Liaison primaire-secondaire

L'enseignement de la proportionnalité

Publication destinée aux instituteurs du dernier cycle de l'école primaire et aux professeurs de mathématiques du premier degré de l'enseignement secondaire

Christine Géron
Pierre Stegen
(Haute Ecole de la Ville de Liège)

Sabine Daro
(asbl Hypothèse
Haute Ecole ISELL)

« A l'initiative de la Ministre Présidente de la Communauté française, Madame Marie Arena, en charge de l'enseignement obligatoire et de promotion sociale »

Table des matières

Introduction

Le 1er décembre 2005, Madame Arena (Ministre-Présidente de la Communauté Française en charge de l'enseignement obligatoire) confiait à l'asbl Hypothèse, en partenariat avec trois départements pédagogiques liégeois (Haute Ecole Charlemagne, Haute Ecole de la Ville de Liège et Haute Ecole ISELL), la réalisation d'expériences pilotes visant à renforcer l'articulation entre l'enseignement fondamental et l'enseignement secondaire.

Cette volonté s'inscrivait dans le prolongement direct de la mise en place du ***Contrat pour l'école*** adopté en mai 2005 par le Gouvernement de la Communauté française.

> Dans ce contrat, parmi les mesures proposées pour atteindre la priorité 2 (« Conduire chaque jeune à la maîtrise des compétences de base »), on peut lire qu'il est prévu *« d'initier cinq expériences pilotes associant des enseignants venant des deux dernières années de l'enseignement primaire et du premier degré de l'enseignement secondaire et travaillant collectivement à la maîtrise par tous les élèves des Socles de compétences, renforçant ainsi l'articulation entre la seconde et la troisième étape du tronc commun. Ces expériences intègreront des situations diversifiées et, a minima, des écoles bénéficiaires de discriminations positives ainsi que des écoles secondaires organisant soit une 2e professionnelle, soit un premier degré de base ».*

Trois expériences pilotes ont été menées en région liégeoise[1] durant les années scolaires 2005/2006 et 2006/2007 : deux ont concerné l'articulation des apprentissages dans le domaine des mathématiques et la troisième expérience pilote s'est intéressée à la continuité des apprentissages en sciences.
En mathématiques, deux axes de travail ont été privilégiés ; initialement, un par groupe de travail. Le premier, ***l'enseignement des rationnels***, s'est en quelque sorte imposé de lui-même au vu de l'abondance d'éléments mettant en évidence la nécessité de s'interroger sur cet enseignement à la liaison primaire-secondaire. Le second, ***l'enseignement de la proportionnalité***, est davantage une demande des enseignants du secondaire.

Ces deux axes de travail constituent deux points d'entrée complémentaires dans une réflexion sur l'enseignement des mathématiques : d'une part, l'analyse des nombreuses difficultés rencontrées par les élèves pour construire le concept de rationnel permet d'aborder ***le rôle et le statut des erreurs dans la construction des concepts mathématiques*** (rationnels) et, d'autre part, la proportionnalité, pierre angulaire de la résolution de situations problèmes conduit, elle, à s'interroger sur le ***rôle et la place de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques***.

1. Qui sont les différents partenaires de l'espace de collaboration ?

Comme son titre l'indique, cette publication aborde l'enseignement de la proportionnalité lors de la transition primaire-secondaire. Elle synthétise les principaux enseignements d'un dispositif de recherche qui a associé, au sein d'un espace de collaboration, les différents partenaires suivants :

- des enseignants (instituteurs primaires et régents en mathématiques) et, d'une manière indirecte, leurs élèves ;

[1] Deux autres expériences pilotes ont été menées en région bruxelloise par l'équipe du Professeur B. Rey (ULB).

- des enseignants-chercheurs (maîtres-assitants des Hautes Ecoles : professeurs de sciences et de mathématiques, psycho-pédagogues) et leurs étudiants en formation.

