Liaison primaire-secondaire

L'enseignement des rationnels

Publication destinée aux instituteurs du dernier cycle de l'école primaire et aux professeurs de mathématiques du premier degré de l'enseignement secondaire

Pierre Stegen
Christine Géron
(Haute Ecole de la Ville de Liège)

Sabine Daro
(asbl Hypothèse
Haute Ecole ISELL)

Avec la collaboration de Laetitia Desmet (asbl CREM)

« A l'initiative de la Ministre Présidente de la Communauté française, Madame Marie Arena, en charge de l'enseignement obligatoire et de la promotion sociale »

Sommaire

Introduction

Le 1er décembre 2005, Madame Arena (Ministre-Présidente de la Communauté Française en charge de l'enseignement obligatoire) confiait à l'asbl Hypothèse, en partenariat avec trois départements pédagogiques liégeois (Haute Ecole Charlemagne, Haute Ecole de la Ville de Liège et Haute Ecole ISELL), la réalisation d'expériences pilotes visant à renforcer l'articulation entre l'enseignement fondamental et l'enseignement secondaire.

Cette volonté s'inscrivait dans le prolongement direct de la mise en place du ***Contrat pour l'école*** adopté en mai 2005 par le Gouvernement de la Communauté française.

Dans ce contrat, parmi les mesures proposées pour atteindre la priorité 2 (« Conduire chaque jeune à la maîtrise des compétences de base »), on peut lire qu'il est prévu « *d'initier cinq expériences pilotes associant des enseignants venant des deux dernières années de l'enseignement primaire et du premier degré de l'enseignement secondaire et travaillant collectivement à la maîtrise par tous les élèves des Socles de compétences, renforçant ainsi l'articulation entre la seconde et la troisième étape du tronc commun. Ces expériences intègreront des situations diversifiées et, a minima, des écoles bénéficiaires de discriminations positives ainsi que des écoles secondaires organisant soit une 2e professionnelle, soit un premier degré de base* ».

Trois expériences pilotes ont été menées en région liégeoise[1] durant les années scolaires 2005/2006 et 2006/2007 : deux ont concerné l'articulation des apprentissages dans le domaine des mathématiques et la troisième expérience pilote s'est intéressée à la continuité des apprentissages en sciences.
En mathématiques, deux axes de travail ont été privilégiés ; initialement, un par groupe de travail. Le premier, ***l'enseignement des rationnels***, s'est en quelque sorte imposé de lui-même au vu de l'abondance d'éléments mettant en évidence la nécessité de s'interroger sur cet enseignement à la liaison primaire-secondaire. Le second, ***l'enseignement de la proportionnalité***, est davantage une demande des enseignants du secondaire.

Ces deux axes de travail constituent deux points d'entrée complémentaires dans une réflexion sur l'enseignement des mathématiques : d'une part, l'analyse des nombreuses difficultés rencontrées par les élèves pour construire le concept de rationnel permet d'aborder ***le rôle et le statut des erreurs dans la construction des concepts mathématiques*** (rationnels) et, d'autre part, la proportionnalité, pierre angulaire de la résolution de situations problèmes conduit, elle, à s'interroger sur le ***rôle et la place de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques***.

[1] Deux autres expériences pilotes ont été menées en région bruxelloise par l'équipe du Professeur B. Rey (ULB).

1. Qui sont les différents partenaires de l'espace de collaboration ?

Comme son titre l'indique, cette publication aborde l'enseignement des rationnels lors de la transition primaire-secondaire. Elle synthétise les principaux enseignements d'un dispositif de recherche qui a associé, au sein d'un espace de collaboration, les différents partenaires suivants :

- des enseignants (instituteurs primaires et régents en mathématiques) et, d'une manière indirecte, leurs élèves ;
- des enseignants-chercheurs (maîtres-assitants des Hautes Ecoles : professeurs de sciences et de mathématiques, psycho-pédagogues) et leurs étudiants en formation.

Nous tenons tout particulièrement à remercier ici les enseignants qui ont consacré du temps et de l'énergie pour mener à bien cette recherche :

Les enseignants du groupe 1 :

<table>
<tr><th>Enseignant(e)s</th><th>Ecoles secondaires/primaires</th></tr>
<tr><td>Mme Furlan</td><td>Athénée communal Maurice Destenay</td></tr>
<tr><td>Mme Romy</td><td rowspan="2">Athénée Royal Liège Atlas</td></tr>
<tr><td>M. Legère</td></tr>
<tr><td>Mme Grotaers</td><td>Ecole fondamentale communale de Basse-Wez (Liège)</td></tr>
<tr><td>Mme Hourlay</td><td rowspan="2">Ecole fondamentale communale de Bressoux - De Gaulle</td></tr>
<tr><td>Mme Lazaar</td></tr>
<tr><td>Mme Closset</td><td>Ecole fondamentale communale de Bonne - Nouvelle (Liège)</td></tr>
<tr><td>Mme Minnoye</td><td>Ecole fondamentale communale de Morinval (Liège)</td></tr>
<tr><td>Mme Sacré</td><td>Ecole fondamentale communale Vieille Montagne (Liège)</td></tr>
</table>

Les enseignants du groupe 2 :

Enseignant(e)s	**Ecoles secondaires/primaires**
Mme Dheur	Collège Saint Louis
Mme Ghaye	
M. Olivier	
M. Talbot	Ecole primaire Saint Remacle – Liège
Mme Nikelmann	Ecole primaire Notre Dame de Lourdes – Liège
M. Bastin	
Mme Daigneux	Ecole primaire libre de Robermont
Mme Muller	
M. Dumont	
Mme Léonard	Ecole primaire Notre Dame du Rosaire – Bressoux
Mme Vandermeer	
Mme Paquay	Ecole primaire libre Saint Joseph – Grivegnée
Mme Closset	Ecole primaire libre St Odile– Grivegnée

A ces différents acteurs, il convient d'ajouter le ***Centre de Recherches sur l'Enseignement des mathématiques*** (asbl CREM) et, tout particulièrement Laetitia Desmet, partenaire à part entière dans le travail de réflexion sur l'enseignement des rationnels.

Enfin, une mention spéciale doit être accordée à Elodie Hendrickx et Mathieu Stoz. Ces deux étudiants du Département primaire de la Haute Ecole de la Ville de Liège ont choisi d'intégrer l'espace de collaboration dans le cadre de la réalisation de leur Travail de Fin d'Etudes (TFE).

- Elodie Hendrickx s'est intéressée aux difficultés rencontrées par les élèves pour positionner des rationnels sur des droites numériques ;
- Mathieu Stoz a analysé et expérimenté une progression didactique qui prend davantage appui sur l'écriture fractionnaire des rationnels.

2. A qui s'adresse cette publication ?

Née de l'analyse des difficultés rencontrées par des élèves dans la maîtrise des nombres rationnels, cette publication ambitionne d'être un outil au service des enseignants du dernier cycle de l'école primaire ***et*** du premier cycle de l'enseignement secondaire.

Il nous paraissait essentiel de concevoir une même publication pour cette période charnière de la scolarité. En effet, les différentes réunions que nous avons organisées au sein de l'espace de collaboration ont mis en évidence que ces deux niveaux d'enseignement ne connaissent guère les réalités de travail de l'une et de l'autre. Les enseignants du primaire ignorent ce que deviennent les compétences de leurs élèves une fois qu'ils sont à l'école secondaire et, d'autre part, les enseignants du secondaire ne connaissent guère les pratiques d'apprentissage développées à l'école primaire.

De nombreuses données de recherches en didactique des mathématiques mettent en évidence que beaucoup d'élèves débutent leur scolarité dans l'enseignement secondaire en éprouvant encore bien des difficultés dans l'utilisation des rationnels.

Cette citation, empruntée à R. Charnay, résume assez bien la situation : « *Toutes les évaluations le confirment : les connaissances concernant les nombres décimaux ne sont pas stabilisées à l'école primaire comme en témoignent certains résultats de l'évaluation à l'entrée de la 6*^{e} (soit, en France, la première année du Collège) (...)
Le domaine des nombres décimaux est sans doute l'un de ceux sur lequel il y a le plus à faire dans le cadre de l'articulation entre CM2 et 6^{e}*, ce que l'on pourrait traduire par la préoccupation suivante : « comment envisager l'apprentissage des fractions et des décimaux sur au moins trois ans, du CM1 à la 6*^{e} *?* » (...)
On est amené à gérer, sur plusieurs années, de l'école primaire au collège, l'apprentissage (en partie simultané) des fractions et des nombres décimaux » (Charnay, 1998).

Ce phénomène n'est en rien spécifique à l'enseignement dispensé en France ; on le retrouve également en Communauté française de Belgique et dans la plupart des systèmes éducatifs.

Au niveau de la Communauté française de Belgique, il suffit de prendre connaissance des résultats observés lors des dispositifs d'évaluation externe menés par la Cellule de Pilotage de l'enseignement en Communauté française. On trouvera sur le site de la recherche (http://www.hypo-these.be/spip/spip.php?article8) des liens pointant vers les différentes pages concernant les analyses des épreuves d'évaluation externe de 2004 et de 1997 développées par la Cellule de Pilotage.

Il apparaît donc essentiel d'inscrire l'enseignement des rationnels dans la durée ; cela nécessite d'établir et de développer des articulations entre l'enseignement dispensé en fin d'école fondamentale et au début du secondaire.

Une manière d'y arriver passe sans doute par l'utilisation de référents communs ; c'est l'hypothèse de travail que nous avons privilégiée et c'est l'objectif que nous poursuivons via cette publication.

> Ce choix est largement inspiré par l'exemple de nos voisins français. En France, cela fait quelques années maintenant qu'est publié, en marge des programmes de mathématiques spécifiques adressés aux enseignants du primaire et du collège, un document d'accompagnement intitulé : « Mathématiques : articulation Ecole/Collège ». Une telle initiative n'existe pas en Communauté française de Belgique. Certes, les Socles de compétences définissent des standards à maîtriser à 8, 12 et 14 ans mais, comme on le verra par la suite, ils ne fournissent pas suffisamment de repères pour guider efficacement la transition primaire/secondaire.

3. Que peut-on trouver dans cette publication ?

Le référent est structuré au départ des éléments de réponses apportés aux quatre questions suivantes :

- Comment se développent et se structurent les différents ensembles de nombres que les élèves rencontrent tout au long de leur scolarité primaire et au premier degré de l'enseignement secondaire ?
- Quelles sont les compétences spécifiques liées à la maîtrise des nombres rationnels ?
- Que sait-on des difficultés rencontrées par les élèves dans la construction de ces compétences ?
- Quels axes de progression didactique proposer en réponse aux difficultés observées chez les élèves ?

La prise en compte chronologique de ces quatre questions a constitué le fil conducteur du dispositif de recherche développé au sein de l'espace de collaboration.

La première étape de la recherche a été essentiellement théorique et conceptuelle. Il s'agissait de procéder à une analyse mathématique des concepts en jeu afin de définir des premières balises mathématiques et didactiques pour structurer l'enseignement des rationnels.

> Cette porte d'entrée conceptuelle dans la recherche est importante. Comme le souligne L. Habran (1988), si la connaissance relativement superficielle d'une matière suffit souvent pour l'enseigner de manière directive, il faut une sérieuse maîtrise de cette matière pour conduire son apprentissage en provoquant l'initiative des élèves. Autrement dit, pas de réflexion sur la MANIERE d'enseigner sans une maîtrise suffisante de cette MATIERE.

⚒ Les principaux éléments d'analyse sont détaillés dans un premier chapitre intitulé « ***Des balises théoriques pour structurer l'apprentissage des rationnels*** ».

Ce point d'entrée conceptuel a été ensuite complété par une prise en compte des élèves. Quelles sont les difficultés qu'ils rencontrent dans l'acquisition des compétences spécifiques à la maîtrise des rationnels ? Une épreuve d'évaluation diagnostique a été développée et proposée aux différents partenaires de l'espace de collaboration. Au sein de ce dernier, une analyse collective (par des régents et des instituteurs) des productions des élèves a permis de dégager des hypothèses quant à l'origine des erreurs commises par les élèves.

- L'épreuve diagnostique et les réponses des élèves sont analysées dans un deuxième chapitre: « ***Une démarche fondatrice : partir des erreurs des élèves*** ».

Cette analyse des difficultés rencontrées par les élèves a été mise en parallèle avec les pratiques d'enseignement habituelles des enseignants du primaire et du secondaire.
La confrontation de tous ces éléments d'analyse a débouché sur des propositions de situations d'apprentissage qui ont fait l'objet d'une expérimentation dans les classes.

- Un troisième chapitre : « ***Des activités pour structurer l'enseignement des rationnels à la liaison primaire-secondaire*** » détaille des situations d'apprentissage qui s'inscrivent dans le droit prolongement des réflexions développées dans les deux chapitres précédents. Ces situations sont à considérer, selon que le lecteur est instituteur ou régent, soit comme un point de départ, soit comme des pistes de re-médiation[1].

[1] Nous aurons par la suite l'occasion de revenir sur le sens à donner à ce terme.

4. Comment mettre en oeuvre les outils proposés ?

Cette publication ambitionne d'être un référent à destination d'un double public (instituteurs et régents en mathématiques). Les modalités de mise en oeuvre des propositions contenues dans cet ouvrage peuvent donc varier.
Toutefois, ces dernières ne doivent pas être considérées comme des « solutions clés sur porte » en réponse à des problèmes d'apprentissage ponctuels. Il s'agit davantage de présenter des outils qui doivent permettre aux enseignants de construire leurs propres solutions et de les intégrer à leurs pratiques habituelles d'enseignement-apprentissage.

Comment ? Le fil conducteur du travail présenté dans cette publication est l'articulation, dans une même démarche, de pratiques d'évaluation et d'apprentissage. L'accent est en effet mis sur la mise en place d'une évaluation diagnostique préalable à toute intervention didactique.
Le choix de privilégier une approche par l'analyse des erreurs pour aborder la construction des rationnels ne résulte pas du hasard. En effet, l'analyse des erreurs des élèves est une démarche fondatrice de la recherche en didactique des mathématiques. Il ne s'agit pas d'attirer l'attention sur des niveaux de maîtrise insuffisants, mais bien d'essayer de diagnostiquer précisément la nature et l'origine de ces difficultés. Cette démarche est tout particulièrement intéressante pour les régents qui accueillent des populations d'élèves provenant d'écoles primaires différentes.

La structuration en trois chapitres a pour but de fournir aux enseignants tous les éléments nécessaires à la mise en place, dans leur classe, de pratiques d'apprentissage fondées sur une analyse précise des compétences numériques de leurs élèves.

Selon que l'on travaille au dernier cycle de l'école primaire ou au premier degré de l'enseignement secondaire, la perspective de travail sera différente. Pour les instituteurs primaires, il s'agira avant tout de s'inscrire dans une perspective d'apprentissage alors que pour les régents, il s'agira davantage de perspective de re-médiation. Des propositions concrètes sous la forme de scénario d'activités seront détaillées dans le dernier chapitre.

> Dans l'analyse des items de l'épreuve diagnostique, nous avons choisi de présenter conjointement les résultats obtenus en début de 6^{e} primaire et au début de $1^{ère}$ année secondaire. Cela permet d'articuler dans une même réflexion des perspectives à moyen terme et à court terme (l'instituteur primaire davantage centré sur l'apprentissage des rationnels et donc, le moyen terme ; le régent, davantage centré sur la re-médiation et le court terme).

Cette façon de procéder répond à notre souci de vous présenter non pas des « solutions clés sur porte » en réponse aux problèmes d'apprentissage rencontrés mais bien des outils concrets pour construire vos solutions.
Par outil concret, que faut-il entendre ?

- ce sont des **outils ouverts** dont les paramètres sont explicités de manière à permettre aux enseignants de les modifier en fonction de leur contexte propre ou, le cas échéant, de les compléter pour faire face à de nouveaux besoins ;
- ils mettent l'accent sur ***l'observation et l'analyse des démarches mises en oeuvre par les élèves***. Ces deux démarches constituent une composante indispensable d'une évaluation formative de l'acquisition de compétences ;
- ils invitent les enseignants **à mettre en oeuvre une démarche réflexive sur leur pratique** et son contexte et à susciter chez leurs élèves la même prise de distance par rapport à leur fonctionnement (exploitation de démarches métacognitives).

A vous de nous dire si nous avons atteint nos objectifs ! Le site collaboratif de la recherche liaison primaire-secondaire vous offre notamment la possibilité de réagir à nos propositions et de découvrir les commentaires ou les propositions formulées par d'autres collègues.

* *
* * *

Nous avons essayé de rendre cette publication la plus lisible possible. Nous avons eu recours à différentes icônes qui sont déjà venues agrémenter la lecture des premières pages. Normalement, la lecture des éléments mis ainsi en évidence n'est pas nécessaire à la bonne compréhension de l'ensemble. Au lecteur de faire le choix de prendre le temps et de s'attarder davantage sur l'un ou l'autre domaine de réflexion particulier.

Pour ceux et celles qui veulent en savoir plus sur la réflexion développée.

Cette icône renvoie vers des éléments repris sur le site internet de la recherche : http://www.hypo-these.be/spip

Pour ceux ou celles qui veulent en savoir plus sur les choix portés par l'équipe de recherche.

Chapitre 1 : Des balises théoriques pour structurer l'apprentissage des rationnels

> L'apprentissage des mathématiques au cours de la scolarité obligatoire est largement marqué par celui des différents types de nombres et des calculs sur ces nombres. L'appropriation de chaque catégorie de nombres est également marquée par la compréhension des propriétés qui permettent de les caractériser et qui peuvent être en continuité ou en rupture avec celles des nombres déjà connus. (EduSCOL, 2006)

Quels seraient ces différents types de nombres que les élèves rencontrent lors de leur scolarité primaire ? Quelles seraient les ruptures ou les continuités qui existeraient entre les types de nombres étudiés à l'école primaire et au premier degré de l'enseignement secondaire ? Dans quel ordre les aborder ? Quelle serait la spécificité mathématique de l'enseignement primaire par rapport à celle de l'enseignement secondaire ?

L'objectif de ce premier chapitre[1] est de clarifier le concept de nombre rationnel en le repositionnant dans une classification des nombres organisée d'un point de vue mathématique et historique. Cette clarification sera précédée par une analyse du positionnement des nombres rationnels dans les *Socles de compétences*.

1. Que disent les Socles de compétences ?

Dans la présentation du domaine des *Nombres* (un des quatre domaines mathématiques identifiés au même titre que les *Solides et figures*, les *Grandeurs* et le *Traitement des données*), il est précisé que le travail sur les opérations de division conduit à élargir l'univers des nombres et à aborder l'étude des fractions, des décimaux et des relatifs.

Ces différents termes (naturels, fractions, décimaux, ...) sont utilisés au niveau des compétences disciplinaires suivantes :

[1] Ce chapitre s'inspire largement des analyses développées par Sacré & Stegen (2003) dans leur ouvrage consacré à l'enseignement des décimaux au dernier cycle de l'enseignement primaire.

Extraits du document *Socles de compétences* mentionnant explicitement une référence à l'étude des rationnels

3.1.1. Compter, dénombrer, classer

	Cycle 5/8	Cycle 8/12	Cycle 12/14
Dire, lire et écrire des nombres dans la numération décimale de position en comprenant son principe	Des nombres naturels ≤ 100	Des nombres naturels décimaux limités au millième	E (cette compétence doit continuer à être exercée)
Classer (situer, ordonner, comparer)	Des nombres naturels ≤ 100	Des nombres naturels et des décimaux limités au millième	Des entiers, des décimaux et des fractions munis d'un signe

3.1.2. Organiser les nombres par familles

	Cycle 5/8	Cycle 8/12	Cycle 12/14
Décomposer et recomposer	Des nombres naturels ≤ 100	Des nombres naturels décimaux limités au millième	E (cette compétence doit continuer à être exercée)

3.1.3. Calculer

	Cycle 5/8	Cycle 8/12	Cycle 12/14
Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées	Avec des petits nombres	Avec des nombres naturels et des décimaux limités au millième	Avec des entiers, des décimaux et des fractions munis d'un signe (y compris l'élévation à la puissance).
Écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser			E (cette compétence doit continuer à être exercée)

Ce tableau illustre un traditionnel découpage des nombres à aborder aux différentes étapes de la scolarité primaire : étude des 100 premiers nombres naturels au cycle 5/8 et étude des rationnels au cycle 8/12 (décimaux limités au millième).
Dans le domaine plus spécifique de l'étude des rationnels à la liaison primaire-secondaire, on note que l'écriture fractionnaire des rationnels semble réservée à l'enseignement secondaire. On ne trouve en effet pas de référence à une écriture fractionnaire des rationnels (si ce n'est en liaison avec le savoir calculer). Dans le même ordre d'idée, on notera que les entiers ne sont abordés qu'au premier degré de l'enseignement secondaire.

Pas d'écriture fractionnaire en primaire, cela signifie-t-il que les fractions en sont pas travaillées à l'école primaire ?

Dans les *Socles de compétences*, les fractions n'apparaissent pas dans le domaine des *nombres* mais bien dans celui des *grandeurs* sous l'intitulé *opérer et fractionner*.
Cette sous-section précise qu'au terme de la scolarité primaire, les élèves doivent maîtriser les compétences suivantes :

Extraits du document *Socles de compétences* (domaine des grandeurs)

3.3.2. Opérer, fractionner

	Cycle 5/8	Cycle 8/12	Cycle 12/14
Fractionner des objets en vue de les comparer.	**C** Partager en deux et en quatre.	**C** (cette compétence doit être certifiée)	**E** (cette compétence doit continuer à être exercée)
Composer deux fractionnements d'un objet réel ou représenté en se limitant à des fractions dont le numérateur est un (par exemple, prendre le tiers du quart d'un objet).		↗ (sensibilisation des élèves à cette compétence)	**C** (cette compétence doit être certifiée)
Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.		**C** (cette compétence doit être certifiée)	**E** (cette compétence doit continuer à être exercée)
Calculer des pourcentages.		**C** (cette compétence doit être certifiée)	**E** (cette compétence doit continuer à être exercée)
Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.	↗	**C** (cette compétence doit être certifiée)	E (cette compétence doit continuer à être exercée)
Dans une situation de proportionnalité directe, compléter, construire, exploiter un tableau qui met en relation deux grandeurs.		**C** Compléter uniquement.	**C** (cette compétence doit être certifiée)

Le document *Socles de compétences* spécifie ainsi une seconde voie pour la découverte et l'étude des décimaux. Il précise que les opérations de fractionnement et de mesurage (dont l'évaluation est strictement réservée au cycle 8/12) conduisent aux nombres décimaux et aux fractions.

De cette analyse des *Socles de compétences*, on retiendra qu'ils n'apportent guère de réponses aux questions formulées dans l'introduction de cette première étape. Certes, ce n'est pas la vocation d'un document officiel de fournir des indications méthodologiques. On ne peut toutefois que s'étonner de certains choix opérés.

> Ainsi, par rapport à la problématique abordée dans ce document, il est par exemple curieux de constater que le terme rationnel n'y est jamais cité.

On retiendra toutefois le fil conducteur suivant : ***aborder l'étude des rationnels dans le prolongement des opérations de division car elles mettent en évidence l'insuffisance des nombres naturels pour résoudre des problèmes relatifs à la mesure ou aux résultats de certaines opérations***.

Cet axe étant dégagé, il reste à s'interroger sur la spécificité de l'approche à développer à l'école primaire et au premier degré de l'enseignement secondaire. Quels sont les différents types de nombres rencontrés par les élèves ? Que faut-il entendre par nombre rationnel, nombre décimal ? Bref, comment se sont formalisés les différents ensembles de nombres et comment se définissent-ils les uns par rapport aux autres ?

2. Comment se sont formalisés les différents ensembles de nombres ? Comment se situent-ils les uns par rapports aux autres ?

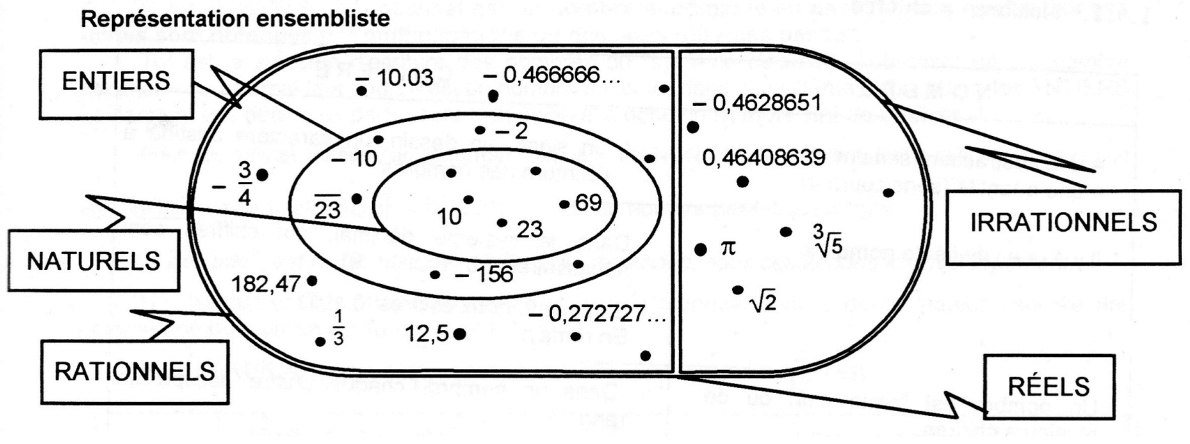
Pour aborder cette étude des différents ensembles de nombres, il convient d'avoir à l'esprit les différentes images développées par L. Habran (1988). Il désigne successivement :

- les nombres du ***berger*** pour évoquer les nombres ***naturels*** (N),
- les nombres du ***commerçant*** ou les nombres ***entiers*** (Z),
- les nombres du ***menuisier*** ou les nombres ***rationnels*** (Q),
- les nombres du ***géomètre*** ou les nombres ***réels*** (R),
- les nombres de ***l'électricien*** ou les nombres ***complexes***.

L. Habran (1988) précise en outre que ces cinq ensembles de nombres s'emboîtent à la manière de poupées gigognes et qu'ils sont liés par une relation d'inclusion hiérarchique au départ de l'ensemble des naturels qu'il considère comme la véritable fondation sur laquelle repose tout l'édifice numérique

Cette inclusion hiérarchique peut être représentée par la figure suivante :

Figure 1 : l'inclusion des ensembles de nombres (source : L. Habran, 1988)



Si l'école fondamentale veut donner du sens aux nombres, c'est dire toute l'importance qu'elle doit accorder à l'élaboration des trois premiers ensembles de l'édifice : les naturels, les entiers et les rationnels (L. Habran, 1988).

3. Qu'est-ce qu'un nombre rationnel ? Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

Comme cela a été précisé dans l'analyse des *Socles de compétences*, il n'y est pas fait mention du terme rationnel. On y retrouve par contre le terme « décimal ». Par contre, dans la brève présentation des différents ensembles des nombres, on y parle de rationnels mais pas de décimaux[1]. Ces deux termes, « décimaux » et « rationnels », sont-ils des désignations équivalentes d'un même univers de nombres ? Qu'ont-ils en commun ? Qu'est-ce qui les distingue ?

Une brochure éditée par l'APMEP (1985) donne la définition suivante d'un nombre décimal : « *un nombre décimal est un nombre dont l'une des écritures au moins est une fraction ayant pour dénominateur une puissance de 10* ». D'après cette première définition, un décimal serait un rationnel particulier qui peut s'écrire à l'aide d'une fraction décimale. $\frac{3}{10}$ ou $\frac{5}{100}$ sont donc des décimaux mais $\frac{10}{9}$ ou $\frac{10}{11}$ n'en sont pas ; ce sont tous des rationnels.

