Communauté française de Belgique

Ministère de la Communauté française
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique

FORMES ET MOUVEMENTS PERSPECTIVES POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Par L. LISMONT et N. ROUCHE

Article publié dans
Le Point sur la Recherche en Education
N° 9
Décembre 1998

et diffusé sur
http://www.agers.cfwb.be/pedag/recheduc/point.asp

Service général des Affaires générales, de la Recherche en éducation et du Pilotage interréseaux
9-13, rue Belliard 1040 Bruxelles
Tél. +32 (2) 213 59 11
Fax +32 (2) 213 59 91

La recherche dont nous rendons compte ici n'est pas encore tout à fait terminée. Mais elle est assez avancée pour que nous puissions en donner une idée relativement complète. Le résultat auquel nous sommes arrivés ne recouvre pas tous les sujets que nous avions espéré traiter. Mais ce que nous avons pu faire nous semble susceptible de contribuer déjà à faire évoluer l'enseignement de la géométrie dans des directions argumentées substantiellement. Le plus simple et le plus clair est sans doute que nous donnions dans l'ordre une idée du contenu de chacune des six parties qui constituent cette étude.

Les personnes qui ont collaboré à celle-ci à des degrés divers sont Sylvie Denis, Bernard Honclaire, Luc Lismont, Nicolas Rouche, Thaïs Sander, Serge Sabbatini, Françoise Van Dieren, Jacques van Santvoort et Marie-Françoise Van Troeye. Pour une telle étude, la variété des formations et des expériences des collaborateurs s'est avérée essentielle. Les qualifications des membres de l'équipe allaient d'institutrice maternelle à docteur en mathématiques.

1. LES ORIGINES DE LA GEOMETRIE

Le matériau même de la géométrie est constitué d'abord par les objets indéformables. Nous examinons ce qui conduit l'être humain à la conscience de la constance de la forme et des dimensions d'un tel objet, et quelles sont les circonstances qui conduisent à en percevoir les symétries. Sur cette question, nous avons été beaucoup aidés par deux ouvrages : La phénoménologie de la perception de Maurice Merleau-Ponty [1945], et L'analyse des sensations de Ernst Mach [1922]. Il se fait que les symétries les plus aisément perçues sont les translations, les symétries orthogonales et, dans une moindre mesure sans doute, les symétries centrales, mais seulement dans la mesure où ces symétries se présentent dans une orientation concordant avec les directions privilégiées du champ de la pesanteur et les symétries de l'être humain. Par exemple, un objet plan présentant une symétrie orthogonale sera perçu le plus facilement comme tel s'il est disposé devant l'observateur dans un plan frontal et avec son axe de symétrie vertical. Ainsi l'axe de symétrie appartient au plan de symétrie de l'observateur.

Les choses sont un peu plus compliquées pour les objets à trois dimensions, du fait principalement qu'ils ne sont pas susceptibles de prendre une seule position privilégiée dans un plan frontal, et qu'ils ont le plus souvent des parties cachées. L'examen de ces difficultés supplémentaires permet de comprendre certaines difficultés spécifiques de la géométrie de l'espace.

Nous avons ensuite examiné les modalités de formation des premiers objets mentaux géométriques. Ceci nous a conduit à classer les figures planes, de manière schématique, en quatre catégories. Il y a d'abord les figures de forme libre qui, telles que les papillons, ont néanmoins une symétrie évidente. Ensuite les formes qui, comme les carrés, ont tellement de symétries qu'elles sont toutes semblables. C'est aussi le cas des cercles. Nous avons distingué ensuite les formes simples à symétrie modérée. Parmi elles on trouve les triangles isocèles ainsi que les rectangles et les parallélogrammes. Ces familles de figures comportent des *objets de proportions très diverses, mais tout de même assez réguliers pour que l'imagination puisse les embrasser sans trop de peine.*

Par exemple on peut s'imaginer de manière assez fidèle la famille des triangles isocèles. La quatrième catégorie que nous avons distinguée est celle des figures géométriques (au sens banal de ce terme) comportant des variantes en nombre tel qu'elles défient l'imagination. Tel est déjà le cas des quadrilatères, dont les formes sont tellement variées que l'on n'arrive pas à les parcourir mentalement sans avoir l'impression de s'y perdre.