Nous tenons tout particulièrement à remercier ici les enseignants qui ont consacré du temps et de l'énergie pour mener à bien cette recherche :

Les enseignants du groupe 1 :

Enseignant(e)s	**Ecoles secondaires/primaires**
Mme Furlan	Athénée communal Maurice Destenay
Mme Romy	Athénée Royal Liège Atlas
M. Legère	
Mme Grotaers	Ecole fondamentale communale de Basse-Wez (Liège)
Mme Hourlay	Ecole fondamentale communale de Bressoux – De Gaulle
Mme Lazaar	
Mme Closset	Ecole fondamentale communale de Bonne - Nouvelle (Liège)
Mme Minnoye	Ecole fondamentale communale de Morinval (Liège)
Mme Sacré	Ecole fondamentale communale Vieille Montagne (Liège)

Les enseignants du groupe 2 :

Enseignant(e)s	**Ecoles secondaires/primaires**
Mme Dheur	Collège Saint Louis
Mme Ghaye	
M. Olivier	
M. Talbot	Ecole primaire Saint Remacle - Liège
Mme Nikelmann	Ecole primaire Notre Dame de Lourdes – Liège
M. Bastin	
Mme Daigneux	Ecole primaire libre de Robermont
Mme Muller	
M. Dumont	
Mme Léonard	Ecole primaire Notre Dame du Rosaire – Bressoux
Mme Vandermeer	
Mme Paquay	Ecole primaire libre Saint Joseph - Grivegnée
Mme Closset	Ecole primaire libre St Odile- Grivegnée

A ces différents acteurs, il convient d'ajouter le ***Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*** (asbl CREM) et, tout particulièrement Nicolas Rouche, qui nous a fait partager ses réflexions à l'entame du travail sur l'enseignement de la proportionnalité.

Enfin, une mention spéciale doit être accordée à Laurie Peters et Jean-Sébastien Henniquiaux, étudiants du Département primaire de la Haute Ecole I.S.E.L.L., ainsi qu'à Benjamin Massuir et Damien Duchesne, étudiants du Département secondaire de la Haute Ecole I.S.E.L.L., qui ont choisi d'intégrer l'espace de collaboration dans le cadre de la réalisation de leur Travail de Fin d'Etudes (TFE).

- Laurie Peters et Jean-Sébastien Henniquiaux se sont intéressés aux difficultés rencontrées par les élèves pour repérer des problèmes qui donnent l'illusion de la proportionnalité ;
- Benjamin Massuir et Damien Duchesne ont davantage travaillé sur la proportionnalité dans un contexte géométrique.

2. A qui s'adresse cette publication ?

Née d'une demande de certains enseignants au vu des difficultés rencontrées par les élèves dans la résolution des problèmes de proportionnalité, cette publication ambitionne d'être un outil au service des enseignants du dernier cycle de l'école primaire ***et*** du premier cycle de l'enseignement secondaire.

> Il nous paraissait essentiel de concevoir une même publication pour cette période charnière de la scolarité. En effet, les différentes réunions que nous avons organisées au sein de l'espace de collaboration ont mis en évidence que ces deux niveaux d'enseignement ne connaissent guère les réalités de travail de l'une et de l'autre. Les enseignants du primaire ignorent ce que deviennent les compétences de leurs élèves une fois qu'ils sont à l'école secondaire et, d'autre part, les enseignants du secondaire ne connaissent guère les pratiques d'apprentissage développées à l'école primaire.

De nombreuses données de recherches en didactique des mathématiques mettent en évidence que beaucoup d'élèves débutent leur scolarité dans l'enseignement secondaire en éprouvant encore bien des difficultés avec le concept de proportionnalité. Ce phénomène n'est en rien spécifique à l'enseignement dispensé en Communauté française de Belgique ; on le retrouve également dans la plupart des systèmes éducatifs.

> Au niveau de la Communauté française de Belgique, il suffit de prendre connaissance des résultats observés lors des dispositifs d'évaluation externe menés par la Cellule de Pilotage de l'enseignement en Communauté française. On trouvera sur le site de la recherche (`http://www.hypo-these.be/spip/spip.php?article8`) des liens pointant vers les différentes pages concernant les analyses des épreuves d'évaluation externe de 2004 et de 1997 développées par la Cellule de Pilotage.

Il apparaît donc essentiel d'inscrire l'enseignement de la proportionnalité dans la durée ; cela nécessite d'établir et de développer des articulations entre l'enseignement dispensé en fin d'école fondamentale et au début du secondaire.
Une manière d'y arriver passe sans doute par l'utilisation de référents communs ; c'est l'hypothèse de travail que nous avons privilégiée et c'est l'objectif que nous poursuivons via cette publication.

> Ce choix est largement inspiré par l'exemple de nos voisins français. En France, cela fait quelques années maintenant qu'est publié, en marge des programmes de mathématiques spécifiques adressés aux enseignants du primaire et du collège, un document d'accompagnement intitulé : « Mathématiques : articulation Ecole/Collège ». Une telle initiative n'existe pas en Communauté française de Belgique. Certes, les Socles de compétences définissent des standards à maîtriser à 8, 12 et 14 ans mais, comme on le verra par la suite, ils ne fournissent pas suffisamment de repères pour guider efficacement la transition primaire/secondaire.

