Chapitre 3 : Des activités pour structurer l'enseignement des rationnels

Ce dernier chapitre détaille les différentes activités développées et expérimentées au sein de l'espace de collaboration. Celles-ci s'inscrivent dans le droit prolongement des analyses et des réflexions développées dans les chapitres 1 et 2.
Avant d'en venir à la présentation des activités, une première section précise les axes de progression qui ont servi de point de départ à l'élaboration et au choix des activités d'apprentissage.
Ces activités peuvent être envisagées différemment selon que le lecteur soit instituteur primaire ou régent en mathématiques. Pour les premiers, elles doivent être davantage considérées comme des points de départ pour la mise en œuvre de nouvelles compétences tandis que, pour les seconds, il s'agit davantage de pistes de re-médiation. Que faut-il entendre par activité de re-médiation ? Quel est le statut des activités proposées ? Comment les mettre en œuvre ? Les réponses à ces questions sont détaillées dans la deuxième section de ce chapitre.
On l'aura compris à la lecture de ce qui précède, les activités sont présentées dans la troisième section de ce chapitre au départ d'un même modèle de fiche que celui utilisé dans la brochure consacrée à l'enseignement de la proportionnalité.

1. Comment pourrait-on définir des axes de progression des apprentissages ?

A l'école primaire, l'accent est mis sur les décimaux et non sur les rationnels ; ce terme n'apparaît pas dans les *Socles de compétences*. L'écriture fractionnaire des rationnels semble davantage réservée au début de l'enseignement secondaire. Les fractions ne sont d'ailleurs pas ou peu évoquées dans le domaine numérique mais bien dans celui des grandeurs.
Au vu de ce qui précède, on ne s'étonnera pas de constater qu'au sortir de l'école primaire, les élèves assimilent les rationnels aux seuls décimaux. Cette représentation est réductrice car les décimaux ne constituent pas à proprement parler un ensemble de nombres de même nature que les naturels, les entiers ou les rationnels.

Ces choix didactiques s'expliquent sans doute en termes d'analogie d'écritures (numération positionnelle) et de facilités des opérations. Toutefois, au vu des analyses effectuées au chapitre 2, on peut se demander si ces facilités ne constituent pas, aux premiers temps de l'apprentissage, des obstacles difficiles à surmonter pour certains élèves.

Comme le montrent les (très) nombreuses erreurs commises par les élèves, l'extension numérique des naturels aux rationnels (via les décimaux) ne va pas de soi. Comment écrire ces nouveaux nombres ? Comment donner du sens aux écritures à virgule ? Comment articuler l'écriture des entiers, des décimaux, des fractions ?
Au-delà de ces questions techniques liées à l'écriture, il convient aussi de ne pas perdre de vue la question du sens : pourquoi utilise-t-on les décimaux ? Autrement dit quels sont les problèmes, les situations qui vont motiver et rendre nécessaire leur introduction ?

L'enseignement des rationnels (via les décimaux) ne se réduit-il pas trop souvent à un enseignement de techniques ? Comme le soulignent de nombreux didacticiens, ce type d'enseignement ne permet pas une prise en compte suffisante de la véritable nature des rationnels (question du sens) ni une bonne compréhension des caractéristiques constitutives de ce type de nombre comme, par exemple, la densité des rationnels.

Au vu de ces constats, la progression didactique qui structure les activités proposées dans cette publication s'appuie sur les deux propositions de travail suivantes :
- aborder les rationnels au départ de l'écriture fractionnaire (aspect technique de l'écriture des rationnels);
- favoriser la mise en place d'une dialectique outil-objet (question du sens des rationnels à construire par les élèves).

1.1 Partir des fractions pour aller vers les décimaux

La progression didactique proposée s'appuie sur les conclusions formulées par de nombreux didacticiens (Brousseau, 1998 ; Douady, 1986 ; Brissiaud, 1998 ; Bolon, 1997), que l'on peut résumer ainsi : **éviter d'enseigner les décimaux au départ de mesures de grandeurs**. Les nombres décimaux ne doivent pas, dans l'esprit des élèves, être assimilés à une forme de recodage des mesures entières (exemples : 1,32 mètres c'est 132 centimètres ; 3,75 € c'est 375 centimes). Il convient plutôt d'enseigner les décimaux au départ de la notion de fraction décimale.

Pour justifier ce principe, les didacticiens rappellent que les nombres décimaux (c'est-à-dire des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10) ont été inventés pour permettre d'approcher le plus précisément possible n'importe quelle grandeur continue grâce à des fractionnements de plus en plus fins. « *Faire disparaître l'idée de fractionnement dans une progression didactique concernant les décimaux, c'est donc passer à côté de son objet d'étude, c'est quasiment décider de ne pas enseigner les décimaux, de laisser les élèves qui le peuvent les inventer eux-mêmes* » (Brissiaud, 1998).

Partir des fractions pour enseigner les décimaux, c'est donc respecter le cheminement de l'histoire.

> Comme le rappelle Bolon (1996), « *les propriétés des fractions comme rapports de grandeurs commensurables étaient connues au VI-V^{e} siècle avant JC ; on date la naissance des décimaux quelque 20 siècles plus tard* ».

La filiation historique doit également être respectée au niveau de l'écriture. Ainsi, on commencera par présenter aux élèves des fractions en utilisant la barre de fraction comme système de notation puis en utilisant l'écriture à virgule de ces fractions décimales.

> L'écriture à virgule est, dans l'histoire des mathématiques, assez récente. « *Vouloir que des enfants conceptualisent d'emblée les décimaux avec cette sorte d'écriture (l'écriture décimale), alors qu'elle masque leur véritable nature, ne peut qu'échouer pour la plupart d'entre-eux. Il est important que les enfants travaillent longtemps avec des nombres décimaux représentés par des fractions décimales. Ce parcours est, à notre sens, le seul qui puisse laisser un espoir de voir un jour les élèves conceptualiser les décimaux à l'école élémentaire dans une proportion supérieure aux résultats actuels* » (Brissiaud, 1998).

1.2 Favoriser la mise en place de dialectiques outil-objet

Poser comme choix didactique de partir des fractions décimales et de la notation fractionnaire pour aborder l'étude des décimaux n'est pas suffisant. Bon nombre d'erreurs des élèves peuvent être attribuées à une installation trop rapide de mécanismes ou de techniques au détriment d'un travail approfondi sur le sens.
Si, dans un premier temps, le recours à ces techniques peut donner l'illusion d'un apprentissage réussi, l'analyse des erreurs des élèves montre que les connaissances ainsi développées résistent mal à l'épreuve du temps ou aux changements de contexte. Trop souvent, ces techniques sont liées à des résolutions de problèmes spécifiques ; l'enfant ne reconnaît pas d'autres situations dans lesquelles elles seraient également opératoires.

Douday (1986) a développé le concept de dialectique outil-objet pour modéliser la manière dont se développent les connaissances mathématiques. En clair, elle distingue, pour chaque concept mathématique, son caractère “ **outil** ” et son caractère “ **objet** ”.

> “ *Par son caractère **outil**, nous entendons l'usage que l'enfant en fait pour résoudre un problème. Un concept prend d'abord son sens par son caractère outil. Par son caractère **objet**, nous entendons le concept mathématique considéré comme ayant sa place dans le savoir mathématique de référence à un moment donné de l'apprentissage* ” (Douady, 1986).

Les activités d'apprentissage proposées ici ont pour objectif d'assurer la mise en place de dialectiques outil-objet ; les situations-problèmes, les défis posés permettent aux élèves, dans un premier temps, de rencontrer le nombre rationnel dans son statut d'outil. Dans un second temps, le recours au symbolisme mathématique pour formaliser le résultat des manipulations et la généralisation de leur portée permet de travailler le nombre pour lui-même, indépendamment de tout contexte et d'en faire un objet d'étude.

A titre d'exemple, on peut présenter une progression développée par Rouche (1998). Elle a pour but de faire vivre aux élèves des situations de fractionnement les plus diversifiées possible. Elle comporte 4 étapes dont le rappel permet d'identifier les démarches d'apprentissage des fractions développées avant l'entrée au cycle 10/12 :

1. **partager en parts égales des objets quelconques**
   Ces objets quelconques sont des objets pris dans la vie courante, comme un fil, une baguette, une tarte, une barre de chocolat, le contenu d'une boîte de biscuit, le contenu d'une bouteille, l'argent récolté lors de la vente d'objets, etc. Il importe de varier les objets de manière à développer un maximum de stratégies. Ainsi, pour partager un fil en deux, on peut le plier en deux et donner un coup de ciseau. Une telle technique sera inopérante s'il s'agit de partager une baguette. A ce moment, le choix d'un étalon (comme le fil dont nous venons de parler) pourra être très utile.
   Comment partager en deux le contenu d'une bouteille ? Un élève peut proposer le choix de deux verres identiques. Le contenu de la bouteille est alors réparti équitablement entre ces deux verres et l'équivalence des hauteurs permet de juger de l'équivalence des volumes.
   Les techniques de dénombrement seront bien utiles pour partager le contenu d'une boîte de biscuits.
   Les différents objets à fractionner peuvent donc être considérés du point de vue de leur longueur, de leur volume, de leur masse ou de leur nombre, ce qui permet de faire des liens avec d'autres champs mathématiques.
   Comme le montrent ces exemples, il ne s'agit pas de réduire les manipulations effectuées à des fractionnements d'objets. Au contraire, dès le départ, les élèves ont pour tâche d'effectuer des partitions d'une pluralité d'objets.
2. **partager en parts égales des objets standards**
   Cette deuxième étape constitue un pas vers une abstraction plus grande. Il s'agit ici de choisir des objets prototypiques, des représentants. De cette manière, on fait le choix de se dégager des caractéristiques particulières des objets à fractionner pour ne se préoccuper que des techniques du fractionnement.
   Ainsi, la boule de plasticine remplacera avantageusement les partages d'objets pesants ou solides, tandis que des bâtonnets, par leur longueur, seront les représentants des partages de longueur. Les jetons, par leur caractère discret, permettront le partage de collections.
3. **partager en parts égales des représentations dessinées**
   Un pas supplémentaire vers l'abstraction est à nouveau franchi. Il s'agit cette fois d'opérer non plus sur des objets concrets (naturels ou prototypiques) mais sur des représentations dessinées. C'est un passage décisif qui ne peut être opéré en une seule fois. En effet, tous les types de manipulations effectuées précédemment sont représentés à l'aide de dessins : les segments de droite permettent de fractionner des longueurs mais aussi des durées, les figures géométriques permettent de fractionner des aires. Des ensembles d'objets peuvent également être représentés par des dessins.
4. **partager en parts égales des mesures d'objets en opérant sur des nombres**
   Dans ce cas, on ne fractionne plus des objets ou leur représentation mais leur mesure qui s'exprime à l'aide de nombres. Ces nombres s'écrivent avec

des chiffres, dont le symbolisme est arbitraire ; il n'y a aucune ressemblance avec les objets auxquels ils renvoient. « *On travaille à ce moment avec des symboles purs, c'est-à-dire dont la signification est entièrement conventionnelle* » (Rouche, 1998).

Les trois premières étapes sont plus spécifiquement réservées aux cycles 5/8 et 8/10 ; elles permettent aux élèves de rencontrer, dans des contextes diversifiés, la notion de fraction dans son statut « outil ». Dès la fin du cycle 8/10 et au cycle 10/12, la quatrième étape permet d'assurer le difficile passage du concret à l'abstrait (de la notion de « fraction-outil » à la notion de « fraction-objet d'étude »). On notera également que la mise en place de cette progression n'est pas purement linéaire. Au contraire, elle est faite d'allers et retours entre les différentes étapes.

