des transformations du plans pouvant s'écrire sous la forme d'un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x' = a.x + b.y \\ y' = c.x + d.y \end{cases}$$

Les matrices sont vues d'emblée comme des *symboles* pour représenter des applications linéaires. L'application ci-dessus sera donc représentée par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Remarquons que de ce fait, le produit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

coule de source, et c'est un premier pas vers le produit matriciel généralisé. Des matrices, on tire aisément les deux propriétés habituelles des applications linéaires (toujours ici à deux dimensions).

L'idée de déterminant 2×2 est introduite par la proposition suivante :

Soit A une application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le seul vecteur X tel que $A(X) = \binom{0}{0}$ est $X = \binom{0}{0}$ si et seulement si $a.d - b.c \neq 0$.

Mais ce n'est qu'après avoir résolu des systèmes d'équations linéaires et des matrices inverses que l'on parlera vraiment de déterminants. Malheureusement, leur définition reste $a.d - b.c$. Cependant, les auteurs restent dans la géométrie, puisqu'ils lient ces déterminants 2×2 à la notion de deux vecteurs orientés positivement ou négativement.

On peut alors faire le lien entre un déterminant et l'aire d'un parallélogramme.

Les isométries sont définies comme des transformations du plan qui préservent la longueur, et elles sont vues à la suite d'exercices sur des transformations qui préservent l'orientation.

On explique alors la diagonalisation d'une matrice 2×2 afin de parler de vecteurs et valeurs propres, et d'aboutir aux coniques (en passant par les quadriques).

C'est là que s'arrête la partie concernant la géométrie à deux dimensions. Les auteurs vont ensuite reprendre les mêmes notions dans le même ordre, mais en passant à trois dimensions.

Les déterminants 3×3 sont vus en conséquence du produit vectoriel. Le déterminant de la matrice :

$$i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

est le nombre $A.(B \times C)$. On voit l'interprétation géométrique du déterminant 3×3, ce dernier étant le volume d'un prisme construit sur les vecteurs lignes de la matrice considérée.

Banchoff et Wermer parlent alors de matrices symétriques avant d'entreprendre une classification des quadriques.

Ils peuvent alors, munis de tout ce matériel, envisager le passage à plus de 3 dimensions en développant la notion d'espace vectoriel.

C.4. F.Pham et H.Dillinger : Algèbre linéaire

L'originalité de cet ouvrage tient dans sa façon d'interpeler le lecteur en attirant son attention sur divers points importants de différents types par une iconographie appropriée située dans la marge.

Les notions fondamentales, les passages demandant de la réflexion, les exercices permettant de progresser, les notes historiques et d'autres choses encore sont ainsi repérés par de petits dessins facilement reconnaissables, ce qui apporte une aide non négligeable au lecteur afin de s'y retrouver dans la structure de l'ouvrage.

En outre, des exercices bien situés jouent le rôle de tests de niveau pour que le lecteur consciencieux puisse juger de sa progression.

Cette volonté de prendre l'étudiant par la main pour le mener plus loin s'incarne également dans le ton pris par moments par les auteurs dans leur rédaction, n'hésitant pas à manier un certain humour afin de mieux s'ancrer dans la mémoire.

Les auteurs partent de l'étude des systèmes linéaires. Ils y introduisent d'emblée l'écriture matricielle des systèmes d'équations. Cette écriture est ici justifiée par un côté "pratique". Mais on peut déjà parler de *rang* et de formes linéaires.

Puis, Pham et Dillinger introduisent les espaces vectoriels pour remplacer les mesures de proportions que l'on pourrait faire sur une feuille de papier par des calculs exacts. Toute la panoplie classique de définitions et de propositions est ici mise en branle. On y parle également de géométrie affine. Remarquons que les fonctions linéaires et affines sont définies en parallèle, ce qui aide à la compréhension de la nuance entre ces concepts.