3. Que peut-on trouver dans cette publication ?

Le référent est structuré au départ des éléments de réponses apportés aux quatre questions suivantes :

- Comment se développent et se structurent les différents types de proportionnalité que les élèves rencontrent tout au long de leur scolarité primaire et au premier degré de l'enseignement secondaire ?
- Quelles sont les compétences spécifiques liées à la maîtrise de la proportionnalité ?
- Que sait-on des difficultés rencontrées par les élèves dans la construction de ces compétences ?
- Quels axes de progression didactique proposer en réponse aux difficultés observées chez les élèves ?

La prise en compte chronologique de ces quatre questions a constitué le fil conducteur du dispositif de recherche développé au sein de l'espace de collaboration.

La première étape de la recherche a été essentiellement théorique et conceptuelle. Il s'agissait de procéder à une analyse mathématique des concepts en jeu afin de définir des premières balises mathématiques et didactiques pour structurer l'enseignement de la proportionnalité.

> Cette porte d'entrée conceptuelle dans la recherche est importante. Comme le souligne L. Habran (1988), si la connaissance relativement superficielle d'une matière suffit souvent pour l'enseigner de manière directive, il faut une sérieuse maîtrise de cette matière pour conduire son apprentissage en provoquant l'initiative des élèves. Autrement dit, pas de réflexion sur la MANIERE d'enseigner sans une maîtrise suffisante de cette MATIERE.

- Les principaux éléments d'analyse sont détaillés dans un premier chapitre intitulé « ***La proportionnalité d'un point de vue mathématique et didactique lors de la liaison primaire-secondaire*** ».

Ce point d'entrée conceptuel a été ensuite complété par une prise en compte des élèves. Quelles sont les difficultés qu'ils rencontrent dans l'acquisition des compétences spécifiques à la résolution des problèmes de proportionnalité ? Cette analyse des difficultés rencontrées par les élèves a été mise en parallèle avec les pratiques d'enseignement habituelles des enseignants du primaire et du secondaire.
La confrontation de tous ces éléments d'analyse a débouché sur des propositions de situations d'apprentissage qui ont fait l'objet d'une expérimentation dans les classes.

Trois kits pédagogiques ont ainsi été construits. Ils s'inscrivent dans le droit prolongement des réflexions développées dans le chapitre précédent et abordent chacun une des trois facettes particulières de la proportionnalité que nous avons retenues :

- le premier concerne ***la proportionnalité simple*** (cf. chapitre 2) ;
- le deuxième, intitulé « ***Proportionnel ou non ?*** », envisage la possibilité de trouver des situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité (cf. chapitre 3) ;
- le dernier aborde enfin les problèmes de ***proportionnalité simple composée et de proportionnalité multiple*** (cf. chapitre 4).

Ces trois kits sont construits selon le même canevas, qui se décline en quatre parties :

- un rappel des éléments mathématiques spécifiquement utilisés dans le kit concerné ;
- des items d'évaluation diagnostique, de manière à cibler précisément les difficultés rencontrées par les élèves ;
- des propositions d'activités d'apprentissage, à choisir en fonction de l'objectif poursuivi. Celles-ci sont présentées selon le modèle de fiche repris ci-dessous ;
- des exercices d'application pour « aller plus loin » ou pour permettre aux enseignants de mettre en place de véritables procédures de remédiation.

Voici comment se structure une fiche d'activité[2] :

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58		M59

Titre

De quoi s'agit-il ?

Description, en quelques lignes, de l'activité proposée aux élèves

Enjeux :

Précision des matières couvertes et des compétences visées

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Relevé des connaissances supposées chez les élèves

Comment s'y prendre ?

Cette rubrique comporte toutes les informations nécessaires pour permettre aux enseignants d'organiser et de planifier leur travail et celui de leurs élèves. Elle fait part également d'indications sur le déroulement de l'activité dans l'une ou l'autre classe expérimentale. Elle comprendra notamment les éléments suivants (donnés à titre indicatif) :

Mise en situation :

Identification des tâches attendues des élèves :

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Quels sont les prolongements possibles ?

