Chapitre 2 : Une démarche fondatrice : partir des erreurs des élèves

L'analyse mathématique, développée dans le chapitre précédent, a permis d'identifier différents paramètres à prendre en considération pour l'enseignement des rationnels. Dans ce deuxième chapitre, l'accent sera mis sur les élèves via l'analyse des difficultés qu'ils rencontrent dans la construction des rationnels.
Cette prise en considération des élèves au départ de l'analyse formative de leurs erreurs constitue une démarche fondatrice de la recherche en didactique des mathématiques. Une première section détaillera les raisons qui ont poussé les didacticiens à privilégier cette approche.
Pour pouvoir analyser des erreurs d'élèves, il faut leur proposer des items d'évaluation. Une deuxième section présentera les paramètres pris en considération pour développer des items d'évaluation diagnostique. Que faut-il entendre par évaluation diagnostique ? Quels liens peut-on établir entre les items proposés aux élèves et les éléments d'analyse développés dans le chapitre 1 ? Les réponses à ces deux questions constituent le cœur de la deuxième section de ce chapitre 2. Celle-ci débouchera tout naturellement sur la présentation d'items et l'analyse des réponses des élèves. C'est l'objet de la troisième section.
Une dernière section détaillera les tendances qui se dégagent de l'analyse formative des productions des élèves avec, en point de mire, une dernière question : quel peut être l'impact d'une maîtrise insuffisante des rationnels sur l'utilisation de ces derniers dans des opérations ?

1. Pourquoi s'intéresser aux erreurs commises par les élèves ?

Au moment d'ouvrir une réflexion sur le rôle et le statut des erreurs commises par les élèves, il convient de rappeler qu'il ne s'agit nullement d'attirer l'attention sur des niveaux de maîtrise qui seraient jugés insuffisants. Le but est bien de diagnostiquer le plus précisément possible la nature et l'origine de ces difficultés … afin d'y remédier.

L'intérêt pour l'analyse des erreurs doit être resitué dans une perspective constructiviste du processus d'apprentissage qui constitue le point de départ de toute la réflexion que nous avons menée au sein de l'espace de collaboration.

> « *L'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement le reflet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes et béhavioristes de l'apprentissage ; mais l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas imprévisibles, elles sont constituées en obstacles (…) Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens même de la connaissance acquise* » (Brousseau, 1998).

Les erreurs produites par les élèves ne s'expliquent pas simplement en termes de dysfonctionnement ou de manque de connaissance ; elles ne sont pas non plus le fruit du hasard. On constate très souvent qu'elles présentent une double caractéristique :

- elles sont **reproductibles** (on les retrouve quelle que soit la classe fréquentée) et témoignent d'une certaine persistance (apparemment ni les remarques, ni les tentatives de remédiation classique, ni les sanctions ne parviennent à les éradiquer) ;
- elles ne sont **pas isolées** ; elles peuvent être mises en relation avec d'autres erreurs et forment ainsi une sorte de réseau.

> Dans son entreprise de théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques, Brousseau met en évidence que les erreurs commises par les élèves sont liées à des obstacles d'origine ontogénique, épistémologique et/ou didactique.
>
> - Les ***obstacles d'origine ontogénique*** dépendent du développement psychogénétique des élèves ; les erreurs qu'ils entraînent s'expliquent alors en termes de limitation du sujet à un moment de son développement.
> - Les ***obstacles d'origine didactique*** sont *« ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet d'un système éducatif. Par exemple, la présentation actuelle des décimaux au niveau élémentaire est le résultat d'une longue évolution dans le cadre d'un choix fait par les encyclopédistes puis par la Convention (conformément à une conception qui remonte à Stevin lui-même) : compte tenu de leur utilité, les décimaux allaient être enseignés le plus tôt possible, associés à un système de mesure, et en se référant aux techniques d'opérations dans les entiers. Ainsi, aujourd'hui, les décimaux sont, pour les élèves, " des entiers naturels avec un changement d'unité ", donc des " naturels " (avec une virgule) et des mesures. Et cette conception, appuyée par une mécanisation de l'élève, va faire obstacle jusqu'à l'université à une bonne compréhension des réels (…)* » ;
> - Les ***obstacles d'origine épistémologique*** sont « *ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire que l'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus »* (Brousseau, 1998).

Les erreurs commises par les élèves ne doivent plus être envisagées du seul point de vue des élèves. Il convient plutôt de les analyser en les confrontant, d'une part, aux caractéristiques du savoir mis en jeu (par une meilleure prise en compte des obstacles d'origine épistémologique) et, d'autre part, aux pratiques d'enseignement et aux progressions didactiques développées pour enseigner ces savoirs (obstacles d'origine didactique).

L'hypothèse forte qui est ici privilégiée peut être formulée de la manière suivante : les erreurs commises par les élèves trouvent sans doute leur origine dans la complexité du concept de nombre rationnel (pour rappel, il a fallu près de 20 siècles aux mathématiciens pour arriver à une écriture décimale des rationnels). Cette complexité est insuffisamment prise en compte par les enseignants dans leur travail de planification, de conception et de gestion de situations d'apprentissage. Les activités qu'ils proposent à leurs élèves ne sont pas suffisantes pour faire obstacle à certaines représentations erronées de leurs élèves.

2. Comment diagnostiquer les difficultés rencontrées par les élèves ?

L'analyse mathématique développée dans le chapitre 1 a mis en évidence différents obstacles liés à la construction des rationnels. Cette étape est fondamentale dans la mise en place de pratiques d'évaluation diagnostique.

> L'évaluation diagnostique s'inscrit en rupture par rapport aux modalités d'évaluation classiques; en effet, ces dernières se déroulent en différé par rapport aux situations d'apprentissage qu'elles sont censées évaluer alors que l'évaluation diagnostique est, elle, préalable à des activités d'enseignement futures.
> Comme l'évaluation formative, elle ambitionne de fournir aux enseignants des informations leur permettant d'ajuster au mieux leur action éducative au profil pédagogique des élèves avec lesquels ils vont travailler puisque ce type d'épreuve va leur révéler ce que ces élèves maîtrisent comme compétences, sur base desquelles ils construiront les apprentissages futurs.

Les différents obstacles peuvent être regroupés de la manière suivante :

- la ***lecture et l'écriture décimale des rationnels*** : l'écriture décimale des rationnels ne peut être assimilée à l'écriture de deux naturels séparés par une virgule ;
    - la numération positionnelle n'est pas strictement parallèle des deux côtés de la virgule (le passage de « centaine à centième » ne va pas de soi : trois chiffres sont nécessaires pour écrire des centaines mais deux chiffres suffisent pour exprimer des centièmes) ;
    - les règles de comparaison sont différentes (outre le rôle des zéros, on rappellera que $15,8 > 15, 79$ même si $8 < 79$) ;
- ***des propriétés spécifiques aux rationnels*** et, notamment, la densité des rationnels et la prise en compte des phénomènes d'intercalation ;
- le ***passage d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire*** ; quels liens les élèves établissent-il entre « 0,7 » et « $\frac{7}{10}$ » ?

Une fois les sources de difficulté liées aux obstacles d'origine épistémologique identifiées, il reste à construire des items d'évaluation qui vont permettre de poser un diagnostic sur le niveau de maîtrise atteint par les élèves.

Pour réaliser ce travail, différents items sont présentés et analysés dans ce chapitre ; ils proviennent principalement d'une épreuve d'évaluation diagnostique construite par l'équipe de recherche. Elle a été administrée en début d'année scolaire (septembre 2006) dans des classes d'enseignants membres de l'espace de collaboration. Les données recueillies concernent 9 classes de 6^{e} primaire (142 élèves) et 7 classes de $1^{\text{ère}}$ secondaire (132 élèves) d'enseignants de l'espace de collaboration.

> Des mêmes items d'évaluation ont été proposés à des élèves inscrits en début de 6^{e} année primaire et à d'autres inscrits en $1^{\text{ère}}$ année secondaire. Il ne s'agit donc pas des mêmes élèves interrogés à deux moments différents de leur scolarité. Cela signifie donc qu'il n'est pas indiqué de comparer, sur un plan strictement quantitatif, les résultats obtenus.
> Il s'agit bien ici de mettre l'accent sur l'analyse des difficultés que rencontrent les élèves en cours d'apprentissage (cycle 10/12) afin d'aider leurs enseignants à en identifier la nature et l'origine.
> Les fréquences de bonnes réponses plus élevées, observées généralement en $1^{\text{ère}}$ secondaire, montrent d'ailleurs que le travail habituel des enseignants conduit un grand nombre de leurs élèves vers la maîtrise des compétences visées. Toutefois, cela ne suffit pas toujours et certaines lacunes subsistent. il importe également que l'enseignant du début du secondaire puisse identifier ce qui fait encore obstacle à une bonne maîtrise des rationnels. L'analyse formative des erreurs commises par les élèves en début de $1^{\text{ère}}$ secondaire se situe donc davantage dans une perspective de remédiation.

Au niveau de la représentativité des résultats, il convient d'être prudent car ces deux ensembles d'élèves n'ont pas été sélectionnés au terme de procédures d'échantillonnage statistique.