La notion de dualité arrive alors, et les résultats qui en découlent sont ensuite traités dans une version affine. Les auteurs parlent par après du calcul matriciel, en expliquant le "comment", mais en laissant le "pourquoi" au lecteur, en prenant soin de revenir à un cadre géométrique.

Le chapitre suivant nous parle des endomorphismes d'espace vectoriel, depuis un double point de vue géomtrique et matriciel.

L'ouvrage se termine par des annexes abordant les polynômes, la théorie des ensembles, et les structures algébriques.

C.5. Paul R.Halmos : Finite-dimensional vector spaces

Le but de cet ouvrage est de parler des transformations linéaires sur des espaces vectoriels de dimensions finies en utilisant des méthodes générales. Notamment, Halmos ne donnera jamais les coordonnées d'un vecteur.

Le premier chapitre introduit d'emblée la notion d'espace vectoriel, et de ses éléments les vecteurs. Trois exemples représentatifs sont donnés : l'ensemble des complexes, l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, et l'ensembles des n-uples de complexes (jugé plus intéressant par l'auteur).

La relation de dépendance linéaire vient alors, suivie très logiquement par les concepts de base, de dimension et de sous-espace. Avant de parler des espaces duaux, Halmos propose de représenter l'image d'un vecteur par une fonction linéaire par la notation $[x, f]$ au lieu de $f(x)$. La propriété définissant une fonction linéaire s'écrit alors :

$$[a.x_1 + b.x_2, y] = a.[x_1, f] + b.[x_2, f]$$

L'auteur présente ensuite des façons de construire de nouveaux espaces vectoriels à partir de ceux que l'on connait par les sommes directes, les espaces quotients et le produit tensoriel. Puis, il parle de permutations, de cycles, et de formes multilinéaires et alternées.

Le deuxième chapitre aborde les transformations linéaires, présentées comme étant des vecteurs elles aussi. Puis viennent leurs produits, polynômes et inverses, avant d'introduire la notation matricielle.

Halmos donne d'abord une définition générale des matrices et puis seulement montre petit à petit l'utilité considérable qu'elles ont dans la représentation des transformations linéaires.

Le chapitre se poursuit avec le cortège classique des notions qui accompagnent le sujet, jusqu'aux déterminants et à la forme de Jordan.

L'auteur entame alors le chapitre de l'orthogonalité, dans lequel il est bien obligé de donner les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dans un exemple illustrant la notation suivante :

$$\text{Si } X = (x_1, x_2)$$
$$\text{alors on note la distance de X à l'origine } \|X\| = \sqrt{({x_1}^2 + {x_2}^2)}.$$

De là, le produit scalaire est défini, tout d'abord dans $\mathbb{R}^2$, puis dans les complexes, et enfin en général. Halmos peut ainsi parler d'orthogonalité qu'il développe jusqu'au théorème spectral.

Le livre se termine sur un court chapitre traitant d'analyse dans lequel l'auteur tente d'intéresser le lecteur à des problèmes de convergence dans des espaces vectoriels munis de produits scalaires.

En prenant dans un espace vectoriel quelconque (muni d'un produit scalaire) un vecteur x et une suite de vecteurs (x_n) Halmos définit la convergence de deux façons :

- $\|x_n - x\| \to 0$ quand $n \to \infty$
- $(x_n - x, y) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout y fixé dans l'espace vectoriel considéré.

La notation (x, y) désigne le produit scalaire de l'espace considéré. Cette notation peut, avec prudence pour les complexes conjugués, prendre la place de la notation $[x, f]$ (car a toute fonction linéaire f sur l'espace considéré correspond un unique vecteur y tel que $(x, y) = [x, f]$ pour tout x).

Dans ce dernier chapitre, l'auteur aborde pour finir le théorème ergodique et les séries de puissances.

Remarquons que Paul R.Halmos propose au lecteur, à l'instar de ce que Serge Lang fit par après, des exercices à la fin de chaque partie représentative de l'ouvrage.