Proposition d'exemples d'autres situations-problèmes, plus ou moins difficiles que celle qui a fait l'objet de la fiche (généralisation d'une démarche, par exemple), de possibilités de variantes, de liens entre les compétences développées à l'occasion de cette activité et des apprentissages plus formalisés, de propositions d'items d'évaluation, ...

Pour en savoir plus :

Mention de mots-clés qui renvoient à la partie théorique de la brochure

Source(s) :

D'où est extraite l'activité

[2] Ce canevas général sera évidemment adapté au contexte spécifique de chacune des activités.

4. Comment mettre en œuvre les outils proposés ?

Cette publication ambitionne d'être un référent à destination d'un double public (instituteurs et régents en mathématiques). Les modalités de mise en oeuvre des propositions contenues dans cet ouvrage peuvent donc varier.
Toutefois, ces dernières ne doivent pas être considérées comme des « solutions clés sur porte » en réponse à des problèmes d'apprentissage ponctuels. Il s'agit davantage de présenter des outils qui doivent permettre aux enseignants de construire leurs propres solutions et de les intégrer à leurs pratiques habituelles d'enseignement-apprentissage.

Comment ? Le fil conducteur du travail présenté dans cette publication est l'articulation, dans une même démarche, de pratiques d'évaluation et d'apprentissage. L'accent est en effet mis sur la mise en place d'une évaluation diagnostique préalable à toute intervention didactique.
Le choix de privilégier une approche par l'analyse des difficultés rencontrées par les élèves pour résoudre des problèmes de proportionnalité ne résulte pas du hasard. En effet, l'analyse des erreurs des élèves est une démarche fondatrice de la recherche en didactique des mathématiques. Il ne s'agit pas d'attirer l'attention sur des niveaux de maîtrise insuffisants, mais bien d'essayer de diagnostiquer précisément la nature et l'origine de ces difficultés. Cette démarche est tout particulièrement intéressante pour les régents qui accueillent des populations d'élèves provenant d'écoles primaires différentes.

La structuration en quatre chapitres a pour but de fournir aux enseignants tous les éléments nécessaires à la mise en place, dans leur classe, de pratiques d'apprentissage fondées sur une analyse précise des compétences de leurs élèves dans le domaine de la proportionnalité. Des propositions concrètes d'activités à mener dans les classes sont détaillées dans les trois kits pédagogiques. Selon que l'on travaille au dernier cycle de l'école primaire ou au premier degré de l'enseignement secondaire, certaines variables didactiques (les nombres en jeu, le domaine mathématique concerné, …) devront être adaptées, comme le mentionne un tableau récapitulatif des spécificités de chacun des niveaux d'enseignement (cf. section 5 du chapitre 1, page 38).

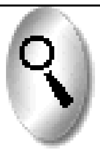
Cette façon de procéder répond à notre souci de vous présenter non pas des « solutions clés sur porte » en réponse aux problèmes d'apprentissage rencontrés mais bien des outils concrets pour construire vos solutions.
Par outil concret, que faut-il entendre ?

- ce sont des **outils ouverts** dont les paramètres sont explicités de manière à permettre aux enseignants de les modifier en fonction de leur contexte propre ou, le cas échéant, de les compléter pour faire face à de nouveaux besoins ;
- ils mettent l'accent sur ***l'observation et l'analyse des démarches mises en oeuvre par les élèves***. Ces deux aspects constituent une composante indispensable d'une évaluation formative de l'acquisition de compétences ;
- ils invitent les enseignants **à mettre en oeuvre une démarche réflexive sur leur pratique** et son contexte et à susciter chez leurs élèves la même prise de distance par rapport à leur fonctionnement (exploitation de démarches métacognitives).

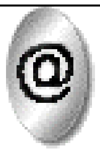
A vous de nous dire si nous avons atteint nos objectifs ! Le site collaboratif de la recherche liaison primaire-secondaire vous offre notamment la possibilité de réagir à nos propositions et de découvrir les commentaires ou les propositions formulées par d'autres collègues.

* *
* * *

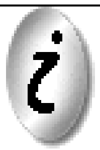
Nous avons essayé de rendre cette publication la plus lisible possible. Nous avons eu recours à différentes icônes qui sont déjà venues agrémenter la lecture des premières pages. Normalement, la lecture des éléments mis ainsi en évidence n'est pas nécessaire à la bonne compréhension de l'ensemble. Au lecteur de faire le choix de prendre le temps et de s'attarder davantage sur l'un ou l'autre domaine de réflexion particulier.



Pour ceux et celles qui veulent en savoir plus sur la réflexion développée.