Un rationnel est donc un nombre qui s'écrit sous la forme d'une fraction d'entiers. Comme cela a été précisé dans l'analyse des *Socles de compétences*, le résultat de la division d'un entier par un autre entier (non

[1] Pour L. Habran (1988), l'ensemble des décimaux n'est pas de même nature que les ensembles N, Z, Q, R.

nul) n'aboutit pas forcément à un nombre entier ; en conséquence, les mathématiciens ont défini un nouvel univers de nombres, les rationnels (Q), dans lequel la solution d'une équation de type : « b . x = a » possède toujours une solution. Ainsi,

- l'équation « 4 . x = 3 » a pour solution le rationnel noté $\frac{3}{4}$;
- l'équation « 6 . x = 12 » a pour solution le rationnel noté $\frac{12}{6}$. Toutefois, dans l'ensemble des entiers (Z), on sait que « 2 × 6 = 12 » et donc que « $\frac{12}{6} = 2$ »

On déduira de ce second exemple une observation intéressante : les entiers sont des rationnels. Plus précisément, on dira que l'ensemble des rationnels prolonge[1] l'ensemble des entiers, que l'ensemble des entiers est inclus dans l'ensemble des rationnels. Cette notion de prolongement est importante car elle ouvre des horizons au-delà de l'ensemble des rationnels ; faudra-t-il le prolonger également par d'autres univers de nombres pour résoudre des problèmes qui n'ont pas de solution dans Q ? Cette question a mobilisé les travaux de nombreux mathématiciens au cours des siècles.

Une des caractéristiques principales des rationnels est la possibilité de les écrire au départ d'une infinité de fractions d'entiers ; ainsi, l'équation « 4 . x = 2 » a pour solution le rationnel $\frac{2}{4}$. Si on multiplie (ou divise) chaque terme de cette équation par un même nombre, on obtient des équations équivalentes dont les solutions sont des fractions équivalentes :

- 2 . x = 1 a pour solution le rationnel $\frac{1}{2}$
- 8 . x = 4 a pour solution le rationnel $\frac{4}{8}$
- 36 . x = 18 a pour solution le rationnel $\frac{18}{36}$

On peut donc écrire les égalités suivantes entre ces fractions :
$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{18}{36} = \ldots$

Cette propriété des rationnels se traduit par le symbole « = ». Toutefois, sur un plan théorique, il convient de parler de fractions équivalentes et non égales. En effet, chacune de ces fractions est le reflet d'un partage et, dans l'exemple ci-dessus, les partages correspondant à $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ ne sont pas les mêmes. Les découpages de l'unité n'ont pas été effectués en un même nombre de parts et le nombre de parts distribuées n'est de ce fait pas le même. Seules les quantités résultant du partage final sont identiques, c'est

[1] Cela a été mis en évidence au niveau de la classification mathématique des nombres.

pourquoi on parlera de fractions équivalentes et non égales. Ce constat se révèle utile lorsque l'on travaille avec les élèves au délicat et nécessaire passage du concept de « nombre de » rationnel à celui de « nombre » rationnel (voir page 59).

Suite à la première définition d'un nombre décimal, $\frac{3}{10}$ ou $\frac{5}{100}$ étaient donnés comme exemples de nombres décimaux car ils s'écrivent sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. $\frac{3}{20}$ sera également considéré comme un décimal car il peut s'écrire sous la forme de la fraction équivalente $\frac{15}{100}$ dont le dénominateur est bien une puissance de 10.

> Si tous les décimaux sont des rationnels, l'inverse n'est pas vrai ; tous les rationnels ne sont pas des décimaux. En pratique, seuls les rationnels pouvant s'écrire à l'aide d'une fraction dont le dénominateur ne se décompose qu'en facteurs 2 et 5 (soit la décomposition de 10) sont des décimaux (exemples : $\frac{1}{20}$ est un décimal car $20=2\times2\times5$ mais pas $\frac{1}{30}$ car $30=2\times3\times5$).
>
> En pratique, à l'école primaire les élèves vont essentiellement rencontrer et travailler au départ de décimaux (à l'exception notable de π ou d'autres nombres écrits sous une forme fractionnaire comme, par exemple, $\frac{1}{3}$).
>
> En fait, comme le souligne L. Habran (1988), il serait plus exact de dire qu'ils vont rencontrer des expressions décimales désignant des nombres rationnels.
>
> Trois cas peuvent se présenter :
>
> - le cas ou l'écriture est finie, comme dans 3,56 ; on parle dans ce cas de ***rationnel s'écrivant sous la forme d'un décimal fini*** ;
> - le cas où l'écriture est infinie mais périodique comme dans 7, 123 123 123 … ; on parle alors de ***rationnel s'écrivant sous la forme d'un décimal illimité périodique*** ;
> - le cas où l'écriture est infinie et non périodique comme dans l'exemple classique du nombre π = 3,14592653589 … ; on parle alors de ***nombre irrationnel s'écrivant sous la forme d'un décimal illimité non périodique***.

4. Comment écrit-on les rationnels ?

Un décimal est un rationnel dont le dénominateur est une puissance de 10 ; pourquoi privilégier dès lors une écriture décimale à une écriture fractionnaire ? L'écriture décimale a l'avantage d'utiliser également notre système de numération décimal (10 signes qui définissent une base 10 de numération) et positionnel (chacun des symboles prend une valeur différente selon la place qu'il occupe dans un nombre). L'écriture d'un décimal se distingue de l'écriture d'un entier par la présence de deux parties (l'une entière et l'autre décimale) séparées par un signe conventionnel (la virgule) qui permet de les distinguer.

Ainsi, dans le rationnel 234,142 :

- 234 constitue la partie entière (à gauche de la virgule) ; son écriture peut se décomposer de la manière suivante : 200 + 30 + 4 ou 2 centaines + 3 dizaines + 4 unités (soit $2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$) ;
- 142 constitue la partie décimale (à droite de la virgule) ; elle exprime les quantités inférieures à 1 (ou 10^0) en utilisant toujours les puissances de 10 qui sont, cette fois, à exposant négatif : $1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$ ou $\frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000}$.

Cette caractéristique facilite grandement l'écriture de certaines opérations à effectuer ; en effet, les calculs peuvent se résoudre comme des calculs sur les entiers en prenant en compte, bien évidemment, l'ordre de grandeur. La facilité des calculs au départ de l'écriture décimale sera à l'origine de la création d'un système d'unités de mesure approprié à la base 10 de numération : le système métrique.

Mais, cet avantage a un coût !

Comme cela a été écrit précédemment, l'ensemble des nombres rationnels (Q) prolonge l'ensemble des nombres entiers (Z). Le sens du verbe prolonger ne signifie nullement que cette action va de soi. Prolonger, dans ce cas précis, renvoie à l'idée que l'ensemble des rationnels contient l'ensemble des naturels. Contrairement à ce que laisserait croire une vision romantique du développement des connaissances, celles-ci ne se développent pas de manière purement linéaire mais bien en opérant des ruptures. C'est particulièrement vrai pour l'enseignement des nombres ; l'extension du domaine numérique des naturels aux rationnels nécessite la prise en compte de ruptures épistémologiques importantes. Le tableau suivant en présente quatre.

	Dans N	**Dans Q**
• l'idée de succession	• Un naturel a toujours un successeur. Le successeur de “ 7 ” est “ 8 ”.	• Cette idée n'a évidemment pas de sens pour les rationnels. Ainsi, quel est le successeur de “ 2,75 ” ? “ 2,76 ” ou “ 2,751 ” ?
• l'intercalation	• Entre deux naturels, il existe un nombre fini de naturels.	• Entre deux rationnels, il existe une infinité de nombres (densité des rationnels).
• les règles de comparaison	• 12 > 8	• mais 6,12 < 6,8
• les zéros inutiles	• Ils se placent uniquement à la gauche du nombre.	• Ils se placent aussi à la droite du nombre.

Ces différences sont à l'origine d'autant de difficultés dans l'appropriation de l'écriture décimale des ces rationnels. En effet, celle-ci intervient après un travail de plusieurs années sur l'écriture des nombres entiers. Pour les enseignants, il est dès lors difficile d'empêcher les élèves de traiter l'écriture décimale sur le modèle construit pour les entiers et donc de considérer que 8,12 > 8,3 > 8,2 ou que " trente-deux unités trois centièmes " s'écrit, en chiffres, de la manière suivante " 32,003 ".

La partie consacrée à l'analyse des erreurs d'élèves montre qu'elles peuvent être les conséquences d'une prise en compte insuffisante de ces ruptures (voir page 22).

5. Que doit-on retenir de l'évolution historique de l'écriture des rationnels?

Les premiers éléments de réponse apportés à la question : « qu'est-ce qu'un nombre rationnel ? » ne doivent pas faire oublier que la conceptualisation mathématique de cet ensemble de nombres s'étale sur près de 20 siècles. Garder à l'esprit cette élaboration progressive devrait inciter à plus d'indulgence face aux nombreuses erreurs commises par les élèves !

> Dans *Le sens de la mesure*, Rouche (1992) écrit ceci : « *Les nombres naturels sont nés de collections finies, dont la nature offre une infinité d'exemples. On peut croire qu'ils ont été les premiers, dans la nuit des temps, à être conçus et utilisés par les hommes. Les fractions doivent être venues ensuite, dans la pratique de l'artisanat et du commerce, pour exprimer les grandeurs que l'on débite en morceaux et que l'on mesure. Les choses en seraient peut être restées là si les pythagoriciens, s'emparant des nombres pour en faire le principe de la Science, n'avaient échoué dans leur tentative de mesurer un simple segment : la diagonale d'un carré (en prenant le côté pour unité de longueur). Cette mésaventure invraisemblable conduit Eudoxe à la théorie des grandeurs et des proportions. Sur la base de ces deux concepts purement géométriques, les Grecs de l'époque classique ont construit toute une mathématique ignorant les nombres autres que 1, 2, 3 … Il fallut ensuite plus de deux millénaires pour que les hommes d'abord admettent l'idée puis construisent la théorie de ces nombres parfaitement insaisissables (les réels positifs capables d'exprimer la longueur d'un segment quelconque)* […]
> *Ainsi, c'est d'abord du projet et de la difficulté de mesurer des grandeurs que les nombres (autres que naturels) sont nés à travers une longue histoire. Mais paradoxalement, les mathématiques ont abouti au XIXe siècle à proposer des nombres rationnels d'abord et réels ensuite, une construction théorique libérée de toute considération relative aux grandeurs : ces nombres y sont étudiés en s'appuyant seulement sur la théorie des ensembles et celle des nombres naturels* ».

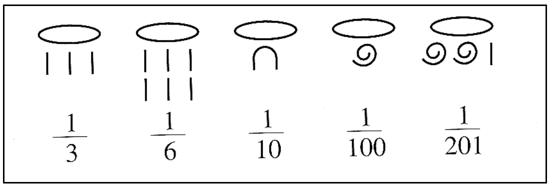
La mesure des grandeurs est, après le dénombrement, un objet important de travail pour les premiers mathématiciens de l'Antiquité. Mesurer des grandeurs (aires, volumes, masses, …) passe, à ce moment de l'histoire, par des démarches de comparaison faisant intervenir des nombres entiers.

Comme le soulignent Fénichel et Pauvert (1997), « *mesurer une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur de même type prise comme unité ; autrement dit, c'est compter combien de fois cette grandeur contient l'unité. Quand celle-ci est trop grande, on la divise pour obtenir une unité plus petite et apparaissent ainsi les rapports d'unités entières. Cette conception de la mesure se limitant aux nombres entiers a été systématisée par Pythagore* » .

La décomposition en parties de l'unité est très tôt apparue chez les hommes. Ainsi, les Égyptiens (près de 4000 ans avant notre ère) utilisaient déjà des fractions dont le numérateur valait exclusivement un (un demi, un quart …) sans toutefois leur donner le statut de nombres ; les fractions étaient considérées comme des opérateurs sur les nombres. En fait, comme le souligne Ermel (1997), pour un scribe, la fraction $\frac{3}{7}$ ne s'écrit pas car elle n'a pas valeur de résultat ; c'est davantage une opération à réaliser, un partage à effectuer (par exemple, partager trois pains entre sept soldats).
La fraction $\frac{3}{7}$ n'intéresse pas le scribe, ce qui compte pour lui c'est quels « quantièmes de pains » chacun de ces soldats doit recevoir.

Au niveau de l'écriture, il est vraisemblable que le codage des fractions ne fut pas immédiat (comme cela a également été le cas pour l'écriture des entiers). Dans la civilisation égyptienne, l'écriture d'une fraction se faisait à l'aide d'un hiéroglyphe particulier (« la bouche ») qui signifiait alors partie et qu'on plaçait sur le nombre de parts de l'unité :

Exemples :



Les choses en seraient peut-être restées là si les Pythagoriciens n'avaient pas découvert qu'il n'y avait pas toujours de commune mesure entre deux côtés (notamment qu'il n'était pas possible de mesurer la diagonale d'un carré, en prenant le côté pour unité de longueur).

Selon Rouche, cette découverte (les nombres naturels ne peuvent suffire à l'étude de la géométrie) est à l'origine de la scission historique entre la géométrie, qui s'occupera désormais des grandeurs, et l'arithmétique, qui s'occupera des nombres naturels. Il faudra attendre une vingtaine de siècles (publications, en 1872, de Dedekind sur la définition des nombres irrationnels et de Cantor, sur une autre construction des nombres irrationnels) pour que la mise au point d'autres univers de nombres (rationnels, réels) soit susceptible de réconcilier la géométrie avec les nombres.

Si les fractions sont couramment utilisées depuis plusieurs millénaires, il faudra attendre le IXe siècle pour voir des mathématiciens arabes utiliser de manière explicite les nombres décimaux et généraliser progressivement le concept de nombre aux rationnels et aux irrationnels positifs. Les mathématiciens arabes jouent un rôle fondamental dans le développement conceptuel des décimaux.

A la mort de Mahomet, les Arabes édifièrent un vaste empire, ce qui les amènera à découvrir et à assimiler rapidement les cultures et conceptions culturelles des civilisations qui les ont précédés.
Pour Taton (cité par Dubois, Fénichel & Pauvert, 1993), « *le peuple arabe a ainsi joué dans l'histoire de la science un rôle de tout premier plan : en conservant les trésors des sciences grecque et indienne et en leur donnant une nouvelle vie, un caractère original, il a permis le renouveau scientifique du Moyen-Age et le splendide épanouissement ultérieur* ». Ils reprendront à la civilisation indienne le principe de numération de position (notre numération actuelle) et les principales techniques opératoires qui vont les conduire aux nombres décimaux.

Une excellente connaissance de l'arithmétique indienne et un élargissement du concept de nombre à tous les rationnels vont permettre aux Arabes d'inventer les décimaux dont le codage décimal des parties de l'unité ne sera vulgarisé que beaucoup plus tard, vers le XIVe siècle (cfr. travaux d'Al-Kasi, mort en 1429).

En Europe, l'utilisation des décimaux est plus tardive. Ce n'est qu'au XVIe siècle que paraît le premier ouvrage concernant le concept de nombre décimal ; il s'agit de l'ouvrage de Simon Stevin, *La Disme* (1585). Dans ce dernier, il préconise de coder les décimaux comme suit : le nombre 8,934 sera écrit 8^{0} 9^{1} 3^{2} 4^{3}. Il remplace les procédures de calcul sur les fractions par des opérations sur les décimaux ; l'utilisateur des décimaux n'aura qu'à appliquer les procédures déjà valables pour les entiers. Il recommande également de développer un système de mesure cohérent avec ce système décimal (qui deviendra par la suite notre système métrique).

En pratique, il faudra toutefois attendre le XIXe siècle pour que le système métrique et les nombres décimaux soient imposés à la population française.

Chapitre 2 : Une démarche fondatrice : partir des erreurs des élèves

L'analyse mathématique, développée dans le chapitre précédent, a permis d'identifier différents paramètres à prendre en considération pour l'enseignement des rationnels. Dans ce deuxième chapitre, l'accent sera mis sur les élèves via l'analyse des difficultés qu'ils rencontrent dans la construction des rationnels.
Cette prise en considération des élèves au départ de l'analyse formative de leurs erreurs constitue une démarche fondatrice de la recherche en didactique des mathématiques. Une première section détaillera les raisons qui ont poussé les didacticiens à privilégier cette approche.
Pour pouvoir analyser des erreurs d'élèves, il faut leur proposer des items d'évaluation. Une deuxième section présentera les paramètres pris en considération pour développer des items d'évaluation diagnostique. Que faut-il entendre par évaluation diagnostique ? Quels liens peut-on établir entre les items proposés aux élèves et les éléments d'analyse développés dans le chapitre 1 ? Les réponses à ces deux questions constituent le cœur de la deuxième section de ce chapitre 2. Celle-ci débouchera tout naturellement sur la présentation d'items et l'analyse des réponses des élèves. C'est l'objet de la troisième section.
Une dernière section détaillera les tendances qui se dégagent de l'analyse formative des productions des élèves avec, en point de mire, une dernière question : quel peut être l'impact d'une maîtrise insuffisante des rationnels sur l'utilisation de ces derniers dans des opérations ?

1. Pourquoi s'intéresser aux erreurs commises par les élèves ?

Au moment d'ouvrir une réflexion sur le rôle et le statut des erreurs commises par les élèves, il convient de rappeler qu'il ne s'agit nullement d'attirer l'attention sur des niveaux de maîtrise qui seraient jugés insuffisants. Le but est bien de diagnostiquer le plus précisément possible la nature et l'origine de ces difficultés … afin d'y remédier.

L'intérêt pour l'analyse des erreurs doit être resitué dans une perspective constructiviste du processus d'apprentissage qui constitue le point de départ de toute la réflexion que nous avons menée au sein de l'espace de collaboration.

> « *L'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement le reflet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes et béhavioristes de l'apprentissage ; mais l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas imprévisibles, elles sont constituées en obstacles (…) Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens même de la connaissance acquise* » (Brousseau, 1998).

Les erreurs produites par les élèves ne s'expliquent pas simplement en termes de dysfonctionnement ou de manque de connaissance ; elles ne sont pas non plus le fruit du hasard. On constate très souvent qu'elles présentent une double caractéristique :

- elles sont **reproductibles** (on les retrouve quelle que soit la classe fréquentée) et témoignent d'une certaine persistance (apparemment ni les remarques, ni les tentatives de remédiation classique, ni les sanctions ne parviennent à les éradiquer) ;
- elles ne sont **pas isolées** ; elles peuvent être mises en relation avec d'autres erreurs et forment ainsi une sorte de réseau.

> Dans son entreprise de théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques, Brousseau met en évidence que les erreurs commises par les élèves sont liées à des obstacles d'origine ontogénique, épistémologique et/ou didactique.
>
> - Les ***obstacles d'origine ontogénique*** dépendent du développement psychogénétique des élèves ; les erreurs qu'ils entraînent s'expliquent alors en termes de limitation du sujet à un moment de son développement.
> - Les ***obstacles d'origine didactique*** sont *« ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet d'un système éducatif. Par exemple, la présentation actuelle des décimaux au niveau élémentaire est le résultat d'une longue évolution dans le cadre d'un choix fait par les encyclopédistes puis par la Convention (conformément à une conception qui remonte à Stevin lui-même) : compte tenu de leur utilité, les décimaux allaient être enseignés le plus tôt possible, associés à un système de mesure, et en se référant aux techniques d'opérations dans les entiers. Ainsi, aujourd'hui, les décimaux sont, pour les élèves, " des entiers naturels avec un changement d'unité ", donc des " naturels " (avec une virgule) et des mesures. Et cette conception, appuyée par une mécanisation de l'élève, va faire obstacle jusqu'à l'université à une bonne compréhension des réels (…)* » ;
> - Les ***obstacles d'origine épistémologique*** sont « *ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire que l'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus »* (Brousseau, 1998).

Les erreurs commises par les élèves ne doivent plus être envisagées du seul point de vue des élèves. Il convient plutôt de les analyser en les confrontant, d'une part, aux caractéristiques du savoir mis en jeu (par une meilleure prise en compte des obstacles d'origine épistémologique) et, d'autre part, aux pratiques d'enseignement et aux progressions didactiques développées pour enseigner ces savoirs (obstacles d'origine didactique).

L'hypothèse forte qui est ici privilégiée peut être formulée de la manière suivante : les erreurs commises par les élèves trouvent sans doute leur origine dans la complexité du concept de nombre rationnel (pour rappel, il a fallu près de 20 siècles aux mathématiciens pour arriver à une écriture décimale des rationnels). Cette complexité est insuffisamment prise en compte par les enseignants dans leur travail de planification, de conception et de gestion de situations d'apprentissage. Les activités qu'ils proposent à leurs élèves ne sont pas suffisantes pour faire obstacle à certaines représentations erronées de leurs élèves.

2. Comment diagnostiquer les difficultés rencontrées par les élèves ?

L'analyse mathématique développée dans le chapitre 1 a mis en évidence différents obstacles liés à la construction des rationnels. Cette étape est fondamentale dans la mise en place de pratiques d'évaluation diagnostique.

> L'évaluation diagnostique s'inscrit en rupture par rapport aux modalités d'évaluation classiques; en effet, ces dernières se déroulent en différé par rapport aux situations d'apprentissage qu'elles sont censées évaluer alors que l'évaluation diagnostique est, elle, préalable à des activités d'enseignement futures.
> Comme l'évaluation formative, elle ambitionne de fournir aux enseignants des informations leur permettant d'ajuster au mieux leur action éducative au profil pédagogique des élèves avec lesquels ils vont travailler puisque ce type d'épreuve va leur révéler ce que ces élèves maîtrisent comme compétences, sur base desquelles ils construiront les apprentissages futurs.

Les différents obstacles peuvent être regroupés de la manière suivante :

- la ***lecture et l'écriture décimale des rationnels*** : l'écriture décimale des rationnels ne peut être assimilée à l'écriture de deux naturels séparés par une virgule ;
    - la numération positionnelle n'est pas strictement parallèle des deux côtés de la virgule (le passage de « centaine à centième » ne va pas de soi : trois chiffres sont nécessaires pour écrire des centaines mais deux chiffres suffisent pour exprimer des centièmes) ;
    - les règles de comparaison sont différentes (outre le rôle des zéros, on rappellera que 15,8 > 15, 79 même si 8 < 79) ;
- ***des propriétés spécifiques aux rationnels*** et, notamment, la densité des rationnels et la prise en compte des phénomènes d'intercalation ;
- le ***passage d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire*** ; quels liens les élèves établissent-il entre « 0,7 » et « $\frac{7}{10}$ » ?

Une fois les sources de difficulté liées aux obstacles d'origine épistémologique identifiées, il reste à construire des items d'évaluation qui vont permettre de poser un diagnostic sur le niveau de maîtrise atteint par les élèves.

Pour réaliser ce travail, différents items sont présentés et analysés dans ce chapitre ; ils proviennent principalement d'une épreuve d'évaluation diagnostique construite par l'équipe de recherche. Elle a été administrée en début d'année scolaire (septembre 2006) dans des classes d'enseignants membres de l'espace de collaboration. Les données recueillies concernent 9 classes de 6^{e} primaire (142 élèves) et 7 classes de $1^{ère}$ secondaire (132 élèves) d'enseignants de l'espace de collaboration.

> Des mêmes items d'évaluation ont été proposés à des élèves inscrits en début de 6^{e} année primaire et à d'autres inscrits en $1^{ère}$ année secondaire. Il ne s'agit donc pas des mêmes élèves interrogés à deux moments différents de leur scolarité. Cela signifie donc qu'il n'est pas indiqué de comparer, sur un plan strictement quantitatif, les résultats obtenus.
> Il s'agit bien ici de mettre l'accent sur l'analyse des difficultés que rencontrent les élèves en cours d'apprentissage (cycle 10/12) afin d'aider leurs enseignants à en identifier la nature et l'origine.
> Les fréquences de bonnes réponses plus élevées, observées généralement en $1^{ère}$ secondaire, montrent d'ailleurs que le travail habituel des enseignants conduit un grand nombre de leurs élèves vers la maîtrise des compétences visées. Toutefois, cela ne suffit pas toujours et certaines lacunes subsistent. il importe également que l'enseignant du début du secondaire puisse identifier ce qui fait encore obstacle à une bonne maîtrise des rationnels. L'analyse formative des erreurs commises par les élèves en début de $1^{ère}$ secondaire se situe donc davantage dans une perspective de remédiation.

Au niveau de la représentativité des résultats, il convient d'être prudent car ces deux ensembles d'élèves n'ont pas été sélectionnés au terme de procédures d'échantillonnage statistique.

> Les différentes données recueillies sont à manier avec prudence. Elles ne peuvent être généralisées à l'ensemble de la population scolaire de référence comme cela se fait, par exemple, dans les différents dispositifs d'évaluation externe menés par le Service général du Pilotage du système éducatif de la Communauté française.
> On gardera néanmoins à l'esprit que la plupart des erreurs analysées dans ce document ne sont pas le fruit du hasard ; elles peuvent être mises en relation avec les variables didactiques au départ desquelles les items ont été construits.
>
> Au vu d'une certaine forme de « ségrégation » scolaire qui caractérise malheureusement notre système éducatif, il est par contre vraisemblable que la proportion d'élèves qui commettent ces erreurs varient d'une école (voire d'une classe) à l'autre. L'essentiel n'est pas là ; comme cela a déjà été précisé, il s'agit surtout de poser un diagnostic précis afin de pouvoir apporter un remède approprié.

Ce manque de représentativité nous a conduits à proposer également des analyses d'items provenant d'autres dispositifs d'évaluation portants sur un plus grand nombre d'élèves.

Il s'agit essentiellement des épreuves d'évaluation suivantes :

- Evaluations externes en mathématiques des élèves de 1ère (1996) et de 3e (2004) années secondaires (dispositifs mis en place par le Service de Pilotage du Ministère de la Communauté française) ;
- Evaluation cantonale de Mons (1997) administrée à plus de 2000 élèves[1].

La plus grande représentativité des données recueillies nous permettra de situer (voire de relativiser) certains constats formulés au terme de l'analyse des items de l'évaluation diagnostique. Autrement dit, cela vaut-il vraiment la peine de se préoccuper des erreurs observées lors de l'épreuve diagnostique ? Se retrouvent-elles à l'échelle de la Communauté française ? S'agit-il simplement d'erreurs ponctuelles liées aux caractéristiques des classes avec lesquelles nous avons travaillé ?

3. Que nous apprend l'analyse des réponses des élèves ?

L'ensemble des items d'évaluation utilisés sont repris en Annexe 1. Le tableau ci-dessous présente de manière synthétique les différentes sources de difficultés qui peuvent être appréhendées au départ des items d'évaluation analysés.

Sources de difficultés	Items
Lecture et écriture de rationnels	
• passer d'un système de désignation orale des décimaux à leur écriture chiffrée (et réciproquement) ;	1, 2, 3
• déterminer la valeur de chacun des chiffres d'un nombre décimal en fonction de sa position ;	4, 5, 6
• passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale des rationnels (et réciproquement).	7
Ordre sur les rationnels	
• comparer deux rationnels écrits sous une forme décimale ;	8
• ordonner des rationnels écrits sous une forme décimale et sous une forme fractionnaire ;	9, 10, 11, 12, 13
• intercaler un rationnel entre deux nombres (rationnels ou non) ;	14, 15, 16, 17
• situer des décimaux sur une (demi-) droite graduée	18, 19, 20, 21, 22

Afin de faciliter leur utilisation, il est possible de télécharger un fichier contenant les différents items de l'évaluation à l'adresse suivante : http://www.hypo-these.be/spip/
De la même manière, les tableaux statistiques contenant une analyse des principales modalités de réponses sont également téléchargeables.