Un aspect intéressant de cette progression est le déséquilibre entre le nombre d'étapes abordant le concept de fraction dans son statut d'outil et l'unique étape où le statut objet est privilégié.

Pour être complet et pour diversifier au maximum les occasions de rencontre des fractions, les activités de partage se caractériseront aussi par le nombre de parts prélevées ; ainsi, partager en deux ou en trois parts équivalentes, ce n'est pas la même chose. Les fractionnements peuvent aussi se révéler plus ou moins complexes selon les caractéristiques des objets (ou collections) à fractionner.
Ainsi, partager en deux une bandelette de papier ne pose pas de problème. Cela s'avère plus difficile quand la consigne impose de la partager en trois. Par ailleurs, les objets présentent parfois des axes de symétrie qui facilitent les activités de fractionnement. Il y a donc lieu de diversifier la progression proposée en la croisant avec le nombre de parts prélevées.

2. Quel statut faut-il donner aux activités proposées ?

Les activités présentées dans ce chapitre s'adressent aux enseignants du primaire comme à ceux du début de l'enseignement secondaire.
Au-delà de l'analyse des erreurs, il s'agit de proposer des situations d'apprentissage pour aider les élèves à surmonter les difficultés rencontrées.
La mise en place de celles-ci ne peut apporter que des solutions ponctuelles aux problèmes d'apprentissage si elles ne s'inscrivent pas dans un cadre global et cohérent de structuration des apprentissages. C'est la raison pour laquelle elles sont organisées sous la forme d'une progression didactique (voir section suivante).

Ce choix de présentation conduit à mettre davantage l'accent sur les apprentissages réalisés à l'école primaire (et non au début de l'enseignement secondaire). La plupart des activités proposées doivent ainsi être considérées comme autant de points de départ pour la mise en place de nouvelles compétences. Cela ne signifie pas évidemment qu'elles sont sans intérêt pour l'enseignant du secondaire. Pour faire face aux difficultés qui subsistent chez un grand nombre d'élèves, les situations proposées peuvent servir d'activités de re-médiation.

Que faut-il entendre par activité de re-médiation ?
On sait depuis longtemps qu'il ne sert à rien de faire répéter, à un élève qui a fait une erreur, le même type d'exercice. De telles pratiques conduisent l'élève, soit à des situations de blocages (en raison d'échecs répétés), soit à une recherche « effrénée » d'indices pas toujours pertinents pour produire, de manière aléatoire, la réponse attendue par le maître. L'analyse des productions d'élèves, développée au chapitre 2, fourmille d'exemples de ce type.
On peut, par contre, partir du principe que **l'erreur fait partie du processus d'apprentissage**. Dans ce cas, il paraît plus opportun, d'analyser finement les types d'erreurs produites par les élèves ... pour proposer de nouvelles situations d'apprentissage susceptibles de favoriser, chez l'élève, une prise de conscience du caractère erroné de ses connaissances.
Il faudra donc entendre le mot « re-médiation » comme une nouvelle médiation entre l'élève et le savoir. Cette conception est très proche de celle adoptée par R. Charnay (1996) de l'équipe ERMEL qui définit la remédiation comme « *un acte d'enseignement dont l'objectif est de permettre à l'élève de s'approprier des connaissances après qu'un premier enseignement ne lui ait pas permis de le faire, dans les formes attendues* ».

3. Quelle est la progression proposée pour structurer l'enseignement des rationnels ?

La progression présentée ci-dessous répond à un double souci : proposer des pistes de re-médiation à court terme (pour les régents en mathématiques) tout en privilégiant des pistes pour une action à plus long terme (l'inscription des activités dans un cadre global et structuré offre une perspective à moyen terme pour les instituteurs du degré supérieur de l'école primaire). Elle s'inspire largement des propositions formulées par Sacré & Stegen (2003). Ces derniers suggèrent d'organiser les différentes activités centrées sur la construction des rationnels autour de la progression suivante :

	Ecriture fractionnaire	**Ecriture décimale**	
Fraction « nombre mesure » • Carré magique pour faire 1 • Carte en trop	• Comparaison de fractions à l'unité • Mesurer les pièces d'un Tangram • Bande unité • Droite graduée		• *Sériation et comparaison de nombres à virgule*
	Construction d'une droite numérique		
Fraction opérateur • *Recettes* • *Le Puzzle (agrandissement)* • *Prix réduits*		• Reconstitution de droites graduées • Feuille A3 • Construction de nombres décimaux • Rôle du zéro dans la numération de position	• *Jeu de bataille avec des décimaux* • *Le tournoi des décimaux*

Au centre de la progression, on trouve deux colonnes intitulées : « écriture fractionnaire » et « écriture décimale ». La séquence d'activités « construction d'une droite numérique » est centrale ; elle permet d'assurer la jonction et l'équivalence entre les notations fractionnaires et décimales.
Dans le prolongement de cette séquence, on retrouve des activités plus spécifiques de positionnement sur une droite ou de comparaison de nombres décimaux ; elles ont pour objet de stabiliser les connaissances des élèves et de favoriser la prise en compte des nombres décimaux en tant qu'objet d'études (cf. activités « construction de nombres décimaux » et « rôle du zéro dans la numération de position »).

A la droite de la colonne « écriture décimale » on retrouve des exemples d'intitulés d'activité qui permettent de consolider cette approche de l'écriture.
Ces activités ne sont pas décrites ici mais sont placées sur le site internet de la recherche. D'autres propositions d'activités viendront progressivement les rejoindre.

A la gauche de la colonne « écriture fractionnaire », on retrouve une série d'activités privilégiant le développement du concept de fraction. La présence de cette colonne et le découpage des activités qui y sont reprises nécessitent quelques explications complémentaires.

Une progression didactique où l'on enseigne d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, cela fait quelques années qu'en France, des enseignants procèdent de la sorte (suite notamment aux travaux de Brousseau et de Douady) sans que les élèves conceptualisent mieux les décimaux. La raison en est simple : les élèves conceptualisent mal les décimaux parce qu'ils conceptualisent mal les fractions.

L'origine de cette mauvaise conceptualisation est sans doute liée à une conception trop étroite de la notion de fraction. Trop souvent, celle-ci se réduit à l'idée du fractionnement d'une unité. Ainsi, trois quarts est vu comme le partage d'une unité en 4 parts égales dont on en prélève trois.

Cette colonne se subdivise en deux parties qui renvoient aux deux aspects complémentaires de la notion de fraction : celui de nombre-mesure et celui d'opérateur fractionnaire. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point

La fraction comme nombre mesure

« *La fraction comme résultat d'une mesure apparaît souvent au travers de problèmes de partage dans lesquels l'unité doit être découpée en autant de parts égales qu'il y a de candidats* » (Maurin et Joshua, 1993).
Ainsi, par exemple, si trois tartelettes doivent être réparties entre 5 invités, on les partagera chacune en cinq parts égales (de manière à obtenir, pour chacune, des cinquièmes). Dans un second temps, ces cinquièmes sont répartis entre les 5 invités ; chacun en reçoit 3 (soit trois cinquièmes). Dans ce cas précis, 3/5 constitue une mesure de la part de chacun avec pour « unité », le cinquième d'unité.

Cet exemple illustre une approche non conventionnelle de la fraction « trois cinquièmes ». Contrairement à ce qui est souvent observé dans les classes, la notion de fraction « nombre-mesure » ne doit pas se construire uniquement sur des fractionnements d'unité mais bien également sur des collections d'objets prises comme unité. Brissiaud parle dans ce cas de « division partition d'une pluralité » ; démarche plus complexe que le fractionnement d'une unité, mais fondamentale dans la construction de la notion de fraction.

Au vu de ces exemples, la « fraction nombre mesure » trois cinquièmes peut donc être le résultat de deux opérations différentes :

- une tartelette partagée en 5 portions équivalentes dont on considère la partie formée par 3 de ces portions (fractionnement d'une unité) ;
- 3 tartelettes partagées entre 5 personnes dont chacune reçoit l'équivalent de trois cinquièmes (partition de la pluralité).

Pour Brissiaud, il est essentiel de ne pas limiter le sens de la « fraction nombre mesure » à celui d'un fractionnement d'une unité. Trois cinquièmes doivent aussi renvoyer à la division de trois par cinq. Dans cette perspective, la fraction devient un outil permettant de résoudre de façon satisfaisante des problèmes de partage d'entiers en n parts égales, que la division euclidienne ne parvient pas à résoudre sans qu'il y ait de reste. Comme le soulignent Maurin et Joshua (1993), « *pour partager 26 en 7 parts égales, la division euclidienne nous dit que chaque part doit comprendre 3 unités et qu'il reste 5 unités qui ne sont pas partagées. Les nombres entiers ne permettent pas de mieux faire. Si les nombres fractionnaires viennent au secours des nombres entiers, nous pourrons partager chaque unité restante en sept parts égales et, à l'issue du partage, chaque part sera alors composée de 3 unités et de 5/7 d'unité, ce qui s'écrit : 3 + 5/7* ».

On retiendra de cet exemple que les nombres fractionnaires permettent de définir une division exacte entre deux nombres entiers sans avoir à se préoccuper si le dividende est divisible ou non par le diviseur ; 5 : 3 peut alors s'écrire sous la forme de 5/3.

Pour Brissiaud, les pratiques didactiques rencontrées dans les classes ne favorisent pas la compréhension, par les élèves, de cette caractéristique de l'écriture fractionnaire. Si on demande à ces derniers d'inventer un problème habillant l'opération « 11 : 4 », il est vraisemblable que leurs propositions renverront à la partition d'une totalité et non d'une pluralité ; 4 objets d'un même prix valent 11 €, quelle est la valeur d'un objet ? Ses recherches montrent que jamais un élève ne proposera un problème du type : 11 personnes mangent chacune un quart de pizza. Quel est le nombre de pizzas nécessaires ? Les élèves ne savent pas que pour rechercher la partie entière de 11/4, il suffit de diviser 11 par 4. Il ne faut donc pas s'étonner, de constater que de nombreux élèves de fin de 6P soient incapables d'établir que 56 : 100 = 56/100.

La fraction opérateur
Pour Maurin et Joshua (1993), *« la notion de fraction opérateur apparaît comme la succession de deux opérations, l'une étant une multiplication et, l'autre, une division (au sens de division exacte). L'ordre dans lequel s'effectuent ces deux opérations n'ayant pas une incidence sur le résultat final, l'opérateur fractionnaire est un résumé de l'enchaînement de ces deux opérations. Mathématiquement, on dirait qu'il est le composé commutatif d'un opérateur multiplication et d'un opérateur division* ». Ainsi, par exemple, 2/3 de 12 = (12 : 3) × 2. Une bonne maîtrise de cet aspect des fractions facilite la résolution de problèmes de proportionnalité.

Les différentes activités liées à la fraction opérateur ne sont pas détaillées ici puisqu'elles sont reprises dans la brochure consacrées à l'enseignement de la proportionnalité.

4. Quelles sont les activités d'apprentissage présentées dans cette publication ?

La présentation des activités se fait au départ du même modèle de fiche[1] suivant :

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

TITRE

De quoi s'agit-il ?

Description, en quelques lignes, de l'activité proposée aux élèves

Enjeux :

Présentation des matières couvertes et des principales compétences visées

Comment s'y prendre ?

Cette rubrique comporte toutes les informations nécessaires pour permettre aux enseignants d'organiser et de planifier leur travail et celui de leurs élèves. Elle fait part également d'indications sur le déroulement de l'activité dans l'une ou l'autre classe expérimentale. Elle comprendra notamment les éléments suivants (donnés à titre indicatif) :

Mise en situation ;

Identification des tâches attendues des élèves ;

Que faire si les élèves ne rentrent pas dans le problème ?