Cette icône renvoie vers des éléments repris sur le site internet de la recherche : http://www.hypo-these.be/spip



Pour ceux ou celles qui veulent en savoir plus sur les choix portés par l'équipe de recherche.

Chapitre 1 : La proportionnalité d'un point de vue mathématique et didactique lors de la liaison primaire-secondaire

1. Pourquoi s'intéresser à la proportionnalité ?

Il est difficile et fastidieux de dresser un bilan exhaustif des résultats des nombreuses recherches menées ces vingt dernières années sur l'enseignement de la proportionnalité. Les quelques éléments et citations suivants devraient néanmoins planter le décor et permettre aux lecteurs d'appréhender diverses sources de difficultés et les mettre ainsi en relation (proportionnelle ?) avec des situations vécues au sein d'une classe ou lors d'activités de préparation.

1.1 La proportionnalité, une notion centrale et pourtant bien difficile à construire

La proportionnalité est une notion centrale ; une bonne maîtrise par les élèves des connaissances relatives à ce thème est fondamentale, aussi bien pour son usage dans la vie courante, son utilisation dans diverses disciplines ou dans le cadre professionnel que pour son importance dans divers domaines des mathématiques. La proportionnalité est donc partout et pourtant son apprentissage ne va pas de soi ... tout particulièrement au moment de la transition primaire-secondaire.

> « *Ce n'est un mystère pour personne, la proportionnalité est pour bien des élèves une notion qui pose problème. Or sa maîtrise est indispensable non seulement pour les mathématiques mais aussi pour la plupart des disciplines scolaires et autres formations professionnelles* » (Boisnard et al, 1994).

1.2 Des évolutions majeures dans l'enseignement de la proportionnalité

> « *Les idées concernant la manière d'enseigner la proportionnalité ont beaucoup évolué ces dernières années. Le terme même de proportionnalité est relativement récent. On ne parle presque plus de la règle de trois alors qu'elle occupait une place fondamentale il n'y a pas si longtemps* » (Boisnard et al, 1994).

Aujourd'hui, l'enseignement de la proportionnalité ne se réduit plus à une simple technique de calcul. On est passé à une autre conception de l'enseignement de la proportionnalité, moins centrée sur l'algorithme de résolution (comme par exemple la règle de trois), mais davantage axée sur la perception d'une relation particulière entre deux grandeurs, sur la structure des problèmes et sur la description que permet d'en faire le modèle des proportions[3].

> « *Le simple apprentissage mécanique de la règle de trois et de toutes les règles qui en découlent n'est pas suffisant pour donner une véritable connaissance de la proportionnalité, c'est-à-dire une bonne représentation du concept sous-jacent à tous les problèmes, toutes les méthodes de résolution et toutes les propriétés mathématiques qui composent cet apprentissage particulier que l'on désigne désormais sous le terme de proportionnalité* » (Boisnard et al, 1994).

[3] voir notamment l'analyse de la notion de proportion dans les programmes français élaborée dans les différents ouvrages de la collection ERMEL.

1.3 Une évolution qui s'inscrit dans le cadre plus général de l'apprentissage par résolution de problèmes

Cette évolution de la notion de proportionnalité doit également être mise en parallèle avec les acquis récents de la recherche en didactique des mathématiques. A l'heure actuelle, la résolution de problèmes devrait occuper une place centrale dans la conception de dispositifs d'enseignement. Toutefois, il ne s'agit plus comme par le passé, d'amener les élèves à résoudre des classes de problèmes – identifiées par une technique de résolution précise - mais bien de développer des situations qui posent problème aux élèves, qui les obligent à réfléchir, à remettre en cause leurs connaissances, à franchir un pas supplémentaire dans la compréhension du concept et ainsi à se construire de nouveaux outils…

Ce principe général prend tout son sens dans le champ de la construction de la notion de proportionnalité.

> « *L'idée de situation de proportionnalité devient centrale. On va s'intéresser à la manière dont l'élève traite ce type de situations ainsi qu'à la manière dont il se les représente et les différencie des situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité. On va s'interroger également sur les langages et les modèles mathématiques les mieux adaptés à chaque niveau de résolution* »(Boisnard et al, 1994).

1.4 Enseigner par situations-problèmes, plus facile à dire qu'à faire !

L'élève ne peut comprendre et construire la notion de proportionnalité qu'en résolvant des problèmes qui ne sont pas simplement des exercices d'application. Partir des situations et des problèmes, oui ... mais comment et qu'est-ce que cela implique au niveau de la (re)définition du travail des enseignants ?