> Les différentes données recueillies sont à manier avec prudence. Elles ne peuvent être généralisées à l'ensemble de la population scolaire de référence comme cela se fait, par exemple, dans les différents dispositifs d'évaluation externe menés par le Service général du Pilotage du système éducatif de la Communauté française.
> On gardera néanmoins à l'esprit que la plupart des erreurs analysées dans ce document ne sont pas le fruit du hasard ; elles peuvent être mises en relation avec les variables didactiques au départ desquelles les items ont été construits.
>
> Au vu d'une certaine forme de « ségrégation » scolaire qui caractérise malheureusement notre système éducatif, il est par contre vraisemblable que la proportion d'élèves qui commettent ces erreurs varient d'une école (voire d'une classe) à l'autre. L'essentiel n'est pas là ; comme cela a déjà été précisé, il s'agit surtout de poser un diagnostic précis afin de pouvoir apporter un remède approprié.

Ce manque de représentativité nous a conduits à proposer également des analyses d'items provenant d'autres dispositifs d'évaluation portants sur un plus grand nombre d'élèves.

Il s'agit essentiellement des épreuves d'évaluation suivantes :
- Evaluations externes en mathématiques des élèves de 1ère (1996) et de 3e (2004) années secondaires (dispositifs mis en place par le Service de Pilotage du Ministère de la Communauté française) ;
- Evaluation cantonale de Mons (1997) administrée à plus de 2000 élèves[1].

La plus grande représentativité des données recueillies nous permettra de situer (voire de relativiser) certains constats formulés au terme de l'analyse des items de l'évaluation diagnostique. Autrement dit, cela vaut-il vraiment la peine de se préoccuper des erreurs observées lors de l'épreuve diagnostique ? Se retrouvent-elles à l'échelle de la Communauté française ? S'agit-il simplement d'erreurs ponctuelles liées aux caractéristiques des classes avec lesquelles nous avons travaillé ?

3. Que nous apprend l'analyse des réponses des élèves ?

L'ensemble des items d'évaluation utilisés sont repris en Annexe 1. Le tableau ci-dessous présente de manière synthétique les différentes sources de difficultés qui peuvent être appréhendées au départ des items d'évaluation analysés.

Sources de difficultés	Items
Lecture et écriture de rationnels	
• passer d'un système de désignation orale des décimaux à leur écriture chiffrée (et réciproquement) ;	1, 2, 3
• déterminer la valeur de chacun des chiffres d'un nombre décimal en fonction de sa position ;	4, 5, 6
• passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale des rationnels (et réciproquement).	7
Ordre sur les rationnels	
• comparer deux rationnels écrits sous une forme décimale ;	8
• ordonner des rationnels écrits sous une forme décimale et sous une forme fractionnaire ;	9, 10, 11, 12, 13
• intercaler un rationnel entre deux nombres (rationnels ou non) ;	14, 15, 16, 17
• situer des décimaux sur une (demi-) droite graduée	18, 19, 20, 21, 22

Afin de faciliter leur utilisation, il est possible de télécharger un fichier contenant les différents items de l'évaluation à l'adresse suivante : http://www.hypo-these.be/spip/
De la même manière, les tableaux statistiques contenant une analyse des principales modalités de réponses sont également téléchargeables.

L'analyse des différents items est organisée de la manière suivante :

[1] Stegen, P., Di Fabrizio, A. ; Renier, F. (1999). ***D'une épreuve cantonale en mathématiques vers de nouvelles pratiques didactiques - Evaluer la maîtrise des compétences numériques au sortir de l'école primaire***. Bruxelles : Ressort principal d'Inspection de Mons & Service de Didactique générale de l'Université de Liège.

- ***présentation des items et des résultats*** ; pour ne pas alourdir la présentation, on se contentera le plus souvent de fournir les statistiques suivantes : pourcentages respectifs de bonnes réponses, de réponses erronées et d'omissions. Ces données seront ventilées par année d'études (selon que les élèves sont inscrits en 6e primaire ou en première année secondaire) ;
- ***éléments d'analyse*** ou quels sont les constats généraux qui peuvent êtres tirés de l'analyse des productions des élèves ? Même si elles ne sont pas détaillées, il va de soi qu'une attention particulière a été accordée aux analyses des différentes réponses erronées produites par les élèves ;
- ***pour aller plus loin*** ou peut-on généraliser les observations ou les tendances qui se dégagent de l'analyse des réponses observées lors de l'épreuve d'évaluation diagnostique ? Quelles comparaisons peut-on établir avec des données issues d'autres dispositifs d'évaluation ?

3.1 La lecture et l'écriture des rationnels

Comme cela a été expliqué dans le premier chapitre, l'écriture à virgule doit être considérée comme un système économique de notation des rationnels qui facilite les calculs ; du point de vue des élèves, elle présente cependant un inconvénient majeur : elle masque leur véritable nature. En écho à ce constat, dans un premier temps, nous analyserons comment les élèves maîtrisent le passage d'une désignation orale à une désignation écrite des nombres décimaux. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à la manière dont les élèves maîtrisent le principe de numération de position pour l'écriture décimale des rationnels. Enfin, une attention particulière sera accordée à la manière dont les élèves passent d'un système d'écriture décimale à un système d'écriture fractionnaire des rationnels.

3.1.1 Passer d'un système de désignation orale des nombres à leur écriture chiffrée (et réciproquement)

Comment les élèves en début de 6P et 1S se débrouillent-ils lors du passage d'un système de désignation orale d'un nombre à son codage écrit ?

Deux items permettent d'aborder cette compétence,
- le premier demande aux élèves de passer d'un système de désignation orale à une écriture chiffrée
- pour le second, c'est l'inverse ; les élèves doivent passer de l'écriture mathématique à son expression française.

PRESENTATION DES ITEMS ET DES RESULTATS

Item 1

Ecris ces nombres à l'aide de chiffres.

A/ mille trois cent cinquante deux	....
B/ vingt-quatre centièmes	....
C/ cinq millièmes	....
D/ deux dixièmes	....
E/ dix unités cinq cent trente sept millièmes	....

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	15,5	8,3
	1	***83,1***	***91,7***
	9	1,4	0
B.	0	25,3	12,1
	1	***72,5***	***86,4***
	9	2,1	1,5
C.	0	23,2	10,6
	1	***74,6***	***88,6***
	9	2,1	0,8

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	21,8	11,3
	1	***76,1***	***87,9***
	9	2,1	0,8
E.	0	39,4	24,2
	1	***57,7***	***75***
	9	2,8	0,8

Comment lire et analyser ce tableau ?
L'exercice A (soit l'écriture en chiffres de « mille trois cent cinquante-deux ») a été réussi (code 1) par 83,1 % des élèves de sixième (6P) et 91,7 % d'élèves de première année secondaire (1S).
15,5 % d'élèves de 6P et 8,3 % d'élèves de 1S n'ont pas répondu correctement (code 0).
On observe enfin qu'1,4 % d'élèves de 6P et 0 % d'élèves d'1S n'ont pas répondu à cette question (code 9).

Item 2

Ecris ces nombres à l'aide de lettres.

A/ 567	....
B/ 0,452	....
C/ 0,09	....
D/ 20,14	....
E/ 0,7	....

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	11,3	2,3
	1	***85,2***	***97***
	9	3,5	0,8
B.	0	28,9	13,6
	1	***65,5***	***81,8***
	9	5,6	4,6
C.	0	27,5	10,6
	1	***66,9***	***84,9***
	9	5,6	4,5

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	29,6	17,4
	1	***64,8***	***78***
	9	5,6	4,5
E.	0	25,4	10,6
	1	***69,7***	***83,3***
	9	4,9	6

ELEMENTS D'ANALYSE

Ces deux items sont construits de manière assez semblables. Leur niveau de difficulté semble équivalent; dans les deux cas, les élèves doivent effectuer les tâches suivantes :

- écrire un entier assez simple ;
- écrire trois décimaux compris entre 0 et 1 et exprimés successivement en dixièmes, centièmes et millièmes ;
- écrire un décimal supérieur à 1.

Si on analyse les pourcentages de bonnes réponses en suivant cette classification, on peut dégager les ***constats généraux*** suivants :

- ***l'écriture des entiers est mieux maîtrisée que celle des décimaux*** (même si on n'est pas, et parfois loin de là, à un taux de réussite de 100 % – ce qui reste malgré tout interpellant) ;
- comme on pouvait s'y attendre, ***les taux de bonnes réponses sont supérieurs en 1S***[1]. Cela met en évidence la qualité du travail accompli par les enseignants de 6P mais, comme cela a déjà été précisé, ce travail ne permet pas à tous les élèves de maîtriser les compétences liées à l'écriture décimale des rationnels. Dans certains cas, près de 20 % des élèves de 1S échouent. Traduit à la réalité d'une seule classe, ce pourcentage représente, en moyenne, 4 élèves d'une classe qui en compte 20 ;

[1] Pour ne pas alourdir inutilement le texte, 6P désigne les résultats obtenus dans les classes en début de sixième année primaire et 1S désigne ceux observés en début de première année secondaire.

- ***les pourcentages de bonnes réponses sont globalement supérieurs lorsqu'il s'agit de passer du système de désignation orale des nombres à l'écriture chiffrée*** (ce phénomène est davantage marqué en 6P). Est-ce lié à des pratiques qui mettent davantage l'accent sur ce type de transcription ?
- ***Les scores de réussite les plus faibles sont observés lorsqu'il s'agit d'écrire un décimal supérieur à 1***. Ce dernier constat est assez étonnant. Il conviendrait sans doute de modifier cet item d'évaluation en y ajoutant d'autres décimaux supérieurs à 1 afin de vérifier si cette tendance se confirme.