Organisation et gestion de la phase de mise en commun ;

Identification de ce que les élèves doivent avoir retenu au terme de l'activité.

Quels sont les prolongements possibles ?

Proposition d'exemples d'autres situations-problèmes, plus ou moins difficiles que celle qui a fait l'objet de la fiche (généralisation d'une démarche, par exemple), des possibilités de variantes, des liens entre les compétences développées à l'occasion de cette activité et des apprentissages plus formalisés, des propositions d'items d'évaluation, ...
Mots-clés qui renvoient à la partie théorique de la brochure

Source(s) :

D'où est extraite l'activité.

[1] Ce canevas général sera évidemment adapté au contexte spécifique de chacune des activités.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

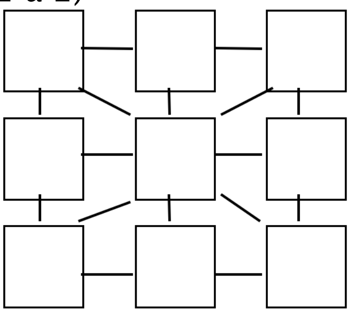
CARRE MAGIQUE POUR FAIRE 1

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'un jeu extrait de l'ouvrage de Sacré et Stegen (2001). Son but est d'obtenir un nombre fixé (dans ce cas, une unité), en alignant des cartons-nombres (dans ce cas, des fractions-nombres) et ce, de manière horizontale, verticale ou diagonale.

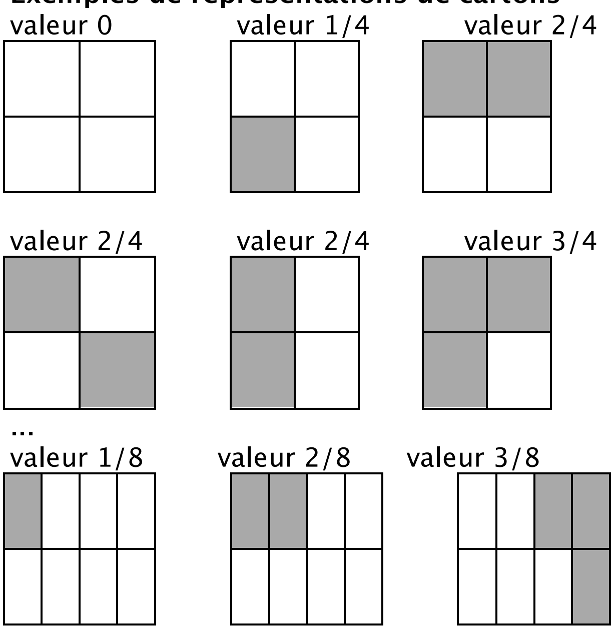
Le matériel suivant est nécessaire :

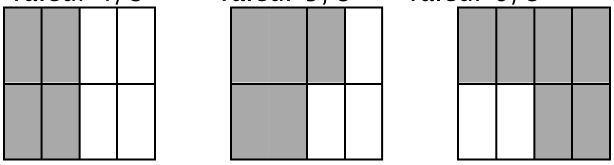
- Un plateau de jeu composé de 9 cases (réparties en trois rangées de trois cases reliées entre-elles 2 à 2)



- des cartons-nombres à positionner sur le plateau de jeu

Exemples de représentations de cartons





Exemples de séries de cartons-nombres :

- 10 cartons de valeur 0, 5 cartons de valeur 1/2, 6 cartons de valeur 1/4, 2 cartons de valeur 2/4 et 2 cartons de valeur 3/4.
- 10 cartons de valeur 0, 5 cartons de valeur 1/8, 2 cartons de valeur 2/8, 2 cartons de valeur 3/8, 2 cartons de valeur 4/8, 1 carton de valeur 5/8, 1 carton de valeur 6/8 et 1 carton de valeur 7/8.
- 10 cartons de valeur 0, 6 cartons de valeur 1/3, 3 cartons de valeur 2/3.
- 10 cartons de valeur 0, 7 cartons de valeur 1/6, 5 cartons de valeur 2/6, 4 cartons de valeur 3/6, 2 cartons de valeur 4/6 et un carton de valeur 5/6.
- 10 cartons de valeur 0, 4 cartons de valeur 1/5, 3 cartons de valeur 2/5, 2 cartons de valeur 3/5 et 1 carton de valeur 4/5.

Enjeux

Cette activité permet d'aborder de manière ludique les compétences suivantes :

- M45 : Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ;
- M51 : Etablir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et l'écriture d'une mesure ;
- M54 : Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Présenter aux élèves le règlement de jeu suivant (écrit sur une feuille laissée à leur disposition) :

> Ce jeu se joue à 4. Chacun des 4 joueurs reçoit trois cartes. Le premier dépose une de ses cartes sur une case du plan de jeu et prend une carte dans la pioche, de manière à en avoir toujours trois en main.
> Les joueurs suivants font de même.
> Lorsqu'un des joueurs a la possibilité, en déposant sa carte, de terminer un alignement de trois cartes dont la somme vaut une unité (à l'horizontale, à la verticale ou en diagonale), il empoche ces trois cartes et a gagné un pli. Il met celui-ci de côté, ces cartes ne peuvent être remises en jeu par la suite.
> Le jeu se poursuit jusqu'à épuisement de la pioche et jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de remporter de pli. Le gagnant est celui qui a réussi à former le plus de plis. Si, à un moment, les neuf cases du plan de jeu sont recouvertes et qu'il est impossible de vider une des lignes de ses cartes, on enlève les 9 cartes et on les replace dans la pioche.
> Le jeu se poursuit normalement (le joueur dont c'est le tour dépose une carte et ainsi de suite).

Identification des tâches attendues des élèves :

Cette activité permet aux élèves de travailler l'addition (puis la soustraction) des fractions dans un contexte semi-concret.
Cette activité s'inscrit pleinement dans le concept de dialectique outil-objet développé ci-avant.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Après quelques parties de jeu, une phase de mise en commun peut être organisée. A titre d'exemple, voici des questions qui peuvent servir de fil conducteur pour l'animation de ce moment important :

- Au niveau du ***contenu de l'activité*** : Comment a-t-on fait l'unité au cours de ce jeu ? (Rappel des différentes décompositions qui sont apparues et toutes les questions qui sont liées, notamment comment écrire ces décompositions ?)
- Au niveau des ***démarches utilisées*** : Comment s'est déroulée cette activité ? Quelles sont les difficultés rencontrées et comment les avez-vous surmontées ? En demandant aux élèves d'expliciter leurs stratégies de jeu, l'enseignant les contraint à prendre du recul. Ils ont ainsi l'opportunité de confronter leurs démarches à celles d'autrui et de s'apercevoir qu'elles sont plus ou moins efficaces, ou plus ou moins pertinentes que celles de leurs condisciples. L'enseignant peut aussi profiter de cette phase pour faire prendre conscience à certains élèves de l'intérêt d'abandonner une stratégie peu pertinente ou trop lourde à mettre en oeuvre.

Lors de la présentation des différentes décompositions qui permettent de faire 1, il peut être utile, dans un premier temps, d'afficher au tableau les différents cartons-nombres. Dans un second temps, l'enseignant demande aux élèves d'utiliser le symbolisme mathématique et de traduire les plis sous la forme d'une addition de fractions.
Un travail sur les fractions équivalentes peut également être développé à cette occasion.

Cette phase de réflexion sur les stratégies privilégiées peut faire rebondir l'activité et la faire évoluer avec l'introduction de variables didactiques plus complexes.
Ainsi, une des variantes proposées pour le jeu « Le carré magique pour faire 1 » (introduction de la possibilité de soustraire un nombre) peut naître d'une discussion sur les stratégies développées par les élèves.
L'analyse des stratégies des élèves fait souvent apparaître que certains adoptent une position que l'on peut qualifier de « négative » par rapport au jeu. Leur seul souci est de bloquer leurs adversaires en plaçant sur le plateau de jeu un carton-nombre qui, ajouté au carton déjà placé, donne une somme qui dépasse le nombre à atteindre pour emporter le pli.
Par exemple, le carton « 1/2 » est déjà placé sur un axe. Lorsque vient le tour d'un élève privilégiant une stratégie négative, ce dernier place sur le même axe un carton « 3/4 ». De cette manière, il empêche les autres d'arriver à 1 et

d'emporter le pli.
Lors de la phase de réflexion a posteriori, on peut proposer de combiner addition et soustraction. Ainsi, si une carte de valeur 3/4 et une carte de valeur 1/2 sont déjà alignées, le joueur suivant peut déposer une carte de valeur 1/4, pour compléter l'alignement. Il doit, pour emporter le pli, exprimer l'opération effectuée pour obtenir 1, "(3/4 + 1/2) - 1/4 = 1".

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Il importe que les élèves se détachent progressivement du contexte de jeu (dimension outil) pour en venir à travailler le concept de nombre rationnel (dimension objet d'étude). Cela passe notamment par un travail plus spécifique sur les différentes décompositions additives suivantes. Au cours de cette phase, les élèves travaillent directement les décompositions additives de fractions-nombres.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \ldots\ldots = 1$$

$$\frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{8} = 1$$

$$\frac{2}{8} + \ldots\ldots + \ldots\ldots = 1$$

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = 1$$

...

En cas de problèmes, les Es ont leurs cartons-nombres à disposition.

Quels sont les prolongements possibles ?

Comme cela est proposé ci-dessus, il est possible d'introduire une combinaison d'additions et de soustractions pour obtenir une unité.
Il est également possible de sélectionner d'autres suites de cartes pour des parties de plus en plus complexes :

Cartes représentant …	Partie 1	Partie 2	Partie 3	Partie 4
0 (carte blanche)	6	10	7	10
1/2	8	5	4	5
1/4	10	6	/	6
2/4	4	2	/	2
3/4	2	2	/	2
1/8	/	5	/	5
2/8	/	2	/	2
3/8	/	2	/	2
4/8	/	2	/	2
5/8	/	1	/	1
6/8	/	1	/	1
7/8	/	1	/	1
1/3	/	/	6	6
2/3	/	/	3	3
1/6	/	/	7	7
2/6	/	/	5	5
3/6	/	/	4	4
4/6	/	/	2	2
5/6	/	/	1	1
Total	30	39	39	67

Source(s) :

Stegen, P. & Sacré, A. (2001). **Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 8/10**. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

CARTE EN TROP

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une activité ludique assez proche du jeu du *Carré magique pour faire 1*.
Trois ou quatre joueurs peuvent jouer ensemble. Ce jeu est une adaptation d'un jeu de cartes traditionnel (appelé, selon les régions, "Le valet noir" ou "Le puant"). Les cartes sont distribuées entre les joueurs. Chacun essaie alors, avec les cartes dont il dispose, de former le plus possible de couples dont la somme est égale à l'unité. Chaque couple formé est déposé sur la table. Lorsque aucun joueur ne peut plus former l'unité avec les cartes qu'il a en mains, les joueurs piochent une carte dans le jeu de leur voisin de droite et essaient à nouveau de former un couple. Le dernier joueur qui garde une carte en main (la carte en trop, celle que l'on ne peut associer à aucune autre pour former l'unité) a perdu.

Enjeux

Tout comme le *Carré magique pour faire 1*, l'activité *Carte en trop* permet de développer le compétences suivantes :
- M45 : Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat ;
- M54 : Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.

Comment s'y prendre ?