> « *Aujourd'hui, on demande au maître d'enseigner en proposant d'abord aux élèves des problèmes dont la solution nécessite d'inventer des solutions originales que le maître cherche ensuite à faire évoluer pour aboutir à des éléments de savoirs nouveaux et à des solutions plus élaborées* » (Charnay, 2003).

Au niveau des discours officiels, il semble y avoir consensus sur une sorte de principe général sur la manière dont les compétences mathématiques se construisent. Mais entre des intentions générales et des pratiques quotidiennes, il y a souvent un fossé difficile à franchir car la mise en oeuvre de ce principe d'action pédagogique doit nécessairement s'accompagner d'une solide réflexion didactique préalable.

> « *Les enseignants et les formateurs sont, dans leur grande majorité, d'accord avec l'idée qu'il faut partir des situations et des problèmes (…) Malheureusement la mise en œuvre pratique d'une telle idée n'est pas seulement une affaire de choix pédagogique. Les travaux menés en didactique montrent bien qu'il faut des connaissances précises (sur les élèves, leurs conceptions, leurs difficultés, sur les problèmes eux-mêmes, sur les concepts qu'ils mettent en jeu, …). Surtout, il faut une démarche pour la mise au point des situations et des séquences particulières correspondant à l'apprentissage visé* » (Boisnard et al, 1994).

L'apprentissage par résolution de problèmes n'est pas qu'un principe général auquel il faut se référer ; c'est d'abord une démarche d'analyse et de prise en compte de la spécificité des situations et des problèmes pouvant conduire à un processus d'apprentissage et de compréhension. Cette démarche ne va pas de soi et est souvent laissée à l'initiative des enseignants. Les programmes et autres Socles de compétences évoquent bien le cadre général dans lequel doit s'inscrire l'enseignement des mathématiques mais ils sont par contre muets sur la démarche à adopter… comme si elle allait de soi. Or, tous les praticiens et les enseignants le savent : la réalité est toute autre.

1.5 La proportionnalité, un apprentissage qui s'inscrit dans la durée

Il a déjà été rapidement question des difficultés liées à l'enseignement de la proportionnalité lors de la transition primaire-secondaire. En fait, il n'est sans doute pas faux d'affirmer que la proportionnalité traverse pratiquement toute la scolarité obligatoire.

> « *Le fait que toutes les situations de proportionnalité, quels que soient leurs contextes, puissent être modélisées par un seul type de fonctions numériques de la variable réelle, la fonction linéaire, est mis en évidence en classe de troisième où ce type de fonctions est étudié et intégré au type des fonctions affines, inaugurant ainsi l'étude de la notion de fonction qui est poursuivie par la suite, notamment dans l'enseignement de l'analyse. Cependant, dès l'école primaire, l'étude de telles situations est abordée, en mettant en œuvre de manière moins formelle, moins économique mais également moins abstraite certains aspects de ce modèle mathématique* » (« Articulation Ecole-Collège »).

La fonction linéaire ne fait l'objet d'une première étude qu'en classe de troisième alors que le travail sur la proportionnalité commence très tôt dans le primaire. Certains auteurs n'hésitent pas à établir que la première rencontre des élèves avec ce concept se situe lors de la découverte des structures multiplicatives (cycles 5/8).

2. Que disent les documents officiels ?

2.1 L'enseignement de la proportionnalité dans les Socles de compétences

Les Socles de compétences ne donnent guère d'informations sur les étapes d'une gradation de l'apprentissage de la proportionnalité. Il est vrai qu'il n'entre pas dans les objectifs d'un tel document de définir des axes de progression curriculaire.
On note toutefois que la proportionnalité apparaît de **manière explicite** dans la section qui définit les compétences relatives aux grandeurs. Dans l'introduction de cette section, on peut en effet lire ceci : « *La proportionnalité est travaillée à partir d'exemples de la vie quotidienne. On construit des tableaux et des graphiques qui montrent des relations entre les grandeurs* ».

Cette affirmation se retrouve traduite en compétences dans le tableau suivant[4]:

Tableau 1 : 3.3.2. Opérer, fractionner des grandeurs

		8 ans	12 ans	14 ans
M55	Calculer des pourcentages		C	E
M56	Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.	↗	C	E
M57	Dans une situation de proportionnalité directe, compléter, construire, exploiter un tableau qui met en relation deux grandeurs.		C Compléter uniquement	C
M58	Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.		↗	C
M59	Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.		↗	C

Les compétences mises en évidence sont celles qui semblent directement et explicitement liées à la notion de proportionnalité. On pourra ainsi établir qu'au sortir de l'école primaire, les élèves doivent être capables de :

- calculer des pourcentages ;
- résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe ;
- **compléter** (pas construire ni exploiter) un tableau qui met en relation deux grandeurs dans une situation de proportionnalité directe.