Annexe D

Le concept de vecteur

D.1. Introduction

Le concept de vecteur pose un grand problème dans l'enseignement des mathématiques. Bien souvent rencontré au départ par les élèves en tant qu'objet de la physique caractérisé par une direction, un sens, une grandeur et un point d'application, il est délicat de faire évoluer cet archange indomptable vers la notion d'élément d'un espace vectoriel quelconque.

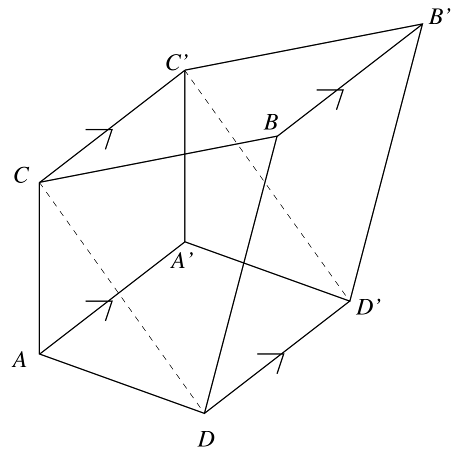
L'ouvrage de M.J.Crowe, [17], montre par ailleurs à quel point ces idées ont évolué avant d'aboutir aux concepts actuels.

Dans les pages qui suivent, nous allons présenter le concept de vecteur tel que l'entendent divers auteurs rencontrés dans la bibliographie de l'algèbre linéaire. Ces diverses visions sont classées chronologiquement. Les références des ouvrages d'où elles sont tirées se trouvent dans la bibliographie.

D.2. Quelques présentations du concept de vecteur

D.2.1 H.S.M.Coxeter 1961

La transition d'un groupe multiplicatif à un groupe additif correspondant est la base de la théorie des logarithmes.
En dehors du domaine de l'arithmétique, le choix entre multiplication et addition est souvent une simple question de notation.
En particulier, le groupe *multiplicatif* abélien des translations devient le groupe *additif* des vecteurs.



Remarque : deux points quelconques A et A' déterminent une unique translation $A \longrightarrow A'$ (si $A = A'$, on a alors l'identité).

Si $AA'B'B$ est un parallélogramme, ou si pour tout parallélogramme $AA'C'C$ basé sur AA', il y a un autre parallélogramme $C'CBB'$, la translation $B \longrightarrow B'$ est la même que la translation $A \longrightarrow A'$.

Une translation est spécifiée par l'effet qu'elle a sur un point donné.

Dans le dessin ci-dessus, on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. De plus, on sait que le produit (composition) des translations $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow C$ est la translation $A \longrightarrow C$.

Ceci nous assure que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

De plus, on sait que la composition des translations est commutative, donc pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ on a $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.

D.2.2 N.Kuiper 1962

L'auteur considère le plan « ordinaire » dans lequel on fixe une origine. Puis, il considère toutes les flèches issues de cette origine dans le plan.

Une flèche est caractérisée par ses extrémités (c'est donc un couple ordonné de points). On appelle *vecteur* une flèche ayant l'origine comme point initial.

Il y a une bijection entre les vecteurs et les points du plan. Les flèches parallèles à celles qui partent de l'origine représentent aussi des vecteurs.

Kuiper introduit alors la somme et la multiplication scalaire comme des conventions à respecter.

D.2.3 J.Dieudonné 1964

Le vecteur est introduit comme étant un élément d'un espace vectoriel (donné comme étant un ensemble vérifiant huit axiomes bien connus). Cette façon de voir les choses est assez classique, mais n'aide pas toujours l'étudiant. Citons la Commission Romande de Mathématique qui dans son *Fundamentum d'Algèbre Linéaire* prône également cette définition du concept de vecteur. Paul R.Halmos donne lui aussi une définition semblable.

D.2.4 R.M.Hochtrasser 1965

Le but de Hochtrasser n'est pas d'introduire la notion de vecteur, mais de faire des rappels et développements de parties de l'algèbre des matrices.