Sur les cartes sont représentées des fractions. Avant le début du jeu, il convient de sélectionner les cartes soit selon les compétences numériques des élèves, soit selon les fractions que l'enseignant souhaite aborder.
Chaque colonne du tableau ci-dessous propose une sélection de cartes pour aborder une ou deux séries de fractions lors d'une partie. Plus on va vers la droite du tableau, plus les occasions de jouer en utilisant les fractions équivalentes sont nombreuses et plus les parties peuvent devenir complexes.

Cartes représentant …	Partie 1	Partie 2	Partie 3	Partie 4
0 (carte blanche)	1	1	1	1
1/2	8	6	6	3
1/4	6	4	/	3
2/4	8	4	/	3
3/4	6	4	/	3
1/8	/	2	/	2
2/8	/	4	/	3
3/8	/	2	/	2
4/8	/	4	/	3
5/8	/	2	/	2
6/8	/	4	/	3
7/8	/	2	/	2
1/3	/	/	4	3
2/3	/	/	4	3
1/6	/	/	2	2
2/6	/	/	4	3
3/6	/	/	6	3
4/6	/	/	4	3
5/6	/	/	2	2
Total	29	39	33	49

Mise en situation :

Présenter le jeu aux élèves au départ d'une fiche de jeu (voir *Carré magique pour faire 1*).
Trois ou quatre joueurs peuvent jouer ensemble. Ce jeu est une adaptation d'un jeu de cartes traditionnel (appelé, selon les régions, "Le valet noir" ou "Le puant").
Les cartes sont distribuées entre les joueurs. Chacun essaie alors, avec les cartes dont il dispose, de former le plus possible de couples dont la somme est égale à l'unité. Chaque couple formé est déposé sur la table. Lorsque aucun joueur ne peut plus former l'unité avec les cartes qu'il a en mains, les joueurs piochent une carte dans le jeu de leur voisin de droite et essaient à nouveau de former un couple.
Le dernier joueur qui garde une carte en main (la carte en trop, celle que l'on ne peut associer à aucune autre pour former l'unité) a perdu.

Identification des tâches attendues des élèves :

Voir *Carré magique pour faire 1*.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Voir *Carré magique pour faire 1*.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Voir *Carré magique pour faire 1*.

Source(s) :

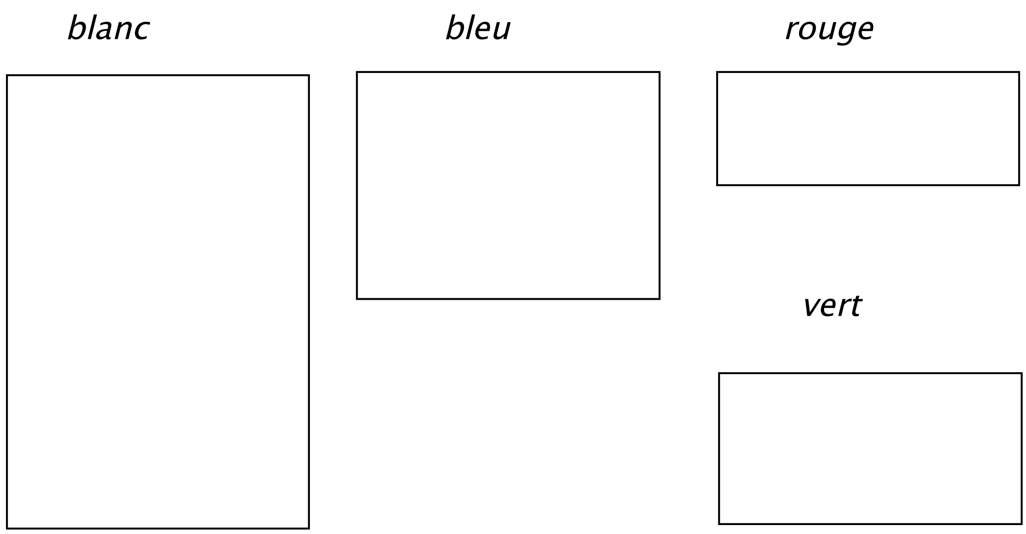
Stegen, P. & Sacré, A. (2002). **Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 8/10**. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

COMPARAISON DE FRACTIONS A L'UNITE

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une activité extraite de *Réseau Mathématique 5^{e}*. Elle permet d'aborder la comparaison et le classement de fractions au départ d'un matériel concret.
Ce dernier se compose d'une enveloppe contenant *1 carton blanc (de 4 cm sur 6), 4 cartons bleus (de 4 cm sur 3), 8 cartons rouges (de 4 cm sur 1,5) et 6 cartons verts (de 4 cm sur 2).*



A l'aide de ce matériel, les élèves vont devoir classer différentes fractions proposées par l'enseignant.

Enjeux

Cette activité permet de développer spécifiquement les compétences suivantes :
- M18 : Ecrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser ;
- M52 : Fractionner des objets en vue de les comparer.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Les enfants sont groupés par 2. Chaque groupe reçoit une enveloppe contenant le matériel décrit ci-avant.
L'enseignant écrit au tableau une série de fractions et il demande aux élèves de les sérier.
Les différentes fractions sont :
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{3}{4} - \frac{4}{4} - \frac{5}{3} - \frac{5}{4}$

Il précise que le matériel contenu dans les enveloppes peut les aider à réussir cette tâche.

Identification des tâches attendues des élèves :

Pour effectuer le classement, les élèves peuvent établir les relations qui existent entre les cartons de différentes couleurs.
Ainsi, le carton blanc vaut une unité (1) ; un carton bleu vaut $\frac{1}{2}$; un carton rouge, $\frac{1}{4}$ et un carton vert, $\frac{1}{3}$.
Au départ de ce constat, ils peuvent sérier les différentes fractions proposées.

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Pour faciliter la tâche des enfants, l'enseignant peut leur suggérer de réaliser un premier classement en trois groupes :
- les fractions plus petites que l'unité,
- les fractions égales à l'unité
- les fractions supérieures à l'unité.

Ce classement fait, ils peuvent, au sein de chacun des groupes, ordonner les fractions de la plus petite à la plus grande.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

La mise en commun porte sur les critères qui permettent de comparer les fractions à l'unité:
- les fractions inférieures à l'unité sont celles dont le numérateur est plus petit que le dénominateur;
- les fractions égales à l'unité sont celles dont le numérateur est égal au dénominateur;
- les fractions supérieures à l'unité sont celles dont le numérateur est plus grand que le dénominateur.

Il peut être intéressant de rappeler le principe de l'écriture fractionnaire (numérateur et dénominateur).

Source(s) :

Roegiers, X. (1991). ***Réseau mathématique 5***. Bruxelles : De Boeck-Wesmael.

Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

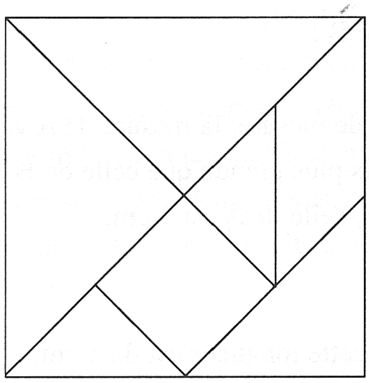
3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

MESURER LES PIECES D'UN TANGRAM

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une activité adaptée d'un ouvrage du CREM : *Les mathématiques de la maternelle à 18ans*.
Les élèves reçoivent un Tangram complet et les pièces (découpées) qui constituent celui-ci.

Exemple de Tangram



Au départ de ce matériel, les élèves vont devoir effectuer différentes tâches de mesure.

Enjeux

Les compétences spécifiques développées dans cette activité sont les suivantes :

- M18 : Ecrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser ;
- M52 : Fractionner des objets en vue de les comparer ;
- M54 : Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Les élèves sont répartis en trios. Chacun de ces trios, au départ du matériel décrit ci-avant, va mener trois recherches:

- la première consiste à mesurer les pièces du puzzle en utilisant la plus petite pièce (le petit triangle) pour unité,

- pour la deuxième, il s'agit de mesurer les pièces du puzzle avec la plus grande des pièces (le grand triangle) comme unité,
- pour la troisième, c'est le Tangram complet qui sert de référent pour la mesure des différentes pièces.

Identification des tâches attendues des élèves :

Cette activité de mesure – au départ d'étalons non conventionnels – permet la mise en œuvre de différentes tâches de résolution proches de celles développées dans l'activité *Comparaison de fractions à l'unité*.

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Si nécessaire, les enfants peuvent demander un nouveau jeu de pièces découpées pour faciliter leurs recherches. Ils peuvent également plier, tracer des repères, etc.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

La synthèse peut prendre la forme d'un tableau, de manière à mettre en évidence les relations entre les mesures réalisées avec différents étalons.

Pièce mesurée	à l'aide du petit triangle	à l'aide du grand triangle	à l'aide du Tangram complet
petit triangle	= 1 petit triangle	= 1/4 grand triangle	= 1/16 Tangram
triangle moyen	= 2 petits triangles	= 1/2 grand triangle	= 1/8 Tangram
grand triangle	= 4 petits triangles	= 1 grand triangle	= 1/4 Tangram
carré	= 2 petits triangles	= 1/2 grand triangle	= 1/8 Tangram
parallélogramme	= 2 petits triangles	= 1/2 grand triangle	= 1/8 Tangram

Il est particulièrement intéressant de comparer les mesures réalisées lors des deux premières recherches (avec le petit et avec le grand triangle). Cette comparaison faite, on peut demander aux enfants de dire, sans faire la manipulation, quelles seraient les mesures si on avait utilisé le triangle moyen comme étalon.

L'addition des mesures obtenues avec le Tangram complet permet de revoir les fractions équivalentes, mais sert également de preuve (si le résultat est différent de 1, c'est qu'il y a une erreur!).

Source(s) :

CREM. (1995). **Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans - Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques**. Nivelles : CREM asbl.
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

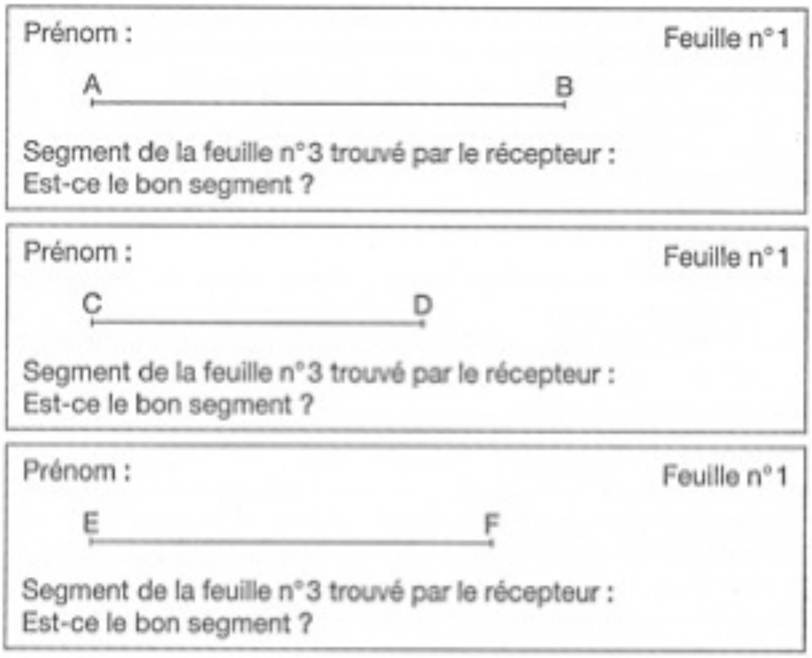
Bande unite

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une séquence adaptée de ERMEL CM1. Elle a pour but d'amener les enfants à utiliser des fractions élémentaires pour exprimer des mesures de longueur, pour construire des segments et pour comparer des longueurs.