L'analyse des différents items est organisée de la manière suivante :

---

[1] Stegen, P., Di Fabrizio, A. ; Renier, F. (1999). ***D'une épreuve cantonale en mathématiques vers de nouvelles pratiques didactiques – Evaluer la maîtrise des compétences numériques au sortir de l'école primaire***. Bruxelles : Ressort principal d'Inspection de Mons & Service de Didactique générale de l'Université de Liège.

- ***présentation des items et des résultats*** ; pour ne pas alourdir la présentation, on se contentera le plus souvent de fournir les statistiques suivantes : pourcentages respectifs de bonnes réponses, de réponses erronées et d'omissions. Ces données seront ventilées par année d'études (selon que les élèves sont inscrits en 6e primaire ou en première année secondaire) ;
- ***éléments d'analyse*** ou quels sont les constats généraux qui peuvent êtres tirés de l'analyse des productions des élèves ? Même si elles ne sont pas détaillées, il va de soi qu'une attention particulière a été accordée aux analyses des différentes réponses erronées produites par les élèves ;
- ***pour aller plus loin*** ou peut-on généraliser les observations ou les tendances qui se dégagent de l'analyse des réponses observées lors de l'épreuve d'évaluation diagnostique ? Quelles comparaisons peut-on établir avec des données issues d'autres dispositifs d'évaluation ?

3.1 La lecture et l'écriture des rationnels

Comme cela a été expliqué dans le premier chapitre, l'écriture à virgule doit être considérée comme un système économique de notation des rationnels qui facilite les calculs ; du point de vue des élèves, elle présente cependant un inconvénient majeur : elle masque leur véritable nature. En écho à ce constat, dans un premier temps, nous analyserons comment les élèves maîtrisent le passage d'une désignation orale à une désignation écrite des nombres décimaux. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à la manière dont les élèves maîtrisent le principe de numération de position pour l'écriture décimale des rationnels. Enfin, une attention particulière sera accordée à la manière dont les élèves passent d'un système d'écriture décimale à un système d'écriture fractionnaire des rationnels.

3.1.1 Passer d'un système de désignation orale des nombres à leur écriture chiffrée (et réciproquement)

Comment les élèves en début de 6P et 1S se débrouillent-ils lors du passage d'un système de désignation orale d'un nombre à son codage écrit ?

Deux items permettent d'aborder cette compétence,
- le premier demande aux élèves de passer d'un système de désignation orale à une écriture chiffrée
- pour le second, c'est l'inverse ; les élèves doivent passer de l'écriture mathématique à son expression française.

PRESENTATION DES ITEMS ET DES RESULTATS

Item 1

Ecris ces nombres à l'aide de chiffres.

A/ mille trois cent cinquante deux	....
B/ vingt-quatre centièmes	....
C/ cinq millièmes	....
D/ deux dixièmes	....
E/ dix unités cinq cent trente sept millièmes	....

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	15,5	8,3
	1	***83,1***	***91,7***
	9	1,4	0
B.	0	25,3	12,1
	1	***72,5***	***86,4***
	9	2,1	1,5
C.	0	23,2	10,6
	1	***74,6***	***88,6***
	9	2,1	0,8

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	21,8	11,3
	1	***76,1***	***87,9***
	9	2,1	0,8
E.	0	39,4	24,2
	1	***57,7***	***75***
	9	2,8	0,8

Comment lire et analyser ce tableau ?
L'exercice A (soit l'écriture en chiffres de « mille trois cent cinquante-deux ») a été réussi (code 1) par 83,1 % des élèves de sixième (6P) et 91,7 % d'élèves de première année secondaire (1S).
15,5 % d'élèves de 6P et 8,3 % d'élèves de 1S n'ont pas répondu correctement (code 0).
On observe enfin qu'1,4 % d'élèves de 6P et 0 % d'élèves d'1S n'ont pas répondu à cette question (code 9).

Item 2

Ecris ces nombres à l'aide de lettres.

A/ 567	....
B/ 0,452	....
C/ 0,09	....
D/ 20,14	....
E/ 0,7	....

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	11,3	2,3
	1	***85,2***	***97***
	9	3,5	0,8
B.	0	28,9	13,6
	1	***65,5***	***81,8***
	9	5,6	4,6
C.	0	27,5	10,6
	1	***66,9***	***84,9***
	9	5,6	4,5

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	29,6	17,4
	1	***64,8***	***78***
	9	5,6	4,5
E.	0	25,4	10,6
	1	***69,7***	***83,3***
	9	4,9	6

ELEMENTS D'ANALYSE

Ces deux items sont construits de manière assez semblables. Leur niveau de difficulté semble équivalent; dans les deux cas, les élèves doivent effectuer les tâches suivantes :

- écrire un entier assez simple ;
- écrire trois décimaux compris entre 0 et 1 et exprimés successivement en dixièmes, centièmes et millièmes ;
- écrire un décimal supérieur à 1.

Si on analyse les pourcentages de bonnes réponses en suivant cette classification, on peut dégager les ***constats généraux*** suivants :

- ***l'écriture des entiers est mieux maîtrisée que celle des décimaux*** (même si on n'est pas, et parfois loin de là, à un taux de réussite de 100 % – ce qui reste malgré tout interpellant) ;
- comme on pouvait s'y attendre, ***les taux de bonnes réponses sont supérieurs en 1S***[1]. Cela met en évidence la qualité du travail accompli par les enseignants de 6P mais, comme cela a déjà été précisé, ce travail ne permet pas à tous les élèves de maîtriser les compétences liées à l'écriture décimale des rationnels. Dans certains cas, près de 20 % des élèves de 1S échouent. Traduit à la réalité d'une seule classe, ce pourcentage représente, en moyenne, 4 élèves d'une classe qui en compte 20 ;

[1] Pour ne pas alourdir inutilement le texte, 6P désigne les résultats obtenus dans les classes en début de sixième année primaire et 1S désigne ceux observés en début de première année secondaire.

- ***les pourcentages de bonnes réponses sont globalement supérieurs lorsqu'il s'agit de passer du système de désignation orale des nombres à l'écriture chiffrée*** (ce phénomène est davantage marqué en 6P). Est-ce lié à des pratiques qui mettent davantage l'accent sur ce type de transcription ?
- ***Les scores de réussite les plus faibles sont observés lorsqu'il s'agit d'écrire un décimal supérieur à 1***. Ce dernier constat est assez étonnant. Il conviendrait sans doute de modifier cet item d'évaluation en y ajoutant d'autres décimaux supérieurs à 1 afin de vérifier si cette tendance se confirme.

Au delà de ces tendances générales, l'analyse des erreurs commises par les élèves met en évidence les quelques éléments suivants :

- ***l'écriture des entiers*** : on trouve encore, en début de 6P, des élèves qui éprouvent de grosses difficultés pour comprendre les principes de numération de position. Ainsi, « mille trois cent cinquante-deux » sera écrit « 100030052 » soit la juxtaposition de « 1000 », « 300 », « 52 ». Des variantes existent autour de ce principe général. On pourra aussi trouver « 1000352 », par exemple.
- ***l'écriture décimale des rationnels*** : au niveau des élèves de 6P , les erreurs les plus fréquentes peuvent être regroupées en trois grandes catégories :
    - ***suppression de la virgule*** : « vingt-quatre centièmes » s'écrit, pour ces élèves, « 24 » ; « cinq millièmes », « 5 » ou « 5000 » ;
    - ***écriture de la partie décimale selon les principes de numération de position de la partie entière*** : « 24 centièmes » s'écrira « 0,024 » car trois chiffres sont nécessaires pour écrire des centaines ... ;
    - ***confusion(s) au niveau du positionnement de la virgule*** : « vingt-quatre centièmes » est écrit, par exemple, de la manière suivante « 2,4 » ou, encore, « 2,04 ».
- ***le passage de l'écriture chiffrée au système de désignation orale :*** les pourcentages moindres de bonnes réponses s'expliquent, en partie, par le fait que nous n'avons pas considéré comme correct la transcription des décimaux de type « 0,452 » en « zéro virgule quatre cent cinquante-deux ». Ce phénomène est davantage marqué en 6P. Au vu de ces éléments, on ne peut que se réjouir de la volonté manifestée par de nombreux enseignants du cycle 10/12 de corriger leurs élèves quand ils désignent oralement le nombre « 7,32 » par l'expression « sept virgule trente-deux ». A juste titre, ils encouragent les élèves à désigner ce nombre par l'expression « sept unités trente-deux centièmes ».
- ***les rationnels supérieurs à 1*** : en 6P, au delà des trois types d'erreurs mentionnés précédemment, on retrouve des erreurs d'inattention ou à tout le moins de mauvaise lecture des différentes composantes du nombre. Ainsi, « dix unités cinq cent trente-sept millièmes » devient « 2,537 » ou « 10,357 ». Ces deux erreurs sont commises par plus de 10 % des élèves. Ce type d'erreurs se retrouve également, mais dans des proportions moindres, en 1S.

POUR ALLER PLUS LOIN

Un item assez similaire à l'item 1 a été proposé lors de l'examen cantonal de Mons.

Item 3

Entoure chaque fois le bon nombre écrit en chiffres !	
Onze mille cinquante	11 005 1 050 11 050 11 100 050
Trente-deux unités trois centièmes	32,3 32,03 32,003 32,0003
Sept unités trente-deux centièmes	7,320 7,032 7,302 7,0032

Que nous apprend l'analyse des réponses des 1991 élèves interrogés ?

Le principe de numération de position ne semble guère poser problème aux élèves tant qu'il s'agit de nombres entiers (98 % de bonnes réponses pour l'écriture du premier nombre). Les choses se présentent assez différemment lorsqu'on passe aux nombres à virgule, comme en témoigne la baisse sensible des taux de réussite pour les deuxième (88 % de bonnes réponses) et troisième nombres (70 % de bonnes réponses).

- Les 9 % élèves qui font correspondre " trente-deux unités trois centièmes " à " 32,003 " considèrent vraisemblablement, et cela constitue une source d'erreurs fréquentes, que la partie entière et la partie décimale de ce nombre fonctionnent selon le même principe de numération de position : **trois chiffres sont nécessaires pour écrire les centaines, il en faut par conséquent trois pour écrire les centièmes.**
- C'est d'autant plus vrai dans le troisième exercice qui piège les élèves puisque les " trente-deux centièmes " sont écrits mathématiquement sous la forme " trois cent vingt millièmes ". Dans ce cas, ils ne sont plus 9 % mais 27 % à commettre ce type d'erreur.
  Pour ces élèves, on peut émettre l'hypothèse qu'un " nombre à virgule " est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule. Le fait de lire " 32,03 " de la manière suivante " trente-deux virgule zéro trois " ne fait que renforcer cette conception erronée.

D'un point de vue mathématique, l'écriture des décimaux a l'avantage d'être « calquée » sur celle des entiers ; du point de vue de l'enseignement, cette caractéristique mérite que l'on s'y attarde car elle est source de difficultés non résolues pour 30 % des élèves sortant de l'école primaire.

3.1.2 Comprendre et utiliser le système de numération décimale pour l’écriture décimale des rationnels

Une autre manière d’évaluer la lecture ou l’écriture décimale des rationnels passe par un questionnement sur la valeur des chiffres qui composent un nombre.
Deux items permettent de vérifier la signification particulière que les élèves attribuent aux différents chiffres intervenant dans les écritures décimales des rationnels :

- dans l’Item 4, il est demandé aux élèves d’associer un chiffre donné à des expressions telles que unité, dixième, centième, … ;
- dans l’Item 5, c’est l’inverse, l’expression est donnée et l’élève doit associer le chiffre qui y correspond.

PRESENTATION DES ITEMS ET DES RESULTATS

Item 4

A/ Dans le nombre 0,321 que représente le chiffre « 1 » ? ....

B/ Dans le nombre 130,9 que représente le chiffre « 3 » ? : ....

C/ Dans le nombre 6,78 que représente le chiffre « 8 » ? ....

D/ Dans le nombre 23,456 que représente le chiffre « 4 » ? ....

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	20,4	9,1
	1	*79,6*	*90,9*
	9	0	0
B.	0	17,6	16,7
	1	*82,4*	*83,3*
	9	0	0

	Code	% 6P	% 1S
C.	0	30,3	20,4
	1	*69,7*	*79,6*
	9	0	0
D.	0	28,2	17,4
	1	*71,1*	*82,6*
	9	0,7	0

Item 5

A/ Entoure le chiffre des unités dans le nombre suivant :	35,678
B/ Entoure le chiffre des centièmes dans le nombre suivant :	6,192
C/ Entoure le chiffre des millièmes dans le nombre suivant :	40,2903

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	13,4	10,6
	1	*82,4*	*87,1*
	9	4,2	2,3
B.	0	27,5	18,9
	1	*68,3*	*80,3*
	9	4,2	0,8
C.	0	28,9	16,7
	1	*66,9*	*81,8*
	9	4,2	1,5

ELEMENTS D’ANALYSE

Les deux items peuvent être analysés au départ des variables didactiques suivantes :

- l'analyse de la valeur des chiffres porte sur la partie entière (par exemple, item 4B) ou sur la partie décimale (par exemple, item 5C) ;
- l'analyse porte sur la partie décimale et la valeur du chiffre à identifier se situe (par exemple, item 4A) ou non (par exemple, item 5B) « le plus à droite » de l'expression numérique.
- les nombres à analyser sont limités (par exemple, item 4D) ou non aux millièmes (par exemple, item 5C) comme cela est recommandé pour l'évaluation des compétences des élèves sortant de l'école primaire.

L'analyse globale des résultats fait apparaître les constats suivants :

- on note à nouveau que les ***résultats sont globalement supérieurs en 1S*** (voir remarque page 29). Le parallélisme ne s'arrête pas là puisque l'on constate également que près de ***20 % des élèves de 1S éprouvent encore des difficultés dans la maîtrise de cette compétence de base*** ;
- les ***variations parfois importantes de réussite*** observées lors de l'analyse de l'écriture des différents nombres est révélatrice des difficultés rencontrées par les élèves :
    - le meilleur taux de réussite observé en 6P porte sur l'identification de la valeur d'un chiffre de la partie entière du nombre (exemple : le valeur du « 3 » de « 130,9 »). Cela n'est sans doute pas étonnant. Par contre, en 1S, le meilleur taux de réussite est obtenu lorsque l'analyse porte sur un rationnel compris entre 0 et 1 (premier nombre de l'item 4). Ce constat peut être mis en parallèle avec des observations similaires effectuées lors de l'analyse des items 1 et 2 (voir page 30);
    - au niveau de la 6P, les résultats le plus faibles sont observés au niveau de l'analyse des deux derniers nombres de l'item 5. C'était assez prévisible si l'on garde à l'esprit que de nombreux élèves considèrent qu'un décimal s'écrit au départ de deux entiers séparés par une virgule. Dans le cas de « 6,192 », le chiffre des centièmes est associé erronément au « 1 » et non au « 9 ». Un raisonnement similaire peut être établi avec le chiffre des millièmes pour l'analyse de « 40,2903 ».
    - parmi les scores faibles observés en 1S, il y a l'analyse du troisième nombre de l'item 4 (« quelle est la valeur du « 8 » dans « 6,78 » ?). Pour près de 10 % des élèves de 1S, le « 8 » désigne les dixièmes.

Un petit retour sur la notion d'obstacle didactique via l'analyse des items proposés aux élèves afin de diagnostiquer leur niveau de maîtrise est nécessaire.
Comme on l'a déjà souligné, pour comparer des nombres, des élèves utilisent la stratégie suivante : ils utilisent la partie décimale comme un entier puis remplacent le suffixe « aine » par le suffixe « ième ». Dizaine devient ainsi dixième. Il convient de souligner que cette stratégie conduit à la réussite dans certains cas. Pour un nombre décimal ayant deux chiffres après la virgule, « 6,78 » par exemple, le chiffre des dizaines dans « 78 » est le même que le chiffre des dixièmes dans « 6,78 ».

POUR ALLER PLUS LOIN

Au vu des analyses qui précèdent, il faut bien constater que tous les élèves ne maîtrisent pas parfaitement la lecture et l'écriture décimale des rationnels au sortir de l'école primaire.
Ce phénomène n'est pas particulier à la Communauté française de Belgique. Lors d'une épreuve d'évaluation CM2/6^{e} proposée en 1996 à l'ensemble des écoliers français, les chercheurs ont pu observer les taux de réussite suivants à l'entrée en 6^{e} (première année de Collège en France) :

Item 6

Le maître a écrit au tableau le nombre 403,651 que les élèves doivent copier dans leur cahier. Marion, Baptiste, Sonia et Romain se sont trompés chacun sur un chiffre en recopiant ce nombre. a) Sonia a écrit 403,751. Elle a changé le chiffre des …. b) Marion a écrit 413,651. Elle a changé le chiffre des … c) Baptiste a écrit 403,681. Il a changé le chiffre des … d) Romain a écrit 9 comme chiffre des dixièmes. Au lieu de 403,651 il a écrit …

La question b porte sur un chiffre de la partie entière tandis que toutes les autres sur un chiffre de la partie décimale. Sans surprise, c'est la question b la mieux réussie mais le taux de bonnes réponses n'est que de 64 %. Pour les autres questions, le pourcentage de bonnes réponses est tout à fait équivalent ; il est compris entre 45 et 50 %.

3.1.3 Passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire (et réciproquement)

Les décimaux sont des rationnels dont le dénominateur est une puissance de 10. La possibilité de coder un rationnel par une infinité de fractions d'entiers a été évoquée précédemment. L'item suivant permet de vérifier comment cette double caractéristique est maîtrisée par les élèves.

PRESENTATION DE L'ITEM ET DES RESULTATS

Item 7

Complète le tableau suivant :

Ecriture fractionnaire		Ecriture décimale
A/ $\frac{1}{2}$	=	………
B/ ………	=	0,25
C/ ………	=	0,125
D/ $\frac{3}{10}$	=	………
E/ $\frac{56}{1000}$	=	………
F/ $\frac{5}{4}$	=	………

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	22,5	12,9
	1	***68,3***	***83,3***
	9	9,1	3,8
B.	0	14,1	8,3
	1	***78,2***	***86,4***
	9	7,8	5,3
C.	0	34,5	13,6
	1	***50,7***	***77,3***
	9	14,8	9,1

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	23,9	12,1
	1	***65,5***	***78,8***
	9	10,6	9,1
E.	0	42,2	22
	1	***44,4***	***62,1***
	9	13,4	15,9
F.	0	57,7	29,5
	1	***21,8***	***53,8***
	9	20,4	16,7

ELEMENTS D'ANALYSE

Cet item est construit au départ des variables didactiques suivantes :

- 4 exercices permettent d'évaluer le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale d'un rationnel ;
    - deux exercices portent sur l'écriture décimale de fractions dont le dénominateur est une puissance de 10 ;
    - deux exercices portent sur l'écriture décimale d'une fraction dont le dénominateur n'est pas exprimé au départ d'une puissance de 10 ;
    - on note également qu'une des fractions est supérieure à l'unité.
- 2 exercices portent sur le passage de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire. Dans les deux cas, le rationnel est inférieur à 1.

L'analyse globale des résultats fait apparaître les éléments suivants :

- les taux de bonnes réponses sont inférieurs à ceux observés lors de l'analyse de l'écriture décimale des rationnels ;
- le passage d'une écriture à l'autre ne va pas de soi même en 1S. On constate ainsi que près de 20 % des élèves de 1S ne savent pas écrire correctement $\frac{1}{2}$ sous la forme d'une écriture décimale ;
- ces pourcentages de bonnes réponses chutent à un peu plus de 50 % lorsqu'il s'agit de traduire, sous une écriture décimale, le rationnel $\frac{5}{4}$ (soit la fraction supérieure à l'unité).

A priori, les rationnels proposés dans cet item ne présentent guère de difficultés ; l'analyse des résultats globaux montre que de (trop) nombreux élèves échouent dans ce type de tâches.

Quelle serait la nature des erreurs commises par les élèves ?

L'analyse formative des réponses erronées fait apparaître les constats suivants :

- plus de 10 % des élèves de 6P traduisent la fraction $\frac{1}{2}$ par le décimal 1,2. Ce raisonnement incorrect se rencontre également, mais dans des proportions moindres, en 1S ;
- ce type d'erreurs se retrouve chaque fois que ces élèves doivent passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale ;
- un autre indice des difficultés rencontrées par les élèves est le taux de non réponse observé pour les exercices les moins bien réussis.

Des faibles pourcentages de réussite et des taux importants de non réponse semblent traduire un manque de familiarité des élèves avec ce type de tâches. Pour expliquer les erreurs les plus fréquemment commises, un certains parallélisme peut être établi avec la représentation erronée d'un décimal considéré par les élèves comme un couple d'entiers séparés par une virgule. Il semble bien que certains élèves étendent cette conception erronée aux écritures fractionnaires : une fraction serait bien constituée de deux entiers séparés, cette fois, par une « barre de fraction».

Brissiaud (1998) voit dans ces résultats les conséquences de pratiques d'enseignement qui privilégient un seul aspect de la notion de fraction, celui du fractionnement d'une unité.
Selon lui, il importe de favoriser des actions de fractionnement de pluralité d'objets afin d'amener les élèves à concevoir que l'expression 3/4 ne désigne pas uniquement une unité partagée en quatre parts équivalentes dont on en prélève trois. Il peut également s'agir de trois objets partagés entre quatre personnes. Dans cette perspective, 3/4 ne renvoie pas seulement à « 3 × 1/4 » mais aussi à « 3 : 4 ».
Nous aurons l'occasion d'approfondir cette réflexion dans la présentation des pistes de re-médiation.

3.2 La maîtrise de l'ordre sur les rationnels (comparer, classer, ordonner, situer)

Au cycle 10/12, les activités de comparaison occupent une place non négligeable dans l'enseignement des décimaux. Il s'agit en effet d'aider les élèves à maîtriser le sens des écritures afin de pouvoir notamment ordonner, intercaler et encadrer des rationnels. Dans un premier temps, nous analyserons comment les élèves se débrouillent dans ce type d'activités. Nous nous intéresserons ensuite à la droite numérique. Celle-ci apparaît comme un outil incontournable pour aider les élèves à appréhender ce qu'il est convenu d'appeler la densité des rationnels. L'utilisation et la maîtrise de ce référent feront également l'objet d'une analyse détaillée.

3.2.1 Comparer des rationnels écrits sous une forme décimale

Une des manières les plus classiques d'évaluer cette compétence consiste à demander aux élèves de comparer des couples de nombres décimaux.

PRESENTATION DE L' ITEM ET DES RESULTATS

Item8

Voici des paires de nombres.
Pour chaque paire, s'il y a un nombre plus grand que l'autre, entoure-le.
Si les nombres sont égaux, place un signe « = » entre eux.

A/	0,4	0,71	H/	2,91	2,6
B/	0,009999	0,010	I/	2,16	2,1620
C/	1,05	1,3	J/	5,3	5,02
D/	0,5	0,04	K/	4,5	4,08
E/	2,6	2,06	L/	1,39	1,7
F/	4,45	4,4510	M/	2,342	2,341675
G/	0,03	0,3	N/	3,19	3,5

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	5,6	7,6
	1	***93***	***91,7***
	9	1,4	0,8
B.	0	28,9	6,8
	1	***69,7***	***92,4***
	9	1,4	0,8
C.	0	14,8	6,1
	1	***84,5***	***92,4***
	9	0,7	1,5
D.	0	9,9	5,3
	1	***89,5***	***92,4***
	9	0,7	2,3
E.	0	19,7	9,9
	1	***79,6***	***89,4***
	9	0,7	0,8
F.	0	14,7	14,4
	1	***84,5***	***82,6***
	9	0,7	3
G.	0	17,6	8,3
	1	***81,7***	***90,1***
	9	0,7	1,5

	Code	% 6P	% 1S
H.	0	9,1	6,8
	1	***90,1***	***92,4***
	9	0,7	0,8
I.	0	14,8	15,2
	1	***85,2***	***83,3***
	9	0	1,5
J.	0	4,9	3,8
	1	***95,1***	***95,5***
	9	0	0,8
K.	0	14,1	8,3
	1	***85,9***	***90,9***
	9	0	0,8
L.	0	20,4	11,4
	1	***76,8***	***87,9***
	9	2,8	0,8
M.	0	43,7	15,9
	1	***54,9***	***81,8***
	9	1,4	2,3
N.	0	19	10,6
	1	***78,9***	***88,6***
	9	2,1	0,8

ELEMENTS D'ANALYSE

Avant d'entrer dans l'analyse des réponses des élèves, il convient de dire quelques mots sur la manière dont cet item a été construit. Les différents couples de décimaux à comparer peuvent en effet être catégorisés de la manière suivante :

- tous les couples de décimaux présentent une même partie entière ; par contre leur partie décimale est à chaque fois exprimée au départ d'un nombre différent de décimales. Ainsi, par exemple, les élèves doivent comparer le couple de nombres suivants : « 0,4 » et « 0,71 ». Les deux parties entières sont bien équivalentes. Toutefois, la partie décimale du premier nombre est limitée aux dixièmes tandis que, pour le second, elle est limitée aux centièmes.
- cette différence entre l'expression des parties décimales permet de mettre en jeu différentes variantes. Parmi celles-ci, on relève :
  - une première série de comparaisons pour vérifier l'hypothèse selon laquelle les élèves considèrent qu'un nombre décimal est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule. Selon ce raisonnement, les parties entières étant équivalentes, les élèves vont utiliser uniquement la partie décimale et affirmer, par exemple, que 1,12>1,3 car 12 >3 … ce qui est évidemment erroné. Ce raisonnement erroné peut conduire malgré tout à la bonne réponse pour les items A et H mais à une réponse incorrecte pour les items M et N.
  - une deuxième série de comparaisons pour appréhender la manière dont les élèves perçoivent ce que l'on pourrait appeler « le rôle du zéro » dans la numération décimale de position. C'est le cas des comparaisons E et G.
  - les items C, D, J, K pour évaluer l'impact d'une combinaison des deux premières variations ;
  - les items F et I pour vérifier un autre raisonnement erroné construit par les élèves : « plus il y a de décimales plus le nombre est petit » … ce qui ne se révèle pas correct pour les deux items proposés mais bien pour les items B et M.

L'analyse globale des résultats fait apparaître les constats suivants :
- les pourcentages de bonnes réponses sont supérieurs en 1S sauf pour les comparaisons F et I (analyse de l'hypothèse erronée : « plus il y a de décimale plus le nombre est petit »). Ce constat est assez surprenant ;
- globalement les taux de bonnes réponses sont quantitativement supérieurs à ceux observés lors des précédents items. Sans doute, ce constat peut-il s'expliquer par la familiarité de ce type de tâches pour les élèves ;
- en 6P, deux comparaisons présentent un taux de mauvaises réponses plus importants. Il s'agit des comparaisons B et M qui mettent en jeu des décimaux peu rencontrés par les élèves (la partie décimale va au-delà du millième alors que les Socles de compétences recommandent de ne pas dépasser le millième).
- en ce qui concerne la première variation, on note que le pourcentage moyen de bonnes réponses obtenus aux comparaisons A et H est légèrement supérieur à celui observé aux comparaisons M et N. Cela se vérifie aussi pour les items J et D, d'une part, et, C et K, d'autre part.

3.2.2 Classer des nombres décimaux limités au millième

Plutôt que de demander aux élèves de comparer des nombres deux par deux, on peut aussi leur demander de sérier un ensemble de nombres.

PRESENTATION DE L'ITEM ET DES RESULTATS

Item9

Voici six nombres :

2,05 2,4 2,008 2,27 2,119

Ecris-les du plus petit au plus grand :

……. ……. ……. ……. …….

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	54,2	28,8
	1	***43,7***	***70,4***
	9	2,1	0,8

ELEMENTS D'ANALYSE

On pourrait croire que ce classement de nombres ne constitue une tâche guère plus difficile que celle de comparer des nombres deux à deux … et pourtant, moins d'un élève sur deux en 6P et seulement 7 élèves sur 10 de 1S produisent un classement correct.