Considérons une rotation dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x' = x.\cos\theta + y.\sin\theta + 0.z \\ y' = -x.\sin\theta + y.\cos\theta + 0.z \\ z' = 0.x + 0.y + z \end{cases}$$

Sa matrice est :

$$R(\theta, OZ) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système devient $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R(\theta,\ OZ)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Les matrices colonnes de cette dernière équation sont appelées *vecteurs*.

$R(\theta, OZ)$ est donc un opérateur capable de faire tourner un vecteur d'un angle θ autour de l'axe OZ.

D.2.5 G.Papy 1968

Papy introduit tout d'abord la notion de couples équipollents dans le plan (deux couples sont équipollents lorsqu'ils sont reliés par un parallélogramme ou deux).

Propriétés de l'équipollence : réflexivité, symétrie et transitivité (cette dernière en axiome).

L'équipollence est donc une relation d'équivalence.

Puis, l'auteur introduit les translations comme étant des classes de couples équipollents (exemple : la translation $\overrightarrow{ab}$ est l'ensemble des couples équipollents à (a, b)).

Grâce à la loi de composition, les translations forment un groupe multiplicatif. Si on prend le signe « + » pour loi, alors on appelle *vecteurs* les translations.

Papy propose même un dictionnaire des synonymes pour passer de l'un à l'autre.

D.2.6 K.Borsuk 1969

Borsuk considère les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ qu'il appelle *espaces cartésiens* et qu'il note C_n avec $n = 1, 2, 3$. Dans ces espaces, il prend une paire de points p et q, et il appelle leur paire *ordonnée* $\overrightarrow{pq}$ un vecteur d'origine p et de fin q. Les coordonnéss de ce vecteur sont celles de q auxquelles ont soustrait celles de p.

Borsuk dit que deux vecteurs $\overrightarrow{pq}$ et $\overrightarrow{rs}$ sont égaux si le centre de la paire ps est le même que celui de la paire qr, ce à quoi il attribue le caractère géométrique de la relation d'égalité vectorielle. Soumis à une isométrie f de C_n, deux vecteurs $\overrightarrow{pq}$ et $\overrightarrow{rs}$ égaux restent des vecteurs égaux $\overrightarrow{f(p)f(q)}$ et $\overrightarrow{f(r)f(s)}$.

Cette condition d'égalité revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont égales. Cette relation d'équivalence permet de former des classes de vecteurs, que Borsuk nomme *vecteurs libres* ou encore *vecteurs*.

Il appelle *verseur* un vecteur de norme 1 et *zero* le vecteur nul.

D.2.7 S.Lang 1971

Serge Lang est devenu à l'usage une référence classique.

Le premier chapitre de son « Algèbre linéaire » est consacré aux vecteurs. Il commence par situer le lecteur dans un espace de dimension n, mais revient bien vite à la dimension 2 pour plus de facilité. C'est dans ce cadre qu'il donne une première définition du vecteur *lié* comme étant un couple de points, représenté par une flèche entre les deux points.

Deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ seront *équivalents* si $B - A = D - C$ (il s'agit ici d'addition de coordonnées de points).

Cette équation représente un système ayant autant d'équations qu'il y a de dimensions, en l'occurrence deux.

On appellera *vecteur* un vecteur lié à l'origine du repère choisi (tout vecteur lié est équivalent à un vecteur).

Un n-uple de nombres représentera donc dans un espace à n dimensions soit un point, soit un vecteur selon le contexte.

Puis, Serge Lang donne une définition axiomatique des espaces vectoriels et dit en général que les éléments de tels espaces sont également appelés *vecteurs*.

D.2.8 T.J.Fletcher 1972

L'auteur introduit dès le départ à l'aide d'exemples une notion générale de ce qu'il appelle un « *vectoriel* » (par exemple : les progressions arithmétiques).

Puis, Fletcher donne deux lois de composition : l'addition terme à terme et la multiplication par un scalaire.