Pour cette activité, le matériel suivant est nécessaire :

- une bande unité de 10 cm de long et d'1cm de large
- des feuilles n°1 sur lesquelles sont représentés chaque fois un segment différent (en réalité, trois segments aux dimensions précises : |AB|=25cm, |CD|=17,5cm, |EF|=21,25cm);



Prénom : Feuille n°1

A B

Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :
Est-ce le bon segment ?

Prénom : Feuille n°1

C D

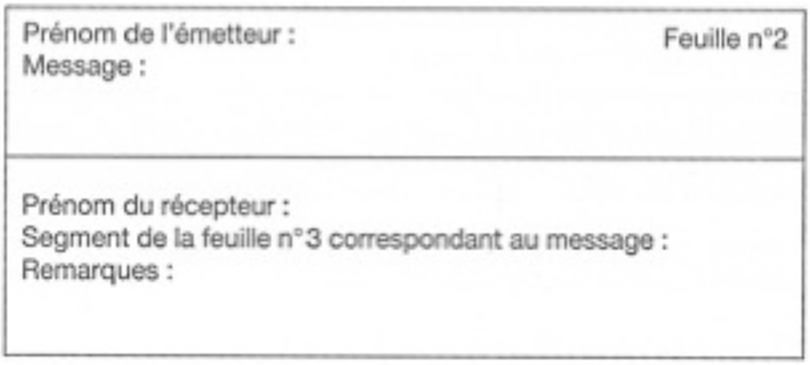
Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :
Est-ce le bon segment ?

Prénom : Feuille n°1

E F

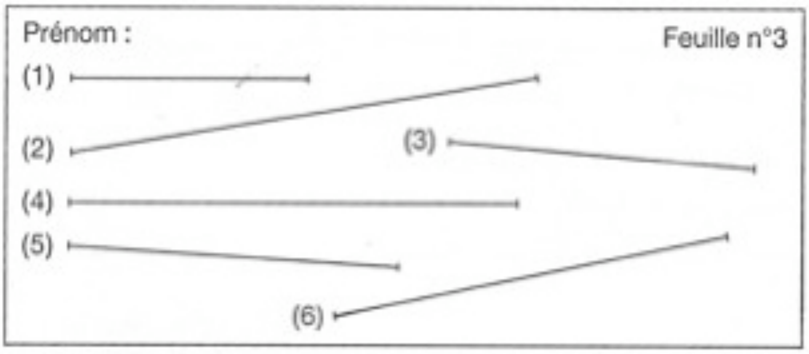
Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :
Est-ce le bon segment ?

- une feuille n°2 sur laquelle les Es devront écrire un message ;


Prénom de l'émetteur : Feuille n°2
Message :

Prénom du récepteur :
Segment de la feuille n°3 correspondant au message :
Remarques :

• Une feuille n°3 sur laquelle sont représentés 6 segments (les 3 cités précédemment et 3 autres de longueurs suivantes :12,5 cm, 16,25 cm et 23,75 cm) ;



Enjeux

Au niveau de l'enseignement des rationnels (domaine numérique), cette activité vise essentiellement à développer la compétence suivante :

• écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

De par le choix du contexte, elle vise également les compétences plus spécifiques liées au domaine des grandeurs :

• fractionner des objets en vue de les comparer ;
• additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Pour cette activité de communication, les élèves travaillent par deux.
Chaque groupe de deux élèves reçoit les éléments suivants :
• une bande unité de 10 cm sur 1,
• une des feuilles n° 1 illustrées ci-dessus (celle avec le segment [AB], ou celle avec [CD], ou celle avec [EF]) ;

- une feuille n° 2 pour y écrire son message.

Les lattes ne sont pas disponibles.

L'enseignant montre la feuille portant les segments numérotés de 1 à 6.
Il explique aux élèves que l'un de ces segments a la même longueur que celui qui figure sur la feuille n° 1 que chaque groupe a reçue.
Il demande à chaque groupe d'écrire un message permettant à ceux qui le recevront de trouver celui des 6 segments qui a la même longueur que celui qu'ils ont devant les yeux.

Puisque les enfants ne peuvent utiliser la latte pour mesurer leur segment, l'enseignant les invite à utiliser la bandelette qu'ils ont reçue comme unité, et à l'appeler bande-unité dans le message.

Identification des tâches attendues des élèves :

Les élèves mesurent le segment en reportant la bande unité. Pour obtenir plus de précision, certains pensent à la plier en deux, puis encore en deux, puis éventuellement encore en deux. Les mots moitié, demi, quart, utilisés dans les messages, sont les témoins de cette démarche.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Avant de procéder à une mise en commun, il convient de confronter les messages produits en les échangeant.
Les feuilles n° 2 sont échangées, chaque groupe devient récepteur d'un message. Les feuilles portant les 6 segments sont distribuées. Lorsque cela est possible, les enfants identifient le segment correspondant au message reçu.
Si cela n'est pas possible, ils écrivent leurs remarques concernant la clarté du message ou les difficultés qu'ils ont rencontrées dans l'identification du segment.

Chaque groupe récupère sa feuille n° 2 et complète sa feuille n° 1 en vérifiant si le message a permis au récepteur de trouver le bon segment.

Pour la mise en commun, l'enseignant reprend, pour chacun des trois segments, tous les messages produits. Il écrit, au tableau, les mesures données et les segments trouvés.
Les enfants expliquent leur démarche. Celle-ci est formalisée à l'aide de l'écriture fractionnaire suivante :

$[AB] = 2\ u + \frac{1}{2}\ u$ ou $[AB] = 5 \times \frac{1}{2}\ u = \frac{5}{2}\ u$

On vérifie que le segment [AB] a bien la même longueur que le segment (2), en les mesurant et en les superposant. On fait de même pour les deux autres segments.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

A la fin de l'activité, les découvertes sont synthétisées sous la forme:

1 unité

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dans une unité, il y a 2 demis, il y a 4 quarts, il y a 8 huitièmes.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Dans un demi, il y a 2 quarts, il y a 4 huitièmes.

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Dans un quart, il y a 2 huitièmes.

Quels sont les prolongements possibles ?

Une deuxième étape : utiliser des fractions pour mesurer et construire des segments

Les enfants travaillent seuls. Ils doivent, en utilisant la bande unité, mesurer les 6 segments de la feuille distribuée lors de l'étape précédente. Ils écrivent leurs résultats en utilisant les écritures fractionnaires.

L'enseignant procède à la mise en commun et écrit, segment par segment, les résultats obtenus.

Ces résultats sont vérifiés par les enfants, ce qui permet d'expliquer les erreurs, de mettre en évidence les différentes écritures obtenues pour un même segment.

Chacun reçoit alors une feuille avec une demi-droite d'origine O. A l'aide de la bande unité, les enfants vont devoir placer sur la demi-droite les points A, B et C au départ des données suivantes :

- $OA = 1\text{ u} + \frac{5}{4}\text{ u}$
- $OB = 2\text{ u} + \frac{2}{4}\text{ u}$
- $OC = \frac{5}{2}\text{ u} + \frac{1}{8}\text{ u}$

Cette étape permet à l'enseignant de vérifier et, le cas échéant, de corriger certaines procédures erronées.
Exemples :
Pour placer A, certains reportent une fois la bande unité et cinq fois un quart de la bande, d'autres reportent deux fois la bande et une fois un quart.
Pour placer B et C, tous les enfants ne repartent pas de l'origine, certains placent B un quart après A et C un huitième après B.

Lors de la mise en commun, les différentes procédures sont explicitées et des égalités sont formulées ; par exemple :

$1 \text{ u} + \frac{5}{4} \text{ u} = 2 \text{ u} + \frac{1}{4} \text{ u}.$

L'enseignant remet à chacun une feuille avec la correction ; les enfants peuvent ainsi vérifier s'ils ont bien placé les points A, B et C. Ils cherchent ensuite les longueurs AB, BC et AC.

Pour cette dernière recherche, certains enfants opèrent sur les mesures données, d'autres utilisent les points correctement placés pour mesurer les longueurs avec la bande unité.

Une troisième étape : comparer des longueurs

Les enfants travaillent par deux et ne disposent plus de la bande unité. Ils vont devoir opérer sur les écritures fractionnaires en se représentant mentalement les fractions données.

L'enseignant donne la mesure de 6 segments et demande aux enfants d'identifier, parmi ceux-ci, le segment le plus court, le segment le plus long et s'il y en a qui ont la même longueur.

$OA = 1 \text{ u} + \frac{5}{2} \text{ u}$	$OB = \frac{7}{2} \text{ u}$	$OC = 2 \text{ u} + \frac{1}{2} \text{ u} + \frac{1}{4} \text{ u}$
$OD = \frac{10}{4} \text{ u}$	$OE = 2 \text{ u} + \frac{7}{8} \text{ u}$	$OF = 1 \text{ u} + \frac{15}{8} \text{ u}$

Aux enfants qui éprouveraient de grandes difficultés, l'enseignant peut fournir une bande unité. A l'aide de ce matériel, ils choisissent soit de placer les points A, B, C, D, E et F sur une demi-droite d'origine O, soit de construire les 6 segments l'un en dessous de l'autre pour pouvoir les comparer

Lors de la mise en commun, les différentes réponses sont affichées au tableau et validées en plaçant les points sur une demi-droite.
L'enseignant note les égalités utilisées par les enfants et la manière dont ils les justifient.

Par exemple:

$1\ u + \frac{5}{2}\ u = \frac{7}{2}\ u$ car $1\ u = \frac{2}{2}\ u$

$1\ u + \frac{5}{2}\ u = 3\ u + \frac{1}{2}\ u$ car $\frac{5}{2}\ u = 2\ u + \frac{1}{2}\ u$

Source(s) :

ERMEL CM1 (1997). ***Apprentissages numériques et résolution de problèmes.*** paris : Hatier

Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

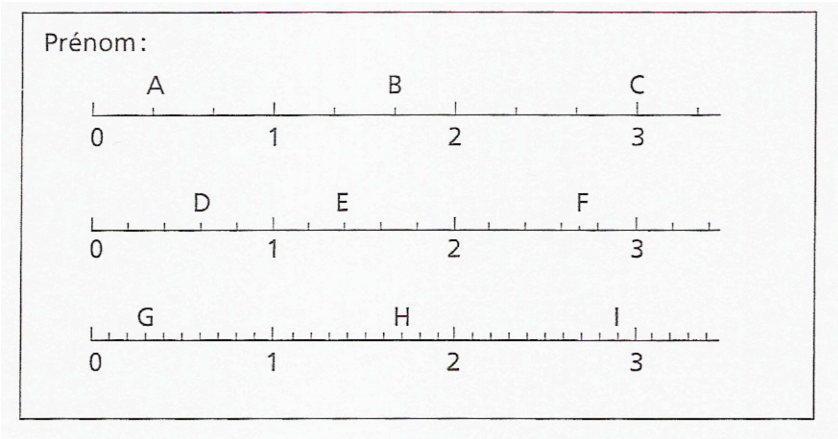
DROITE GRADUEE

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une séquence adaptée de ERMEL CM1. Elle a pour but d'amener les élèves à positionner des fractions sur des demi-droites numériques. Elle s'inscrit dans le prolongement de l'activité « bande unité ».

Pour cette activité, le matériel suivant est nécessaire :

- Pour chaque Es, une feuille A4 en paysage sur laquelle sont représentées trois demi-droites graduées, l'une en tiers, l'autre en cinquièmes et la dernière en dixièmes ;



- Des bandelettes de papiers de différentes longueurs, l'une d'entre-elles étant la bande unité de 6 cm de long.