Au delà de ces tendances générales, l'analyse des erreurs commises par les élèves met en évidence les quelques éléments suivants :

- ***l'écriture des entiers*** : on trouve encore, en début de 6P, des élèves qui éprouvent de grosses difficultés pour comprendre les principes de numération de position. Ainsi, « mille trois cent cinquante-deux » sera écrit « 100030052 » soit la juxtaposition de « 1000 », « 300 », « 52 ». Des variantes existent autour de ce principe général. On pourra aussi trouver « 1000352 », par exemple.
- ***l'écriture décimale des rationnels*** : au niveau des élèves de 6P , les erreurs les plus fréquentes peuvent être regroupées en trois grandes catégories :
    - ***suppression de la virgule*** : « vingt-quatre centièmes » s'écrit, pour ces élèves, « 24 » ; « cinq millièmes », « 5 » ou « 5000 » ;
    - ***écriture de la partie décimale selon les principes de numération de position de la partie entière*** : « 24 centièmes » s'écrira « 0,024 » car trois chiffres sont nécessaires pour écrire des centaines … ;
    - ***confusion(s) au niveau du positionnement de la virgule*** : « vingt-quatre centièmes » est écrit, par exemple, de la manière suivante « 2,4 » ou, encore, « 2,04 ».
- ***le passage de l'écriture chiffrée au système de désignation orale :*** les pourcentages moindres de bonnes réponses s'expliquent, en partie, par le fait que nous n'avons pas considéré comme correct la transcription des décimaux de type « 0,452 » en « zéro virgule quatre cent cinquante-deux ». Ce phénomène est davantage marqué en 6P. Au vu de ces éléments, on ne peut que se réjouir de la volonté manifestée par de nombreux enseignants du cycle 10/12 de corriger leurs élèves quand ils désignent oralement le nombre « 7,32 » par l'expression « sept virgule trente-deux ». A juste titre, ils encouragent les élèves à désigner ce nombre par l'expression « sept unités trente-deux centièmes ».
- ***les rationnels supérieurs à 1*** : en 6P, au delà des trois types d'erreurs mentionnés précédemment, on retrouve des erreurs d'inattention ou à tout le moins de mauvaise lecture des différentes composantes du nombre. Ainsi, « dix unités cinq cent trente-sept millièmes » devient « 2,537 » ou « 10,357 ». Ces deux erreurs sont commises par plus de 10 % des élèves. Ce type d'erreurs se retrouve également, mais dans des proportions moindres, en 1S.

POUR ALLER PLUS LOIN

Un item assez similaire à l'item 1 a été proposé lors de l'examen cantonal de Mons.

Item 3

Entoure chaque fois le bon nombre écrit en chiffres !	
Onze mille cinquante	11 005 1 050 11 050 11 100 050
Trente-deux unités trois centièmes	32,3 32,03 32,003 32,0003
Sept unités trente-deux centièmes	7,320 7,032 7,302 7,0032

Que nous apprend l'analyse des réponses des 1991 élèves interrogés ?

Le principe de numération de position ne semble guère poser problème aux élèves tant qu'il s'agit de nombres entiers (98 % de bonnes réponses pour l'écriture du premier nombre). Les choses se présentent assez différemment lorsqu'on passe aux nombres à virgule, comme en témoigne la baisse sensible des taux de réussite pour les deuxième (88 % de bonnes réponses) et troisième nombres (70 % de bonnes réponses).

- Les 9 % élèves qui font correspondre " trente-deux unités trois centièmes " à " 32,003 " considèrent vraisemblablement, et cela constitue une source d'erreurs fréquentes, que la partie entière et la partie décimale de ce nombre fonctionnent selon le même principe de numération de position : **trois chiffres sont nécessaires pour écrire les centaines, il en faut par conséquent trois pour écrire les centièmes.**
- C'est d'autant plus vrai dans le troisième exercice qui piège les élèves puisque les " trente-deux centièmes " sont écrits mathématiquement sous la forme " trois cent vingt millièmes ". Dans ce cas, ils ne sont plus 9 % mais 27 % à commettre ce type d'erreur.

  Pour ces élèves, on peut émettre l'hypothèse qu'un " nombre à virgule " est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule. Le fait de lire " 32,03 " de la manière suivante " trente-deux virgule zéro trois " ne fait que renforcer cette conception erronée.

D'un point de vue mathématique, l'écriture des décimaux a l'avantage d'être « calquée » sur celle des entiers ; du point de vue de l'enseignement, cette caractéristique mérite que l'on s'y attarde car elle est source de difficultés non résolues pour 30 % des élèves sortant de l'école primaire.

3.1.2 Comprendre et utiliser le système de numération décimale pour l'écriture décimale des rationnels

Une autre manière d'évaluer la lecture ou l'écriture décimale des rationnels passe par un questionnement sur la valeur des chiffres qui composent un nombre.
Deux items permettent de vérifier la signification particulière que les élèves attribuent aux différents chiffres intervenant dans les écritures décimales des rationnels :

- dans l'Item 4, il est demandé aux élèves d'associer un chiffre donné à des expressions telles que unité, dixième, centième, … ;
- dans l'Item 5, c'est l'inverse, l'expression est donnée et l'élève doit associer le chiffre qui y correspond.

PRESENTATION DES ITEMS ET DES RESULTATS

Item 4

A/ Dans le nombre 0,321 que représente le chiffre « 1 » ? ....

B/ Dans le nombre 130,9 que représente le chiffre « 3 » ? : ....

C/ Dans le nombre 6,78 que représente le chiffre « 8 » ? ....

D/ Dans le nombre 23,456 que représente le chiffre « 4 » ? ....

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	20,4	9,1
	1	***79,6***	***90,9***
	9	0	0
B.	0	17,6	16,7
	1	***82,4***	***83,3***
	9	0	0

	Code	% 6P	% 1S
C.	0	30,3	20,4
	1	***69,7***	***79,6***
	9	0	0
D.	0	28,2	17,4
	1	***71,1***	***82,6***
	9	0,7	0

Item 5

A/ Entoure le chiffre des unités dans le nombre suivant :	35,678
B/ Entoure le chiffre des centièmes dans le nombre suivant :	6,192
C/ Entoure le chiffre des millièmes dans le nombre suivant :	40,2903

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	13,4	10,6
	1	***82,4***	***87,1***
	9	4,2	2,3
B.	0	27,5	18,9
	1	***68,3***	***80,3***
	9	4,2	0,8
C.	0	28,9	16,7
	1	***66,9***	***81,8***
	9	4,2	1,5

ELEMENTS D'ANALYSE

Les deux items peuvent être analysés au départ des variables didactiques suivantes :

- l'analyse de la valeur des chiffres porte sur la partie entière (par exemple, item 4B) ou sur la partie décimale (par exemple, item 5C) ;
- l'analyse porte sur la partie décimale et la valeur du chiffre à identifier se situe (par exemple, item 4A) ou non (par exemple, item 5B) « le plus à droite » de l'expression numérique.
- les nombres à analyser sont limités (par exemple, item 4D) ou non aux millièmes (par exemple, item 5C) comme cela est recommandé pour l'évaluation des compétences des élèves sortant de l'école primaire.

L'analyse globale des résultats fait apparaître les constats suivants :

- on note à nouveau que les ***résultats sont globalement supérieurs en 1S*** (voir remarque page 29). Le parallélisme ne s'arrête pas là puisque l'on constate également que près de ***20 % des élèves de 1S éprouvent encore des difficultés dans la maîtrise de cette compétence de base*** ;
- les ***variations parfois importantes de réussite*** observées lors de l'analyse de l'écriture des différents nombres est révélatrice des difficultés rencontrées par les élèves :
    - le meilleur taux de réussite observé en 6P porte sur l'identification de la valeur d'un chiffre de la partie entière du nombre (exemple : le valeur du « 3 » de « 130,9 »). Cela n'est sans doute pas étonnant. Par contre, en 1S, le meilleur taux de réussite est obtenu lorsque l'analyse porte sur un rationnel compris entre 0 et 1 (premier nombre de l'item 4). Ce constat peut être mis en parallèle avec des observations similaires effectuées lors de l'analyse des items 1 et 2 (voir page 30);
    - au niveau de la 6P, les résultats le plus faibles sont observés au niveau de l'analyse des deux derniers nombres de l'item 5. C'était assez prévisible si l'on garde à l'esprit que de nombreux élèves considèrent qu'un décimal s'écrit au départ de deux entiers séparés par une virgule. Dans le cas de « 6,192 », le chiffre des centièmes est associé erronément au « 1 » et non au « 9 ». Un raisonnement similaire peut être établi avec le chiffre des millièmes pour l'analyse de « 40,2903 ».
    - parmi les scores faibles observés en 1S, il y a l'analyse du troisième nombre de l'item 4 (« quelle est la valeur du « 8 » dans « 6,78 » ?). Pour près de 10 % des élèves de 1S, le « 8 » désigne les dixièmes.

Un petit retour sur la notion d'obstacle didactique via l'analyse des items proposés aux élèves afin de diagnostiquer leur niveau de maîtrise est nécessaire.
Comme on l'a déjà souligné, pour comparer des nombres, des élèves utilisent la stratégie suivante : ils utilisent la partie décimale comme un entier puis remplacent le suffixe « aine » par le suffixe « ième ». Dizaine devient ainsi dixième. Il convient de souligner que cette stratégie conduit à la réussite dans certains cas. Pour un nombre décimal ayant deux chiffres après la virgule, « 6,78 » par exemple, le chiffre des dizaines dans « 78 » est le même que le chiffre des dixièmes dans « 6,78 ».