L'analyse formative des réponses est difficile car les élèves ont été très « créatifs » ; on relève pas moins de 30 suites différentes proposées par les élèves de 6P et un peu plus de 20 pour les élèves de 1S. Les taux importants de réponses erronées et la grande diversité des réponses produites constituent un indice du manque de maîtrise observé chez les élèves.

Parmi les erreurs les plus fréquemment produites, on retrouve des variations autour de la suite suivante : « 2,008-2,119-2,05-2,27-2,4 » ou « 2,119-2,008-2,05-2,27-2,4 » soit des élèves qui commencent par placer les nombres exprimés en millièmes puis ceux qui s'expriment en centièmes puis et, enfin, ceux qui s'expriment en dixièmes. Cette stratégie, non pertinente, est utilisée, dans ses différentes variantes, par près de 15 % des élèves de 6P et 11 % d'élèves d'1S. A noter qu'une variante de cette stratégie leur permet presque de classer les 5 nombres correctement ! Il importe vraiment de bien analyser les différents distracteurs proposés aux élèves.

D'autres stratégies peuvent être identifiées mais avec des déclinaisons multiples ; sans surprise, elles tournent autour de la représentation erronée que les décimaux fonctionnent comme des couples d'entiers.

POUR ALLER PLUS LOIN

Ces résultats ne sont pas isolés ni spécifiques aux classes avec lesquelles nous avons travaillé. On retrouve ainsi des résultats fort proches lors de l'épreuve de Mons : un taux global de réussite tournant autour des 70 % et une très grande disparité de réponses (pour une question relativement fermée).

Item10

Voici quatre nombres :

8,10	**8,01**	**8,121**	**8,6**

Ecris-les du plus petit au plus grand :

Moins de 70 % des élèves interrogés se révèlent capables d'ordonner correctement cette suite de 4 nombres. L'analyse des suites erronées fait apparaître deux conceptions erronées majeures :

- la partie décimale fonctionne selon les mêmes principes que la partie entière (exemple de suite produite : « 8,01 – 8,6 – 8,10 – 8,121 ») ;
- « plus il y a de chiffres après la virgule, plus le nombre est petit » (exemple de suite produite : « 8,121 – 8,01 – 8,10 – 8,6 »).

On notera également que ces deux conceptions erronées peuvent se combiner dans la tête de certains élèves ; notamment chez ceux qui produisent la suite « 8,121 – 8,01 – 8,10 – 8,6 ».

3.2.3 Classer des entiers et des rationnels

Les activités de classement de nombres ne sont pas réservées aux seuls naturels et/ou décimaux.

PRESENTATION DE L'ITEM ET DES RESULTATS

Item11

Voici six nombres :

$$2 \qquad \frac{3}{2} \qquad 0,83 \qquad -2 \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{2}{10}$$

Ecris-les du plus petit au plus grand :

....

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	78,2	54,5
	1	***14,1***	***40,1***
	9	7,8	5,3

ELEMENTS D'ANALYSE

Le classement de nombres décimaux pose des problèmes aux élèves ; le passage d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire également. Il n'est donc pas étonnant de constater de très faibles taux de bonnes réponses lorsque l'on propose aux élèves un item dont la résolution passe par l'articulation de ces deux tâches.

L'analyse des suites erronées est à nouveau difficile en raison de la très grande « créativité » des élèves (plus de 50 suites différentes ont été observées en 1S).

Il est toutefois à noter que ce n'est pas la présence d'un nombre négatif qui pose le plus de problèmes aux élèves ; il sont un peu moins de 10 % à n'avoir pas positionné ce nombre en premier lieu.

Pour le reste, ils sont plus de 15 % en 1S à utiliser la stratégie suivante : positionner à la suite du négatif, le décimal puis toutes les écritures fractionnaires (avec de multiples variantes dans le classement de ces 3 nombres) et, enfin, le nombre 2.

Une proportion assez semblable d'élèves de 1S placent $\frac{3}{2}$ en dernier lieu. Faut-il y voir le raisonnement erroné selon lequel ce nombre pourrait s'écrire sous la forme de 3,2 et être ainsi considéré comme le nombre le plus grand ?

POUR ALLER PLUS LOIN

Les résultats obtenus lors de cette épreuve diagnostique doivent être mis en parallèle avec ceux observés lors de l'épreuve d'évaluation externe de mathématiques réalisée à l'entrée de la troisième année secondaire (Service de pilotage, 2005).

A cette occasion, les deux items suivants ont été proposés aux élèves de l'ensemble des écoles de la Communauté française :

Item 12

Parmi les propositions suivantes, quelle est celle où les nombres sont classés du plus petit au plus grand ?

A/	0,345	0,19	0,8	$\frac{1}{5}$
B/	0,19	$\frac{1}{5}$	0,345	0,8
C/	0,8	0,19	$\frac{1}{5}$	0,345
D/	$\frac{1}{5}$	0,8	0,345	0,19

Cet item plus simple (de par la nature de la tâche – choisir – et le choix des nombres et des écritures), est réussi par 70 % des élèves qui se situent à ce moment en début de 3^{e} année secondaire.

Quant à l'item suivant :

Item 13

Voici 5 nombres,

–3,650	1^3	0,375	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{5}$	3,450

Ecris-les du plus petit au plus grand

Il est certes plus difficile (ne fut-ce que par la présence d'un nombre élevé à une puissance) mais il faut bien constater que le taux de réussite est, cette fois, inférieur à 50 %.

3.2.4 Intercaler un décimal entre deux décimaux ou entre deux entiers

Les tâches de comparaison de plus en plus fines proposées aux élèves permettent d'aller à la rencontre d'une caractéristique essentielle des rationnels : leur densité. Dans ce cas précis, il est moins question de savoir si telle partie décimale est plus grande ou plus petite qu'une autre mais davantage si un nombre se situe bien entre deux nombres donnés.
Deux items assez similaires sont proposés aux élèves ; *a priori*, ils diffèrent essentiellement par la complexité des nombres en jeux :

- dans le premier cas, il s'agit de vérifier si un décimal peut s'intercaler entre deux décimaux exprimés en dixièmes ;
- le second item est plus complexe ; la valeur de l'intervalle n'est pas habituelle (il ne s'agit pas de deux nombres que l'on positionne de manière précise sur une droite numérique) et la valeur des deux bornes est exprimée en millièmes.

PRESENTATION DES ITEMS ET DES RESULTATS

Item 14

Ci-dessous, entoure les nombres compris <u>entre 3,5 et 3,7</u> .

A/ 3,4	B/ 3,51	C/ 3,705
	D/ 3,75	
E/ 3,659		F/ 3,6

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	15,5	10,6
	1	***82,4***	***89,4***
	9	2,1	0
B.	0	25,3	13,6
	1	***72,5***	***86,4***
	9	2,1	0
C.	0	5,6	2,3
	1	***92,2***	***97,7***
	9	2,1	0

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	41,5	15,1
	1	***56,3***	***84,9***
	9	2,1	0
E.	0	4,9	3,8
	1	***93***	***96,2***
	9	2,1	0
F.	0	2,8	2,3
	1	***95***	***97,7***
	9	2,1	0

Item 15

Ci-dessous, entoure les nombres compris entre 6,382 et 6,405 .

A/ 6,389		B/ 6,37
	C/ 6,3	D/ 6,392
E/ 6,4		F/ 6,39

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	5,6	5,3
	1	***92,2***	***93,2***
	9	2,1	1,5
B.	0	7,7	3,8
	1	***90,1***	***94,7***
	9	2,1	1,5
C.	0	12,7	6,8
	1	***85,2***	***91,7***
	9	2,1	1,5

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	8,5	5,3
	1	***89,5***	***93,2***
	9	2,1	1,5
E.	0	45,8	19,7
	1	***52,1***	***78,8***
	9	2,1	1,5
F.	0	37,3	15,9
	1	***60,6***	***82,6***
	9	2,1	1,5

ELEMENTS D'ANALYSE

Contrairement à ce qui était annoncé, on n'observe pas de diminution du taux de bonnes réponses lors du passage d'un item à l'autre. Globalement, ils sont assez bien réussis à l'une ou l'autre exception.

Au vu de la simple comparaison des pourcentages de bonnes réponses, on relève un constat assez surprenant. Il semble plus facile aux élèves d'affirmer que « 3,705 » n'est pas compris entre « 3,5 » et « 3,7 » que d'effectuer un raisonnement semblable pour « 3,75 ».

Dans une moindre mesure, il parait tout aussi étonnant de constater que presque tous les élèves sont capables de considérer que « 3,6 » est bien compris entre « 3,5 » et « 3,7 » mais manifestement, il est plus difficile de considérer que « 3,4 » n'est pas compris entre ces deux bornes.

Ces observations se confirment lors de l'analyse du deuxième item; les taux de bonnes réponses, notamment en 6P, sont assez différents lorsqu'il s'agit de définir si « 6,392 » ou « 6,4 » se situent bien entre les deux bornes proposées. A nouveau, il semble plus facile de se prononcer pour « 6,392 » que pour « 6,4 ».

POUR ALLER PLUS LOIN

Pour essayer de mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves, analysons un des items proposés lors de l'épreuve cantonale de Mons. A cette occasion, il leur était demandé d'encadrer un décimal donné par deux entiers (une situation en quelque sorte inverse à celle demandée lors de l'épreuve diagnostique).

Item 16

Complète le tableau suivant

NOMBRE ENTIER QUI VIENT JUSTE AVANT	NOMBRE DECIMAL	NOMBRE ENTIER QUI VIENT JUSTE APRES
	631,2	
	742,75	
	1000,09	

Près de 30 % des élèves interrogés se révèlent incapables, au sortir de la 6P, de préciser le nombre entier " *qui vient juste avant* " le " nombre à virgule " donné. Par contre, par rapport à ce même nombre décimal, ils ne sont plus que 20 % à échouer lorsqu'on leur demande " *quel est le nombre entier qui vient juste après* ". Autrement dit, **il semble bien, au vu de ces items, qu'il soit plus difficile de préciser le nombre entier qui précède immédiatement le " nombre à virgule " donné que de préciser celui qui suit immédiatement.**

Si on s'intéresse maintenant aux types d'erreurs les plus souvent rencontrés, on observe les phénomènes suivants :

- d'une part, les taux de réussite plus faibles constatés pour la définition de la borne inférieure s'expliquent par **la présence d'un grand nombre d'élèves (15 %) qui enlèvent systématiquement une unité** (« 630 »). Ce comportement ne se retrouve pas lors de la définition de la borne supérieure; on ne retrouve pas d'élèves qui ajoutent systématiquement une unité;
- d'autre part, certaines réponses comme " 631,1 ", " 631,19 ", ... font penser que les élèves ne maîtrisent pas le concept de " nombre entier " puisque **la réponse chaque fois produite est un " nombre à virgule "**;
- enfin, et c'est sans doute la catégorie d'erreurs la plus préoccupante, un petit nombre d'élèves, pour répondre à ces items, **suppriment purement et simplement la virgule** (en ajoutant ou retranchant une unité selon les cas). On obtient ainsi des réponses telles que " 6312 ", " 6311 ", ...

Au delà du problème de vocabulaire ou de définition, les résultats observés mettent en évidence que la propriété de densité des décimaux n'est pas suffisamment travaillée à l'école primaire.
Les résultats observés auprès des élèves des classes avec lesquelles nous avons travaillé se retrouvent en partie confirmés par l'analyse d'un item proposé lors de l'Epreuve externe en mathématiques des élèves de 1ère année secondaire, menée en 1996 par la Cellule de Pilotage.

Item 17

Dans la case vide, écris un nombre compris entre les deux nombres donnés.

A/

72		75

B/

48,7		49,7

C/

72,4		72,5

Les deux premiers exercices ne posent guère de problèmes aux élèves ; on observe (pour l'ensemble de la population de référence) des pourcentages de bonnes réponses de respectivement 95 et 86 %. Ces taux de réussite chutent à 74,4 % pour la dernière intercalation qui présente les mêmes caractéristiques que celles analysées précédemment (les nombres proposés ont la même partie entière).

Sans doute serait-il intéressant de proposer de nouveaux items aux élèves afin de pouvoir analyser plus finement les difficultés rencontrées.
Une piste à creuser serait de travailler sur les bornes de l'intervalle et demander aux élèves d'intercaler un nombre entre « 51 » et « 52 » puis entre « 8,12 » et « 8,2 » ou entre « 8,241 » et « 8,3 » avant de revenir vers des bornes comparables à celles proposées lors de l'évaluation diagnostique.
Une autre piste passe sans doute par un travail au départ de questions de ce type :
Combien peut-on écrire de nombres différents entre

- 123 et 125 ? : ....
- 56 et 57 ? : ....
- 3,932 et 3,933 ? : ....

Une autre piste de travail passe peut-être aussi par le recours plus systématique à un référent tel que la droite numérique pour aborder la question de la densité des décimaux.

3.2.5 Situer des rationnels sur une droite numérique

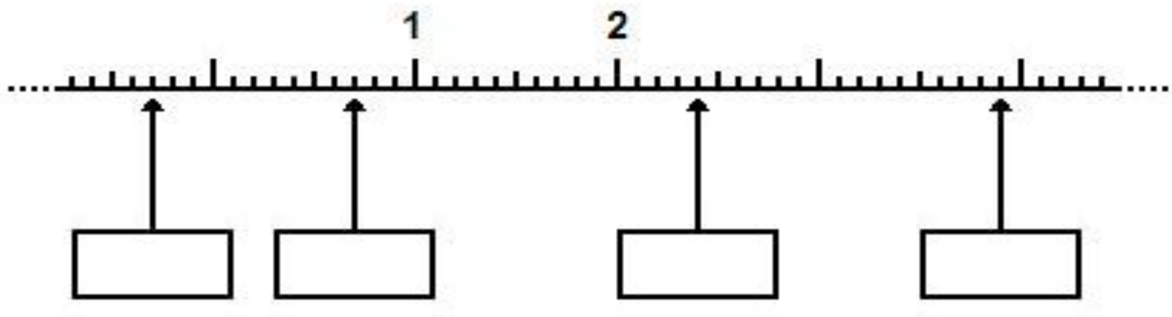
Les résultats présentés ci-dessus mettent en évidence les difficultés éprouvées par les élèves lors de la construction du principe d'intercalation. D'un point de vue psychologique (obstacle d'origine ontogénique), il y a là sans doute un passage délicat à négocier : celui des grandeurs discrètes vers les grandeurs continues.
Traditionnellement, la droite numérique est l'outil privilégié pour faciliter la comparaison des décimaux et établir le principe d'intercalation.

PRESENTATION DE L' ITEM ET DES RESULTATS

Un item assez classique a été proposé aux élèves ; il s'agissait de situer des rationnels (écrits sous une forme décimale) sur une droite numérique.

Item18

Ecris les nombres dans les cases vides.



A/ B/ C/ D/

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	78,9	68,9
	1	***2,1***	***23,5***
	9	19	7,6
B.	0	28,2	12,1
	1	***69,7***	***86,4***
	9	2,1	1,5
C.	0	14,8	6,8
	1	***83,1***	***91,7***
	9	2,1	1,5
D.	0	16,9	4,5
	1	***80,3***	***93,9***
	9	2,8	1,5

ELEMENTS D'ANALYSE

On peut relever les constats généraux suivants :

- le premier nombre identifié (« –0,3 ») est source de très nombreuses erreurs tant en 6P qu'en 1S ;
- les trois autres nombres à identifier ne posent plus trop de problèmes aux élèves de 1S. On note toutefois qu'il semble plus difficile aux élèves d'identifier un nombre compris entre 0 et 1 qu'un nombre compris entre 2 et 3.

Parmi les erreurs observées pour l'identification du premier nombre, on retrouve « 0,07 » ou « 0,03 ». C'est vrai pour 33 % des élèves de 6P et un peu moins de 20 % des élèves de 1S.
On note également des taux de non réponse importants.

Quelle(s) hypothèse(s) peut-on formuler pour expliquer ce constat ?

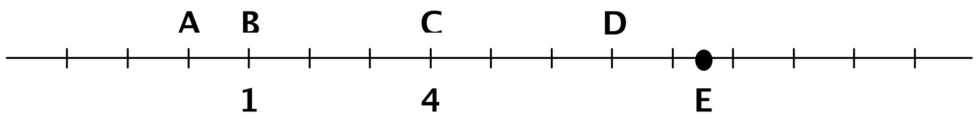
Cet item n'a pas été construit au hasard. Parmi les variables didactiques privilégiées, il y a notamment les éléments suivants :

- c'est une droite numérique qui est proposée aux élèves et non une demi-droite qui a pour origine 0 ;
- au niveau des repères proposés pour déterminer la valeur de l'intervalle, on retrouve les entiers « 1 » et « 2 » mais pas le « 0 »;
- cette droite présente des graduations à gauche du « 0 » de manière à permettre le positionnement de « rationnels négatifs » ;
- les graduations proposées sont assez simples (la valeur d'un intervalle entre deux graduations vaut « 0,1 » .

Pour les élèves qui répondent « 0,07 » ou « 0,03 » pour le premier nombre, tout se passe comme si la droite représentée avait bien pour origine 0 et que l'on amplifiait en quelque sorte cet espace (changement d'échelle et/ou de valeur d'intervalles) de manière à pouvoir y positionner des décimaux exprimés non plus en dixièmes mais en centièmes.

Ce constat n'est pas neuf, il peut être mis en relation avec d'autres données de recherche en didactique des mathématiques. Le choix des variables didactiques pour élaborer cet item repose sur l'analyse d'un item d'évaluation proposé lors d'un autre dispositif de recherche (Sacré & Stegen, 2003).
L'item suivant a été proposé à des élèves de 5P et de 6P :

Voici une droite graduée.
Sur cette droite, le point B représente le nombre 1 ; le point C représente le nombre 4.



Quel nombre représente la lettre D ? ....

Quel nombre représente la lettre A ? ....

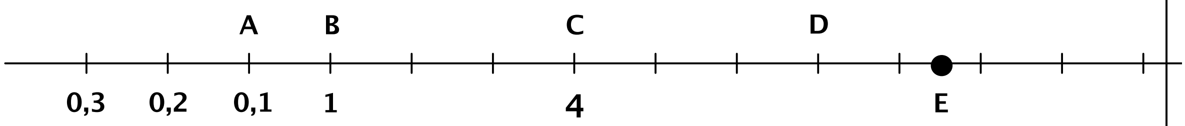
Globalement, la résolution de cette double question ne pose pas trop de difficultés aux élèves ; 82 % des élèves de 5e et 91 % des élèves de 6e déclarent que la lettre D représente le nombre 7. Pour la second question, on observe un phénomène curieux chez les élèves de 6e. Alors que 79 % des élèves de 5e répondent correctement (statistique assez proche de la précédente), ils ne sont que 73 % en 6e à dire que A désigne le nombre 0. Pour certains élèves de 6e, A

représente soit "0,9" (13 %), soit "0,5" (3 %), soit "0,1" (3%) soit "0,99" (3 %).
Au total donc 22 % des élèves de 6^e considèrent que la lettre A désigne un décimal compris entre 0 et 1.

Différents entretiens ont été menés avec les élèves qui ont commis ces erreurs ; ils mettent en évidence les éléments suivants :

- pour retrouver le nombre représenté par la lettre D, les élèves déclarent compter les graduations qui se trouvent entre 1 et 4. Ils définissent ainsi la valeur de l'intervalle. La formulation inhabituelle de la question n'a, semble-t-il, pas posé de problème aux élèves qui ont correctement identifié ce qu'on leur demandait de faire.
- pour la deuxième partie de la question, on constate que la plupart des erreurs produites en 6^e relèvent d'une même logique : ***les élèves éprouvent de grosses difficultés avec le zéro et considèrent que, sur une droite numérique, les nombres entiers se situent à droite du 0 et les nombres décimaux à gauche du 0 ou du 1.***

Voici par exemple ce qu'un élèves répond lorsqu'on lui demande de placer tous les nombres sur la droite numérique.



Cet exemple n'est pas anecdotique. Comme le montrent les résultats présentés précédemment, l'identification du nombre désigné par la lettre A pose davantage de problèmes aux élèves de 6^e qu'à ceux de 5^e. Quand on regarde maintenant la nature des erreurs commises par les élèves, on constate que 22 % d'élèves de 6^e considèrent que la lettre A désigne un nombre décimal compris entre 0 et 1. Autrement dit, ils adoptent un point de vue tout à fait comparable à celui qui vient d'être développé.

D'une certaine manière, c'est également ce raisonnement erroné qui peut être expliquer les nombreuses erreurs commises par les élèves lors de l'épreuve diagnostique.

POUR ALLER PLUS LOIN

L'analyse qui précède met en évidence les difficultés éprouvées par les élèves dans l'utilisation du référent droite numérique. Ces difficultés s'expliquent sans doute en termes d'obstacles didactiques.

A bien y regarder, la droite numérique est une représentation très abstraite qui nécessite, de la part des élèves, un long processus d'élaboration et d'appropriation progressive. Or, on constate très souvent que les élèves du cycle 5/8 sont amenés à passer très rapidement de la “ bandelette numérique ” à la “ droite numérique ” ... sans explications complémentaires. Pourtant, ces deux outils sont fondamentalement différents dans leur conception : la bandelette numérique est composée de cases discrètes alors que la droite numérique, par définition, est constituée d'une infinité de points.
On retrouve donc ici la classique distinction entre grandeurs continues et grandeurs discrètes : un même nombre peut représenter un point sur la droite ou la mesure d'un segment constitué d'une infinité de points.
Il s'agit donc de s'interroger, en équipe, au départ des questions suivantes :

- **quand et pourquoi passer d'un mode de représentation à un autre ?**

(Faut-il attendre que les élèves soient capables de comprendre les propriétés différentes sur lesquelles sont construits ces outils ?) ;

- **comment construire avec les élèves ce passage ?** (Quels dispositifs mettre en place pour aider les élèves à construire ce référent plutôt que leur imposer l'usage d'un outil qu'ils ne comprennent pas ?)

Dans le troisième chapitre de cette publication, nous détaillerons une séquence d'activités qui a pour but d'aider les élèves à construire ce référent.

Il serait également utile, dans le cadre d'une évaluation diagnostique, de proposer aux élèves des items destinés à vérifier les stratégies utilisées pour construire une droite ou un segment afin d'y positionner le plus précisément possible des nombres.
Trois items avaient été construits dans ce sens au niveau de l'évaluation diagnostique ; malheureusement, ils n'ont pu faire l'objet d'une analyse formative en raison de la (trop) grande difficulté à appréhender les modes de raisonnement des élèves au départ de l'analyse de leurs réponses.
La perspective est toute différente pour un enseignant qui décide de proposer ces items à ses élèves. Il peut davantage les interroger sur la manière dont ils ont procédé pour répondre aux questions posées. C'est pourquoi nous vous les proposons ci-dessous.

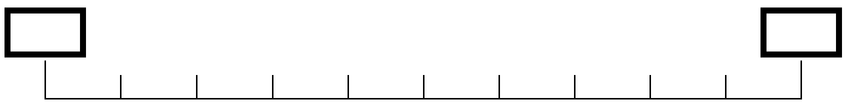
Item19

Crée, à partir du dessin ci-dessous, une droite graduée qui te permettra de placer « 1,2 ».

Item20

Crée, à partir du dessin ci-dessous, une droite graduée qui te permettra de placer « $\frac{3}{4}$ ».

Item21

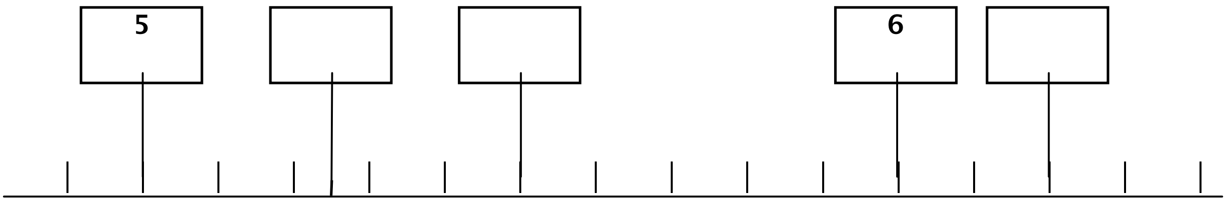


Ceci est un segment de droite numérique.
Ecris dans les cases A et B deux nombres de ton choix qui encadrent « 9,98 ».
Place ensuite « 9,98 », le plus précisément possible.

L'utilisation et l'enseignement de la droite numérique méritent sans doute un important travail de réflexion de la part des instituteurs primaires. De manière générale, il ne manque pas de résultats de recherches pour mettre en évidence que ce référent est un outil mal maîtrisé par les élèves aux différentes étapes de la scolarité primaire. Il n'est donc pas étonnant que l'on observe les taux de réussite suivants au terme de l'épreuve cantonale de Mons (1997).

Item 22

Ecris les nombres qui conviennent dans les cases vides



5,25	***76 %***	5,5	***81 %***
• 5,3............................	6 %	• 5,6..............................	5 %
• 5,5............................	2 %	• 10................................	1 %
• 7,5............................	2 %	• 5,8..............................	1 %
• 5,35 – 5,2 – 5,15.......	3 %	• Pas de réponse	2 %
6,2	***85 %***		
• 8 ou 7..........................	4 %		
• 6,5..............................	1 %		
• 6,25............................	1 %		
• pas de réponse............	2 %		

La maîtrise de la compétence « situer des nombres sur une droite graduée, dont les extrémités sont données » semble indispensable à ce niveau d'enseignement. Pourtant, des élèves, en fin de scolarité primaire, éprouvent de grosses difficultés à identifier les nombres cachés. C'est inquiétant lorsque l'on sait que :

- d'une part, la maîtrise du concept de “ nombre à virgule ” passe par la prise en compte du point de vue ordinal associé à la notion de **densité des nombres décimaux** (entre deux nombres naturels, il existe un nombre fini de naturels tandis qu'entre deux décimaux, il y a une infinité de décimaux);
- d'autre part, la droite graduée constitue un référent universel – il fait partie de ce que l'on pourrait qualifier de patrimoine “ culturel ” mathématique. **Or ce référent, cet outil au service de l'apprentissage, semble causer davantage de problèmes qu'il n'en résout**.

4. En conclusion : que retenir de ces analyses de productions d'élèves ?

Les pages qui précèdent ont mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves dans la construction des nombres décimaux. En de nombreuses occasions, des hypothèses explicatives ont été suggérées. Elles pointent des progressions didactiques qui ne prennent pas suffisamment en compte les obstacles épistémologiques liés à l'enseignement des décimaux.
Quelle pourrait être l'origine de ces obstacles ?

A l'école primaire, les élèves rencontrent les rationnels essentiellement dans leur écriture décimale (les élèves qui sortent de l'école primaire sont-ils bien conscients qu'une fraction est aussi et surtout un nombre ?).
Cette rencontre survient après un travail de plusieurs années scolaires sur la construction des nombres entiers. De là naissent un grand nombre de difficultés car les règles de fonctionnement des entiers ne peuvent être étendues aux rationnels.