Enjeux

Au niveau de l'enseignement des rationnels (domaine numérique), cette activité vise essentiellement à développer la compétence suivante :

- écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

De par le choix du contexte, elle vise également les compétences plus spécifiques liés au domaine des grandeurs :

- fractionner des objets en vue de les comparer ;

- additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Etape 1 : Se familiariser avec le matériel

Les élèves sont répartis en groupes de 3 ou 4 élèves. L'enseignant affiche au TN le matériel nécessaire pour cette première activité puis le distribue aux différents groupes.
Il s'agit des bandelettes étalons ainsi que du document contenant les 4 demi droites (agrandis à l'échelle 4).

L'enseignant explique aux élèves que ces demi-droites ont été graduées au moyen d'une des bandelette qu'il a distribuées.
La première tâche des élèves va être de retrouver la bandelette étalon qui a été utilisée.
Cette première tâche ne devrait pas être trop longue pour les élèves.
Une brève mise en commun aura pour but de :
- vérifier l'exactitude des réponses produites par les élèves ;
- valider les démarches utilisées par les élèves et leur faire prendre conscience que c'est bien le même étalon de départ qui a été utilisé pour graduer les trois demi-droites ;
- préciser que le trait 1 se situe à une unité du trait 0 et que le trait 0 s'appelle l'origine de la graduation. Si le trait 1 se situe à une unité de l'origine, le trait 2 se situe lui à deux unités de l'origine.

Etape 2 : Identifier à quelles fractions correspondent certains repères placés sur des demi-droites

Les élèves travaillent cette fois individuellement au départ du tableau contenant les trois demi-droites.
Le but de cette deuxième étape est d'identifier quelles fractions se cachent sous les différents repères identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I.

Dans un premier temps, il convient de demander à tous les élèves d'effectuer la première recherche au départ de la consigne suivante : « Rechercher toutes les fractions qui peuvent correspondre aux points A, B et C ».

Dans un second temps, après une phase de mise en commun, il sera possible de dissocier ou non les recherches proposées aux élèves (« Quelles sont les fractions qui correspondent d'une part aux points D, E et F et, d'autre part, aux points G, H et I ? »).

Identification des tâches attendues des élèves :

Les élèves doivent trouver plusieurs fractions ou plusieurs écritures des fractions. Ils procèdent par pliages et reports de la bande unité identifiée à l'étape précédente.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Les différentes réponses produites par les élèves sont recensées et explicitées. Elles font ensuite l'objet de discussions afin d'être validées. Au cours de cette phase, lorsque plusieurs écritures des abscisses ont été validées, l'enseignant les place sous le point correspondant et fait écrire les égalités.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Diverses équivalences d'écriture des fractions comme, par exemple :

- Sous le point B, il est possible d'écrire les fractions suivantes : $\frac{5}{3}$ ou $1 + \frac{2}{3}$ ou $2 - \frac{1}{3}$
- La discussion sur le point F pourra faire ressortir l'égalité suivante : $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ ou que la moitié d'un cinquième est un dixième .... ce qui conduira vers l'égalité suivante : $2 + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = 2 + \frac{7}{10} = \frac{27}{10}$

Quels sont les prolongements possibles ?

Une troisième étape : associer un point à un nombre

Les élèves travaillent de nouveau individuellement. Il leur est demandé cette fois de positionner des points sur une des trois graduations au départ de la consigne suivante : « Placez chacun des points sur la graduation à l'endroit où cela vous paraît le plus facile ».

Les nombres à placer sont les suivants :

J ; il correspond à $\frac{3}{2}$

K ; il correspond à $1 + \frac{4}{6}$

L ; il correspond à $\frac{13}{5}$

J ne pose guère de problème ; il peut se placer sur la troisième demi-droite et permet de dégager les égalités suivantes : $\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$ et $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

Une quatrième étape : trouver la distance entre deux points

Les élèves travaillent à nouveaux seuls ... ils disposent cette fois de leurs demi-droites mais pas des bandelettes afin d'identifier la valeur des distances AB, DE, DF, HI, GI.

la mise en commun de cette activité est l'occasion de valider de nouvelles égalités du type :
$AB = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

Un prolongement possible de cette dernière activité est de demander aux élèves de calculer les distances entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{4}$; 2 et $\frac{4}{3}$; 2 et $\frac{34}{10}$; $\frac{3}{5}$ et $\frac{18}{10}$.
La validation des réponses produites par les élèves se fait en plaçant les fractions sur les graduations.

Source(s) :

ERMEL CM1 (1997). ***Apprentissages numériques et résolution de problèmes.*** Paris : Hatier
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

CONSTRUCTION D'UNE DROITE NUMERIQUE

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une séquence construite en 5 étapes. Elle permet aux enfants de construire une droite graduée pour, ensuite, y situer des fractions décimales et des nombres décimaux.
Cette séquence est une adaptation d'une activité développée dans ERMEL CM2.

Enjeux

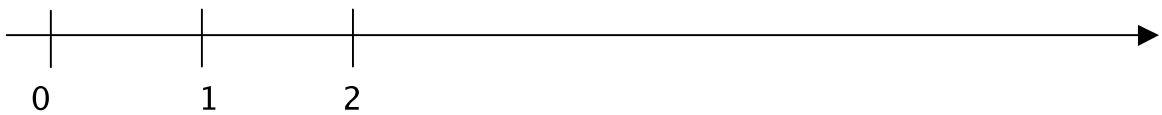
Les compétences spécifiques développées par cette séquence sont les suivantes :

- M2 : Dire, lire et écrire des nombres dans la numération de position en comprenant son principe ;
- M3 : Classer (situer, ordonner, comparer des naturels et des décimaux) ;
- M4 : Décomposer et recomposer des nombres naturels et des décimaux ;
- M12 : Dans un calcul, utiliser les décompositions appropriées des nombres ;
- M18 : Ecrire des nombres sous une forme adaptée en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Comment s'y prendre ?

Etape 1: Construire et utiliser une droite numérique

Une demi-droite est tracée au tableau. Les nombres 0, 1 et 2 y sont déjà placés. Les enfants, groupés par 2, reçoivent une bandelette de papier reprenant la même demi-droite. Ils doivent, sans utiliser de latte, y placer les traits correspondant aux nombres 3 et 4.



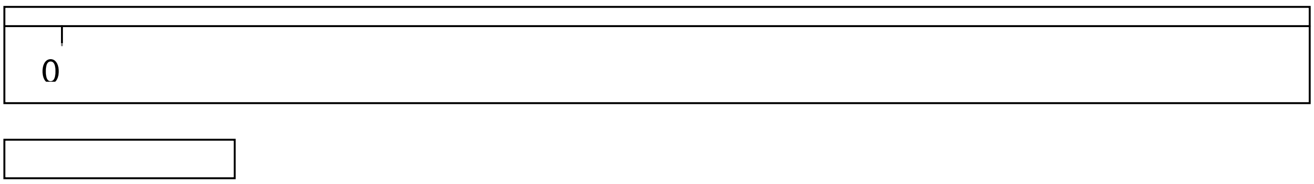
Une première mise en commun permet de comparer les résultats obtenus, de confronter les démarches utilisées par les groupes et de valider celles qui se révèlent appropriées (utilisation du compas, pliage de la bandelette, ...).

Cette situation oblige les élèves à recourir au pliage pour situer précisément les nombres sur la droite. Cette stratégie n'est pas habituelle pour eux, il est donc important de les laisser chercher sans intervenir pour (in)valider leurs stratégies.
Une difficulté à prendre en compte est la situation du 0 : il n'est pas placé au bord de la bandelette. Les élèves doivent tenir compte de cette contrainte pour effectuer le pliage qui définit la valeur de l'intervalle à reporter pour situer 3 et 4.
Le choix des nombres à placer sur la droite permet de différencier l'activité en l'adaptant aux compétences numériques des élèves. Certains peuvent ainsi placer les nombres 3 et 4, d'autres les nombres 6 et 7, ou 8 et 9, ou encore 4 et 9.

En prolongement, on peut proposer aux élèves de placer 3 et 4 sur la droite du tableau. Il sera nécessaire d'adopter une stratégie adaptée (il n'est pas question de plier le tableau pour reporter la valeur de l'intervalle!) et d'utiliser soit une bandelette-étalon, soit un compas.

Etape 2: Construire une droite numérique graduée en dixièmes d'unité

Les enfants sont groupés par 2. Chaque groupe reçoit une bandelette de 2 mètres sur 3 ou 4 cm (morceau de rouleau de calculatrice ou bandes de papier listing) sur laquelle le 0 est placé, ainsi qu'une bandelette-étalon de 5 cm sur 1.



L'enseignant précise que la longueur de la petite bande vaut un dixième de l'unité (il note $\frac{1}{10}$ au tableau), puis il demande aux enfants de situer 1 sur la bandelette.
La mise en commun fait apparaître que, pour placer le nombre 1, il s'agit de reporter 10 fois la petite bande dans le sens de la longueur car, dans une unité, il y a dix dixièmes.

Pour situer le nombre 1 sur la droite numérique, les enfants doivent reporter 10 fois la valeur de l'étalon (fixée à $\frac{1}{10}$).
Lors du lancement de l'activité, il importe de bien présenter le dixième dans le sens de la longueur, en l'affichant au tableau (pour éviter que des élèves ne reportent la largeur de la bandelette plutôt que sa longueur!).
Certains enfants confondent dixième et unité : ils ne reportent qu'une fois le dixième.
On relève également certaines stratégies plus économiques et expertes: des élèves reportent 5 fois le dixième, puis reportent une fois cet intervalle de $\frac{5}{10}$.

La mise en commun permet également de mathématiser les manipulations au travers d'écritures telles que $1 = 10 \text{ X } \frac{1}{10}$ ou $1 = (5 \text{ X } \frac{1}{10}) \text{ X } 2$.
Ces mathématisations servent de support au raisonnement des élèves et les aident à prendre conscience des possibilités de communication offertes par le formalisme mathématique.

En guise de prolongement, l'enseignant demande de placer les nombres 2 et 3. Il est alors intéressant d'observer le degré d'expertise des stratégies développées par les élèves :

- vont-ils à nouveau reporter 10 fois le dixième au départ du nombre 1 ?
- vont-ils directement reporter, par pliage, la mesure de l'écart entre 0 et 1 ?

Etape 3: Utiliser une droite numérique pour situer des fractions décimales (limitées aux dixièmes)

Le matériel est le même que pour les deux étapes précédentes. Les groupes de 2 enfants doivent cette fois placer sur la droite la fraction $\frac{8}{10}$, puis la fraction $\frac{25}{10}$.
Lors de la mise en commun, il leur sera demandé d'expliquer et justifier leurs démarches, puis de les mathématiser au travers des expressions telles que :

- $\frac{8}{10} = 1 - \frac{2}{10} = 8 \text{ X } \frac{1}{10}$
- $\frac{25}{10} = 2 + \frac{5}{10} = 3 - \frac{5}{10} = 25 \text{ X } \frac{1}{10}$.

Les élèves ont toujours à leur disposition la bandelette-étalon de un dixième. Pour placer $\frac{8}{10}$, ils ont donc le choix entre reporter 8 fois la bandelette à partir de 0 ou partir de 1 et soustraire 2 dixièmes.
Pour $\frac{25}{10}$, les stratégies sont plus diversifiées: les élèves procèdent en pliant en 2 l'intervalle entre 2 et 3, ou ils reportent 5 fois la bandelette $\frac{1}{10}$ entre 2 et 3.
Lors d'une expérimentation, un élève a reporté trois fois, par pliage, la valeur de l'intervalle compris entre 0 et $\frac{8}{10}$ et y a ajouté $\frac{1}{10}$. Il est important de pouvoir mathématiser ces stratégies sous la forme des expressions données ci-dessus.