POUR ALLER PLUS LOIN

Au vu des analyses qui précèdent, il faut bien constater que tous les élèves ne maîtrisent pas parfaitement la lecture et l'écriture décimale des rationnels au sortir de l'école primaire.

Ce phénomène n'est pas particulier à la Communauté française de Belgique. Lors d'une épreuve d'évaluation CM2/6^{e} proposée en 1996 à l'ensemble des écoliers français, les chercheurs ont pu observer les taux de réussite suivants à l'entrée en 6^{e} (première année de Collège en France) :

Item 6

Le maître a écrit au tableau le nombre 403,651 que les élèves doivent copier dans leur cahier. Marion, Baptiste, Sonia et Romain se sont trompés chacun sur un chiffre en recopiant ce nombre. a) Sonia a écrit 403,751. Elle a changé le chiffre des …. b) Marion a écrit 413,651. Elle a changé le chiffre des … c) Baptiste a écrit 403,681. Il a changé le chiffre des … d) Romain a écrit 9 comme chiffre des dixièmes. Au lieu de 403,651 il a écrit …

La question b porte sur un chiffre de la partie entière tandis que toutes les autres sur un chiffre de la partie décimale. Sans surprise, c'est la question b la mieux réussie mais le taux de bonnes réponses n'est que de 64 %. Pour les autres questions, le pourcentage de bonnes réponses est tout à fait équivalent ; il est compris entre 45 et 50 %.

3.1.3 Passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire (et réciproquement)

Les décimaux sont des rationnels dont le dénominateur est une puissance de 10. La possibilité de coder un rationnel par une infinité de fractions d'entiers a été évoquée précédemment. L'item suivant permet de vérifier comment cette double caractéristique est maîtrisée par les élèves.

PRESENTATION DE L'ITEM ET DES RESULTATS

Item 7

Complète le tableau suivant :

Ecriture fractionnaire		Ecriture décimale
A/ $\frac{1}{2}$	=	………
B/ ………	=	0,25
C/ ………	=	0,125
D/ $\frac{3}{10}$	=	………
E/ $\frac{56}{1000}$	=	………
F/ $\frac{5}{4}$	=	………

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	22,5	12,9
	1	***68,3***	***83,3***
	9	9,1	3,8
B.	0	14,1	8,3
	1	***78,2***	***86,4***
	9	7,8	5,3
C.	0	34,5	13,6
	1	***50,7***	***77,3***
	9	14,8	9,1

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	23,9	12,1
	1	***65,5***	***78,8***
	9	10,6	9,1
E.	0	42,2	22
	1	***44,4***	***62,1***
	9	13,4	15,9
F.	0	57,7	29,5
	1	***21,8***	***53,8***
	9	20,4	16,7

ELEMENTS D'ANALYSE

Cet item est construit au départ des variables didactiques suivantes :

- 4 exercices permettent d'évaluer le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale d'un rationnel ;
  - deux exercices portent sur l'écriture décimale de fractions dont le dénominateur est une puissance de 10 ;
  - deux exercices portent sur l'écriture décimale d'une fraction dont le dénominateur n'est pas exprimé au départ d'une puissance de 10 ;
  - on note également qu'une des fractions est supérieure à l'unité.
- 2 exercices portent sur le passage de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire. Dans les deux cas, le rationnel est inférieur à 1.

L'analyse globale des résultats fait apparaître les éléments suivants :

- les taux de bonnes réponses sont inférieurs à ceux observés lors de l'analyse de l'écriture décimale des rationnels ;
- le passage d'une écriture à l'autre ne va pas de soi même en 1S. On constate ainsi que près de 20 % des élèves de 1S ne savent pas écrire correctement $\frac{1}{2}$ sous la forme d'une écriture décimale ;
- ces pourcentages de bonnes réponses chutent à un peu plus de 50 % lorsqu'il s'agit de traduire, sous une écriture décimale, le rationnel $\frac{5}{4}$ (soit la fraction supérieure à l'unité).

A priori, les rationnels proposés dans cet item ne présentent guère de difficultés ; l'analyse des résultats globaux montre que de (trop) nombreux élèves échouent dans ce type de tâches.

Quelle serait la nature des erreurs commises par les élèves ?

L'analyse formative des réponses erronées fait apparaître les constats suivants :

- plus de 10 % des élèves de 6P traduisent la fraction $\frac{1}{2}$ par le décimal 1,2. Ce raisonnement incorrect se rencontre également, mais dans des proportions moindres, en 1S ;
- ce type d'erreurs se retrouve chaque fois que ces élèves doivent passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale ;
- un autre indice des difficultés rencontrées par les élèves est le taux de non réponse observé pour les exercices les moins bien réussis.

Des faibles pourcentages de réussite et des taux importants de non réponse semblent traduire un manque de familiarité des élèves avec ce type de tâches. Pour expliquer les erreurs les plus fréquemment commises, un certains parallélisme peut être établi avec la représentation erronée d'un décimal considéré par les élèves comme un couple d'entiers séparés par une virgule. Il semble bien que certains élèves étendent cette conception erronée aux écritures fractionnaires : une fraction serait bien constituée de deux entiers séparés, cette fois, par une « barre de fraction».

Brissiaud (1998) voit dans ces résultats les conséquences de pratiques d'enseignement qui privilégient un seul aspect de la notion de fraction, celui du fractionnement d'une unité.
Selon lui, il importe de favoriser des actions de fractionnement de pluralité d'objets afin d'amener les élèves à concevoir que l'expression 3/4 ne désigne pas uniquement une unité partagée en quatre parts équivalentes dont on en prélève trois. Il peut également s'agir de trois objets partagés entre quatre personnes. Dans cette perspective, 3/4 ne renvoie pas seulement à « 3 × 1/4 » mais aussi à « 3 : 4 ».
Nous aurons l'occasion d'approfondir cette réflexion dans la présentation des pistes de re-médiation.

3.2 La maîtrise de l'ordre sur les rationnels (comparer, classer, ordonner, situer)

Au cycle 10/12, les activités de comparaison occupent une place non négligeable dans l'enseignement des décimaux. Il s'agit en effet d'aider les élèves à maîtriser le sens des écritures afin de pouvoir notamment ordonner, intercaler et encadrer des rationnels. Dans un premier temps, nous analyserons comment les élèves se débrouillent dans ce type d'activités. Nous nous intéresserons ensuite à la droite numérique. Celle-ci apparaît comme un outil incontournable pour aider les élèves à appréhender ce qu'il est convenu d'appeler la densité des rationnels. L'utilisation et la maîtrise de ce référent feront également l'objet d'une analyse détaillée.

3.2.1 Comparer des rationnels écrits sous une forme décimale

Une des manières les plus classiques d'évaluer cette compétence consiste à demander aux élèves de comparer des couples de nombres décimaux.

PRESENTATION DE L' ITEM ET DES RESULTATS

Item8

Voici des paires de nombres.
Pour chaque paire, s'il y a un nombre plus grand que l'autre, entoure-le.
Si les nombres sont égaux, place un signe « = » entre eux.

A/	0,4	0,71	H/	2,91	2,6
B/	0,009999	0,010	I/	2,16	2,1620
C/	1,05	1,3	J/	5,3	5,02
D/	0,5	0,04	K/	4,5	4,08
E/	2,6	2,06	L/	1,39	1,7
F/	4,45	4,4510	M/	2,342	2,341675
G/	0,03	0,3	N/	3,19	3,5

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	5,6	7,6
	1	***93***	***91,7***
	9	1,4	0,8
B.	0	28,9	6,8
	1	***69,7***	***92,4***
	9	1,4	0,8
C.	0	14,8	6,1
	1	***84,5***	***92,4***
	9	0,7	1,5
D.	0	9,9	5,3
	1	***89,5***	***92,4***
	9	0,7	2,3
E.	0	19,7	9,9
	1	***79,6***	***89,4***
	9	0,7	0,8
F.	0	14,7	14,4
	1	***84,5***	***82,6***
	9	0,7	3
G.	0	17,6	8,3
	1	***81,7***	***90,1***
	9	0,7	1,5

	Code	% 6P	% 1S
H.	0	9,1	6,8
	1	***90,1***	***92,4***
	9	0,7	0,8
I.	0	14,8	15,2
	1	***85,2***	***83,3***
	9	0	1,5
J.	0	4,9	3,8
	1	***95,1***	***95,5***
	9	0	0,8
K.	0	14,1	8,3
	1	***85,9***	***90,9***
	9	0	0,8
L.	0	20,4	11,4
	1	***76,8***	***87,9***
	9	2,8	0,8
M.	0	43,7	15,9
	1	***54,9***	***81,8***
	9	1,4	2,3
N.	0	19	10,6
	1	***78,9***	***88,6***
	9	2,1	0,8

ELEMENTS D'ANALYSE

Avant d'entrer dans l'analyse des réponses des élèves, il convient de dire quelques mots sur la manière dont cet item a été construit. Les différents couples de décimaux à comparer peuvent en effet être catégorisés de la manière suivante :

- tous les couples de décimaux présentent une même partie entière ; par contre leur partie décimale est à chaque fois exprimée au départ d'un nombre différent de décimales. Ainsi, par exemple, les élèves doivent comparer le couple de nombres suivants : « 0,4 » et « 0,71 ». Les deux parties entières sont bien équivalentes. Toutefois, la partie décimale du premier nombre est limitée aux dixièmes tandis que, pour le second, elle est limitée aux centièmes.
- cette différence entre l'expression des parties décimales permet de mettre en jeu différentes variantes. Parmi celles-ci, on relève :
    - une première série de comparaisons pour vérifier l'hypothèse selon laquelle les élèves considèrent qu'un nombre décimal est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule. Selon ce raisonnement, les parties entières étant équivalentes, les élèves vont utiliser uniquement la partie décimale et affirmer, par exemple, que 1,12>1,3 car 12 >3 … ce qui est évidemment erroné. Ce raisonnement erroné peut conduire malgré tout à la bonne réponse pour les items A et H mais à une réponse incorrecte pour les items M et N.
    - une deuxième série de comparaisons pour appréhender la manière dont les élèves perçoivent ce que l'on pourrait appeler « le rôle du zéro » dans la numération décimale de position. C'est le cas des comparaisons E et G.
    - les items C, D, J, K pour évaluer l'impact d'une combinaison des deux premières variations ;
    - les items F et I pour vérifier un autre raisonnement erroné construit par les élèves : « plus il y a de décimales plus le nombre est petit » … ce qui ne se révèle pas correct pour les deux items proposés mais bien pour les items B et M.