Deux exemples pour illustrer ces propos :

- les élèves ont intériorisé progressivement le constat suivant : un nombre entier est d'autant plus grand qu'il contient un plus grand nombre de chiffres. Certaines erreurs commises par les élèves peuvent avoir pour origine une généralisation erronée: « plus y a de chiffres à la partie décimale, plus elle est petite ! ».
  Ce phénomène est peut-être renforcé par l'association qui est souvent faite entre les décimaux et les mesures de grandeurs. Au niveau des mesures de longueurs, par exemple, les élèves explorent les décimètres, puis les centimètres, puis les millimètres. Ils découvrent ainsi des unités de plus en plus petites et cela contribue sans doute à renforcer cette représentation erronée : « plus y a de chiffres à la partie décimale, plus elle est petite ! » ;
- construire les décimaux sur une analogie forte avec les naturels conduit les élèves à les verbaliser comme s'il s'agissait de deux entiers séparés par une virgule. Ainsi, « 12,345 » sera oralisé de la manière suivante : « douze virgule trois cent quarante-cinq » tandis que « 12,34 » sera oralisé « douze virgule trente-quatre ».
  On ne s'étonnera donc pas que les élèves assimilent erronément le chiffre 4 tantôt au rang des dixièmes, tantôt à celui des centièmes … alors qu'il représente le rang des centièmes dans les deux expressions. On ne s'étonnera pas non plus qu'ils considèrent que 12,345 soit plus grand que 12,34 sur la base du raisonnement erroné (mais qui aboutit à une réponse correcte dans ce cas) « 345 est plus grand que 34 ».

A de nombreuses reprises, les erreurs d'élèves peuvent s'expliquer au départ de la non prise en considération d'une rupture essentielle entre les entiers et les rationnels : la propriété relative à l'ordre sur ces nombres et donc à leur comparaison.

Comme cela a été évoqué précédemment, l'idée de successeur sur laquelle s'est basée la découverte progressive des entiers n'a plus de sens ici. Quel serait le successeur de 2,75 ? 2,76 ? 2,751 ? les problèmes d'intercalation n'ont pas les mêmes solutions dans N ou dans Q. Entre deux naturels, il existe un nombre fini de naturels et un nombre infini de rationnels.

Les différents items proposés pour évaluer cette propriété mettent en difficulté un nombre important d'élèves.
La droite numérique qui est souvent utilisée comme outil pour construire l'intercalation ou aborder la densité des décimaux pose problème ; les élèves ne perçoivent pas suffisamment de liens entre un système de codage de points sur une droite et le principe d'intercalation infinie (densité des décimaux). Une nouvelle fois, on constate qu'un outil introduit (trop) précocement pour permettre le repérage de grandeurs discrètes est transposé tel quel dans l'univers des grandeurs continues.

Il convient donc de donner davantage de sens à l'enseignement des rationnels à l'école primaire. C'est dans cette perspective que sont définies les propositions d'activités présentes au chapitre 3.
Avant de clôturer ce chapitre, il convient de revenir sur une dernière analyse d'item. Ce dernier est constitué d'opérations simples sur des rationnels. L'analyse des réponses produites par les élèves met en évidence l'impact qu'une maîtrise insuffisante de ces nombres peut avoir sur ce type de tâches en apparence assez simple.

PRESENTATION DE L'ITEM ET DES RESULTATS

L'item suivant a été élaboré au départ des variables didactiques suivantes :

- les rationnels sont écrits sous forme décimale ou fractionnaire ;
- les opérations en jeu sont simples : il s'agit d'additionner deux rationnels ou de multiplier un rationnel par un entier ou un autre rationnel ;

Item23

Complète.

A/	0,2 + …….. = 1	G/	0,05 × …….. = 1
B/	0,775 + …….. = 1	H/	0,25 × …….. = 1
C/	0,09 + …….. = 1	I/	0,1 × …….. = 1
D/	$\frac{3}{4}$ + …….. = 1	J/	$\frac{1}{4}$ × …….. = 1
E/	$\frac{2}{10}$ + ……... = 1	K/	$\frac{2}{6}$ × …….. = 1
F/	$\frac{46}{100}$ + ……... = 1	L/	$\frac{6}{3}$ × …….. = 1

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	10,6	3,8
	1	***84,5***	***94,7***
	9	4,9	1,5
B.	0	28,9	25
	1	***62,7***	***69,7***
	9	8,4	5,3
C.	0	51,4	37,9
	1	***41,5***	***57,6***
	9	7	4,6
D.	0	30,3	15,9
	1	***57,8***	***74,2***
	9	12	9,8
E.	0	21,1	10,6
	1	***67,6***	***81,1***
	9	11,3	8,3
F.	0	27,5	17,4
	1	***58,4***	***71,2***
	9	14,1	11,4

	Code	% 6P	% 1S
G.	0	48,6	31,8
	1	***33,8***	***53***
	9	17,6	15,2
H.	0	25,3	12,1
	1	***59,1***	***78,8***
	9	15,5	9,1
I.	0	26,8	15,9
	1	***54,9***	***73,5***
	9	18,3	10,6
J.	0	27,5	13,6
	1	***52,8***	***68,2***
	9	19,7	18,2
K.	0	35,2	17,4
	1	***23,2***	***47,7***
	9	41,6	34,8
L.	0	43,7	28,8
	1	***9,1***	***25,8***
	9	47,2	45,5

ELEMENTS D'ANALYSE

A première vue, les différentes opérations ne devraient pas poser de difficultés à des élèves de ce niveau scolaire ; il s'agit de simples décompositions et recompositions de l'unité (sous forme d'additions ou de multiplications). Les six premières mettent en jeu des écritures décimales et les six suivantes des écritures fractionnaires.

L'analyse des taux de réponses correctes montre qu'il n'en est rien. Différents constats peuvent être dégagés des réponses produites :

- à l'exception de la première décomposition, les pourcentages de bonnes réponses sont assez décevants. Il est par exemple surprenant d'observer que plus de 40 % des élèves de 1S ne parviennent pas à effectuer l'opération suivante : « 0,09 + …= 1 ». Cette impression de difficulté est renforcée par le nombre de plus en plus important d'élèves qui ne produisent pas de réponse … comme s'ils ne comprenaient pas ce que l'on attend d'eux ;
- la comparaison des taux de bonnes réponses entre les six premiers et les six derniers items ne permet pas d'affirmer que les élèves éprouvent plus de difficultés à manipuler des écritures fractionnaires que des écritures décimales. Les résultats sont aussi faibles dans un cas comme dans l'autre. Plus de 25 % des élèves de 1S échouent quand on leur demande ce qu'il convient d'ajouter à ¾ pour obtenir l'unité.
- Enfin, la multiplication semble poser encore davantage de problèmes aux élèves :
    - 27 % des élèves de 1S sont incapables de définir précisément par combien il faut multiplier 0,1 pour obtenir 1 ;
    - plus de 50 % des élèves de 1S ne savent pas par combien il convient de multiplier 2/6 pour obtenir 1.

Ces différents résultats sont à mettre en relation avec les commentaires effectués précédemment. Ils mettent en lumière les conséquences d'un apprentissage des rationnels dans lequel l'accent est mis sur les techniques au détriment d'un ancrage sur les propriétés et les caractéristiques de cet univers de nombres. Très vite, trop vite, c'est l'aspect formel (l'écriture mathématique) qui est privilégié au détriment d'un véritable processus de construction et d'appropriation par les élèves. Qu'est-ce qu'un nombre rationnel pour les élèves ? A quoi sert-il ? Autrement dit, à quelle occasion dois-je y recourir ?

Chapitre 3 : Des activités pour structurer l'enseignement des rationnels

Ce dernier chapitre détaille les différentes activités développées et expérimentées au sein de l'espace de collaboration. Celles-ci s'inscrivent dans le droit prolongement des analyses et des réflexions développées dans les chapitres 1 et 2.
Avant d'en venir à la présentation des activités, une première section précise les axes de progression qui ont servi de point de départ à l'élaboration et au choix des activités d'apprentissage.
Ces activités peuvent être envisagées différemment selon que le lecteur soit instituteur primaire ou régent en mathématiques. Pour les premiers, elles doivent être davantage considérées comme des points de départ pour la mise en œuvre de nouvelles compétences tandis que, pour les seconds, il s'agit davantage de pistes de re-médiation. Que faut-il entendre par activité de re-médiation ? Quel est le statut des activités proposées ? Comment les mettre en œuvre ? Les réponses à ces questions sont détaillées dans la deuxième section de ce chapitre.
On l'aura compris à la lecture de ce qui précède, les activités sont présentées dans la troisième section de ce chapitre au départ d'un même modèle de fiche que celui utilisé dans la brochure consacrée à l'enseignement de la proportionnalité.

1. Comment pourrait-on définir des axes de progression des apprentissages ?

A l'école primaire, l'accent est mis sur les décimaux et non sur les rationnels ; ce terme n'apparaît pas dans les *Socles de compétences*. L'écriture fractionnaire des rationnels semble davantage réservée au début de l'enseignement secondaire. Les fractions ne sont d'ailleurs pas ou peu évoquées dans le domaine numérique mais bien dans celui des grandeurs.
Au vu de ce qui précède, on ne s'étonnera pas de constater qu'au sortir de l'école primaire, les élèves assimilent les rationnels aux seuls décimaux. Cette représentation est réductrice car les décimaux ne constituent pas à proprement parler un ensemble de nombres de même nature que les naturels, les entiers ou les rationnels.

Ces choix didactiques s'expliquent sans doute en termes d'analogie d'écritures (numération positionnelle) et de facilités des opérations. Toutefois, au vu des analyses effectuées au chapitre 2, on peut se demander si ces facilités ne constituent pas, aux premiers temps de l'apprentissage, des obstacles difficiles à surmonter pour certains élèves.

Comme le montrent les (très) nombreuses erreurs commises par les élèves, l'extension numérique des naturels aux rationnels (via les décimaux) ne va pas de soi. Comment écrire ces nouveaux nombres ? Comment donner du sens aux écritures à virgule ? Comment articuler l'écriture des entiers, des décimaux, des fractions ?
Au-delà de ces questions techniques liées à l'écriture, il convient aussi de ne pas perdre de vue la question du sens : pourquoi utilise-t-on les décimaux ? Autrement dit quels sont les problèmes, les situations qui vont motiver et rendre nécessaire leur introduction ?

L'enseignement des rationnels (via les décimaux) ne se réduit-il pas trop souvent à un enseignement de techniques ? Comme le soulignent de nombreux didacticiens, ce type d'enseignement ne permet pas une prise en compte suffisante de la véritable nature des rationnels (question du sens) ni une bonne compréhension des caractéristiques constitutives de ce type de nombre comme, par exemple, la densité des rationnels.

Au vu de ces constats, la progression didactique qui structure les activités proposées dans cette publication s'appuie sur les deux propositions de travail suivantes :
- aborder les rationnels au départ de l'écriture fractionnaire (aspect technique de l'écriture des rationnels);
- favoriser la mise en place d'une dialectique outil-objet (question du sens des rationnels à construire par les élèves).

1.1 Partir des fractions pour aller vers les décimaux

La progression didactique proposée s'appuie sur les conclusions formulées par de nombreux didacticiens (Brousseau, 1998 ; Douady, 1986 ; Brissiaud, 1998 ; Bolon, 1997), que l'on peut résumer ainsi : **éviter d'enseigner les décimaux au départ de mesures de grandeurs**. Les nombres décimaux ne doivent pas, dans l'esprit des élèves, être assimilés à une forme de recodage des mesures entières (exemples : 1,32 mètres c'est 132 centimètres ; 3,75 € c'est 375 centimes). Il convient plutôt d'enseigner les décimaux au départ de la notion de fraction décimale.

Pour justifier ce principe, les didacticiens rappellent que les nombres décimaux (c'est-à-dire des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10) ont été inventés pour permettre d'approcher le plus précisément possible n'importe quelle grandeur continue grâce à des fractionnements de plus en plus fins. « *Faire disparaître l'idée de fractionnement dans une progression didactique concernant les décimaux, c'est donc passer à côté de son objet d'étude, c'est quasiment décider de ne pas enseigner les décimaux, de laisser les élèves qui le peuvent les inventer eux-mêmes* » (Brissiaud, 1998).

Partir des fractions pour enseigner les décimaux, c'est donc respecter le cheminement de l'histoire.

> Comme le rappelle Bolon (1996), « *les propriétés des fractions comme rapports de grandeurs commensurables étaient connues au VI-V^{e} siècle avant JC ; on date la naissance des décimaux quelque 20 siècles plus tard* ».

La filiation historique doit également être respectée au niveau de l'écriture. Ainsi, on commencera par présenter aux élèves des fractions en utilisant la barre de fraction comme système de notation puis en utilisant l'écriture à virgule de ces fractions décimales.

> L'écriture à virgule est, dans l'histoire des mathématiques, assez récente. « *Vouloir que des enfants conceptualisent d'emblée les décimaux avec cette sorte d'écriture (l'écriture décimale), alors qu'elle masque leur véritable nature, ne peut qu'échouer pour la plupart d'entre-eux. Il est important que les enfants travaillent longtemps avec des nombres décimaux représentés par des fractions décimales. Ce parcours est, à notre sens, le seul qui puisse laisser un espoir de voir un jour les élèves conceptualiser les décimaux à l'école élémentaire dans une proportion supérieure aux résultats actuels* » (Brissiaud, 1998).

1.2 Favoriser la mise en place de dialectiques outil-objet

Poser comme choix didactique de partir des fractions décimales et de la notation fractionnaire pour aborder l'étude des décimaux n'est pas suffisant. Bon nombre d'erreurs des élèves peuvent être attribuées à une installation trop rapide de mécanismes ou de techniques au détriment d'un travail approfondi sur le sens.
Si, dans un premier temps, le recours à ces techniques peut donner l'illusion d'un apprentissage réussi, l'analyse des erreurs des élèves montre que les connaissances ainsi développées résistent mal à l'épreuve du temps ou aux changements de contexte. Trop souvent, ces techniques sont liées à des résolutions de problèmes spécifiques ; l'enfant ne reconnaît pas d'autres situations dans lesquelles elles seraient également opératoires.

Douday (1986) a développé le concept de dialectique outil-objet pour modéliser la manière dont se développent les connaissances mathématiques. En clair, elle distingue, pour chaque concept mathématique, son caractère " **outil** " et son caractère " **objet** ".

> " *Par son caractère **outil**, nous entendons l'usage que l'enfant en fait pour résoudre un problème. Un concept prend d'abord son sens par son caractère outil. Par son caractère **objet**, nous entendons le concept mathématique considéré comme ayant sa place dans le savoir mathématique de référence à un moment donné de l'apprentissage* " (Douady, 1986).

Les activités d'apprentissage proposées ici ont pour objectif d'assurer la mise en place de dialectiques outil-objet ; les situations-problèmes, les défis posés permettent aux élèves, dans un premier temps, de rencontrer le nombre rationnel dans son statut d'outil. Dans un second temps, le recours au symbolisme mathématique pour formaliser le résultat des manipulations et la généralisation de leur portée permet de travailler le nombre pour lui-même, indépendamment de tout contexte et d'en faire un objet d'étude.

A titre d'exemple, on peut présenter une progression développée par Rouche (1998). Elle a pour but de faire vivre aux élèves des situations de fractionnement les plus diversifiées possible. Elle comporte 4 étapes dont le rappel permet d'identifier les démarches d'apprentissage des fractions développées avant l'entrée au cycle 10/12 :

1. **partager en parts égales des objets quelconques**
   Ces objets quelconques sont des objets pris dans la vie courante, comme un fil, une baguette, une tarte, une barre de chocolat, le contenu d'une boîte de biscuit, le contenu d'une bouteille, l'argent récolté lors de la vente d'objets, etc. Il importe de varier les objets de manière à développer un maximum de stratégies. Ainsi, pour partager un fil en deux, on peut le plier en deux et donner un coup de ciseau. Une telle technique sera inopérante s'il s'agit de partager une baguette. A ce moment, le choix d'un étalon (comme le fil dont nous venons de parler) pourra être très utile.
   Comment partager en deux le contenu d'une bouteille ? Un élève peut proposer le choix de deux verres identiques. Le contenu de la bouteille est alors réparti équitablement entre ces deux verres et l'équivalence des hauteurs permet de juger de l'équivalence des volumes.
   Les techniques de dénombrement seront bien utiles pour partager le contenu d'une boîte de biscuits.
   Les différents objets à fractionner peuvent donc être considérés du point de vue de leur longueur, de leur volume, de leur masse ou de leur nombre, ce qui permet de faire des liens avec d'autres champs mathématiques.
   Comme le montrent ces exemples, il ne s'agit pas de réduire les manipulations effectuées à des fractionnements d'objets. Au contraire, dès le départ, les élèves ont pour tâche d'effectuer des partitions d'une pluralité d'objets.
2. **partager en parts égales des objets standards**
   Cette deuxième étape constitue un pas vers une abstraction plus grande. Il s'agit ici de choisir des objets prototypiques, des représentants. De cette manière, on fait le choix de se dégager des caractéristiques particulières des objets à fractionner pour ne se préoccuper que des techniques du fractionnement.
   Ainsi, la boule de plasticine remplacera avantageusement les partages d'objets pesants ou solides, tandis que des bâtonnets, par leur longueur, seront les représentants des partages de longueur. Les jetons, par leur caractère discret, permettront le partage de collections.
3. **partager en parts égales des représentations dessinées**
   Un pas supplémentaire vers l'abstraction est à nouveau franchi. Il s'agit cette fois d'opérer non plus sur des objets concrets (naturels ou prototypiques) mais sur des représentations dessinées. C'est un passage décisif qui ne peut être opéré en une seule fois. En effet, tous les types de manipulations effectuées précédemment sont représentés à l'aide de dessins : les segments de droite permettent de fractionner des longueurs mais aussi des durées, les figures géométriques permettent de fractionner des aires. Des ensembles d'objets peuvent également être représentés par des dessins.
4. **partager en parts égales des mesures d'objets en opérant sur des nombres**
   Dans ce cas, on ne fractionne plus des objets ou leur représentation mais leur mesure qui s'exprime à l'aide de nombres. Ces nombres s'écrivent avec

des chiffres, dont le symbolisme est arbitraire ; il n'y a aucune ressemblance avec les objets auxquels ils renvoient. « *On travaille à ce moment avec des symboles purs, c'est-à-dire dont la signification est entièrement conventionnelle* » (Rouche, 1998).

Les trois premières étapes sont plus spécifiquement réservées aux cycles 5/8 et 8/10 ; elles permettent aux élèves de rencontrer, dans des contextes diversifiés, la notion de fraction dans son statut « outil ». Dès la fin du cycle 8/10 et au cycle 10/12, la quatrième étape permet d'assurer le difficile passage du concret à l'abstrait (de la notion de « fraction-outil » à la notion de « fraction-objet d'étude »). On notera également que la mise en place de cette progression n'est pas purement linéaire. Au contraire, elle est faite d'allers et retours entre les différentes étapes.

Un aspect intéressant de cette progression est le déséquilibre entre le nombre d'étapes abordant le concept de fraction dans son statut d'outil et l'unique étape où le statut objet est privilégié.

Pour être complet et pour diversifier au maximum les occasions de rencontre des fractions, les activités de partage se caractériseront aussi par le nombre de parts prélevées ; ainsi, partager en deux ou en trois parts équivalentes, ce n'est pas la même chose. Les fractionnements peuvent aussi se révéler plus ou moins complexes selon les caractéristiques des objets (ou collections) à fractionner.
Ainsi, partager en deux une bandelette de papier ne pose pas de problème. Cela s'avère plus difficile quand la consigne impose de la partager en trois. Par ailleurs, les objets présentent parfois des axes de symétrie qui facilitent les activités de fractionnement. Il y a donc lieu de diversifier la progression proposée en la croisant avec le nombre de parts prélevées.

2. Quel statut faut-il donner aux activités proposées ?

Les activités présentées dans ce chapitre s'adressent aux enseignants du primaire comme à ceux du début de l'enseignement secondaire.
Au-delà de l'analyse des erreurs, il s'agit de proposer des situations d'apprentissage pour aider les élèves à surmonter les difficultés rencontrées.
La mise en place de celles-ci ne peut apporter que des solutions ponctuelles aux problèmes d'apprentissage si elles ne s'inscrivent pas dans un cadre global et cohérent de structuration des apprentissages. C'est la raison pour laquelle elles sont organisées sous la forme d'une progression didactique (voir section suivante).

Ce choix de présentation conduit à mettre davantage l'accent sur les apprentissages réalisés à l'école primaire (et non au début de l'enseignement secondaire). La plupart des activités proposées doivent ainsi être considérées comme autant de points de départ pour la mise en place de nouvelles compétences. Cela ne signifie pas évidemment qu'elles sont sans intérêt pour l'enseignant du secondaire. Pour faire face aux difficultés qui subsistent chez un grand nombre d'élèves, les situations proposées peuvent servir d'activités de re-médiation.

Que faut-il entendre par activité de re-médiation ?
On sait depuis longtemps qu'il ne sert à rien de faire répéter, à un élève qui a fait une erreur, le même type d'exercice. De telles pratiques conduisent l'élève, soit à des situations de blocages (en raison d'échecs répétés), soit à une recherche « effrénée » d'indices pas toujours pertinents pour produire, de manière aléatoire, la réponse attendue par le maître. L'analyse des productions d'élèves, développée au chapitre 2, fourmille d'exemples de ce type.
On peut, par contre, partir du principe que **l'erreur fait partie du processus d'apprentissage**. Dans ce cas, il paraît plus opportun, d'analyser finement les types d'erreurs produites par les élèves ... pour proposer de nouvelles situations d'apprentissage susceptibles de favoriser, chez l'élève, une prise de conscience du caractère erroné de ses connaissances.
Il faudra donc entendre le mot « re-médiation » comme une nouvelle médiation entre l'élève et le savoir. Cette conception est très proche de celle adoptée par R. Charnay (1996) de l'équipe ERMEL qui définit la remédiation comme « *un acte d'enseignement dont l'objectif est de permettre à l'élève de s'approprier des connaissances après qu'un premier enseignement ne lui ait pas permis de le faire, dans les formes attendues* ».

3. Quelle est la progression proposée pour structurer l'enseignement des rationnels ?

La progression présentée ci-dessous répond à un double souci : proposer des pistes de re-médiation à court terme (pour les régents en mathématiques) tout en privilégiant des pistes pour une action à plus long terme (l'inscription des activités dans un cadre global et structuré offre une perspective à moyen terme pour les instituteurs du degré supérieur de l'école primaire). Elle s'inspire largement des propositions formulées par Sacré & Stegen (2003). Ces derniers suggèrent d'organiser les différentes activités centrées sur la construction des rationnels autour de la progression suivante :

	Ecriture fractionnaire	Ecriture décimale	
Fraction « nombre mesure » • Carré magique pour faire 1 • Carte en trop	• Comparaison de fractions à l'unité • Mesurer les pièces d'un Tangram • Bande unité • Droite graduée		• *Sériation et comparaison de nombres à virgule*
	Construction d'une droite numérique		
Fraction opérateur • *Recettes* • *Le Puzzle (agrandissement)* • *Prix réduits*		• Reconstitution de droites graduées • Feuille A3 • Construction de nombres décimaux • Rôle du zéro dans la numération de position	• *Jeu de bataille avec des décimaux* • *Le tournoi des décimaux*

Au centre de la progression, on trouve deux colonnes intitulées : « écriture fractionnaire » et « écriture décimale ». La séquence d'activités « construction d'une droite numérique » est centrale ; elle permet d'assurer la jonction et l'équivalence entre les notations fractionnaires et décimales.
Dans le prolongement de cette séquence, on retrouve des activités plus spécifiques de positionnement sur une droite ou de comparaison de nombres décimaux ; elles ont pour objet de stabiliser les connaissances des élèves et de favoriser la prise en compte des nombres décimaux en tant qu'objet d'études (cf. activités « construction de nombres décimaux » et « rôle du zéro dans la numération de position »).

A la droite de la colonne « écriture décimale » on retrouve des exemples d'intitulés d'activité qui permettent de consolider cette approche de l'écriture.
Ces activités ne sont pas décrites ici mais sont placées sur le site internet de la recherche. D'autres propositions d'activités viendront progressivement les rejoindre.

A la gauche de la colonne « écriture fractionnaire », on retrouve une série d'activités privilégiant le développement du concept de fraction. La présence de cette colonne et le découpage des activités qui y sont reprises nécessitent quelques explications complémentaires.

Une progression didactique où l'on enseigne d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, cela fait quelques années qu'en France, des enseignants procèdent de la sorte (suite notamment aux travaux de Brousseau et de Douady) sans que les élèves conceptualisent mieux les décimaux. La raison en est simple : les élèves conceptualisent mal les décimaux parce qu'ils conceptualisent mal les fractions.

L'origine de cette mauvaise conceptualisation est sans doute liée à une conception trop étroite de la notion de fraction. Trop souvent, celle-ci se réduit à l'idée du fractionnement d'une unité. Ainsi, trois quarts est vu comme le partage d'une unité en 4 parts égales dont on en prélève trois.

Cette colonne se subdivise en deux parties qui renvoient aux deux aspects complémentaires de la notion de fraction : celui de nombre-mesure et celui d'opérateur fractionnaire. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point

La fraction comme nombre mesure

« *La fraction comme résultat d'une mesure apparaît souvent au travers de problèmes de partage dans lesquels l'unité doit être découpée en autant de parts égales qu'il y a de candidats* » (Maurin et Joshua, 1993).
Ainsi, par exemple, si trois tartelettes doivent être réparties entre 5 invités, on les partagera chacune en cinq parts égales (de manière à obtenir, pour chacune, des cinquièmes). Dans un second temps, ces cinquièmes sont répartis entre les 5 invités ; chacun en reçoit 3 (soit trois cinquièmes). Dans ce cas précis, 3/5 constitue une mesure de la part de chacun avec pour « unité », le cinquième d'unité.

Cet exemple illustre une approche non conventionnelle de la fraction « trois cinquièmes ». Contrairement à ce qui est souvent observé dans les classes, la notion de fraction « nombre-mesure » ne doit pas se construire uniquement sur des fractionnements d'unité mais bien également sur des collections d'objets prises comme unité. Brissiaud parle dans ce cas de « division partition d'une pluralité » ; démarche plus complexe que le fractionnement d'une unité, mais fondamentale dans la construction de la notion de fraction.

Au vu de ces exemples, la « fraction nombre mesure » trois cinquièmes peut donc être le résultat de deux opérations différentes :

- une tartelette partagée en 5 portions équivalentes dont on considère la partie formée par 3 de ces portions (fractionnement d'une unité) ;
- 3 tartelettes partagées entre 5 personnes dont chacune reçoit l'équivalent de trois cinquièmes (partition de la pluralité).

Pour Brissiaud, il est essentiel de ne pas limiter le sens de la « fraction nombre mesure » à celui d'un fractionnement d'une unité. Trois cinquièmes doivent aussi renvoyer à la division de trois par cinq. Dans cette perspective, la fraction devient un outil permettant de résoudre de façon satisfaisante des problèmes de partage d'entiers en n parts égales, que la division euclidienne ne parvient pas à résoudre sans qu'il y ait de reste. Comme le soulignent Maurin et Joshua (1993), « *pour partager 26 en 7 parts égales, la division euclidienne nous dit que chaque part doit comprendre 3 unités et qu'il reste 5 unités qui ne sont pas partagées. Les nombres entiers ne permettent pas de mieux faire. Si les nombres fractionnaires viennent au secours des nombres entiers, nous pourrons partager chaque unité restante en sept parts égales et, à l'issue du partage, chaque part sera alors composée de 3 unités et de 5/7 d'unité, ce qui s'écrit : 3 + 5/7* ».

On retiendra de cet exemple que les nombres fractionnaires permettent de définir une division exacte entre deux nombres entiers sans avoir à se préoccuper si le dividende est divisible ou non par le diviseur ; 5 : 3 peut alors s'écrire sous la forme de 5/3.

Pour Brissiaud, les pratiques didactiques rencontrées dans les classes ne favorisent pas la compréhension, par les élèves, de cette caractéristique de l'écriture fractionnaire. Si on demande à ces derniers d'inventer un problème habillant l'opération « 11 : 4 », il est vraisemblable que leurs propositions renverront à la partition d'une totalité et non d'une pluralité ; 4 objets d'un même prix valent 11 €, quelle est la valeur d'un objet ? Ses recherches montrent que jamais un élève ne proposera un problème du type : 11 personnes mangent chacune un quart de pizza. Quel est le nombre de pizzas nécessaires ? Les élèves ne savent pas que pour rechercher la partie entière de 11/4, il suffit de diviser 11 par 4. Il ne faut donc pas s'étonner, de constater que de nombreux élèves de fin de 6P soient incapables d'établir que 56 : 100 = 56/100.