Etape 4: Utiliser une droite numérique pour situer des fractions décimales (limitées aux centièmes)

Toujours avec le même matériel, les enfants ont à placer la fraction $\frac{135}{100}$.
Suite à cette recherche, ils précisent et comparent les démarches mises en oeuvre lors d'une mise en commun. Pour asseoir leurs découvertes et utiliser les instruments construits, les enfants placent ensuite les fractions $\frac{205}{100}$ et $\frac{40}{100}$.

Le matériel à disposition des élèves ne permet pas de placer sur la droite une fraction décimale exprimée en centièmes. Pour placer $\frac{135}{100}$, deux stratégies peuvent être observées :

- *après avoir constaté que $\frac{135}{100}$ se trouve au milieu de l'intervalle compris entre $\frac{13}{10}$ et $\frac{14}{10}$, repérer ces 2 fractions sur la droite puis partager l'intervalle compris entre elles en 2. Cette stratégie implique que l'enfant ait établi que $\frac{13}{10} = \frac{130}{100}$ et que $\frac{14}{10} = \frac{140}{100}$;*
- *plier en 2 la bandelette-étalon pour obtenir $\frac{5}{100}$ (après avoir constaté que $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$ et que $\frac{1}{10} : 2 = \frac{5}{100}$) puis reporter cette demi bandelette au départ de $\frac{13}{10}$ ou de $\frac{14}{10}$. Cette stratégie implique également que l'enfant ait établi que $\frac{13}{10} = \frac{130}{100}$ et que $\frac{14}{10} = \frac{140}{100}$.*

Cette façon de construire les centièmes est très importante car elle fait prendre conscience aux enfants des ruptures existant entre les entiers et les rationnels:
- *l'idée de succession : un nombre naturel a un successeur (le successeur de 7 est 8). Cette idée n'a pas de sens pour les rationnels; quel est le successeur de $\frac{21}{10}$? $\frac{22}{10}$ ou $\frac{211}{100}$?*
- *l'intercalation : entre deux naturels, il existe un nombre fini de naturels. Entre deux décimaux, il existe une infinité de décimaux.*

La mise en commun permettra de mathématiser les relations construites par les élèves durant la recherche:
- $1 = \frac{100}{100}$
- $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$
- $\frac{1}{10} : 2 = \frac{5}{100}$
- $\frac{135}{100} = 1 + \frac{35}{100} = \frac{13}{10} + \frac{5}{100} = \frac{14}{10} - \frac{5}{100} = \ldots$

- $\frac{35}{100} = \frac{4}{10} - \frac{5}{100}$

Le savoir construit durant cette quatrième étape peut être représenté par les trois bandelettes représentant l'unité, le $\frac{1}{10}$ et le $\frac{1}{100}$.

Dans une unité, il y a 10 dixièmes: $1 = \frac{10}{10}$.

Dans une unité, il y a 100 centièmes: $1 = \frac{100}{100}$.

Dans un dixième, il y a 10 centièmes: $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$.

A la fin de cette étape, les enfants sont invités à tracer sur leur droite graduée tous les dixièmes compris entre 0 et 2 et à graduer, à l'aide d'une latte, l'étalon $\frac{1}{10}$ en 10 centièmes. Les nombres 0, 1 et 2 sont à noter au crayon afin que le segment de droite construit puisse être, par la suite, utilisé comme référent pour placer ou comparer d'autres nombres.

Etape 5: Placer des nombres décimaux sur une droite numérique

Les élèves disposent de leur grande bande graduée en dixièmes et de la bandelette-étalon d'un dixième graduée en centièmes. Ils doivent placer 1,7 sur la grande bande. Il leur est ensuite demandé de placer 2,03 et 1,235.

En demandant aux enfants de placer des nombres décimaux sur la droite, l'objectif est qu'ils établissent des liens entre écriture fractionnaire et écriture décimale d'un rationnel. Ce passage peut être source d'erreurs: certains élèves peuvent interpréter 1,7 comme 1,07 (soit $1 + \frac{7}{100}$*), d'autres peuvent traduire 1,235 par 3,35 (soit* $1 + \frac{235}{100}$*).*

Pour placer ce dernier nombre, les élèves doivent adopter une stratégie semblable à celle utilisée lorsqu'il s'agissait de passer des dixièmes aux centièmes.

Ce travail permet de poursuivre la réflexion sur l'intercalation : $1{,}235 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$*. Pour trouver* $\frac{5}{1000}$*, on partage* $\frac{1}{100}$ *en 2.*

Lors de la mise en commun, la notation fractionnaire est utilisée pour donner du sens aux chiffres des écritures à virgule et pour traduire les relations entre millième et unité, entre centième et unité, entre dixième et unité.

$1{,}7 = 1 + \frac{7}{10}$

$$2{,}03 = 2 + \frac{3}{100}$$

$$1{,}235 = 1 + \frac{235}{1000} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$$

$$1 = \frac{1000}{1000} = \frac{100}{100}$$

Quels sont les prolongements possibles ?

Pour systématiser la mise en relation entre écriture fractionnaire et écriture décimale, les enfants complètent le tableau ci-dessous ligne par ligne. L'enseignant précise que la partie entière d'un nombre est le nombre d'unités contenues dans ce nombre et qu'une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, ...
Cette tâche est assez complexe.

Ecriture avec les mots unité, dixième, centième, millième	Ecriture à virgule	Somme de la partie entière et de la fraction décimale	Fraction décimale
	2,22		
Sept centièmes			
		$203 + \frac{8}{1000}$	
			$\frac{275}{100}$
	92,120		

La correction se fait ligne par ligne et devrait faire apparaître que, dans certaines cases, on peut avoir plusieurs réponses. L'institutionnalisation du savoir peut prendre la forme suivante, au terme de la séquence:

$$2{,}15 = 2 + \frac{15}{100} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} = \frac{215}{100}$$

2	15
partie entière de 2,15	partie décimale de 2,15

Source(s) :

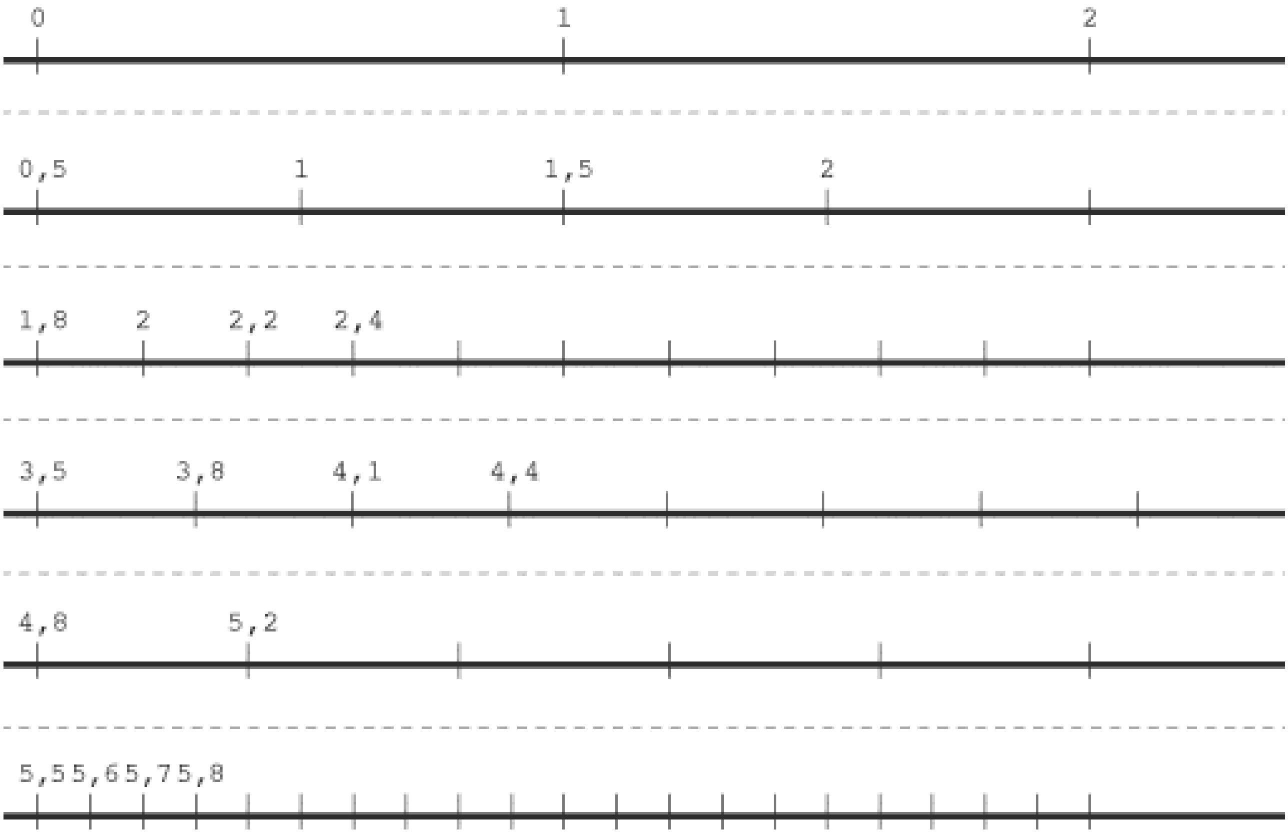
ERMEL. (1999) **Apprentissages numériques au CM2**, Paris : Hatier.
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

RECONSTITUTION DE DROITES GRADUEES

De quoi s'agit-il ?

Cette activité, extraite de Sacré & Stegen (2003), se situe dans le prolongement direct de *Construction d'une droite graduée*. Elle permet de vérifier que les élèves ont bien compris le principe de construction d'une droite numérique.
Au départ de différents segments, les élèves doivent reconstituer une seule droite numérique.



Enjeux

Les différentes compétences suivantes sont développées :
- M2 : Dire, lire et écrire des nombres dans la numération de position en comprenant son principe ;
- M3 : Classer (situer, ordonner, comparer des naturels et des décimaux) ;

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Les enfants, seuls ou par groupes de deux, reçoivent une feuille sur laquelle sont représentés six segments d'une partie de droite. Ils doivent découper puis assembler ces segments pour reconstituer la partie de droite correspondante.

Identification des tâches attendues des élèves :

Ces segments sont construits sur la base d'une même échelle, mais sont gradués de manière différente (de 1 en 1, de 0,5 en 0,5, de 0,2 en 0,2, etc.). Les élèves vont devoir trouver la valeur des intervalles de chacun des segments avant d'essayer de les assembler.
Les enfants travaillent comme ils le souhaitent, soit en éliminant les parties de segments superflues (plusieurs segments se chevauchent partiellement), soit en procédant par recouvrement. Ils peuvent aussi compléter les graduations avant de réaliser les raccords.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

La mise en commun doit permettre aux élèves de comparer les différentes droites produites. Celles-ci sont affichées au tableau.
Cette façon de procéder permet de vérifier rapidement la validité des productions des élèves. En cas d'erreur, chaque groupe explique comment il a procédé et l'enseignant veille à débuter par les productions erronées.

Quels sont les prolongements possibles ?

Une fois la portion de droite reconstituée, l'enseignant propose aux enfants de la sous-graduer de 0,1 en 0,1 et d'y placer, de la manière la plus précise possible, quelques nombres (par exemple, 1,3 – 4,6 – 5,9 – 6,88 – etc.).