Nous pensons avoir montré que les figures de la troisième catégorie, parce qu'elles sont à la fois assez variées et assez faciles à imaginer, sont celles qui enclenchent le plus facilement la pensée géométrique et qui, par leurs propriétés élémentaires évidentes, liées à la perception de leurs symétries, sont des sources d'arguments dans une première structuration de la pensée géométrique. Ces figures sont pour nous des figures clefs.

Cette première partie de l'étude s'achève par un examen des facteurs qui font que certaines propriétés sont évidentes et que d'autres le sont moins. Nous essayons de déterminer aussi en quoi consistent ces évidences, sur quoi elles reposent.

2. <u>UNE GEOMETRIE NATURELLE</u>

Nous avons voulu mettre à l'épreuve ce que nous avions expliqué dans la première partie, et c'est précisément l'objet de la deuxième partie. Nous avons cherché à faire l'inventaire des propriétés géométriques que tout le monde déclare évidentes, puis de celles qui sont plus ou moins évidentes (selon les personnes), mais qui sont susceptibles de devenir évidentes à la suite d'un travail de familiarisation. Il n'arrivera jamais que tous les élèves d'une classe partagent au départ les mêmes évidences. Par contre, ce qui est possible, c'est de travailler avec la classe à des expériences de géométrie, qui feront qu'à la fin les élèves partageront un stock d'évidences suffisant, sur lequel on pourra commencer à construire une première théorie.

Ayant fait le tour des évidences les plus communes, nous avons cherché à les regrouper par affinité de contenu, ce qui nous a permis de présenter un exposé de géométrie informelle autour de six thèmes : une droite, une perpendiculaire et deux obliques, trois segments (l'inégalité triangulaire), des parallèles et des transversales (problèmes d'angles), des parallèles et des transversales (problèmes de longueurs et de rapports), des cercles et des angles, et enfin le théorème de Pythagore. L'ensemble de cette partie forme un exposé des propriétés principales de la géométrie plane élémentaire. Il nous semble répondre au besoin d'une première compréhension des phénomènes géométriques, chez les élèves qui n'ont pas encore la maturité suffisante pour absorber une théorie axiomatique de longue haleine. Il nous semble aussi répondre à la nécessité, soulignée il y peu par E. Wittmann [1990], de voir les mathématiques élémentaires exposées de façon informelle et sérieuse.

Soulignons que, pour des raisons de clarté, cette partie de notre étude développe une géométrie à l'écart de tout contexte concret. Mais c'est précisément l'objet de la partie suivante de montrer comment on peut enseigner une première géométrie raisonnée (au niveau du premier degré du secondaire) dans des contextes problématiques assez riches et qui provoquent la pensée.

3. <u>LA GEOMETRIE EN CLASSE A DOUZE ANS</u>

Cette partie propose deux trames pour commencer à enseigner la géométrie à des élèves de douze ans.

La première est due à Bernard Honclaire et Marie-Françoise Van Troeye. Elle commence par une activité qui consiste à faire tourner d'un demi-tour, d'un quart de tour ou d'un angle quelconque, une feuille de calque sur laquelle sont tracées une ou deux lignes droites, sur une feuille de papier portant le même dessin. Il faut ensuite observer les figures formées par les intersections des droites se trouvant sur la feuille et le calque. Ensuite les premiers polygones familiers, et en particulier les quadrilatères sont engendrés par accolement de deux triangles, et leurs propriétés élémentaires sont ainsi établies.

La deuxième trame d'enseignement est proposée par Françoise Van Dieren. Elle consiste en activités variées d'observations et de constructions sur des papiers peints présentant toutes sortes de symétries, ce qui permet de familiariser les élèves avec les isométries classiques : translations, symétries orthogonales et symétries centrales. Cette trame se poursuit alors, mais à la lumière de ce qui vient d'être acquis sur les papiers peints, par des activités d'accolement de triangles isométriques engendrant principalement des quadrilatères et permettant d'en dégager les propriétés.

On le voit, les trois premières parties de notre étude concernent le début de la géométrie et son passage d'un stade purement intuitif à une première structuration logique. Les trois dernières parties consistent en trois exposés montrant chacun comment un thème majeur de la géométrie peut être développé de manière cohérente tout au long de la scolarité, de la maternelle jusqu'à 18 ans.