La fraction opérateur

Pour Maurin et Joshua (1993), *« la notion de fraction opérateur apparaît comme la succession de deux opérations, l'une étant une multiplication et, l'autre, une division (au sens de division exacte). L'ordre dans lequel s'effectuent ces deux opérations n'ayant pas une incidence sur le résultat final, l'opérateur fractionnaire est un résumé de l'enchaînement de ces deux opérations. Mathématiquement, on dirait qu'il est le composé commutatif d'un opérateur multiplication et d'un opérateur division* ». Ainsi, par exemple, 2/3 de 12 = (12 : 3) × 2. Une bonne maîtrise de cet aspect des fractions facilite la résolution de problèmes de proportionnalité.

Les différentes activités liées à la fraction opérateur ne sont pas détaillées ici puisqu'elles sont reprises dans la brochure consacrées à l'enseignement de la proportionnalité.

4. Quelles sont les activités d'apprentissage présentées dans cette publication ?

La présentation des activités se fait au départ du même modèle de fiche[1] suivant :

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

TITRE

De quoi s'agit-il ?

Description, en quelques lignes, de l'activité proposée aux élèves

Enjeux :

Présentation des matières couvertes et des principales compétences visées

Comment s'y prendre ?

Cette rubrique comporte toutes les informations nécessaires pour permettre aux enseignants d'organiser et de planifier leur travail et celui de leurs élèves. Elle fait part également d'indications sur le déroulement de l'activité dans l'une ou l'autre classe expérimentale. Elle comprendra notamment les éléments suivants (donnés à titre indicatif) :

Mise en situation ;

Identification des tâches attendues des élèves ;

Que faire si les élèves ne rentrent pas dans le problème ?

Organisation et gestion de la phase de mise en commun ;

Identification de ce que les élèves doivent avoir retenu au terme de l'activité.

Quels sont les prolongements possibles ?

Proposition d'exemples d'autres situations-problèmes, plus ou moins difficiles que celle qui a fait l'objet de la fiche (généralisation d'une démarche, par exemple), des possibilités de variantes, des liens entre les compétences développées à l'occasion de cette activité et des apprentissages plus formalisés, des propositions d'items d'évaluation, ...
Mots-clés qui renvoient à la partie théorique de la brochure

Source(s) :

D'où est extraite l'activité.

[1] Ce canevas général sera évidemment adapté au contexte spécifique de chacune des activités.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

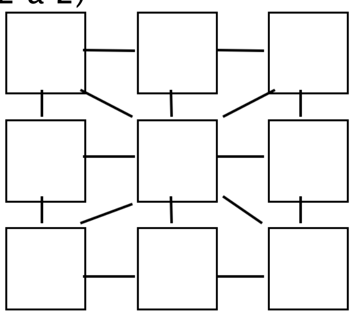
CARRE MAGIQUE POUR FAIRE 1

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'un jeu extrait de l'ouvrage de Sacré et Stegen (2001). Son but est d'obtenir un nombre fixé (dans ce cas, une unité), en alignant des cartons-nombres (dans ce cas, des fractions-nombres) et ce, de manière horizontale, verticale ou diagonale.

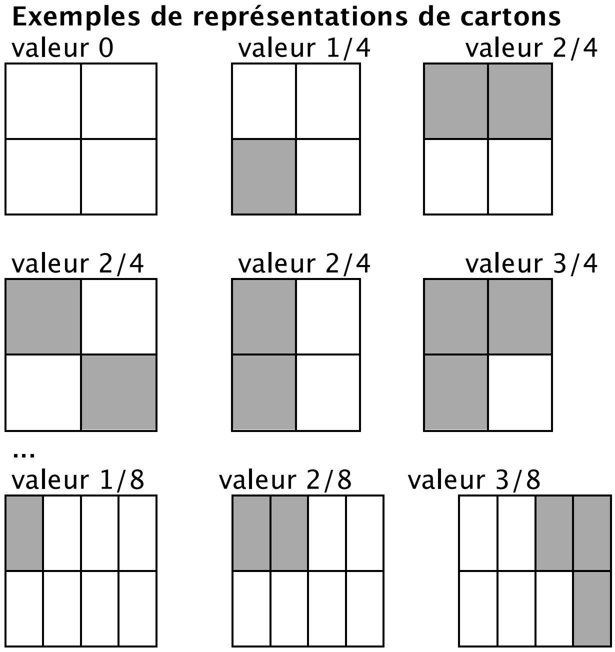
Le matériel suivant est nécessaire :

- Un plateau de jeu composé de 9 cases (réparties en trois rangées de trois cases reliées entre-elles 2 à 2)

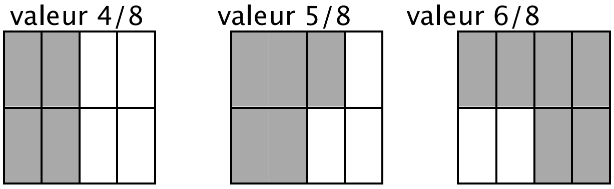


- des cartons-nombres à positionner sur le plateau de jeu

Exemples de représentations de cartons



valeur 4/8 valeur 5/8 valeur 6/8



Exemples de séries de cartons-nombres :

- 10 cartons de valeur 0, 5 cartons de valeur 1/2, 6 cartons de valeur 1/4, 2 cartons de valeur 2/4 et 2 cartons de valeur 3/4.
- 10 cartons de valeur 0, 5 cartons de valeur 1/8, 2 cartons de valeur 2/8, 2 cartons de valeur 3/8, 2 cartons de valeur 4/8, 1 carton de valeur 5/8, 1 carton de valeur 6/8 et 1 carton de valeur 7/8.
- 10 cartons de valeur 0, 6 cartons de valeur 1/3, 3 cartons de valeur 2/3.
- 10 cartons de valeur 0, 7 cartons de valeur 1/6, 5 cartons de valeur 2/6, 4 cartons de valeur 3/6, 2 cartons de valeur 4/6 et un carton de valeur 5/6.
- 10 cartons de valeur 0, 4 cartons de valeur 1/5, 3 cartons de valeur 2/5, 2 cartons de valeur 3/5 et 1 carton de valeur 4/5.

Enjeux

Cette activité permet d'aborder de manière ludique les compétences suivantes :

- M45 : Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ;
- M51 : Etablir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et l'écriture d'une mesure ;
- M54 : Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Présenter aux élèves le règlement de jeu suivant (écrit sur une feuille laissée à leur disposition) :

> Ce jeu se joue à 4. Chacun des 4 joueurs reçoit trois cartes. Le premier dépose une de ses cartes sur une case du plan de jeu et prend une carte dans la pioche, de manière à en avoir toujours trois en main.
> Les joueurs suivants font de même.
> Lorsqu'un des joueurs a la possibilité, en déposant sa carte, de terminer un alignement de trois cartes dont la somme vaut une unité (à l'horizontale, à la verticale ou en diagonale), il empoche ces trois cartes et a gagné un pli. Il met celui-ci de côté, ces cartes ne peuvent être remises en jeu par la suite.
> Le jeu se poursuit jusqu'à épuisement de la pioche et jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de remporter de pli. Le gagnant est celui qui a réussi à former le plus de plis. Si, à un moment, les neuf cases du plan de jeu sont recouvertes et qu'il est impossible de vider une des lignes de ses cartes, on enlève les 9 cartes et on les replace dans la pioche.
> Le jeu se poursuit normalement (le joueur dont c'est le tour dépose une carte et ainsi de suite).

Identification des tâches attendues des élèves :

Cette activité permet aux élèves de travailler l'addition (puis la soustraction) des fractions dans un contexte semi-concret.
Cette activité s'inscrit pleinement dans le concept de dialectique outil-objet développé ci-avant.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Après quelques parties de jeu, une phase de mise en commun peut être organisée. A titre d'exemple, voici des questions qui peuvent servir de fil conducteur pour l'animation de ce moment important :

- Au niveau du ***contenu de l'activité*** : Comment a-t-on fait l'unité au cours de ce jeu ? (Rappel des différentes décompositions qui sont apparues et toutes les questions qui sont liées, notamment comment écrire ces décompositions ?)
- Au niveau des ***démarches utilisées*** : Comment s'est déroulée cette activité ? Quelles sont les difficultés rencontrées et comment les avez-vous surmontées ? En demandant aux élèves d'expliciter leurs stratégies de jeu, l'enseignant les contraint à prendre du recul. Ils ont ainsi l'opportunité de confronter leurs démarches à celles d'autrui et de s'apercevoir qu'elles sont plus ou moins efficaces, ou plus ou moins pertinentes que celles de leurs condisciples. L'enseignant peut aussi profiter de cette phase pour faire prendre conscience à certains élèves de l'intérêt d'abandonner une stratégie peu pertinente ou trop lourde à mettre en oeuvre.

Lors de la présentation des différentes décompositions qui permettent de faire 1, il peut être utile, dans un premier temps, d'afficher au tableau les différents cartons-nombres. Dans un second temps, l'enseignant demande aux élèves d'utiliser le symbolisme mathématique et de traduire les plis sous la forme d'une addition de fractions.
Un travail sur les fractions équivalentes peut également être développé à cette occasion.

Cette phase de réflexion sur les stratégies privilégiées peut faire rebondir l'activité et la faire évoluer avec l'introduction de variables didactiques plus complexes.
Ainsi, une des variantes proposées pour le jeu « Le carré magique pour faire 1 » (introduction de la possibilité de soustraire un nombre) peut naître d'une discussion sur les stratégies développées par les élèves.
L'analyse des stratégies des élèves fait souvent apparaître que certains adoptent une position que l'on peut qualifier de « négative » par rapport au jeu. Leur seul souci est de bloquer leurs adversaires en plaçant sur le plateau de jeu un carton-nombre qui, ajouté au carton déjà placé, donne une somme qui dépasse le nombre à atteindre pour emporter le pli.
Par exemple, le carton « 1/2 » est déjà placé sur un axe. Lorsque vient le tour d'un élève privilégiant une stratégie négative, ce dernier place sur le même axe un carton « 3/4 ». De cette manière, il empêche les autres d'arriver à 1 et

d'emporter le pli.
Lors de la phase de réflexion a posteriori, on peut proposer de combiner addition et soustraction. Ainsi, si une carte de valeur 3/4 et une carte de valeur 1/2 sont déjà alignées, le joueur suivant peut déposer une carte de valeur 1/4, pour compléter l'alignement. Il doit, pour emporter le pli, exprimer l'opération effectuée pour obtenir 1, "(3/4 + 1/2) - 1/4 = 1".

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Il importe que les élèves se détachent progressivement du contexte de jeu (dimension outil) pour en venir à travailler le concept de nombre rationnel (dimension objet d'étude). Cela passe notamment par un travail plus spécifique sur les différentes décompositions additives suivantes. Au cours de cette phase, les élèves travaillent directement les décompositions additives de fractions-nombres.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \ldots. = 1$$

$$\frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{8} = 1$$

$$\frac{2}{8} + \ldots. + \ldots. = 1$$

$$\ldots. + \ldots. + \ldots. = 1$$

...

En cas de problèmes, les Es ont leurs cartons-nombres à disposition.

Quels sont les prolongements possibles ?

Comme cela est proposé ci-dessus, il est possible d'introduire une combinaison d'additions et de soustractions pour obtenir une unité.
Il est également possible de sélectionner d'autres suites de cartes pour des parties de plus en plus complexes :

Cartes représentant …	Partie 1	Partie 2	Partie 3	Partie 4
0 (carte blanche)	6	10	7	10
1/2	8	5	4	5
1/4	10	6	/	6
2/4	4	2	/	2
3/4	2	2	/	2
1/8	/	5	/	5
2/8	/	2	/	2
3/8	/	2	/	2
4/8	/	2	/	2
5/8	/	1	/	1
6/8	/	1	/	1
7/8	/	1	/	1
1/3	/	/	6	6
2/3	/	/	3	3
1/6	/	/	7	7
2/6	/	/	5	5
3/6	/	/	4	4
4/6	/	/	2	2
5/6	/	/	1	1
Total	30	39	39	67

Source(s) :

Stegen, P. & Sacré, A. (2001). **Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 8/10**. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

Carte en trop

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une activité ludique assez proche du jeu du *Carré magique pour faire 1*.
Trois ou quatre joueurs peuvent jouer ensemble. Ce jeu est une adaptation d'un jeu de cartes traditionnel (appelé, selon les régions, "Le valet noir" ou "Le puant"). Les cartes sont distribuées entre les joueurs. Chacun essaie alors, avec les cartes dont il dispose, de former le plus possible de couples dont la somme est égale à l'unité. Chaque couple formé est déposé sur la table. Lorsque aucun joueur ne peut plus former l'unité avec les cartes qu'il a en mains, les joueurs piochent une carte dans le jeu de leur voisin de droite et essaient à nouveau de former un couple. Le dernier joueur qui garde une carte en main (la carte en trop, celle que l'on ne peut associer à aucune autre pour former l'unité) a perdu.

Enjeux

Tout comme le *Carré magique pour faire 1*, l'activité *Carte en trop* permet de développer le compétences suivantes :

- M45 : Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ;
- M54 : Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.

Comment s'y prendre ?

Sur les cartes sont représentées des fractions. Avant le début du jeu, il convient de sélectionner les cartes soit selon les compétences numériques des élèves, soit selon les fractions que l'enseignant souhaite aborder.
Chaque colonne du tableau ci-dessous propose une sélection de cartes pour aborder une ou deux séries de fractions lors d'une partie. Plus on va vers la droite du tableau, plus les occasions de jouer en utilisant les fractions équivalentes sont nombreuses et plus les parties peuvent devenir complexes.

Cartes représentant ...	Partie 1	Partie 2	Partie 3	Partie 4
0 (carte blanche)	1	1	1	1
1/2	8	6	6	3
1/4	6	4	/	3
2/4	8	4	/	3
3/4	6	4	/	3
1/8	/	2	/	2
2/8	/	4	/	3
3/8	/	2	/	2
4/8	/	4	/	3
5/8	/	2	/	2
6/8	/	4	/	3
7/8	/	2	/	2
1/3	/	/	4	3
2/3	/	/	4	3
1/6	/	/	2	2
2/6	/	/	4	3
3/6	/	/	6	3
4/6	/	/	4	3
5/6	/	/	2	2
Total	29	39	33	49

Mise en situation :

Présenter le jeu aux élèves au départ d'une fiche de jeu (voir *Carré magique pour faire 1*).
Trois ou quatre joueurs peuvent jouer ensemble. Ce jeu est une adaptation d'un jeu de cartes traditionnel (appelé, selon les régions, "Le valet noir" ou "Le puant").
Les cartes sont distribuées entre les joueurs. Chacun essaie alors, avec les cartes dont il dispose, de former le plus possible de couples dont la somme est égale à l'unité. Chaque couple formé est déposé sur la table. Lorsque aucun joueur ne peut plus former l'unité avec les cartes qu'il a en mains, les joueurs piochent une carte dans le jeu de leur voisin de droite et essaient à nouveau de former un couple.
Le dernier joueur qui garde une carte en main (la carte en trop, celle que l'on ne peut associer à aucune autre pour former l'unité) a perdu.

Identification des tâches attendues des élèves :

Voir *Carré magique pour faire 1*.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Voir *Carré magique pour faire 1*.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Voir *Carré magique pour faire 1*.

Source(s) :

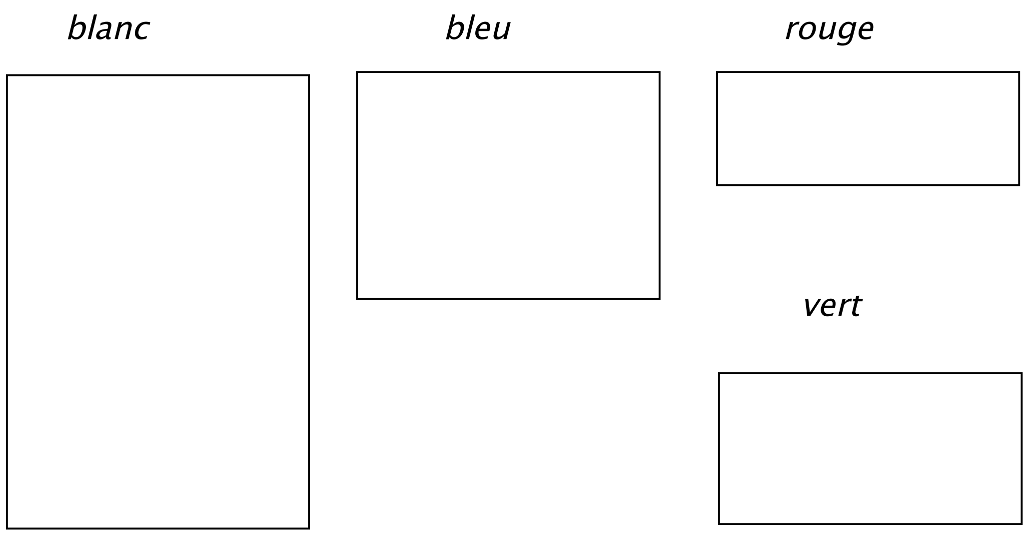
Stegen, P. & Sacré, A. (2002). **Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 8/10**. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

COMPARAISON DE FRACTIONS A L'UNITE

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une activité extraite de *Réseau Mathématique 5e*. Elle permet d'aborder la comparaison et le classement de fractions au départ d'un matériel concret.
Ce dernier se compose d'une enveloppe contenant *1 carton blanc (de 4 cm sur 6), 4 cartons bleus (de 4 cm sur 3), 8 cartons rouges (de 4 cm sur 1,5) et 6 cartons verts (de 4 cm sur 2).*



A l'aide de ce matériel, les élèves vont devoir classer différentes fractions proposées par l'enseignant.

Enjeux

Cette activité permet de développer spécifiquement les compétences suivantes :
- M18 : Ecrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser ;
- M52 : Fractionner des objets en vue de les comparer.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Les enfants sont groupés par 2. Chaque groupe reçoit une enveloppe contenant le matériel décrit ci-avant.
L'enseignant écrit au tableau une série de fractions et il demande aux élèves de les sérier.
Les différentes fractions sont :
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{3}{4} - \frac{4}{4} - \frac{5}{3} - \frac{5}{4}$

Il précise que le matériel contenu dans les enveloppes peut les aider à réussir cette tâche.

Identification des tâches attendues des élèves :

Pour effectuer le classement, les élèves peuvent établir les relations qui existent entre les cartons de différentes couleurs.
Ainsi, le carton blanc vaut une unité (1) ; un carton bleu vaut $\frac{1}{2}$; un carton rouge, $\frac{1}{4}$ et un carton vert, $\frac{1}{3}$.
Au départ de ce constat, ils peuvent sérier les différentes fractions proposées.

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Pour faciliter la tâche des enfants, l'enseignant peut leur suggérer de réaliser un premier classement en trois groupes :
- les fractions plus petites que l'unité,
- les fractions égales à l'unité
- les fractions supérieures à l'unité.

Ce classement fait, ils peuvent, au sein de chacun des groupes, ordonner les fractions de la plus petite à la plus grande.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

La mise en commun porte sur les critères qui permettent de comparer les fractions à l'unité:
- les fractions inférieures à l'unité sont celles dont le numérateur est plus petit que le dénominateur;
- les fractions égales à l'unité sont celles dont le numérateur est égal au dénominateur;
- les fractions supérieures à l'unité sont celles dont le numérateur est plus grand que le dénominateur.

Il peut être intéressant de rappeler le principe de l'écriture fractionnaire (numérateur et dénominateur).

Source(s) :

Roegiers, X. (1991). ***Réseau mathématique 5***. Bruxelles : De Boeck-Wesmael.
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

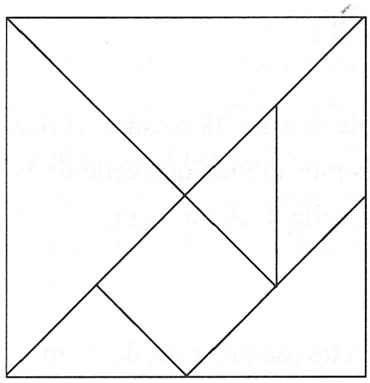
3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

Mesurer les pieces d'un Tangram

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une activité adaptée d'un ouvrage du CREM : *Les mathématiques de la maternelle à 18ans*.
Les élèves reçoivent un Tangram complet et les pièces (découpées) qui constituent celui-ci.

Exemple de Tangram



Au départ de ce matériel, les élèves vont devoir effectuer différentes tâches de mesure.

Enjeux

Les compétences spécifiques développées dans cette activité sont les suivantes :

- M18 : Ecrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser ;
- M52 : Fractionner des objets en vue de les comparer ;
- M54 : Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Les élèves sont répartis en trios. Chacun de ces trios, au départ du matériel décrit ci-avant, va mener trois recherches:

- la première consiste à mesurer les pièces du puzzle en utilisant la plus petite pièce (le petit triangle) pour unité,

- pour la deuxième, il s'agit de mesurer les pièces du puzzle avec la plus grande des pièces (le grand triangle) comme unité,
- pour la troisième, c'est le Tangram complet qui sert de référent pour la mesure des différentes pièces.

Identification des tâches attendues des élèves :

Cette activité de mesure – au départ d'étalons non conventionnels – permet la mise en œuvre de différentes tâches de résolution proches de celles développées dans l'activité *Comparaison de fractions à l'unité*.

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Si nécessaire, les enfants peuvent demander un nouveau jeu de pièces découpées pour faciliter leurs recherches. Ils peuvent également plier, tracer des repères, etc.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

La synthèse peut prendre la forme d'un tableau, de manière à mettre en évidence les relations entre les mesures réalisées avec différents étalons.

Pièce mesurée	à l'aide du petit triangle	à l'aide du grand triangle	à l'aide du Tangram complet
petit triangle	= 1 petit triangle	= 1/4 grand triangle	= 1/16 Tangram
triangle moyen	= 2 petits triangles	= 1/2 grand triangle	= 1/8 Tangram
grand triangle	= 4 petits triangles	= 1 grand triangle	= 1/4 Tangram
carré	= 2 petits triangles	= 1/2 grand triangle	= 1/8 Tangram
parallélogramme	= 2 petits triangles	= 1/2 grand triangle	= 1/8 Tangram

Il est particulièrement intéressant de comparer les mesures réalisées lors des deux premières recherches (avec le petit et avec le grand triangle). Cette comparaison faite, on peut demander aux enfants de dire, sans faire la manipulation, quelles seraient les mesures si on avait utilisé le triangle moyen comme étalon.

L'addition des mesures obtenues avec le Tangram complet permet de revoir les fractions équivalentes, mais sert également de preuve (si le résultat est différent de 1, c'est qu'il y a une erreur!).

Source(s) :

CREM. (1995). **Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans - Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques**. Nivelles : CREM asbl.

Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

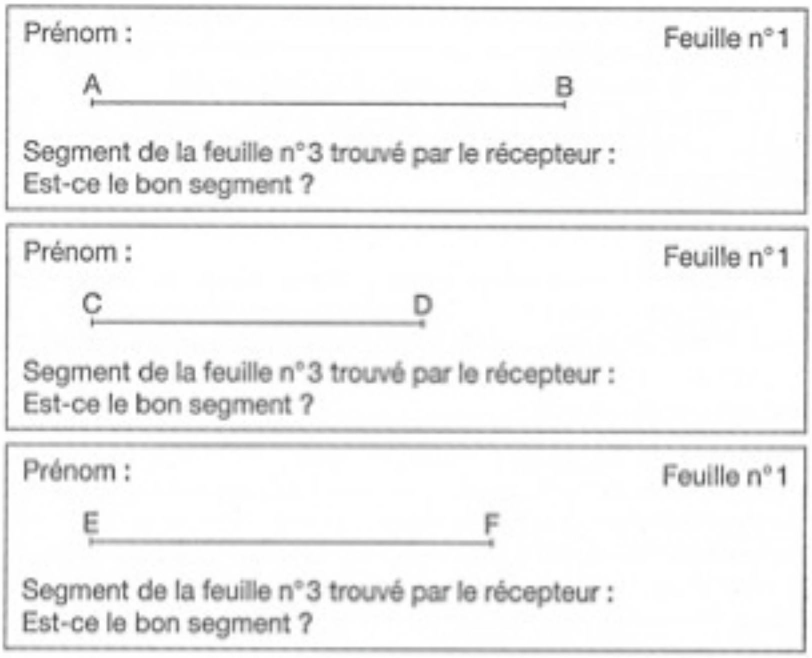
BANDE UNITE

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une séquence adaptée de ERMEL CM1. Elle a pour but d'amener les enfants à utiliser des fractions élémentaires pour exprimer des mesures de longueur, pour construire des segments et pour comparer des longueurs.

Pour cette activité, le matériel suivant est nécessaire :

- une bande unité de 10 cm de long et d'1cm de large
- des feuilles n°1 sur lesquelles sont représentés chaque fois un segment différent (en réalité, trois segments aux dimensions précises : |AB|=25cm, |CD|=17,5cm, |EF|=21,25cm);



Prénom : Feuille n°1

A B

Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :
Est-ce le bon segment ?

Prénom : Feuille n°1

C D

Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :
Est-ce le bon segment ?

Prénom : Feuille n°1

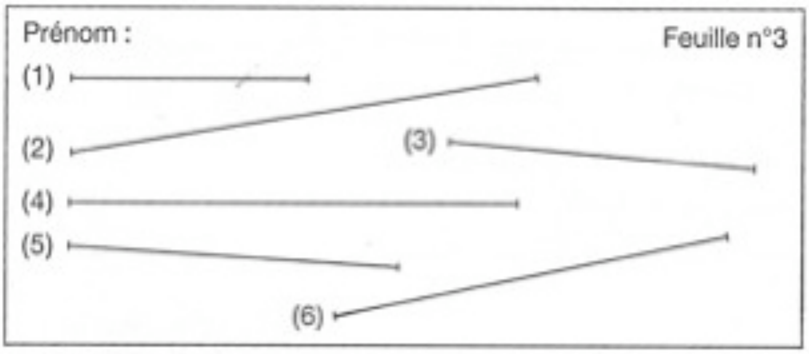
E F

Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :
Est-ce le bon segment ?

- une feuille n°2 sur laquelle les Es devront écrire un message ;

Prénom de l'émetteur : Message :	Feuille n°2
Prénom du récepteur : Segment de la feuille n°3 correspondant au message : Remarques :	

- Une feuille n°3 sur laquelle sont représentés 6 segments (les 3 cités précédemment et 3 autres de longueurs suivantes :12,5 cm, 16,25 cm et 23,75 cm) ;



Enjeux

Au niveau de l'enseignement des rationnels (domaine numérique), cette activité vise essentiellement à développer la compétence suivante :

- écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

De par le choix du contexte, elle vise également les compétences plus spécifiques liées au domaine des grandeurs :

- fractionner des objets en vue de les comparer ;
- additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Pour cette activité de communication, les élèves travaillent par deux.
Chaque groupe de deux élèves reçoit les éléments suivants :

- une bande unité de 10 cm sur 1,
- une des feuilles n° 1 illustrées ci-dessus (celle avec le segment [AB], ou celle avec [CD], ou celle avec [EF]) ;

- une feuille n° 2 pour y écrire son message.

Les lattes ne sont pas disponibles.