L'analyse globale des résultats fait apparaître les constats suivants :
- les pourcentages de bonnes réponses sont supérieurs en 1S sauf pour les comparaisons F et I (analyse de l'hypothèse erronée : « plus il y a de décimale plus le nombre est petit »). Ce constat est assez surprenant ;
- globalement les taux de bonnes réponses sont quantitativement supérieurs à ceux observés lors des précédents items. Sans doute, ce constat peut-il s'expliquer par la familiarité de ce type de tâches pour les élèves ;
- en 6P, deux comparaisons présentent un taux de mauvaises réponses plus importants. Il s'agit des comparaisons B et M qui mettent en jeu des décimaux peu rencontrés par les élèves (la partie décimale va au-delà du millième alors que les Socles de compétences recommandent de ne pas dépasser le millième).
- en ce qui concerne la première variation, on note que le pourcentage moyen de bonnes réponses obtenus aux comparaisons A et H est légèrement supérieur à celui observé aux comparaisons M et N. Cela se vérifie aussi pour les items J et D, d'une part, et, C et K, d'autre part.

3.2.2 Classer des nombres décimaux limités au millième

Plutôt que de demander aux élèves de comparer des nombres deux par deux, on peut aussi leur demander de sérier un ensemble de nombres.

PRESENTATION DE L'ITEM ET DES RESULTATS

Item9

Voici six nombres :

2,05 2,4 2,008 2,27 2,119

Ecris-les du plus petit au plus grand :

……. ……. ……. ……. …….

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	54,2	28,8
	1	***43,7***	***70,4***
	9	2,1	0,8

ELEMENTS D'ANALYSE

On pourrait croire que ce classement de nombres ne constitue une tâche guère plus difficile que celle de comparer des nombres deux à deux … et pourtant, moins d'un élève sur deux en 6P et seulement 7 élèves sur 10 de 1S produisent un classement correct.
L'analyse formative des réponses est difficile car les élèves ont été très « créatifs » ; on relève pas moins de 30 suites différentes proposées par les élèves de 6P et un peu plus de 20 pour les élèves de 1S. Les taux importants de réponses erronées et la grande diversité des réponses produites constituent un indice du manque de maîtrise observé chez les élèves.

Parmi les erreurs les plus fréquemment produites, on retrouve des variations autour de la suite suivante : « 2,008-2,119-2,05-2,27-2,4 » ou « 2,119-2,008-2,05-2,27-2,4 » soit des élèves qui commencent par placer les nombres exprimés en millièmes puis ceux qui s'expriment en centièmes puis et, enfin, ceux qui s'expriment en dixièmes. Cette stratégie, non pertinente, est utilisée, dans ses différentes variantes, par près de 15 % des élèves de 6P et 11 % d'élèves d'1S. A noter qu'une variante de cette stratégie leur permet presque de classer les 5 nombres correctement ! Il importe vraiment de bien analyser les différents distracteurs proposés aux élèves.

D'autres stratégies peuvent être identifiées mais avec des déclinaisons multiples ; sans surprise, elles tournent autour de la représentation erronée que les décimaux fonctionnent comme des couples d'entiers.

POUR ALLER PLUS LOIN

Ces résultats ne sont pas isolés ni spécifiques aux classes avec lesquelles nous avons travaillé. On retrouve ainsi des résultats fort proches lors de l'épreuve de Mons : un taux global de réussite tournant autour des 70 % et une très grande disparité de réponses (pour une question relativement fermée).

Item10

Voici quatre nombres :

8,10	8,01	8,121	8,6

Ecris-les du plus petit au plus grand :

Moins de 70 % des élèves interrogés se révèlent capables d'ordonner correctement cette suite de 4 nombres. L'analyse des suites erronées fait apparaître deux conceptions erronées majeures :

- la partie décimale fonctionne selon les mêmes principes que la partie entière (exemple de suite produite : « 8,01 – 8,6 – 8,10 – 8,121 ») ;
- « plus il y a de chiffres après la virgule, plus le nombre est petit » (exemple de suite produite : « 8,121 – 8,01 – 8,10 – 8,6 »).

On notera également que ces deux conceptions erronées peuvent se combiner dans la tête de certains élèves ; notamment chez ceux qui produisent la suite « 8,121 – 8,01 – 8,10 – 8,6 ».

3.2.3 Classer des entiers et des rationnels

Les activités de classement de nombres ne sont pas réservées aux seuls naturels et/ou décimaux.

PRESENTATION DE L'ITEM ET DES RESULTATS

Item11

Voici six nombres :

2 $\qquad \frac{3}{2} \qquad$ 0,83 $\qquad$ – 2 $\qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{2}{10}$

Ecris-les du plus petit au plus grand :

……. ……. ……. ……. ……. …….

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	78,2	54,5
	1	***14,1***	***40,1***
	9	7,8	5,3

ELEMENTS D'ANALYSE

Le classement de nombres décimaux pose des problèmes aux élèves ; le passage d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire également. Il n'est donc pas étonnant de constater de très faibles taux de bonnes réponses lorsque l'on propose aux élèves un item dont la résolution passe par l'articulation de ces deux tâches.

L'analyse des suites erronées est à nouveau difficile en raison de la très grande « créativité » des élèves (plus de 50 suites différentes ont été observées en 1S).

Il est toutefois à noter que ce n'est pas la présence d'un nombre négatif qui pose le plus de problèmes aux élèves ; il sont un peu moins de 10 % à n'avoir pas positionné ce nombre en premier lieu.

Pour le reste, ils sont plus de 15 % en 1S à utiliser la stratégie suivante : positionner à la suite du négatif, le décimal puis toutes les écritures fractionnaires (avec de multiples variantes dans le classement de ces 3 nombres) et, enfin, le nombre 2.

Une proportion assez semblable d'élèves de 1S placent $\frac{3}{2}$ en dernier lieu. Faut-il y voir le raisonnement erroné selon lequel ce nombre pourrait s'écrire sous la forme de 3,2 et être ainsi considéré comme le nombre le plus grand ?

POUR ALLER PLUS LOIN

Les résultats obtenus lors de cette épreuve diagnostique doivent être mis en parallèle avec ceux observés lors de l'épreuve d'évaluation externe de mathématiques réalisée à l'entrée de la troisième année secondaire (Service de pilotage, 2005).

A cette occasion, les deux items suivants ont été proposés aux élèves de l'ensemble des écoles de la Communauté française :

Item 12

Parmi les propositions suivantes, quelle est celle où les nombres sont classés du plus petit au plus grand ?

A/	0,345	0,19	0,8	$\frac{1}{5}$
B/	0,19	$\frac{1}{5}$	0,345	0,8
C/	0,8	0,19	$\frac{1}{5}$	0,345
D/	$\frac{1}{5}$	0,8	0,345	0,19

Cet item plus simple (de par la nature de la tâche – choisir – et le choix des nombres et des écritures), est réussi par 70 % des élèves qui se situent à ce moment en début de 3^{e} année secondaire.

Quant à l'item suivant :

Item 13

Voici 5 nombres,

–3,650	1^3	0,375	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{5}$	3,450

Ecris-les du plus petit au plus grand

Il est certes plus difficile (ne fut-ce que par la présence d'un nombre élevé à une puissance) mais il faut bien constater que le taux de réussite est, cette fois, inférieur à 50 %.

3.2.4 Intercaler un décimal entre deux décimaux ou entre deux entiers

Les tâches de comparaison de plus en plus fines proposées aux élèves permettent d'aller à la rencontre d'une caractéristique essentielle des rationnels : leur densité. Dans ce cas précis, il est moins question de savoir si telle partie décimale est plus grande ou plus petite qu'une autre mais davantage si un nombre se situe bien entre deux nombres donnés.
Deux items assez similaires sont proposés aux élèves ; *a priori*, ils diffèrent essentiellement par la complexité des nombres en jeux :

- dans le premier cas, il s'agit de vérifier si un décimal peut s'intercaler entre deux décimaux exprimés en dixièmes ;
- le second item est plus complexe ; la valeur de l'intervalle n'est pas habituelle (il ne s'agit pas de deux nombres que l'on positionne de manière précise sur une droite numérique) et la valeur des deux bornes est exprimée en millièmes.

PRESENTATION DES ITEMS ET DES RESULTATS

Item 14

Ci-dessous, entoure les nombres compris entre 3,5 et 3,7 .