Il dit qu'un ensemble fermé pour ces deux lois est appelé un vectoriel, et que les éléments d'une telle structure sont appelés des *vecteurs*.

Grâce à ces deux lois, l'idée de combinaison linéaire (et de base) est dégagée.

D.2.9 T.Banchoff et J.Wermer 1992

Les auteurs commencent par définir la notion de vecteur sur une droite comme étant un *segment orienté* allant d'une origine fixée jusqu'à un point de la droite (donné par sa coordonnée).

Ce sont donc des vecteurs liés. On introduit alors leurs somme et produit scalaire, puis on passe au plan.

Dans le plan, un vecteur est un couple de nombres $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ écrit en colonne, où x et y sont les coordonnées d'un point.

Le vecteur est la flèche, ou le segment orienté, allant de l'origine du plan à ce point.

Le même cheminement est appliqué pour 3 dimensions et plus.

D.3. Conclusion

Certaines des visions ci-dessus peuvent être classées par catégories, mais il est clair qu'il y a à peu près autant de façons différentes de concevoir le vecteur que d'auteurs traitant du sujet.

Un tel constat met en évidence le fait que ce concept est loin d'être facile à aborder au niveau des élèves.

De plus, la lecture des divers points de vues que nous venons de faire montre aussi la nécessité de coordonner les nombreuses définitions ou registres de représentation de cette notion, notamment à l'aide d'exercices de conversion.

[1] Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, Premier degré de l'enseignement secondaire, *Programme de mathématiques*, 7/5609, (1995). 2

[2] Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, Deuxième degré de l'enseignement secondaire (3è année), *Programme provisoire de mathématiques*, 7/5721, (1996). 3

[3] Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation, Commission pluraliste des programmes de mathématiques pour l'enseignement secondaire de transition, *Vue générale de la matière aux deuxième et troisième degré*, (1996). 3

[4] CREM, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, (1995). 2

[5] ICMI, *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, Discussion document for an ICMI study*, L'enseignement mathématique, 40, 345-357, (1994). 14

[6] N.C.T.M., *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, (1989). 17

[7] Commission du dictionnaire de l'APMEP, *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent*, (1967-1975). 25

[8] S.B.P.M.ef, *Produit scalaire, matrices et applications*, Dossier d'exploration didactique n°5, 89 pages, (1997). 87

[9] H. Anton and C. Rorres, *Elementary linear algebra with applications*, John Wiley, New-York, (1987).

[10] T. Banchoff and J. Wermer, *Linear algebra through geometry*, 2nd edition, Springer-Verlag, New-York, (1992).

[11] M. Barnabei, A. Brini and G.-C. Rota, *On the exterior calculus of invariant theory*, J. Algebra, 96, 1220-160, (1985).

[12] R. Bkouche, *De l' enseignement de la géométrie*, Colloque International sur l'Enseignement de la Géométrie, Université de l'Etat à Mons, 33-44, (1982). 15

[13] K. Borsuk, *Multidimensional analytic geometry*, Polish Scientific Publishers, Warszawa (Poland), (1969)

[14] N. Bourbaki, *Algèbre, Ch. 1-3, 4-5, 6-7, 8, 9*, Hermann, Paris, (1958-1970).

[15] N. Bourbaki, *Notes historiques. Algèbre, Ch. 1-3, 4-5, 6-7, 8, 9*, Hermann, Paris, (1958-1970).

[16] H. S. M. Coxeter, Introduction to geometry, J. Wiley & Sons Inc., New York (USA), (1961).

[17] M. Crowe, *A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system*, Univ. Notre-Dame Press, Notre-Dame, (1967). 265

[18] A. Dalle, C. De Waele, *Géométrie dans l'espace, avec compléments*, Maison d'éditions A. Wesmael-Charlier, Namur ; 27ème édition, (1968).

[19] J. Dhombres et P. Radelet-Degrave, *Contingence et nécessité en mécanique. Etude de deux textes inédits de Jean d'Alembert*, Physis, vol. XXVIII , 35-114, (1991).