L'enseignant montre la feuille portant les segments numérotés de 1 à 6.
Il explique aux élèves que l'un de ces segments a la même longueur que celui qui figure sur la feuille n° 1 que chaque groupe a reçue.
Il demande à chaque groupe d'écrire un message permettant à ceux qui le recevront de trouver celui des 6 segments qui a la même longueur que celui qu'ils ont devant les yeux.

Puisque les enfants ne peuvent utiliser la latte pour mesurer leur segment, l'enseignant les invite à utiliser la bandelette qu'ils ont reçue comme unité, et à l'appeler bande-unité dans le message.

Identification des tâches attendues des élèves :

Les élèves mesurent le segment en reportant la bande unité. Pour obtenir plus de précision, certains pensent à la plier en deux, puis encore en deux, puis éventuellement encore en deux. Les mots moitié, demi, quart, utilisés dans les messages, sont les témoins de cette démarche.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Avant de procéder à une mise en commun, il convient de confronter les messages produits en les échangeant.
Les feuilles n° 2 sont échangées, chaque groupe devient récepteur d'un message. Les feuilles portant les 6 segments sont distribuées. Lorsque cela est possible, les enfants identifient le segment correspondant au message reçu.
Si cela n'est pas possible, ils écrivent leurs remarques concernant la clarté du message ou les difficultés qu'ils ont rencontrées dans l'identification du segment.

Chaque groupe récupère sa feuille n° 2 et complète sa feuille n° 1 en vérifiant si le message a permis au récepteur de trouver le bon segment.

Pour la mise en commun, l'enseignant reprend, pour chacun des trois segments, tous les messages produits. Il écrit, au tableau, les mesures données et les segments trouvés.
Les enfants expliquent leur démarche. Celle-ci est formalisée à l'aide de l'écriture fractionnaire suivante :

$[AB] = 2\text{ u} + \frac{1}{2}\text{ u}$ ou $[AB] = 5 \times \frac{1}{2}\text{ u} = \frac{5}{2}\text{ u}$

On vérifie que le segment [AB] a bien la même longueur que le segment (2), en les mesurant et en les superposant. On fait de même pour les deux autres segments.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

A la fin de l'activité, les découvertes sont synthétisées sous la forme:

1 unité

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dans une unité, il y a 2 demis, il y a 4 quarts, il y a 8 huitièmes.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Dans un demi, il y a 2 quarts, il y a 4 huitièmes.

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Dans un quart, il y a 2 huitièmes.

Quels sont les prolongements possibles ?

Une deuxième étape : utiliser des fractions pour mesurer et construire des segments

Les enfants travaillent seuls. Ils doivent, en utilisant la bande unité, mesurer les 6 segments de la feuille distribuée lors de l'étape précédente. Ils écrivent leurs résultats en utilisant les écritures fractionnaires.

L'enseignant procède à la mise en commun et écrit, segment par segment, les résultats obtenus.

Ces résultats sont vérifiés par les enfants, ce qui permet d'expliquer les erreurs, de mettre en évidence les différentes écritures obtenues pour un même segment.

Chacun reçoit alors une feuille avec une demi-droite d'origine O. A l'aide de la bande unité, les enfants vont devoir placer sur la demi-droite les points A, B et C au départ des données suivantes :

- $OA = 1\text{ u} + \frac{5}{4}\text{ u}$
- $OB = 2\text{ u} + \frac{2}{4}\text{ u}$
- $OC = \frac{5}{2}\text{ u} + \frac{1}{8}\text{ u}$

Cette étape permet à l'enseignant de vérifier et, le cas échéant, de corriger certaines procédures erronées.
Exemples :
Pour placer A, certains reportent une fois la bande unité et cinq fois un quart de la bande, d'autres reportent deux fois la bande et une fois un quart.
Pour placer B et C, tous les enfants ne repartent pas de l'origine, certains placent B un quart après A et C un huitième après B.

Lors de la mise en commun, les différentes procédures sont explicitées et des égalités sont formulées ; par exemple :

$$1 \text{ u} + \frac{5}{4} \text{ u} = 2 \text{ u} + \frac{1}{4} \text{ u.}$$

L'enseignant remet à chacun une feuille avec la correction ; les enfants peuvent ainsi vérifier s'ils ont bien placé les points A, B et C. Ils cherchent ensuite les longueurs AB, BC et AC.

Pour cette dernière recherche, certains enfants opèrent sur les mesures données, d'autres utilisent les points correctement placés pour mesurer les longueurs avec la bande unité.

Une troisième étape : comparer des longueurs

Les enfants travaillent par deux et ne disposent plus de la bande unité. Ils vont devoir opérer sur les écritures fractionnaires en se représentant mentalement les fractions données.

L'enseignant donne la mesure de 6 segments et demande aux enfants d'identifier, parmi ceux-ci, le segment le plus court, le segment le plus long et s'il y en a qui ont la même longueur.

$OA = 1 \text{ u} + \frac{5}{2} \text{ u}$	$OB = \frac{7}{2} \text{ u}$	$OC = 2 \text{ u} + \frac{1}{2} \text{ u} + \frac{1}{4} \text{ u}$
$OD = \frac{10}{4} \text{ u}$	$OE = 2 \text{ u} + \frac{7}{8} \text{ u}$	$OF = 1 \text{ u} + \frac{15}{8} \text{ u}$

Aux enfants qui éprouveraient de grandes difficultés, l'enseignant peut fournir une bande unité. A l'aide de ce matériel, ils choisissent soit de placer les points A, B, C, D, E et F sur une demi-droite d'origine O, soit de construire les 6 segments l'un en dessous de l'autre pour pouvoir les comparer

Lors de la mise en commun, les différentes réponses sont affichées au tableau et validées en plaçant les points sur une demi-droite.
L'enseignant note les égalités utilisées par les enfants et la manière dont ils les justifient.

Par exemple:

$1\ u + \frac{5}{2}\ u = \frac{7}{2}\ u$ car $1\ u = \frac{2}{2}\ u$

$1\ u + \frac{5}{2}\ u = 3\ u + \frac{1}{2}\ u$ car $\frac{5}{2}\ u = 2\ u + \frac{1}{2}\ u$

Source(s) :

ERMEL CM1 (1997). ***Apprentissages numériques et résolution de problèmes.*** paris : Hatier
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

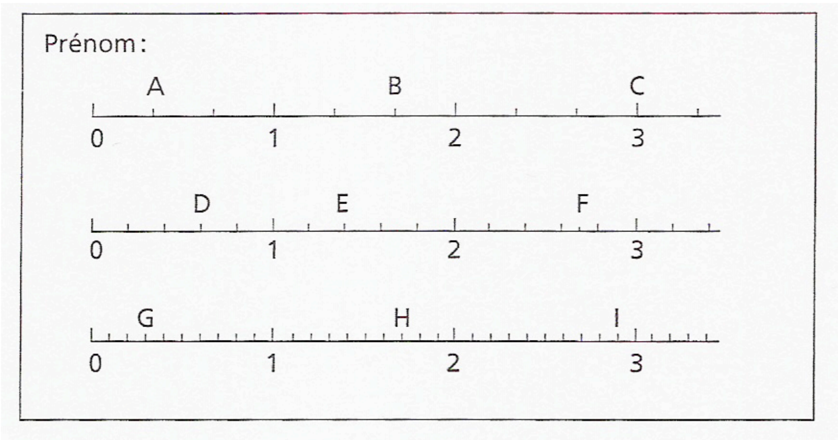
DROITE GRADUEE

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une séquence adaptée de ERMEL CM1. Elle a pour but d'amener les élèves à positionner des fractions sur des demi-droites numériques. Elle s'inscrit dans le prolongement de l'activité « bande unité ».

Pour cette activité, le matériel suivant est nécessaire :

- Pour chaque Es, une feuille A4 en paysage sur laquelle sont représentées trois demi-droites graduées, l'une en tiers, l'autre en cinquièmes et la dernière en dixièmes ;



- Des bandelettes de papiers de différentes longueurs, l'une d'entre-elles étant la bande unité de 6 cm de long.

Enjeux

Au niveau de l'enseignement des rationnels (domaine numérique), cette activité vise essentiellement à développer la compétence suivante :

- écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

De par le choix du contexte, elle vise également les compétences plus spécifiques liés au domaine des grandeurs :

- fractionner des objets en vue de les comparer ;

- additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Etape 1 : Se familiariser avec le matériel

Les élèves sont répartis en groupes de 3 ou 4 élèves. L'enseignant affiche au TN le matériel nécessaire pour cette première activité puis le distribue aux différents groupes.
Il s'agit des bandelettes étalons ainsi que du document contenant les 4 demi droites (agrandis à l'échelle 4).

L'enseignant explique aux élèves que ces demi-droites ont été graduées au moyen d'une des bandelette qu'il a distribuées.
La première tâche des élèves va être de retrouver la bandelette étalon qui a été utilisée.
Cette première tâche ne devrait pas être trop longue pour les élèves.
Une brève mise en commun aura pour but de :

- vérifier l'exactitude des réponses produites par les élèves ;
- valider les démarches utilisées par les élèves et leur faire prendre conscience que c'est bien le même étalon de départ qui a été utilisé pour graduer les trois demi-droites ;
- préciser que le trait 1 se situe à une unité du trait 0 et que le trait 0 s'appelle l'origine de la graduation. Si le trait 1 se situe à une unité de l'origine, le trait 2 se situe lui à deux unités de l'origine.

Etape 2 : Identifier à quelles fractions correspondent certains repères placés sur des demi-droites

Les élèves travaillent cette fois individuellement au départ du tableau contenant les trois demi-droites.
Le but de cette deuxième étape est d'identifier quelles fractions se cachent sous les différents repères identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I.

Dans un premier temps, il convient de demander à tous les élèves d'effectuer la première recherche au départ de la consigne suivante : « Rechercher toutes les fractions qui peuvent correspondre aux points A, B et C ».

Dans un second temps, après une phase de mise en commun, il sera possible de dissocier ou non les recherches proposées aux élèves (« Quelles sont les fractions qui correspondent d'une part aux points D, E et F et, d'autre part, aux points G, H et I ? »).

Identification des tâches attendues des élèves :

Les élèves doivent trouver plusieurs fractions ou plusieurs écritures des fractions. Ils procèdent par pliages et reports de la bande unité identifiée à l'étape précédente.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Les différentes réponses produites par les élèves sont recensées et explicitées. Elles font ensuite l'objet de discussions afin d'être validées. Au cours de cette phase, lorsque plusieurs écritures des abscisses ont été validées, l'enseignant les place sous le point correspondant et fait écrire les égalités.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Diverses équivalences d'écriture des fractions comme, par exemple :

- Sous le point B, il est possible d'écrire les fractions suivantes : $\frac{5}{3}$ ou $1 + \frac{2}{3}$ ou $2 - \frac{1}{3}$
- La discussion sur le point F pourra faire ressortir l'égalité suivante : $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ ou que la moitié d'un cinquième est un dixième .... ce qui conduira vers l'égalité suivante : $2 + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = 2 + \frac{7}{10} = \frac{27}{10}$

Quels sont les prolongements possibles ?

Une troisième étape : associer un point à un nombre

Les élèves travaillent de nouveau individuellement. Il leur est demandé cette fois de positionner des points sur une des trois graduations au départ de la consigne suivante : « Placez chacun des points sur la graduation à l'endroit où cela vous paraît le plus facile ».

Les nombres à placer sont les suivants :

J ; il correspond à $\frac{3}{2}$

K ; il correspond à $1 + \frac{4}{6}$

L ; il correspond à $\frac{13}{5}$

J ne pose guère de problème ; il peut se placer sur la troisième demi-droite et permet de dégager les égalités suivantes : $\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$ et $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

Une quatrième étape : trouver la distance entre deux points

Les élèves travaillent à nouveaux seuls ... ils disposent cette fois de leurs demi-droites mais pas des bandelettes afin d'identifier la valeur des distances AB, DE, DF, HI, GI.

la mise en commun de cette activité est l'occasion de valider de nouvelles égalités du type :
$AB = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

Un prolongement possible de cette dernière activité est de demander aux élèves de calculer les distances entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{4}$; 2 et $\frac{4}{3}$; 2 et $\frac{34}{10}$; $\frac{3}{5}$ et $\frac{18}{10}$.
La validation des réponses produites par les élèves se fait en plaçant les fractions sur les graduations.

Source(s) :

ERMEL CM1 (1997). ***Apprentissages numériques et résolution de problèmes.*** Paris : Hatier
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

CONSTRUCTION D'UNE DROITE NUMERIQUE

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une séquence construite en 5 étapes. Elle permet aux enfants de construire une droite graduée pour, ensuite, y situer des fractions décimales et des nombres décimaux.
Cette séquence est une adaptation d'une activité développée dans ERMEL CM2.

Enjeux

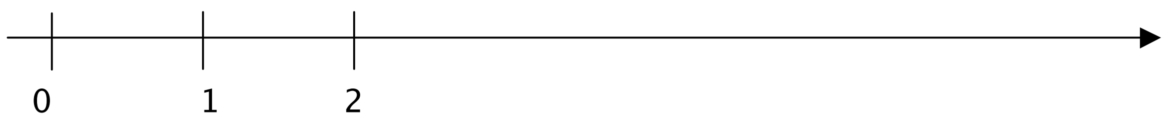
Les compétences spécifiques développées par cette séquence sont les suivantes :

- M2 : Dire, lire et écrire des nombres dans la numération de position en comprenant son principe ;
- M3 : Classer (situer, ordonner, comparer des naturels et des décimaux) ;
- M4 : Décomposer et recomposer des nombres naturels et des décimaux ;
- M12 : Dans un calcul, utiliser les décompositions appropriées des nombres ;
- M18 : Ecrire des nombres sous une forme adaptée en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Comment s'y prendre ?

Etape 1: Construire et utiliser une droite numérique

Une demi-droite est tracée au tableau. Les nombres 0, 1 et 2 y sont déjà placés. Les enfants, groupés par 2, reçoivent une bandelette de papier reprenant la même demi-droite. Ils doivent, sans utiliser de latte, y placer les traits correspondant aux nombres 3 et 4.



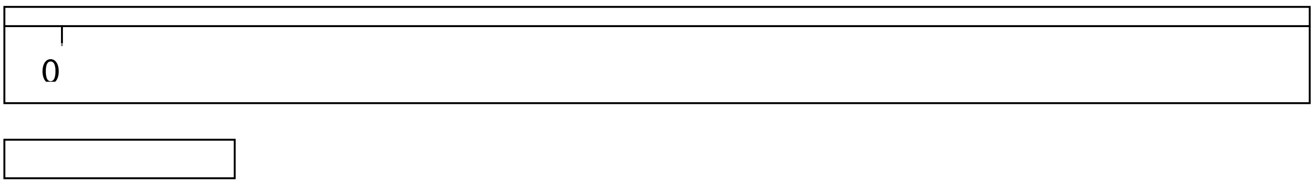
Une première mise en commun permet de comparer les résultats obtenus, de confronter les démarches utilisées par les groupes et de valider celles qui se révèlent appropriées (utilisation du compas, pliage de la bandelette, ...).

Cette situation oblige les élèves à recourir au pliage pour situer précisément les nombres sur la droite. Cette stratégie n'est pas habituelle pour eux, il est donc important de les laisser chercher sans intervenir pour (in)valider leurs stratégies.
Une difficulté à prendre en compte est la situation du 0 : il n'est pas placé au bord de la bandelette. Les élèves doivent tenir compte de cette contrainte pour effectuer le pliage qui définit la valeur de l'intervalle à reporter pour situer 3 et 4.
Le choix des nombres à placer sur la droite permet de différencier l'activité en l'adaptant aux compétences numériques des élèves. Certains peuvent ainsi placer les nombres 3 et 4, d'autres les nombres 6 et 7, ou 8 et 9, ou encore 4 et 9.

En prolongement, on peut proposer aux élèves de placer 3 et 4 sur la droite du tableau. Il sera nécessaire d'adopter une stratégie adaptée (il n'est pas question de plier le tableau pour reporter la valeur de l'intervalle!) et d'utiliser soit une bandelette-étalon, soit un compas.

Etape 2: Construire une droite numérique graduée en dixièmes d'unité

Les enfants sont groupés par 2. Chaque groupe reçoit une bandelette de 2 mètres sur 3 ou 4 cm (morceau de rouleau de calculatrice ou bandes de papier listing) sur laquelle le 0 est placé, ainsi qu'une bandelette-étalon de 5 cm sur 1.



L'enseignant précise que la longueur de la petite bande vaut un dixième de l'unité (il note $\frac{1}{10}$ au tableau), puis il demande aux enfants de situer 1 sur la bandelette.
La mise en commun fait apparaître que, pour placer le nombre 1, il s'agit de reporter 10 fois la petite bande dans le sens de la longueur car, dans une unité, il y a dix dixièmes.

Pour situer le nombre 1 sur la droite numérique, les enfants doivent reporter 10 fois la valeur de l'étalon (fixée à $\frac{1}{10}$).
Lors du lancement de l'activité, il importe de bien présenter le dixième dans le sens de la longueur, en l'affichant au tableau (pour éviter que des élèves ne reportent la largeur de la bandelette plutôt que sa longueur!).
Certains enfants confondent dixième et unité : ils ne reportent qu'une fois le dixième.
On relève également certaines stratégies plus économiques et expertes: des élèves reportent 5 fois le dixième, puis reportent une fois cet intervalle de $\frac{5}{10}$.

La mise en commun permet également de mathématiser les manipulations au travers d'écritures telles que $1 = 10 \times \frac{1}{10}$ ou $1 = (5 \times \frac{1}{10}) \times 2$.

Ces mathématisations servent de support au raisonnement des élèves et les aident à prendre conscience des possibilités de communication offertes par le formalisme mathématique.

En guise de prolongement, l'enseignant demande de placer les nombres 2 et 3. Il est alors intéressant d'observer le degré d'expertise des stratégies développées par les élèves :

- vont-ils à nouveau reporter 10 fois le dixième au départ du nombre 1 ?
- vont-ils directement reporter, par pliage, la mesure de l'écart entre 0 et 1 ?

Etape 3: Utiliser une droite numérique pour situer des fractions décimales (limitées aux dixièmes)

Le matériel est le même que pour les deux étapes précédentes. Les groupes de 2 enfants doivent cette fois placer sur la droite la fraction $\frac{8}{10}$, puis la fraction $\frac{25}{10}$.

Lors de la mise en commun, il leur sera demandé d'expliquer et justifier leurs démarches, puis de les mathématiser au travers des expressions telles que :

- $\frac{8}{10} = 1 - \frac{2}{10} = 8 \times \frac{1}{10}$
- $\frac{25}{10} = 2 + \frac{5}{10} = 3 - \frac{5}{10} = 25 \times \frac{1}{10}$.

Les élèves ont toujours à leur disposition la bandelette-étalon de un dixième. Pour placer $\frac{8}{10}$, ils ont donc le choix entre reporter 8 fois la bandelette à partir de 0 ou partir de 1 et soustraire 2 dixièmes.

Pour $\frac{25}{10}$, les stratégies sont plus diversifiées: les élèves procèdent en pliant en 2 l'intervalle entre 2 et 3, ou ils reportent 5 fois la bandelette $\frac{1}{10}$ entre 2 et 3. Lors d'une expérimentation, un élève a reporté trois fois, par pliage, la valeur de l'intervalle compris entre 0 et $\frac{8}{10}$ et y a ajouté $\frac{1}{10}$. Il est important de pouvoir mathématiser ces stratégies sous la forme des expressions données ci-dessus.

Etape 4: Utiliser une droite numérique pour situer des fractions décimales (limitées aux centièmes)

Toujours avec le même matériel, les enfants ont à placer la fraction $\frac{135}{100}$.
Suite à cette recherche, ils précisent et comparent les démarches mises en oeuvre lors d'une mise en commun. Pour asseoir leurs découvertes et utiliser les instruments construits, les enfants placent ensuite les fractions $\frac{205}{100}$ et $\frac{40}{100}$.

Le matériel à disposition des élèves ne permet pas de placer sur la droite une fraction décimale exprimée en centièmes. Pour placer $\frac{135}{100}$, deux stratégies peuvent être observées :

- *après avoir constaté que $\frac{135}{100}$ se trouve au milieu de l'intervalle compris entre $\frac{13}{10}$ et $\frac{14}{10}$, repérer ces 2 fractions sur la droite puis partager l'intervalle compris entre elles en 2. Cette stratégie implique que l'enfant ait établi que $\frac{13}{10} = \frac{130}{100}$ et que $\frac{14}{10} = \frac{140}{100}$;*
- *plier en 2 la bandelette-étalon pour obtenir $\frac{5}{100}$ (après avoir constaté que $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$ et que $\frac{1}{10} : 2 = \frac{5}{100}$) puis reporter cette demi bandelette au départ de $\frac{13}{10}$ ou de $\frac{14}{10}$. Cette stratégie implique également que l'enfant ait établi que $\frac{13}{10} = \frac{130}{100}$ et que $\frac{14}{10} = \frac{140}{100}$.*

Cette façon de construire les centièmes est très importante car elle fait prendre conscience aux enfants des ruptures existant entre les entiers et les rationnels:
- *l'idée de succession : un nombre naturel a un successeur (le successeur de 7 est 8). Cette idée n'a pas de sens pour les rationnels; quel est le successeur de $\frac{21}{10}$? $\frac{22}{10}$ ou $\frac{211}{100}$?*
- *l'intercalation : entre deux naturels, il existe un nombre fini de naturels. Entre deux décimaux, il existe une infinité de décimaux.*

La mise en commun permettra de mathématiser les relations construites par les élèves durant la recherche:
- $1 = \frac{100}{100}$
- $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$
- $\frac{1}{10} : 2 = \frac{5}{100}$
- $\frac{135}{100} = 1 + \frac{35}{100} = \frac{13}{10} + \frac{5}{100} = \frac{14}{10} - \frac{5}{100} = \ldots$

- $\frac{35}{100} = \frac{4}{10} - \frac{5}{100}$

Le savoir construit durant cette quatrième étape peut être représenté par les trois bandelettes représentant l'unité, le $\frac{1}{10}$ et le $\frac{1}{100}$.

Dans une unité, il y a 10 dixièmes: $1 = \frac{10}{10}$.

Dans une unité, il y a 100 centièmes: $1 = \frac{100}{100}$.

Dans un dixième, il y a 10 centièmes: $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$.

A la fin de cette étape, les enfants sont invités à tracer sur leur droite graduée tous les dixièmes compris entre 0 et 2 et à graduer, à l'aide d'une latte, l'étalon $\frac{1}{10}$ en 10 centièmes. Les nombres 0, 1 et 2 sont à noter au crayon afin que le segment de droite construit puisse être, par la suite, utilisé comme référent pour placer ou comparer d'autres nombres.

Etape 5: Placer des nombres décimaux sur une droite numérique

Les élèves disposent de leur grande bande graduée en dixièmes et de la bandelette-étalon d'un dixième graduée en centièmes. Ils doivent placer 1,7 sur la grande bande. Il leur est ensuite demandé de placer 2,03 et 1,235.

En demandant aux enfants de placer des nombres décimaux sur la droite, l'objectif est qu'ils établissent des liens entre écriture fractionnaire et écriture décimale d'un rationnel. Ce passage peut être source d'erreurs: certains élèves peuvent interpréter 1,7 comme 1,07 (soit $1 + \frac{7}{100}$), d'autres peuvent traduire 1,235 par 3,35 (soit $1 + \frac{235}{100}$).

Pour placer ce dernier nombre, les élèves doivent adopter une stratégie semblable à celle utilisée lorsqu'il s'agissait de passer des dixièmes aux centièmes.

Ce travail permet de poursuivre la réflexion sur l'intercalation : $1{,}235 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$. Pour trouver $\frac{5}{1000}$, on partage $\frac{1}{100}$ en 2.

Lors de la mise en commun, la notation fractionnaire est utilisée pour donner du sens aux chiffres des écritures à virgule et pour traduire les relations entre millième et unité, entre centième et unité, entre dixième et unité.

$1{,}7 = 1 + \frac{7}{10}$

$$2{,}03 = 2 + \frac{3}{100}$$

$$1{,}235 = 1 + \frac{235}{1000} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$$

$$1 = \frac{1000}{1000} = \frac{100}{100}$$

Quels sont les prolongements possibles ?

Pour systématiser la mise en relation entre écriture fractionnaire et écriture décimale, les enfants complètent le tableau ci-dessous ligne par ligne. L'enseignant précise que la partie entière d'un nombre est le nombre d'unités contenues dans ce nombre et qu'une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, ...
Cette tâche est assez complexe.

Ecriture avec les mots unité, dixième, centième, millième	Ecriture à virgule	Somme de la partie entière et de la fraction décimale	Fraction décimale
	2,22		
Sept centièmes			
		$203 + \frac{8}{1000}$	
			$\frac{275}{100}$
	92,120		

La correction se fait ligne par ligne et devrait faire apparaître que, dans certaines cases, on peut avoir plusieurs réponses. L'institutionnalisation du savoir peut prendre la forme suivante, au terme de la séquence:

$$2{,}15 = 2 + \frac{15}{100} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} = \frac{215}{100}$$

2 partie entière de 2,15	15 partie décimale de 2,15

Source(s) :

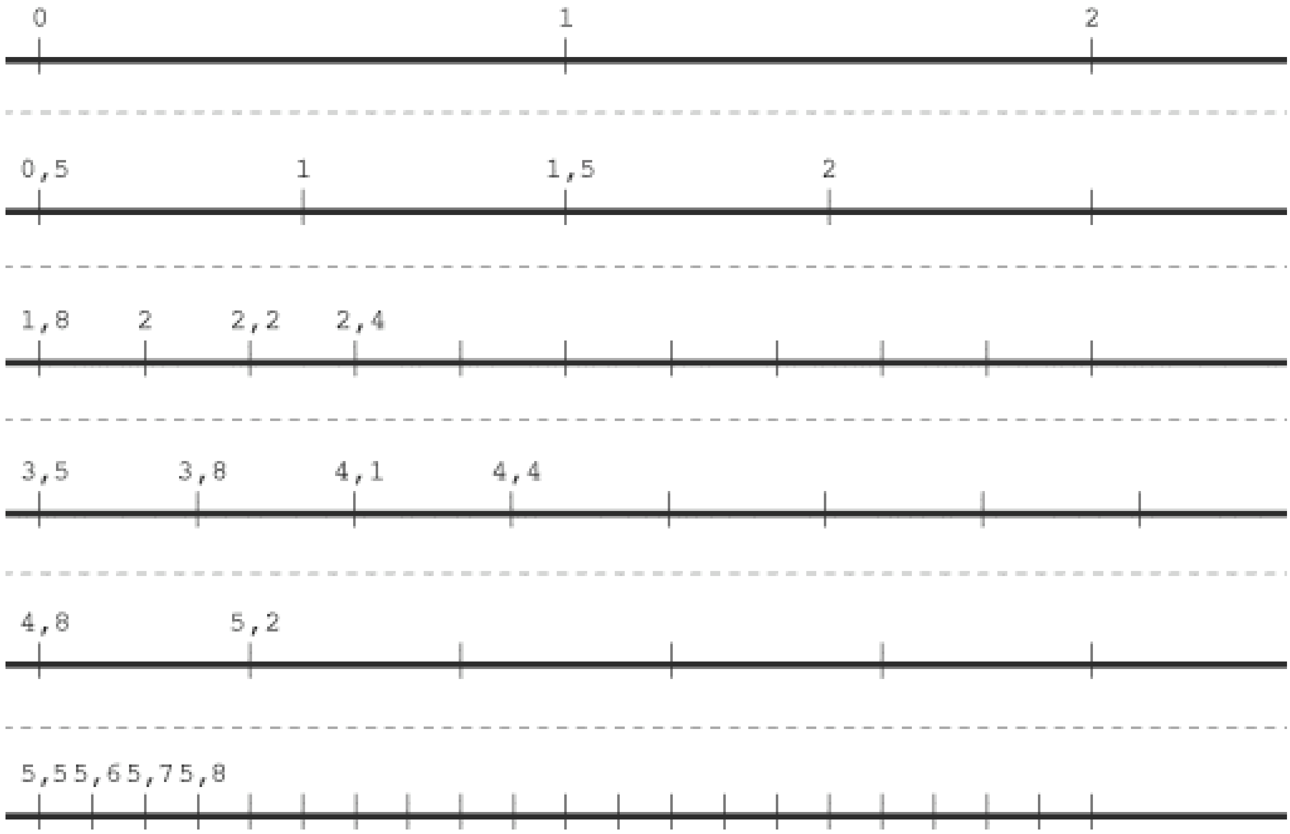
ERMEL. (1999) **Apprentissages numériques au CM2**, Paris : Hatier.
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

RECONSTITUTION DE DROITES GRADUEES

De quoi s'agit-il ?