A/ 3,4	B/ 3,51	C/ 3,705
	D/ 3,75	
E/ 3,659		F/ 3,6

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	15,5	10,6
	1	*82,4*	*89,4*
	9	2,1	0
B.	0	25,3	13,6
	1	*72,5*	*86,4*
	9	2,1	0
C.	0	5,6	2,3
	1	*92,2*	*97,7*
	9	2,1	0

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	41,5	15,1
	1	*56,3*	*84,9*
	9	2,1	0
E.	0	4,9	3,8
	1	*93*	*96,2*
	9	2,1	0
F.	0	2,8	2,3
	1	*95*	*97,7*
	9	2,1	0

Item 15

Ci-dessous, entoure les nombres compris entre 6,382 et 6,405 .

A/ 6,389 B/ 6,37

C/ 6,3 D/ 6,392

E/ 6,4 F/ 6,39

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	5,6	5,3
	1	***92,2***	***93,2***
	9	2,1	1,5
B.	0	7,7	3,8
	1	***90,1***	***94,7***
	9	2,1	1,5
C.	0	12,7	6,8
	1	***85,2***	***91,7***
	9	2,1	1,5

	Code	% 6P	% 1S
D.	0	8,5	5,3
	1	***89,5***	***93,2***
	9	2,1	1,5
E.	0	45,8	19,7
	1	***52,1***	***78,8***
	9	2,1	1,5
F.	0	37,3	15,9
	1	***60,6***	***82,6***
	9	2,1	1,5

ELEMENTS D'ANALYSE

Contrairement à ce qui était annoncé, on n'observe pas de diminution du taux de bonnes réponses lors du passage d'un item à l'autre. Globalement, ils sont assez bien réussis à l'une ou l'autre exception.

Au vu de la simple comparaison des pourcentages de bonnes réponses, on relève un constat assez surprenant. Il semble plus facile aux élèves d'affirmer que « 3,705 » n'est pas compris entre « 3,5 » et « 3,7 » que d'effectuer un raisonnement semblable pour « 3,75 ».

Dans une moindre mesure, il parait tout aussi étonnant de constater que presque tous les élèves sont capables de considérer que « 3,6 » est bien compris entre « 3,5 » et « 3,7 » mais manifestement, il est plus difficile de considérer que « 3,4 » n'est pas compris entre ces deux bornes.

Ces observations se confirment lors de l'analyse du deuxième item; les taux de bonnes réponses, notamment en 6P, sont assez différents lorsqu'il s'agit de définir si « 6,392 » ou « 6,4 » se situent bien entre les deux bornes proposées. A nouveau, il semble plus facile de se prononcer pour « 6,392 » que pour « 6,4 ».

POUR ALLER PLUS LOIN

Pour essayer de mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves, analysons un des items proposés lors de l'épreuve cantonale de Mons. A cette occasion, il leur était demandé d'encadrer un décimal donné par deux entiers (une situation en quelque sorte inverse à celle demandée lors de l'épreuve diagnostique).

Item 16

Complète le tableau suivant

NOMBRE ENTIER QUI VIENT JUSTE AVANT	NOMBRE DECIMAL	NOMBRE ENTIER QUI VIENT JUSTE APRES
	631,2	
	742,75	
	1000,09	

Près de 30 % des élèves interrogés se révèlent incapables, au sortir de la 6P, de préciser le nombre entier “ *qui vient juste avant* ” le “ nombre à virgule ” donné. Par contre, par rapport à ce même nombre décimal, ils ne sont plus que 20 % à échouer lorsqu’on leur demande “ *quel est le nombre entier qui vient juste après* ”. Autrement dit, **il semble bien, au vu de ces items, qu’il soit plus difficile de préciser le nombre entier qui précède immédiatement le “ nombre à virgule ” donné que de préciser celui qui suit immédiatement.**

Si on s’intéresse maintenant aux types d’erreurs les plus souvent rencontrés, on observe les phénomènes suivants :

- d’une part, les taux de réussite plus faibles constatés pour la définition de la borne inférieure s’expliquent par **la présence d’un grand nombre d’élèves (15 %) qui enlèvent systématiquement une unité** (« 630 »). Ce comportement ne se retrouve pas lors de la définition de la borne supérieure; on ne retrouve pas d’élèves qui ajoutent systématiquement une unité;
- d’autre part, certaines réponses comme “ 631,1 ”, “ 631,19 ”, ... font penser que les élèves ne maîtrisent pas le concept de “ nombre entier ” puisque **la réponse chaque fois produite est un “ nombre à virgule ”**;
- enfin, et c’est sans doute la catégorie d’erreurs la plus préoccupante, un petit nombre d’élèves, pour répondre à ces items, **suppriment purement et simplement la virgule** (en ajoutant ou retranchant une unité selon les cas). On obtient ainsi des réponses telles que “ 6312 ”, “ 6311 ”, ...

Au delà du problème de vocabulaire ou de définition, les résultats observés mettent en évidence que la propriété de densité des décimaux n’est pas suffisamment travaillée à l’école primaire.
Les résultats observés auprès des élèves des classes avec lesquelles nous avons travaillé se retrouvent en partie confirmés par l’analyse d’un item proposé lors de l’Epreuve externe en mathématiques des élèves de 1ère année secondaire, menée en 1996 par la Cellule de Pilotage.

Item 17

Dans la case vide, écris un nombre compris entre les deux nombres donnés.

A/

72		75

B/

48,7		49,7

C/

72,4		72,5

Les deux premiers exercices ne posent guère de problèmes aux élèves ; on observe (pour l'ensemble de la population de référence) des pourcentages de bonnes réponses de respectivement 95 et 86 %. Ces taux de réussite chutent à 74,4 % pour la dernière intercalation qui présente les mêmes caractéristiques que celles analysées précédemment (les nombres proposés ont la même partie entière).

Sans doute serait-il intéressant de proposer de nouveaux items aux élèves afin de pouvoir analyser plus finement les difficultés rencontrées.
Une piste à creuser serait de travailler sur les bornes de l'intervalle et demander aux élèves d'intercaler un nombre entre « 51 » et « 52 » puis entre « 8,12 » et « 8,2 » ou entre « 8,241 » et « 8,3 » avant de revenir vers des bornes comparables à celles proposées lors de l'évaluation diagnostique.
Une autre piste passe sans doute par un travail au départ de questions de ce type :
Combien peut-on écrire de nombres différents entre

- 123 et 125 ? : ....
- 56 et 57 ? : ....
- 3,932 et 3,933 ? : ....

Une autre piste de travail passe peut-être aussi par le recours plus systématique à un référent tel que la droite numérique pour aborder la question de la densité des décimaux.

3.2.5 Situer des rationnels sur une droite numérique

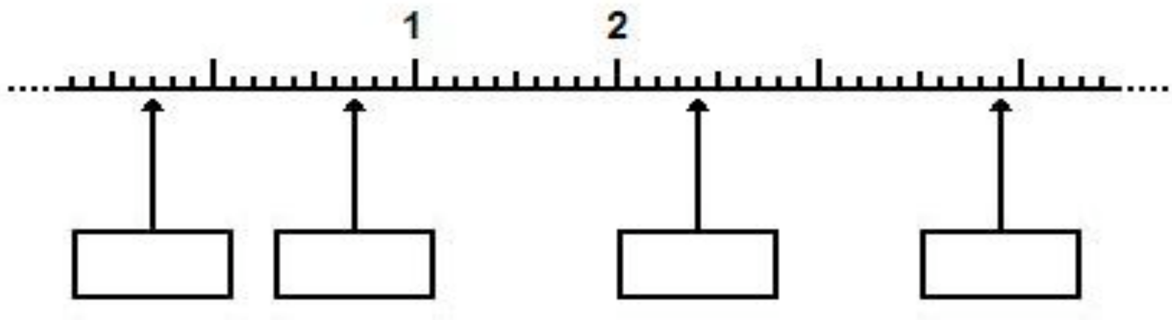
Les résultats présentés ci-dessus mettent en évidence les difficultés éprouvées par les élèves lors de la construction du principe d'intercalation. D'un point de vue psychologique (obstacle d'origine ontogénique), il y a là sans doute un passage délicat à négocier : celui des grandeurs discrètes vers les grandeurs continues.
Traditionnellement, la droite numérique est l'outil privilégié pour faciliter la comparaison des décimaux et établir le principe d'intercalation.

PRESENTATION DE L' ITEM ET DES RESULTATS

Un item assez classique a été proposé aux élèves ; il s'agissait de situer des rationnels (écrits sous une forme décimale) sur une droite numérique.

Item18

Ecris les nombres dans les cases vides.



A/ B/ C/ D/

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	78,9	68,9
	1	***2,1***	***23,5***
	9	19	7,6
B.	0	28,2	12,1
	1	***69,7***	***86,4***
	9	2,1	1,5
C.	0	14,8	6,8
	1	***83,1***	***91,7***
	9	2,1	1,5
D.	0	16,9	4,5
	1	***80,3***	***93,9***
	9	2,8	1,5

ELEMENTS D'ANALYSE

On peut relever les constats généraux suivants :

- le premier nombre identifié (« –0,3 ») est source de très nombreuses erreurs tant en 6P qu'en 1S ;
- les trois autres nombres à identifier ne posent plus trop de problèmes aux élèves de 1S. On note toutefois qu'il semble plus difficile aux élèves d'identifier un nombre compris entre 0 et 1 qu'un nombre compris entre 2 et 3.