A ce stade de la réflexion, une première remarque s'impose : si, dans l'introduction du document de référence, il est clairement fait mention d'une construction de tableaux et de graphiques, au niveau de la définition des compétences, on ne parle plus que de représentations à l'aide de tableaux ; les graphiques semblent avoir disparus.

Assez curieusement, on note également que la compétence « *reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres* » semble réservée au seul enseignement secondaire (du moins au niveau de la certification). Comme on le verra par la suite, cela peut sembler étonnant au vu des difficultés rencontrées par les enseignants du secondaire confrontés à des élèves chez lesquels l'illusion de la linéarité est bien ancrée.

[4] Il est repris dans la rubrique « Opérer et fractionner » soit une des deux sections du domaine des Grandeurs, l'autre étant « Comparer et mesurer ».

Les compétences liées à la proportionnalité sont explicitement reprises dans le champ des grandeurs. Toutefois, comme cela a été dit précédemment, cette notion est assez centrale et il serait réducteur de la limiter à ce seul ensemble de compétences.

On retrouve aussi la proportionnalité, mais de manière implicite cette fois, dans le développement d'autres compétences en mathématiques. Ainsi, au niveau du **Traitement des données**, il est précisé que les élèves doivent apprendre à « *interpréter, comparer des tableaux, des arbres, des graphiques et d'en construire pour clarifier une situation ou éclairer une recherche. Le calcul des pourcentages, des moyennes, d'effectifs et de fréquences sont des outils pour répondre à ces questions. Le traitement de certaines situations prépare la notion de fonction* ». Les compétences correspondantes sont, pour la plupart, à certifier en secondaire.

De même, comme le souligne Ph. Rome[5], la proportionnalité ne se trouve-t-elle pas de manière encore plus implicite dans le développement des compétences reprises dans les tableaux ci-dessous ?

Tableau 2 : 3.1.2. Organiser les nombres par familles

		8 ans	12 ans	14 ans
M7	Relever des régularités dans des suites de nombres.	↗	↗	C

Tableau 3 : 3.2.3. Dégager des régularités, des propriétés, argumenter (Les solides et figures)

		8 ans	12 ans	14 ans
M40	Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.	↗	C En s'appuyant sur des quadrillages.	C En s'appuyant sur les propriétés de **proportionnalité** et de parallélisme.

La proportionnalité est présente, de manière plus ou moins explicite, dans trois domaines de compétences mathématiques définis par les Socles de compétences. Une telle dispersion ne facilite guère son appréhension. A cet égard, il serait sans doute utile de disposer de documents plus précis s'adressant de manière spécifique aux enseignants du dernier cycle du primaire et du premier cycle du secondaire.

2.2 L'enseignement de la proportionnalité dans les documents officiels français

En France, à côté des différents programmes d'enseignement des mathématiques pour l'école primaire et le collège, le législateur a prévu des documents d'accompagnement « Articulation Ecole-Collège ». Ces documents ont pour but de préciser, pour les enseignants du dernier cycle de l'école élémentaire et pour ceux du collège, les aspects les plus significatifs pour aider à une bonne articulation entre ces deux niveaux d'enseignement.

[5] dans Pratiques d'écoles, 4 (2007).

Dans le document introductif « Articulation Ecole-Collège », on peut lire ceci :
« *Le document d'application associé aux nouveaux programmes de 2002 précise les contenus travaillés au cycle 3 et en sixième*[6]*, en particulier quant aux niveaux d'appropriation attendus pour les notions travaillées à ces deux étapes de la scolarité. Le programme de sixième peut donner l'impression que rien de vraiment nouveau n'y est enseigné. En réalité, les notions communes aux programmes de l'école primaire et du début du collège ne sont pas envisagées avec les mêmes objectifs : certaines en cours de construction au cycle 3, sont approfondies et consolidées en sixième ; d'autres, comme la proportionnalité, font l'objet d'une première approche au cycle 3 dans le cadre de la résolution de problèmes et sont ensuite progressivement formalisées et généralisées tout au long du collège* ».