Cette activité, extraite de Sacré & Stegen (2003), se situe dans le prolongement direct de *Construction d'une droite graduée*. Elle permet de vérifier que les élèves ont bien compris le principe de construction d'une droite numérique.
Au départ de différents segments, les élèves doivent reconstituer une seule droite numérique.



Enjeux

Les différentes compétences suivantes sont développées :

- M2 : Dire, lire et écrire des nombres dans la numération de position en comprenant son principe ;
- M3 : Classer (situer, ordonner, comparer des naturels et des décimaux) ;

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Les enfants, seuls ou par groupes de deux, reçoivent une feuille sur laquelle sont représentés six segments d'une partie de droite. Ils doivent découper puis assembler ces segments pour reconstituer la partie de droite correspondante.

Identification des tâches attendues des élèves :

Ces segments sont construits sur la base d'une même échelle, mais sont gradués de manière différente (de 1 en 1, de 0,5 en 0,5, de 0,2 en 0,2, etc.). Les élèves vont devoir trouver la valeur des intervalles de chacun des segments avant d'essayer de les assembler.
Les enfants travaillent comme ils le souhaitent, soit en éliminant les parties de segments superflues (plusieurs segments se chevauchent partiellement), soit en procédant par recouvrement. Ils peuvent aussi compléter les graduations avant de réaliser les raccords.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

La mise en commun doit permettre aux élèves de comparer les différentes droites produites. Celles-ci sont affichées au tableau.
Cette façon de procéder permet de vérifier rapidement la validité des productions des élèves. En cas d'erreur, chaque groupe explique comment il a procédé et l'enseignant veille à débuter par les productions erronées.

Quels sont les prolongements possibles ?

Une fois la portion de droite reconstituée, l'enseignant propose aux enfants de la sous-graduer de 0,1 en 0,1 et d'y placer, de la manière la plus précise possible, quelques nombres (par exemple, 1,3 - 4,6 - 5,9 - 6,88 - etc.).

> Suite au placement de ces nombres sur la droite, on peut remarquer qu'il est difficile d'être précis dans certains cas (par exemple, lorsqu'il s'agit de placer un nombre limité au centième sur une droite graduée en dixièmes). Si le besoin de précision se fait sentir, on peut recourir au segment de droite construit lors de l'activité "Construction d'une droite numérique".
> Par exemple, pour placer le plus précisément possible 6,88, les enfants doivent d'abord définir la valeur des deux bornes (encadrer un décimal par deux naturels), soit 6 et 7, avant d'utiliser leur étalon pour situer 6,88.

Source(s) :

Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

FEUILLE A3

De quoi s'agit-il ?

Durant cette activité (adaptée de ERMEL CM2), les élèves vont chercher, sans nécessairement recourir à une manipulation matérielle, comment obtenir, à partir d'une feuille A3 qui pèse 10 g, un morceau de papier qui pèse 1,4 g, un autre de 3,5 g et enfin un de 6,08 g.

Enjeux

Cette activité permet d'articuler, dans un contexte de mesure de masses, les écritures décimales et fractionnaires. Les compétences spécifiques suivantes sont développées à cette occasion :

- M2 : Dire, lire et écrire des nombres dans la numération de position en comprenant son principe ;
- M3 : Classer (situer, ordonner, comparer des naturels et des décimaux) ;
- M4 : Décomposer et recomposer des nombres naturels et des décimaux ;
- M12 : Dans un calcul, utiliser les décompositions appropriées des nombres ;
- M18 : Ecrire des nombres sous une forme adaptée en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Comment s'y prendre ?

Etape 1 : appropriation de la situation (établir une relation entre nombre de feuilles et masse correspondante)

L'enseignant présente une feuille aux élèves et leur indique qu'elle pèse 10 g. il note ces données au tableau puis soumet quelques questions aux élèves afin qu'ils puissent établir des relations entre nombre de feuilles et masse, entre partie de feuille et masse:

Exemple de questions :

- "Combien pèsent 125 feuilles A3?"
- "Combien faut-il de feuilles A3 pour avoir 50 g?"
- "Que faut-il faire pour obtenir 5 g?"

Une mise en forme des données en tableau permet de visualiser les relations lors d'une brève phase de mise en commun (voir document sur l'enseignement de la proportionnalité à la liaison primaire-secondaire).

Etape 2 : partage d'une feuille

Une fois les élèves familiarisés avec le matériel, le ***premier problème*** leur est posé: "Vous allez chercher un moyen d'obtenir un morceau de feuille qui pèse 1,4 g. Vous ne devez pas découper la feuille, il suffit de décrire la manière de procéder ou de l'expliquer par un schéma."

Les conditions matérielles de résolution sont très importantes. Il vaut mieux que l'enseignant note au tableau les questions destinées à établir la relation entre nombre de feuilles et masse, car leur résolution implique l'utilisation d'opérations mathématiques différentes.

Pour réaliser la recherche, les enfants sont répartis en groupes de 2 ou 3 et ne disposent ni de calculatrices, ni de règles graduées, ceci pour éviter qu'ils fassent des calculs, qu'ils soient tentés de mesurer et de tracer des rectangles sur la feuille.

Pour écrire leur solution ou faire un schéma, ils ont uniquement une feuille blanche, le but étant d'anticiper les actions qui permettront d'obtenir le morceau de feuille.

Exemple de démarche adoptée par les enfants: ils doivent d'abord se demander comment obtenir 1 g, et donc imaginer de partager la feuille en 10. Ils doivent ensuite envisager les 4 dixièmes de gramme, et donc imaginer de partager un morceau qui pèse 1 g en 10 pour obtenir des dixièmes de gramme.

Lors de la mise en commun, les démarches des différents groupes sont présentées. Le constat principal est que, pour obtenir un dixième de gramme, il faut d'abord partager la feuille en 10 (pour obtenir 1 g), et puis partager à nouveau en 10 un des morceaux obtenus (soit partager la feuille de départ en 100 et obtenir ainsi $\frac{1}{10}$g).

Cela permet de mettre en évidence qu'1,4g c'est 1g + $\frac{4}{10}$g (et non, par exemple, 1g + $\frac{1}{4}$g).

Etape 3 : deux autres problèmes

Un **deuxième problème** peut alors être proposé aux enfants : la recherche d'un morceau de 4,5 g.
Ici, plusieurs procédures peuvent apparaître:

- rechercher 4 morceaux de 1 g, puis rechercher un morceau de 5 dixièmes de gramme (soit la moitié d'un morceau d'un gramme, soit 5 morceaux de 1 dixième de gramme),

- prendre la moitié de la feuille et en retirer la moitié d'un morceau d'un gramme,
- partager la feuille en 5, en prendre deux morceaux, puis la moitié d'un morceau d'un gramme, etc.

Dans le **troisième problème**, les enfants sont invités à chercher comment obtenir un morceau qui pèse 6,08 g.

L'une des deux méthodes suivantes est attendue:
- soit partager un morceau de 1 g en cent, pour obtenir des centièmes de gramme, et prendre 8 centièmes,
- soit partager un morceau d'un dixième de gramme en 10 et prendre 8 des 10 parties obtenues.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Au terme de l'activité, il peut être utile de visualiser les traces des manipulations effectuées. Pour ce faire, on peut utiliser une grande affiche sur laquelle on place :

- une feuille A3 qui pèse 10g ;
- une morceau A d'une feuille A3 partagée en 10 (ce morceau pèse 1g) ;
- un morceau B qui est en fait un morceau obtenu en partageant A en 10 parts équivalentes (ce morceau pèse $\frac{4}{10}$g) ;
- un morceau C obtenu après partage de B en 10 parts équivalentes ce morceau pèse $\frac{1}{10}$g) ;

Quels sont les prolongements possibles ?

Cette activité peut être prolongée par d'autres recherches : comment obtenir 3,25 g ; $\frac{3}{10}$g ; 125,47 g, ou encore comment obtenir un morceau qui pèse un millième de gramme.

Source(s) :

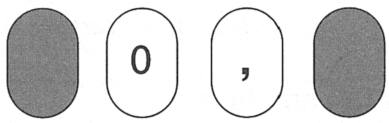
ERMEL. (1999) **Apprentissages numériques au CM2**, Paris : Hatier.
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

CONSTRUCTION DE NOMBRES DECIMAUX ET ROLE DU ZERO DANS LA NUMERATION DE POSITION

De quoi s'agit-il ?

Cette activité, adaptée de Math en flèche CM2, nécessite le matériel suivant :
- des cartes rouges (représentant les chiffres de 1 à 9),
- des cartes portant le chiffre 0 ;
- des cartes portant une virgule.



Une vingtaine de cartes de chaque sorte est suffisante.

Au départ de ce matériel, les élèves vont travailler sur la numération de position.

Enjeux

Cette activité développe les compétences spécifiques suivantes :
- M2 : Dire, lire et écrire des nombres dans la numération de position en comprenant son principe ;
- M3 : Classer (situer, ordonner, comparer des naturels et des décimaux) ;

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Cette activité s'adresse à l'ensemble de la classe. Les élèves travaillent seuls ou en duos. L'enseignant tire un certain nombre de cartes (dans l'ordre de son choix) et les affiche au tableau. Il demande ensuite aux élèves de chercher le plus possible de nombres pouvant se cacher derrière cette combinaison de cartes.
Une brève phase de mise en commun permet à l'enseignant de s'assurer de la bonne compréhension des élèves.

Une deuxième activité : rendre un nombre plus grand ou plus petit

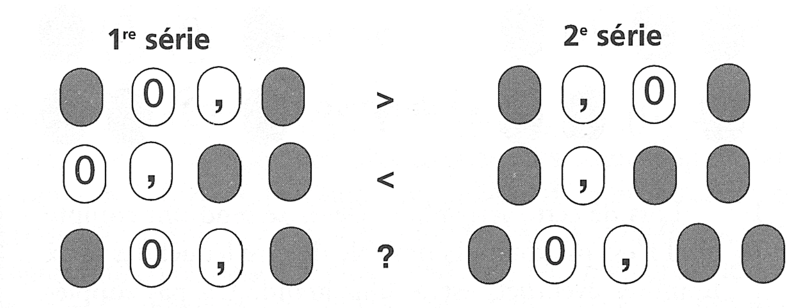
Au départ du même matériel, l'enseignant propose une ***deuxième activité*** : il tire une série de cartes, les affiche au tableau et demande aux enfants ce qu'il conviendrait de faire pour rendre le(s) nombre(s) caché(s) derrière ces cartes le(s) plus grand(s) ou le(s) plus petit(s) possible.

Pour répondre à ce défi, les élèves doivent modifier l'ordre des cartes et, notamment, être attentif à la place de la virgule et des 0.

Si des enfants éprouvent des difficultés avec cette activité, on peut leur proposer d'imaginer un nombre se cachant derrière la combinaison de cartes affichées. Il est en effet plus facile de raisonner au départ d'un nombre "concret" que sur des cartons représentant ce nombre.

Une troisième activité : comparer des nombres

Une ***troisième activité*** consiste en la comparaison de deux nombres. L'enseignant tire deux séries de cartes et les affiche au tableau. Les enfants doivent alors identifier la série derrière laquelle pourrait se cacher le nombre le plus grand.



Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Au terme de cette activité, une phase de mise en commun doit déboucher sur les constats suivants :

- lorsqu'on écrit un nombre à virgule, les 0 occupant les rangs les plus à droite (dans la partie après la virgule) ne sont pas nécessaires ;
- les 0 occupant les rangs les plus à gauche d'un nombre entier ou de la partie entière d'un nombre à virgule ne sont pas nécessaires ;
- lorsqu'on écrit un nombre à virgule, la virgule ne peut pas occuper le rang le plus à gauche, elle doit toujours être précédée d'au

moins un chiffre; si elle occupe le rang le plus à droite, elle est inutile, on ne l'écrit pas ;
- un déplacement de la virgule d'un rang vers la gauche contribue à rendre le nombre 10X plus petit; à l'inverse, un déplacement de la virgule d'un rang vers la droite rend le nombre 10X plus grand ;
- il n'est pas toujours possible d'identifier la série de cartes derrière laquelle se cache le plus grand nombre.

Quels sont les prolongements possibles ?

Cette activité peut être prolongée par une réflexion sur le rôle du zéro dans la numération de position.
L'enseignant demande aux élèves de construire des nombres décimaux (limités au millième) au départ de quatre chiffres.
Exemple :
Si les quatre chiffres proposés sont 0-0-7-4, les nombres que l'on peut construire sont: 0 – 4 – 7 – 40 – 70 – 47 – 74 – 400 – 407 – 470 – 700 – 704 – 740 – 4007 – 4070 – 4700 – 7004 – 7040 – 7400 ; mais aussi : 0,4 – 0,7 – 0,04 – 0,07 – 0,47 – 0,74 – 0,047 – 0,074 – 0,407 – 0,704 – 4,7 – 4,07 – 4,007 – 7,4 – 7,04 – 7,004 – 40,7 – 40,07 – 70,4 – 70,04 – 400,7 – 700,4.

Il peut ensuite demander aux enfants de trouver, dans la liste, le plus grand nombre, ou le plus petit, de les classer tous du plus petit au plus grand.

Pour classer tous ces nombres, la droite des nombres peut se révéler utile si l'on invite les enfants à y situer les nombres de manière approximative.
La mise en commun qui suit l'activité est l'occasion de prolonger les constats établis précédemment. Elle permet notamment de faire apparaître la différence entre les entiers et les décimaux au niveau des 0 inutiles.

Source(s) :

Collections Diagonales. **Math en flèche CM2**. Paris : Nathan.
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

Bibliographie

- Andrianne, S., Sacre, A. & Stegen, P. (1997) **Des socles de compétences aux apprentissages en cycle - Des jeux des activités … Outils pour construire les nombres**. Bruxelles : Conseil de l'Enseignement des Communes et Provinces.
- APMEP (1985). **Jeux et activités numériques**, Paris, APMEP.
- Baruk, S. (1985). **L'âge du capitaine, de l'erreur des mathématiques**. Paris : Seuil.
- Bolon, J. (1996). **Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège**. Paris : Thèse de doctorat non publiée.
- Bolon, J. (1997). L'enseignement des décimaux à l'école primaire. **Grand N**, 52.
- Briand, J. & Chevalier, M.C., (1995) **Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques**. Paris : Hatier.
- Brissiaud, R. (1989). **Comment les enfants apprennent à calculer**. Paris : Retz.
- Brissiaud, R. (1998). **J'apprends les maths CM1**. Paris : Retz.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 2 (3), pp. 37-127.
- Brousseau, G. (1998). **La théorie des situations didactiques**. Grenoble : la Pensée sauvage.
- Charnay, R. (1996) **Pourquoi des mathématiques à l'école ?**. Paris : ESF éditeur.
- Charnay, P. (1998). De l'école au collège - les élèves et les mathématiques. **Grand N** , 62, pp. 35-46.
- Charnay, R. & Mante, M. (1995). **Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles**. Paris : Hatier.
- Collections Diagonales. **Math en flèche CM2**. Paris : Nathan.
- Comiti, C. & Neyret, R. (1979). A propos des problèmes rencontrés dans l'enseignement des décimaux au cours moyen. **Grand N**, 18.
- CREM. (1995). **Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans - Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques**. Nivelles : CREM asbl.
- Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en didactique des mathématiques**, 7 (2).
- Dubois, C., Fénichel, M. & Pauvert, M. (1993). **Se former pour enseigner les mathématiques - Numération, décimaux**. Paris : Armand Colin.
- ERMEL. (1996) **Apprentissages numériques au CE1**, Paris : Hatier.
- ERMEL. (1995). **Apprentissages numériques au CE2**, Paris : Hatier.
- ERMEL. (1997, 2001) **Apprentissages numériques au CM1**, Paris : Hatier.
- ERMEL. (1999) **Apprentissages numériques au CM2**, Paris : Hatier.
- Fénichel, M. & Pauvert, M. (1997). **L'épreuve de mathématiques au concours de professeur des écoles**. Paris : Armand Colin.
- Géron, C., Stegen, P. & Daro, S. (2007). **L'enseignement de la**

proportionnalité à la liaison primaire-secondaire. Rapport de recherche. Document ronéotypé.
- Habran, L. (1988). Nombres et opérations numériques, **La mathématique à l'école fondamentale**. Bruxelles : Semaine pédagogique, 49-82.
- Houdement, C. & Peltier, M.L. (1997) Petit guide pour « fiche de prep » - Eléments pour construire une séance de mathématiques et rédiger la fiche de préparation. **Grand N**, 59.
- Jonnaert, Ph. (1994) **L'enfant-géomètre. Une autre approche de la didactique des mathématiques à l'école fondamentale.** Bruxelles: Plantyn.
- Joshua, S., & Dupin, J.J. (1993). **Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques**. Paris : P.U.F.
- Maurin, C. & Joshua, A. (1993). **Les structures numériques à l'école primaire**. Paris : Ellipses.
- Ministère de la Communauté française (1999). **Socles de compétences**. Bruxelles : Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique
- Roegiers, X. (1991). **Réseau mathématique *4***. Bruxelles : De Boeck-Wesmael.
- Roegiers, X. (1991). ***Réseau mathématique 5***. Bruxelles : De Boeck-Wesmael.
- Rouche, N. (1992). **Le sens de la mesure**. Paris : Didier Hatier.
- Rouche, N. (1998). **Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?** Paris : Ellipses.
- Sacré, A. & Stegen, P. (2001). **Construire les apprentissages en cycles - Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 8/10**. Bruxelles : Labor.
- Sacré, A. & Stegen, P. (2003). **Construire les apprentissages en cycles - Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12**. Bruxelles : Labor.
- Stegen, P., Di Fabrizio, A. & Renier, F. (1997). **D'une épreuve cantonale de mathématiques vers de nouvelles pratiques didactiques - Premières pistes de travail**. Bruxelles : Ressort principal d'Inspection de Mons & Service de Didactique générale de l'Université de Liège.
- Stegen, P., Di Fabrizio, A. & Renier, F. (1998). Comment procéder à une analyse formative des productions d'élèves ? Un exemple de réponse en mathématiques. **L'école 2000**.
- Stegen, P., Di Fabrizio, A. & Renier, F. (1999). **D'une épreuve cantonale de mathématiques vers de nouvelles pratiques didactiques - Maîtriser les compétences numériques au sortir de l'école primaire**. Bruxelles : Ressort principal d'Inspection de Mons & Service de Didactique générale de l'Université de Liège.

Annexe 1 : Des items pour réaliser une évaluation diagnostique

Exercice 1

Ecris ces nombres à l'aide de chiffres.

A/ mille trois cent cinquante deux	....
B/ vingt-quatre centièmes	....
C/ cinq millièmes	....
D/ deux dixièmes	....
E/ dix unités cinq cent trente sept millièmes	....

Exercice 2

Ecris ces nombres à l'aide de lettres.

A/ 567	....
B/ 0,452	....
C/ 0,09	....
D/ 20,14	....
E/ 0,7	....

Exercice 3

Entoure chaque fois le bon nombre écrit en chiffres !	
Onze mille cinquante	11 005 1 050 11 050 11 100 050
Trente-deux unités trois centièmes	32,3 32,03 32,003 32,0003
Sept unités trente-deux centièmes	7,320 7,032 7,302 7,0032

Exercice 4

A/ Dans le nombre 0,321 que représente le chiffre « 1 » ? ....
B/ Dans le nombre 130,9 que représente le chiffre « 3 » ? : ....
C/ Dans le nombre 6,78 que représente le chiffre « 8 » ? ....
D/ Dans le nombre 23,456 que représente le chiffre « 4 » ? ....

Exercice 5

A/ Entoure le chiffre des unités dans le nombre suivant :	35,678
B/ Entoure le chiffre des centièmes dans le nombre suivant :	6,192
C/ Entoure le chiffre des millièmes dans le nombre suivant :	40,2903

Exercice 6

Le maître a écrit au tableau le nombre 403,651 que les élèves doivent copier dans leur cahier.
Marion, Baptiste, Sonia et Romain se sont trompés chacun sur un chiffre en recopiant ce nombre.
a) Sonia a écrit 403,751. Elle a changé le chiffre des ….
b) Marion a écrit 413,651. Elle a changé le chiffre des …
c) Baptiste a écrit 403,681. Il a changé le chiffre des …
d) Romain a écrit 9 comme chiffre des dixièmes. Au lieu de 403,651 il a écrit …

Exercice 7

Complète le tableau suivant :

Ecriture fractionnaire		Ecriture décimale
A/ $\frac{1}{2}$	=	………
B/ ………	=	0,25
C/ ………	=	0,125
D/ $\frac{3}{10}$	=	………
E/ $\frac{56}{1000}$	=	………
F/ $\frac{5}{4}$	=	………

Exercice 8

Voici des paires de nombres.
Pour chaque paire, s'il y a un nombre plus grand que l'autre, entoure-le.
Si les nombres sont égaux, place un signe « = » entre eux.

A/	0,4	0,71	H/	2,91	2,6
B/	0,009999	0,010	I/	2,16	2,1620
C/	1,05	1,3	J/	5,3	5,02
D/	0,5	0,04	K/	4,5	4,08
E/	2,6	2,06	L/	1,39	1,7
F/	4,45	4,4510	M/	2,342	2,341675
G/	0,03	0,3	N/	3,19	3,5

Exercice 9

Voici six nombres :

2,05 2,4 2,008 2,27 2,119

Ecris-les du plus petit au plus grand :

……. ……. ……. ……. …….

Exercice 10

Voici quatre nombres :

8,10	8,01	8,121	8,6

Ecris-les du plus petit au plus grand :

Exercice 11

Voici six nombres :

2 $\frac{3}{2}$ 0,83 - 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{10}$

Ecris-les du plus petit au plus grand :

……. ……. ……. ……. ……. …….

Exercice 12

Parmi les propositions suivantes, quelle est celle où les nombres sont classés du plus petit au plus grand ?

A/	0,345	0,19	0,8	$\frac{1}{5}$
B/	0,19	$\frac{1}{5}$	0,345	0,8
C/	0,8	0,19	$\frac{1}{5}$	0,345
D/	$\frac{1}{5}$	0,8	0,345	0,19

Exercice 13

Voici 5 nombres,

-3,650 1^3 0,375 $\frac{1}{3}$ $\frac{6}{5}$ 3,450

Ecris-les du plus petit au plus grand

Exercice 14

Ci-dessous, entoure les nombres compris <u>entre 3,5 et 3,7</u> .

A/ 3,4 B/ 3,51 C/ 3,705

D/ 3,75

E/ 3,659 F/ 3,6

Exercice 15

Ci-dessous, entoure les nombres compris <u>entre 6,382 et 6,405</u> .

A/ 6,389 B/ 6,37

C/ 6,3 D/ 6,392

E/ 6,4 F/ 6,39

Exercice 16

Complète le tableau suivant

NOMBRE ENTIER QUI VIENT JUSTE AVANT	NOMBRE DECIMAL	NOMBRE ENTIER QUI VIENT JUSTE APRES
	631,2	
	742,75	
	1000,09	

Exercice 17

Dans la case vide, écris un nombre compris entre les deux nombres donnés.

A/

72		75

B/

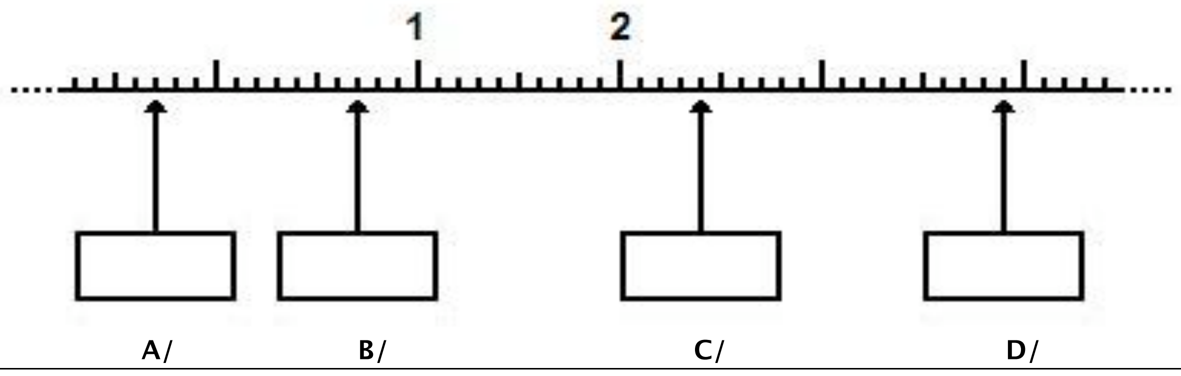
48,7		49,7

C/

72,4		72,5

Exercice 18

Ecris les nombres dans les cases vides.



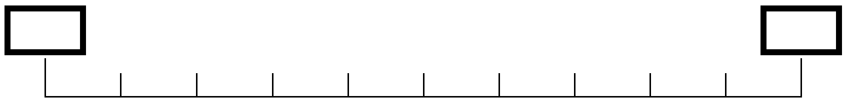
Exercice 19

Crée, à partir du dessin ci-dessous, une droite graduée qui te permettra de placer « 1,2 ».

Exercice 20

Crée, à partir du dessin ci-dessous, une droite graduée qui te permettra de placer « $\frac{3}{4}$ ».

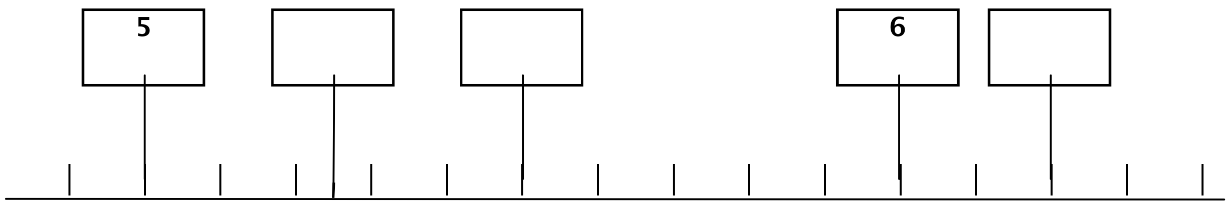
Exercice 21



Ceci est un segment de droite numérique.
Ecris dans les cases A et B deux nombres de ton choix qui encadrent « 9,98 ».
Place ensuite « 9,98 », le plus précisément possible.

Exercice 22

Ecris les nombres qui conviennent dans les cases vides



Exercice 23

Complète.

A/	0,2 + …….. = 1	G/	0,05 × …….. = 1
B/	0,775 + …….. = 1	H/	0,25 × …….. = 1
C/	0,09 + …….. = 1	I/	0,1 × …….. = 1
D/	$\frac{3}{4}$ + …….. = 1	J/	$\frac{1}{4}$ × …….. = 1
E/	$\frac{2}{10}$ + ……... = 1	K/	$\frac{2}{6}$ × …….. = 1
F/	$\frac{46}{100}$ + ……... = 1	L/	$\frac{6}{3}$ × …….. = 1