Parmi les erreurs observées pour l'identification du premier nombre, on retrouve « 0,07 » ou « 0,03 ». C'est vrai pour 33 % des élèves de 6P et un peu moins de 20 % des élèves de 1S.
On note également des taux de non réponse importants.

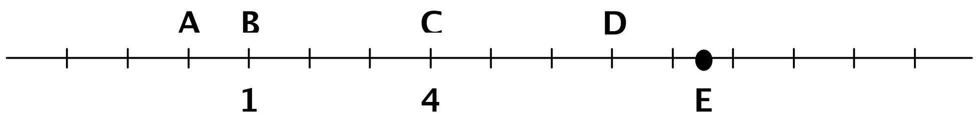
Quelle(s) hypothèse(s) peut-on formuler pour expliquer ce constat ?

Cet item n'a pas été construit au hasard. Parmi les variables didactiques privilégiées, il y a notamment les éléments suivants :
- c'est une droite numérique qui est proposée aux élèves et non une demi-droite qui a pour origine 0 ;
- au niveau des repères proposés pour déterminer la valeur de l'intervalle, on retrouve les entiers « 1 » et « 2 » mais pas le « 0 »;
- cette droite présente des graduations à gauche du « 0 » de manière à permettre le positionnement de « rationnels négatifs » ;
- les graduations proposées sont assez simples (la valeur d'un intervalle entre deux graduations vaut « 0,1 » .

Pour les élèves qui répondent « 0,07 » ou « 0,03 » pour le premier nombre, tout se passe comme si la droite représentée avait bien pour origine 0 et que l'on amplifiait en quelque sorte cet espace (changement d'échelle et/ou de valeur d'intervalles) de manière à pouvoir y positionner des décimaux exprimés non plus en dixièmes mais en centièmes.

Ce constat n'est pas neuf, il peut être mis en relation avec d'autres données de recherche en didactique des mathématiques. Le choix des variables didactiques pour élaborer cet item repose sur l'analyse d'un item d'évaluation proposé lors d'un autre dispositif de recherche (Sacré & Stegen, 2003).
L'item suivant a été proposé à des élèves de 5P et de 6P :

Voici une droite graduée.
Sur cette droite, le point B représente le nombre 1 ; le point C représente le nombre 4.



Quel nombre représente la lettre D ? ....

Quel nombre représente la lettre A ? ....

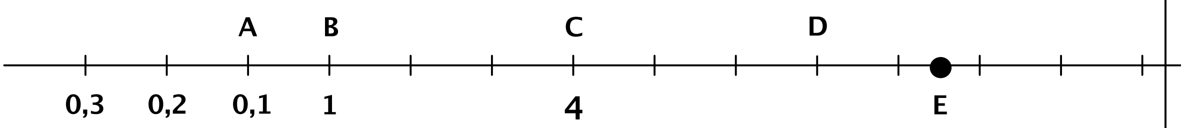
Globalement, la résolution de cette double question ne pose pas trop de difficultés aux élèves ; 82 % des élèves de 5^{e} et 91 % des élèves de 6^{e} déclarent que la lettre D représente le nombre 7. Pour la second question, on observe un phénomène curieux chez les élèves de 6^{e}. Alors que 79 % des élèves de 5^{e} répondent correctement (statistique assez proche de la précédente), ils ne sont que 73 % en 6^{e} à dire que A désigne le nombre 0. Pour certains élèves de 6^{e}, A

représente soit "0,9" (13 %), soit "0,5" (3 %), soit "0,1" (3%) soit "0,99" (3 %).
Au total donc 22 % des élèves de 6e considèrent que la lettre A désigne un décimal compris entre 0 et 1.

Différents entretiens ont été menés avec les élèves qui ont commis ces erreurs ; ils mettent en évidence les éléments suivants :

- pour retrouver le nombre représenté par la lettre D, les élèves déclarent compter les graduations qui se trouvent entre 1 et 4. Ils définissent ainsi la valeur de l'intervalle. La formulation inhabituelle de la question n'a, semble-t-il, pas posé de problème aux élèves qui ont correctement identifié ce qu'on leur demandait de faire.
- pour la deuxième partie de la question, on constate que la plupart des erreurs produites en 6e relèvent d'une même logique : ***les élèves éprouvent de grosses difficultés avec le zéro et considèrent que, sur une droite numérique, les nombres entiers se situent à droite du 0 et les nombres décimaux à gauche du 0 ou du 1.***

Voici par exemple ce qu'un élèves répond lorsqu'on lui demande de placer tous les nombres sur la droite numérique.



Cet exemple n'est pas anecdotique. Comme le montrent les résultats présentés précédemment, l'identification du nombre désigné par la lettre A pose davantage de problèmes aux élèves de 6e qu'à ceux de 5e. Quand on regarde maintenant la nature des erreurs commises par les élèves, on constate que 22 % d'élèves de 6e considèrent que la lettre A désigne un nombre décimal compris entre 0 et 1. Autrement dit, ils adoptent un point de vue tout à fait comparable à celui qui vient d'être développé.

D'une certaine manière, c'est également ce raisonnement erroné qui peut être expliquer les nombreuses erreurs commises par les élèves lors de l'épreuve diagnostique.

POUR ALLER PLUS LOIN

L'analyse qui précède met en évidence les difficultés éprouvées par les élèves dans l'utilisation du référent droite numérique. Ces difficultés s'expliquent sans doute en termes d'obstacles didactiques.

A bien y regarder, la droite numérique est une représentation très abstraite qui nécessite, de la part des élèves, un long processus d'élaboration et d'appropriation progressive. Or, on constate très souvent que les élèves du cycle 5/8 sont amenés à passer très rapidement de la “ bandelette numérique ” à la “ droite numérique ” ... sans explications complémentaires. Pourtant, ces deux outils sont fondamentalement différents dans leur conception : la bandelette numérique est composée de cases discrètes alors que la droite numérique, par définition, est constituée d'une infinité de points.
On retrouve donc ici la classique distinction entre grandeurs continues et grandeurs discrètes : un même nombre peut représenter un point sur la droite ou la mesure d'un segment constitué d'une infinité de points.
Il s'agit donc de s'interroger, en équipe, au départ des questions suivantes :

- **quand et pourquoi passer d'un mode de représentation à un autre ?**

(Faut-il attendre que les élèves soient capables de comprendre les propriétés différentes sur lesquelles sont construits ces outils ?) ;
- **comment construire avec les élèves ce passage ?** (Quels dispositifs mettre en place pour aider les élèves à construire ce référent plutôt que leur imposer l'usage d'un outil qu'ils ne comprennent pas ?)

Dans le troisième chapitre de cette publication, nous détaillerons une séquence d'activités qui a pour but d'aider les élèves à construire ce référent.

Il serait également utile, dans le cadre d'une évaluation diagnostique, de proposer aux élèves des items destinés à vérifier les stratégies utilisées pour construire une droite ou un segment afin d'y positionner le plus précisément possible des nombres.
Trois items avaient été construits dans ce sens au niveau de l'évaluation diagnostique ; malheureusement, ils n'ont pu faire l'objet d'une analyse formative en raison de la (trop) grande difficulté à appréhender les modes de raisonnement des élèves au départ de l'analyse de leurs réponses.
La perspective est toute différente pour un enseignant qui décide de proposer ces items à ses élèves. Il peut davantage les interroger sur la manière dont ils ont procédé pour répondre aux questions posées. C'est pourquoi nous vous les proposons ci-dessous.

Item19

Crée, à partir du dessin ci-dessous, une droite graduée qui te permettra de placer « 1,2 ».

Item20

Crée, à partir du dessin ci-dessous, une droite graduée qui te permettra de placer « $\frac{3}{4}$ ».

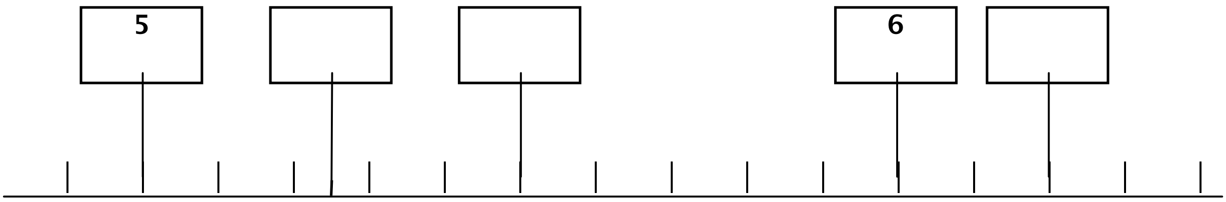
Item21

Ceci est un segment de droite numérique.
Ecris dans les cases A et B deux nombres de ton choix qui encadrent « 9,98 ».
Place ensuite « 9,98 », le plus précisément possible.

L'utilisation et l'enseignement de la droite numérique méritent sans doute un important travail de réflexion de la part des instituteurs primaires. De manière générale, il ne manque pas de résultats de recherches pour mettre en évidence que ce référent est un outil mal maîtrisé par les élèves aux différentes étapes de la scolarité primaire. Il n'est donc pas étonnant que l'on observe les taux de réussite suivants au terme de l'épreuve cantonale de Mons (1997).