> Suite au placement de ces nombres sur la droite, on peut remarquer qu'il est difficile d'être précis dans certains cas (par exemple, lorsqu'il s'agit de placer un nombre limité au centième sur une droite graduée en dixièmes). Si le besoin de précision se fait sentir, on peut recourir au segment de droite construit lors de l'activité "Construction d'une droite numérique".
> Par exemple, pour placer le plus précisément possible 6,88, les enfants doivent d'abord définir la valeur des deux bornes (encadrer un décimal par deux naturels), soit 6 et 7, avant d'utiliser leur étalon pour situer 6,88.

Source(s) :

Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

FEUILLE A3

De quoi s'agit-il ?

Durant cette activité (adaptée de ERMEL CM2), les élèves vont chercher, sans nécessairement recourir à une manipulation matérielle, comment obtenir, à partir d'une feuille A3 qui pèse 10 g, un morceau de papier qui pèse 1,4 g, un autre de 3,5 g et enfin un de 6,08 g.

Enjeux

Cette activité permet d'articuler, dans un contexte de mesure de masses, les écritures décimales et fractionnaires. Les compétences spécifiques suivantes sont développées à cette occasion :

- M2 : Dire, lire et écrire des nombres dans la numération de position en comprenant son principe ;
- M3 : Classer (situer, ordonner, comparer des naturels et des décimaux) ;
- M4 : Décomposer et recomposer des nombres naturels et des décimaux ;
- M12 : Dans un calcul, utiliser les décompositions appropriées des nombres ;
- M18 : Ecrire des nombres sous une forme adaptée en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Comment s'y prendre ?

Etape 1 : appropriation de la situation (établir une relation entre nombre de feuilles et masse correspondante)

L'enseignant présente une feuille aux élèves et leur indique qu'elle pèse 10 g. il note ces données au tableau puis soumet quelques questions aux élèves afin qu'ils puissent établir des relations entre nombre de feuilles et masse, entre partie de feuille et masse:

Exemple de questions :

- "Combien pèsent 125 feuilles A3?"
- "Combien faut-il de feuilles A3 pour avoir 50 g?"
- "Que faut-il faire pour obtenir 5 g?"

Une mise en forme des données en tableau permet de visualiser les relations lors d'une brève phase de mise en commun (voir document sur l'enseignement de la proportionnalité à la liaison primaire-secondaire).

Etape 2 : partage d'une feuille

Une fois les élèves familiarisés avec le matériel, le ***premier problème*** leur est posé: "Vous allez chercher un moyen d'obtenir un morceau de feuille qui pèse 1,4 g. Vous ne devez pas découper la feuille, il suffit de décrire la manière de procéder ou de l'expliquer par un schéma."

Les conditions matérielles de résolution sont très importantes. Il vaut mieux que l'enseignant note au tableau les questions destinées à établir la relation entre nombre de feuilles et masse, car leur résolution implique l'utilisation d'opérations mathématiques différentes.

Pour réaliser la recherche, les enfants sont répartis en groupes de 2 ou 3 et ne disposent ni de calculatrices, ni de règles graduées, ceci pour éviter qu'ils fassent des calculs, qu'ils soient tentés de mesurer et de tracer des rectangles sur la feuille.

Pour écrire leur solution ou faire un schéma, ils ont uniquement une feuille blanche, le but étant d'anticiper les actions qui permettront d'obtenir le morceau de feuille.

> Exemple de démarche adoptée par les enfants: ils doivent d'abord se demander comment obtenir 1 g, et donc imaginer de partager la feuille en 10. Ils doivent ensuite envisager les 4 dixièmes de gramme, et donc imaginer de partager un morceau qui pèse 1 g en 10 pour obtenir des dixièmes de gramme.

Lors de la mise en commun, les démarches des différents groupes sont présentées. Le constat principal est que, pour obtenir un dixième de gramme, il faut d'abord partager la feuille en 10 (pour obtenir 1 g), et puis partager à nouveau en 10 un des morceaux obtenus (soit partager la feuille de départ en 100 et obtenir ainsi $\frac{1}{10}$g).

Cela permet de mettre en évidence qu'1,4g c'est 1g + $\frac{4}{10}$g (et non, par exemple, 1g + $\frac{1}{4}$g).

Etape 3 : deux autres problèmes

Un **deuxième problème** peut alors être proposé aux enfants : la recherche d'un morceau de 4,5 g.

Ici, plusieurs procédures peuvent apparaître:

- rechercher 4 morceaux de 1 g, puis rechercher un morceau de 5 dixièmes de gramme (soit la moitié d'un morceau d'un gramme, soit 5 morceaux de 1 dixième de gramme),

- prendre la moitié de la feuille et en retirer la moitié d'un morceau d'un gramme,
- partager la feuille en 5, en prendre deux morceaux, puis la moitié d'un morceau d'un gramme, etc.

Dans le **troisième problème**, les enfants sont invités à chercher comment obtenir un morceau qui pèse 6,08 g.

L'une des deux méthodes suivantes est attendue:
- soit partager un morceau de 1 g en cent, pour obtenir des centièmes de gramme, et prendre 8 centièmes,
- soit partager un morceau d'un dixième de gramme en 10 et prendre 8 des 10 parties obtenues.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Au terme de l'activité, il peut être utile de visualiser les traces des manipulations effectuées. Pour ce faire, on peut utiliser une grande affiche sur laquelle on place :

- une feuille A3 qui pèse 10g ;
- une morceau A d'une feuille A3 partagée en 10 (ce morceau pèse 1g) ;
- un morceau B qui est en fait un morceau obtenu en partageant A en 10 parts équivalentes (ce morceau pèse $\frac{4}{10}$g) ;
- un morceau C obtenu après partage de B en 10 parts équivalentes ce morceau pèse $\frac{1}{10}$g) ;

Quels sont les prolongements possibles ?

Cette activité peut être prolongée par d'autres recherches : comment obtenir 3,25 g ; $\frac{3}{10}$g ; 125,47 g, ou encore comment obtenir un morceau qui pèse un millième de gramme.

Source(s) :

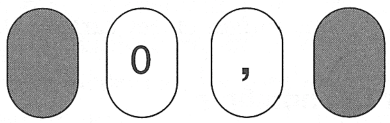
ERMEL. (1999) **Apprentissages numériques au CM2**, Paris : Hatier.
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S

CONSTRUCTION DE NOMBRES DECIMAUX ET ROLE DU ZERO DANS LA NUMERATION DE POSITION

De quoi s'agit-il ?

Cette activité, adaptée de Math en flèche CM2, nécessite le matériel suivant :
- des cartes rouges (représentant les chiffres de 1 à 9),
- des cartes portant le chiffre 0 ;
- des cartes portant une virgule.



Une vingtaine de cartes de chaque sorte est suffisante.

Au départ de ce matériel, les élèves vont travailler sur la numération de position.

Enjeux

Cette activité développe les compétences spécifiques suivantes :
- M2 : Dire, lire et écrire des nombres dans la numération de position en comprenant son principe ;
- M3 : Classer (situer, ordonner, comparer des naturels et des décimaux) ;

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Cette activité s'adresse à l'ensemble de la classe. Les élèves travaillent seuls ou en duos. L'enseignant tire un certain nombre de cartes (dans l'ordre de son choix) et les affiche au tableau. Il demande ensuite aux élèves de chercher le plus possible de nombres pouvant se cacher derrière cette combinaison de cartes.
Une brève phase de mise en commun permet à l'enseignant de s'assurer de la bonne compréhension des élèves.

Une deuxième activité : rendre un nombre plus grand ou plus petit

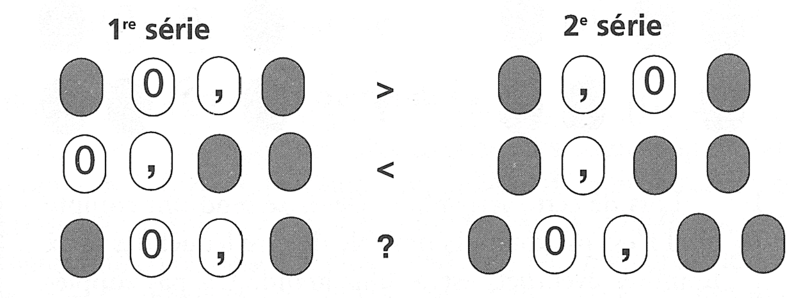
Au départ du même matériel, l'enseignant propose une ***deuxième activité*** : il tire une série de cartes, les affiche au tableau et demande aux enfants ce qu'il conviendrait de faire pour rendre le(s) nombre(s) caché(s) derrière ces cartes le(s) plus grand(s) ou le(s) plus petit(s) possible.

Pour répondre à ce défi, les élèves doivent modifier l'ordre des cartes et, notamment, être attentif à la place de la virgule et des 0.

> Si des enfants éprouvent des difficultés avec cette activité, on peut leur proposer d'imaginer un nombre se cachant derrière la combinaison de cartes affichées. Il est en effet plus facile de raisonner au départ d'un nombre "concret" que sur des cartons représentant ce nombre.

Une troisième activité : comparer des nombres

Une ***troisième activité*** consiste en la comparaison de deux nombres. L'enseignant tire deux séries de cartes et les affiche au tableau. Les enfants doivent alors identifier la série derrière laquelle pourrait se cacher le nombre le plus grand.



Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Au terme de cette activité, une phase de mise en commun doit déboucher sur les constats suivants :

- lorsqu'on écrit un nombre à virgule, les 0 occupant les rangs les plus à droite (dans la partie après la virgule) ne sont pas nécessaires ;
- les 0 occupant les rangs les plus à gauche d'un nombre entier ou de la partie entière d'un nombre à virgule ne sont pas nécessaires ;
- lorsqu'on écrit un nombre à virgule, la virgule ne peut pas occuper le rang le plus à gauche, elle doit toujours être précédée d'au

moins un chiffre; si elle occupe le rang le plus à droite, elle est inutile, on ne l'écrit pas ;
- un déplacement de la virgule d'un rang vers la gauche contribue à rendre le nombre 10X plus petit; à l'inverse, un déplacement de la virgule d'un rang vers la droite rend le nombre 10X plus grand ;
- il n'est pas toujours possible d'identifier la série de cartes derrière laquelle se cache le plus grand nombre.

Quels sont les prolongements possibles ?

Cette activité peut être prolongée par une réflexion sur le rôle du zéro dans la numération de position.
L'enseignant demande aux élèves de construire des nombres décimaux (limités au millième) au départ de quatre chiffres.
Exemple :
Si les quatre chiffres proposés sont 0-0-7-4, les nombres que l'on peut construire sont: 0 – 4 – 7 – 40 – 70 – 47 – 74 – 400 – 407 – 470 – 700 – 704 – 740 – 4007 – 4070 – 4700 – 7004 – 7040 – 7400 ; mais aussi : 0,4 – 0,7 – 0,04 – 0,07 – 0,47 – 0,74 – 0,047 – 0,074 – 0,407 – 0,704 – 4,7 – 4,07 – 4,007 – 7,4 – 7,04 – 7,004 – 40,7 – 40,07 – 70,4 – 70,04 – 400,7 – 700,4.

Il peut ensuite demander aux enfants de trouver, dans la liste, le plus grand nombre, ou le plus petit, de les classer tous du plus petit au plus grand.

Pour classer tous ces nombres, la droite des nombres peut se révéler utile si l'on invite les enfants à y situer les nombres de manière approximative.
La mise en commun qui suit l'activité est l'occasion de prolonger les constats établis précédemment. Elle permet notamment de faire apparaître la différence entre les entiers et les décimaux au niveau des 0 inutiles.

Source(s) :

Collections Diagonales. **Math en flèche CM2**. Paris : Nathan.
Sacré, A. & Stegen, P. (2003). ***Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 10/12***. Bruxelles : Labor.