[20] J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 3ème édition, Hermann, Paris, (1964).

[21] J. Dieudonné, P. Dugac, W. J. F. Ellison, J. Guerindon, ..., *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900* , Hermann, Paris, (1986).

[22] H. Dillinger et F. Pham, *Algèbre linéaire*, Diderot Ed., Paris, (1996).

[23] J.-L. Dorier, *Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire*, Cahier de Didirem n°6, IREM de Paris VII, (1990). 4

[24] J.-L. Dorier, *Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire*, Cahier de DIDIREM 7 ; Université de Paris V II, juin 1990. 4

[25] J.-L. Dorier, *Premières approches pour l'étude de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'Université*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ,IREM de Strasbourg ; vol. 5, 95-123, (1993). 4

[26] J.-L. Dorier et des contributions d'autres auteurs, *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La Pensée Sauvage, France, (1997).

[27] P. *Du Val, Homographies, quaternions and rotations*, Clarendon Press, Oxford, (1964).

[28] Hans Freudenthal, *Mathematics as an educational task, Reidel*, (1973). 8, 17

[29] L. Gurova, *The influence of a visual aid on the process of solving spatial problems*, Soviet studies in the psychology of lea rning and teaching mathematics, Vol. IV, 137-147, J. Kilpatrick and I. Wirszup editors, School mathematics study group, Stanford University and Survey of recent east european mathematical literature, University of Chicago, (1970). 16

[30] P. R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces 2nd ed*, D. Van Nostrand company, Princeton (USA), (1958).

[31] R. M. Hochtrasser, *Molecular aspects of symmetry*, W. A. Benjamin Inc., New York (USA), (1966).

[32] W. V. D. Hodge and D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, Vol. I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1994).

[33] A. Kostrikin, *Introduction à l'algèbre*, Mir, Moscou, (1977-1981).

[34] N. H. Kuiper, *Linear algebra and geometry*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1962).

[35] S. Lang, *Algèbre linéaire*, 2 tomes, InterEditions, Paris, (1976).

[36] G. Lupsin et R. Graas, *Trigonométrie sphérique*, La Procure, Namur-Bruxelles, 8ème édition, (1971).

[37] R. S. Millman, *Kleinian transformation geometry*, Amer. Math. Monthly, 84, 338-349, (1977).

[38] G. Noël, *Géométrie de l'espace, des axiomes d'incidence au produit vectoriel et à l'orientation*, Notes de cours, UMH, (1986).

[39] G. Papy *Mathématique moderne*, 6 Tomes, éd. Marcel Didier, (1968).

[40] K. Pavlopoulou, *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique*, Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, (1994). 4

[41] K. Pavlopoulou, *Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg , vol. 5, 67-93, (1993). 4

[42] F. Pourbaix, *De la cinquième année du secondaire aux premières candidatures scientifiques, traces de l'apprentissage de l'algèbre linéaire*, Mémoire de licence, Université de Mons-Hainaut, (1996).

[43] Y. et R. Sortais, *Géométrie de l'espace et du plan*, Hermann, Paris, (1988).

[44] P. Tilleuil, *Bivecteur, produit vectoriel, volume, déterminant, . . .*, Centre de Didactique des Sciences, Université de Mons-Hainaut, (mars 1997). 164

[45] P. Tilleuil, *Quaternions et rotations de l'espace*, Centre de Didactique des Sciences, Université de Mons-Hainaut, (mars 1997).

[46] C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann, Paris, (1988).

[47] B. L. Van Der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (1983).

[48] B. L. Van Der Waerden, *A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985).

[49] D. van Hiele-Geldof, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, Thèse de Doctorat, Université d'Utrecht, (1957). 24

[50] P. Van Muylen, *Applications d'algèbre linéaire*, Mémoire de licence, Université de Mons-Hainaut, (1995).

[51] M. Vilers, *L'algèbre linéaire par des applications interdisciplinaires*, Mémoire de licence, Université de Mons-Hainaut, (1995).