4. <u>REPRESENTER LES OBJETS</u>

Le premier thème est celui de la représentation des objets géométriques. Quand on parle de représenter des objets, on songe tout de suite à des images planes d'objets à trois dimensions. Mais nous avions également l'intention d'inclure dans notre étude les représentations à trois dimensions d'objets à trois dimensions (des maquettes par exemple) et les représentations à deux dimensions d'objets à deux dimensions, comme par exemple des *plans et des cartes. Toutefois nous n'avons encore examiné que les projections orthogonales, les projections parallèles et les projections centrales.*

Les représentations planes d'objets de l'espace jouent un rôle clef dans l'application pratique de la géométrie à la saisie de l'espace. La raison en est que beaucoup d'objets que nous souhaitons connaître sont ou trop grands ou trop petits ou trop mal disposés par rapport à nous pour que nous puissions les percevoir dans leur forme et leurs dimensions vraies. Les représentations planes les amènent dans le champ de notre regard, quoiqu'avec des déformations et des ambiguïtés qu'il faut apprendre à interpréter. Les représentations planes sont ainsi non seulement une source pratique de connaissance de l'espace mais encore un sujet d'étude qui oblige à faire beaucoup de géométrie.

Pour chacun des trois types principaux de représentations planes mentionnés ci-dessus, après avoir expliqué le principe de la projection en question, nous avons présenté son rôle dans la civilisation et dans l'histoire, puis ses apparitions dans la réalité physique (comme par exemple les projections parallèles réalisées par les ombres au soleil), et enfin le rôle que peuvent jouer ces projections dans l'enseignement.

5. GRANDEURS, REPERAGES, LINEARITE

La linéarité est essentiellement au départ la conservation de la somme. Cette affirmation doit être précisée, car il faut savoir de quelle somme il s'agit. Or tout au long de la scolarité, diverses sommes apparaissent : la somme des nombres naturels, la somme des grandeurs considérées indépendamment de toute mesure, la somme des entiers, puis des rationnels, des réels et enfin des vecteurs. Ces modalités de la somme sont très diverses : il y a loin de la mise bout à bout de deux segments à l'addition de deux naturels, puis à l'addition dans un système de nombres comportant des négatifs, et enfin à l'addition des vecteurs. Chacun des avatars de l'addition s'accompagne pourtant d'une forme de la linéarité, et c'est sans doute là ce qui donne une sorte d'unité, une parenté entre toutes ces sommes.

Nous avons développé le thème de la linéarité comme un fil conducteur à travers le cours de mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Le titre de cette cinquième partie évoque aussi les grandeurs et les repérages, précisément parce que la linéarité apparaît dès qu'un enfant a conscience de bâtir une tour deux fois plus grande qu'une autre, que la notion même de mesure renvoie à celle d'application linéaire, et qu'enfin les repérages de toutes sortes s'appuient souvent sur des applications linéaires.

Notons que le thème de la linéarité est inséparable de celui de la non-linéarité. Il existe une sorte de ligne de partage souvent utile à reconnaître entre les phénomènes mathématiques linéaires et les autres.

6. L'ORIENTATION

Nous pouvons sans doute nous appesantir un peu moins sur cette sixième et dernière partie de notre travail, car nous en avons déjà rendu compte dans un article antérieur publié ici même. Rappelons simplement que nous avons tenté de faire le lien entre les phénomènes d'orientation tels que les enfants les vivent dans les pratiques de psychomotricité et les éléments mathématiques relatifs à l'orientation des droites, des plans et de l'espace. Nous avons essayé de montrer la chaîne continue de phénomènes entre ces questions qui concernent les petits enfants et les problèmes d'orientation des bases dans les espaces vectoriels.

7. EN CONCLUSION : ET LES CLASSES ?

Arrivé à la fin de cet article, le lecteur se demandera peut-être si nous avons suffisamment pensé aux élèves et aux professeurs qui sont quotidiennement confrontés à l'urgence d'organiser un apprentissage efficace de la géométrie. Certes, nous avons évoqué plus d'idées de fond que de propositions pratiques pour enseigner. Mais dans notre idée, une telle réflexion de base est un préalable à des contributions davantage axées sur la pratique de la classe. Notre équipe a le projet de produire, dans les mois qui viennent, des documents susceptibles d'inspirer sans longs détours des enseignement concrets.

8. REFERENCES

MACH E. [1922], L'analyse des sensations, Éditions Jacqueline Chambon, 1996. Traduit de l'édition originale allemande Analyse der Empfindungen par F. Eggers et J.-M. Monnoyer.

MERLEAU-PONTY, M. [1945], La phénoménologie de la perception , Gallimard, Paris.

WITTMANN, E. et MÜLLER, G. [1990], When is a proof a proof, Bulletin de la Société mathématique de Belgique, série A, Tome XLII, p. 15–42.