Item 22

Ecris les nombres qui conviennent dans les cases vides



5,25	***76 %***	5,5	***81 %***
• 5,3............................	6 %	• 5,6..............................	5 %
• 5,5............................	2 %	• 10..............................	1 %
• 7,5............................	2 %	• 5,8..............................	1 %
• 5,35 – 5,2 – 5,15.......	3 %	• Pas de réponse	2 %
6,2	***85 %***		
• 8 ou 7..........................	4 %		
• 6,5..............................	1 %		
• 6,25............................	1 %		
• pas de réponse............	2 %		

La maîtrise de la compétence « situer des nombres sur une droite graduée, dont les extrémités sont données » semble indispensable à ce niveau d'enseignement. Pourtant, des élèves, en fin de scolarité primaire, éprouvent de grosses difficultés à identifier les nombres cachés. C'est inquiétant lorsque l'on sait que :

- d'une part, la maîtrise du concept de " nombre à virgule " passe par la prise en compte du point de vue ordinal associé à la notion de **densité des nombres décimaux** (entre deux nombres naturels, il existe un nombre fini de naturels tandis qu'entre deux décimaux, il y a une infinité de décimaux);
- d'autre part, la droite graduée constitue un référent universel – il fait partie de ce que l'on pourrait qualifier de patrimoine " culturel " mathématique. **Or ce référent, cet outil au service de l'apprentissage, semble causer davantage de problèmes qu'il n'en résout**.

4. En conclusion : que retenir de ces analyses de productions d'élèves ?

Les pages qui précèdent ont mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves dans la construction des nombres décimaux. En de nombreuses occasions, des hypothèses explicatives ont été suggérées. Elles pointent des progressions didactiques qui ne prennent pas suffisamment en compte les obstacles épistémologiques liés à l'enseignement des décimaux.
Quelle pourrait être l'origine de ces obstacles ?

A l'école primaire, les élèves rencontrent les rationnels essentiellement dans leur écriture décimale (les élèves qui sortent de l'école primaire sont-ils bien conscients qu'une fraction est aussi et surtout un nombre ?).
Cette rencontre survient après un travail de plusieurs années scolaires sur la construction des nombres entiers. De là naissent un grand nombre de difficultés car les règles de fonctionnement des entiers ne peuvent être étendues aux rationnels.

Deux exemples pour illustrer ces propos :

- les élèves ont intériorisé progressivement le constat suivant : un nombre entier est d'autant plus grand qu'il contient un plus grand nombre de chiffres. Certaines erreurs commises par les élèves peuvent avoir pour origine une généralisation erronée: « plus y a de chiffres à la partie décimale, plus elle est petite ! ».
  Ce phénomène est peut-être renforcé par l'association qui est souvent faite entre les décimaux et les mesures de grandeurs. Au niveau des mesures de longueurs, par exemple, les élèves explorent les décimètres, puis les centimètres, puis les millimètres. Ils découvrent ainsi des unités de plus en plus petites et cela contribue sans doute à renforcer cette représentation erronée : « plus y a de chiffres à la partie décimale, plus elle est petite ! » ;
- construire les décimaux sur une analogie forte avec les naturels conduit les élèves à les verbaliser comme s'il s'agissait de deux entiers séparés par une virgule. Ainsi, « 12,345 » sera oralisé de la manière suivante : « douze virgule trois cent quarante-cinq » tandis que « 12,34 » sera oralisé « douze virgule trente-quatre ».
  On ne s'étonnera donc pas que les élèves assimilent erronément le chiffre 4 tantôt au rang des dixièmes, tantôt à celui des centièmes … alors qu'il représente le rang des centièmes dans les deux expressions. On ne s'étonnera pas non plus qu'ils considèrent que 12,345 soit plus grand que 12,34 sur la base du raisonnement erroné (mais qui aboutit à une réponse correcte dans ce cas) « 345 est plus grand que 34 ».

A de nombreuses reprises, les erreurs d'élèves peuvent s'expliquer au départ de la non prise en considération d'une rupture essentielle entre les entiers et les rationnels : la propriété relative à l'ordre sur ces nombres et donc à leur comparaison.

Comme cela a été évoqué précédemment, l'idée de successeur sur laquelle s'est basée la découverte progressive des entiers n'a plus de sens ici. Quel serait le successeur de 2,75 ? 2,76 ? 2,751 ? les problèmes d'intercalation n'ont pas les mêmes solutions dans N ou dans Q. Entre deux naturels, il existe un nombre fini de naturels et un nombre infini de rationnels.

Les différents items proposés pour évaluer cette propriété mettent en difficulté un nombre important d'élèves.
La droite numérique qui est souvent utilisée comme outil pour construire l'intercalation ou aborder la densité des décimaux pose problème ; les élèves ne perçoivent pas suffisamment de liens entre un système de codage de points sur une droite et le principe d'intercalation infinie (densité des décimaux). Une nouvelle fois, on constate qu'un outil introduit (trop) précocement pour permettre le repérage de grandeurs discrètes est transposé tel quel dans l'univers des grandeurs continues.

Il convient donc de donner davantage de sens à l'enseignement des rationnels à l'école primaire. C'est dans cette perspective que sont définies les propositions d'activités présentes au chapitre 3.
Avant de clôturer ce chapitre, il convient de revenir sur une dernière analyse d'item. Ce dernier est constitué d'opérations simples sur des rationnels. L'analyse des réponses produites par les élèves met en évidence l'impact qu'une maîtrise insuffisante de ces nombres peut avoir sur ce type de tâches en apparence assez simple.

PRESENTATION DE L'ITEM ET DES RESULTATS

L'item suivant a été élaboré au départ des variables didactiques suivantes :

- les rationnels sont écrits sous forme décimale ou fractionnaire ;
- les opérations en jeu sont simples : il s'agit d'additionner deux rationnels ou de multiplier un rationnel par un entier ou un autre rationnel ;

Item23

Complète.

A/	0,2 + …….. = 1	G/	0,05 × …….. = 1
B/	0,775 + …….. = 1	H/	0,25 × …….. = 1
C/	0,09 + …….. = 1	I/	0,1 × …….. = 1
D/	$\frac{3}{4}$ + …….. = 1	J/	$\frac{1}{4}$ × …….. = 1
E/	$\frac{2}{10}$ + ……... = 1	K/	$\frac{2}{6}$ × …….. = 1
F/	$\frac{46}{100}$ + ……... = 1	L/	$\frac{6}{3}$ × …….. = 1

	Code	% 6P	% 1S
A.	0	10,6	3,8
	1	***84,5***	***94,7***
	9	4,9	1,5
B.	0	28,9	25
	1	***62,7***	***69,7***
	9	8,4	5,3
C.	0	51,4	37,9
	1	***41,5***	***57,6***
	9	7	4,6
D.	0	30,3	15,9
	1	***57,8***	***74,2***
	9	12	9,8
E.	0	21,1	10,6
	1	***67,6***	***81,1***
	9	11,3	8,3
F.	0	27,5	17,4
	1	***58,4***	***71,2***
	9	14,1	11,4

	Code	% 6P	% 1S
G.	0	48,6	31,8
	1	***33,8***	***53***
	9	17,6	15,2
H.	0	25,3	12,1
	1	***59,1***	***78,8***
	9	15,5	9,1
I.	0	26,8	15,9
	1	***54,9***	***73,5***
	9	18,3	10,6
J.	0	27,5	13,6
	1	***52,8***	***68,2***
	9	19,7	18,2
K.	0	35,2	17,4
	1	***23,2***	***47,7***
	9	41,6	34,8
L.	0	43,7	28,8
	1	***9,1***	***25,8***
	9	47,2	45,5

ELEMENTS D'ANALYSE

A première vue, les différentes opérations ne devraient pas poser de difficultés à des élèves de ce niveau scolaire ; il s'agit de simples décompositions et recompositions de l'unité (sous forme d'additions ou de multiplications). Les six premières mettent en jeu des écritures décimales et les six suivantes des écritures fractionnaires.
L'analyse des taux de réponses correctes montre qu'il n'en est rien. Différents constats peuvent être dégagés des réponses produites :

- à l'exception de la première décomposition, les pourcentages de bonnes réponses sont assez décevants. Il est par exemple surprenant d'observer que plus de 40 % des élèves de 1S ne parviennent pas à effectuer l'opération suivante : « 0,09 + …= 1 ». Cette impression de difficulté est renforcée par le nombre de plus en plus important d'élèves qui ne produisent pas de réponse … comme s'ils ne comprenaient pas ce que l'on attend d'eux ;
- la comparaison des taux de bonnes réponses entre les six premiers et les six derniers items ne permet pas d'affirmer que les élèves éprouvent plus de difficultés à manipuler des écritures fractionnaires que des écritures décimales. Les résultats sont aussi faibles dans un cas comme dans l'autre. Plus de 25 % des élèves de 1S échouent quand on leur demande ce qu'il convient d'ajouter à ¾ pour obtenir l'unité.
- Enfin, la multiplication semble poser encore davantage de problèmes aux élèves :
    - 27 % des élèves de 1S sont incapables de définir précisément par combien il faut multiplier 0,1 pour obtenir 1 ;
    - plus de 50 % des élèves de 1S ne savent pas par combien il convient de multiplier 2/6 pour obtenir 1.

Ces différents résultats sont à mettre en relation avec les commentaires effectués précédemment. Ils mettent en lumière les conséquences d'un apprentissage des rationnels dans lequel l'accent est mis sur les techniques au détriment d'un ancrage sur les propriétés et les caractéristiques de cet univers de nombres. Très vite, trop vite, c'est l'aspect formel (l'écriture mathématique) qui est privilégié au détriment d'un véritable processus de construction et d'appropriation par les élèves. Qu'est-ce qu'un nombre rationnel pour les élèves ? A quoi sert-il ? Autrement dit, à quelle occasion dois-je y recourir ?