Dans la progression proposée par le document d'accompagnement relatif à l'enseignement de la proportionnalité, nous avons retenu les éléments suivants[7] :

2.2.1 Varier les cadres et les contextes

La proportionnalité peut être envisagée dans trois cadres différents, qui souvent peuvent être mis en relation : le cadre des **grandeurs**, le cadre **numérique** (dans lequel on s'intéresse uniquement aux relations entre nombres) et le cadre **graphique** (dans lequel on représente la relation entre les grandeurs ou entre les nombres dans un système d'axes gradués).

Dans le cadre des grandeurs, la proportionnalité peut être mise en évidence de plusieurs manières différentes qui dépendent notamment des contextes utilisés :

- dans certains cas, la proportionnalité a un caractère arbitraire (par exemple, le prix peut être décidé comme étant ou non proportionnel à la masse);
- dans d'autres cas, la reconnaissance d'une relation de proportionnalité entre grandeurs relève d'une expérimentation (en physique par exemple, pour une vitesse constante donnée d'un mobile, l'espace parcouru est proportionnel au temps);
- dans le contexte de la géométrie et de la mesure, la mise en évidence de la proportionnalité relève d'une preuve formelle (démonstration), qui est ou non à la portée des élèves (comme dans le théorème de Thalès par exemple dont la démonstration n'est abordée qu'en 3e secondaire);
- …

Il est important que les élèves soient confrontés à des situations relevant de ces différentes catégories, dans des contextes variés, notamment en exploitant des situations empruntées à d'autres disciplines ou à des questions de société.

2.2.2 Étendre progressivement à d'autres types de nombres

Les étapes d'un enseignement de la proportionnalité doivent tenir compte de l'évolution du domaine numérique disponible pour les élèves : **naturels**, **entiers**, puis nombres **décimaux**, puis nombres **rationnels** (et quelques nombres **réels**) pour ce qui concerne la scolarité obligatoire. Un rapport 2 sera en effet plus facilement appréhendable par les élèves qu'un rapport $\frac{5}{4}$ par exemple.

---

[6] Il s'agit donc ici de l'équivalent de notre cycle 10/12 ans (cycle 3) et de la première année de l'enseignement secondaire (sixième).

[7] Nous ne présenterons ici que les points principaux développés dans ce document. Ceux-ci seront repris et détaillés dans la section 3 de ce chapitre.

2.2.3 Diversifier la nature des questions posées

Les élèves peuvent être confrontés à différents types de questions :
- reconnaître, à partir d'une série de données, si l'hypothèse de proportionnalité peut être formulée ou non ;
- rechercher une ou plusieurs données manquantes dans une situation de proportionnalité (problème de recherche de quatrième proportionnelle) ;
- comparer des proportions (par exemple des mélanges : tel mélange eau-sucre est-il plus ou moins sucré que tel autre ?) ;
- passer du cadre des grandeurs ou du cadre numérique au cadre graphique et inversement.

2.2.4 Faire varier les procédures de résolution mobilisées par les élèves

Toutes les procédures de résolution utilisables peuvent être reliées à des propriétés de la fonction linéaire qui sont d'abord utilisées de façon implicite :

- la propriété d'additivité ($f(x+y)=f(x)+f(y)$),
- la propriété d'homogénéité ($f(kx)=kf(x)$),
- la combinaison linéaire ($f(kx+ly)=kf(x)+lf(y)$),
- le coefficient de proportionnalité,
- l'égalité de rapports,
- l'égalité des produits en croix et
- la représentation graphique.

Celles-ci seront reprises par la suite (cf. section 3 du présent chapitre).

2.3 En conclusion : une proposition pour la Communauté française de Belgique

Un document similaire à celui de nos voisins français n'existe pas encore en Communauté française de Belgique et sa réalisation pourrait constituer dans le cadre de l'enseignement de la proportionnalité, un exemple d'outil favorisant la transition primaire-secondaire.

C'est l'objectif poursuivi via la diffusion de ce document.

Néanmoins, au delà de la précision et de l'explicitation des différences rencontrées dans les deux niveaux d'enseignement, il nous paraît indispensable de proposer également aux enseignants des exemples concrets d'activités à mener en classe pour travailler l'une ou l'autre facette de la proportionnalité. Celles-ci sont présentées dans les chapitres 2, 3 et 4 sous forme de fiches qui développent souvent des variantes à apporter aux activités pour les adapter au mieux aux besoins et au niveau de compétences attendues des élèves.

Plus précisément, cette publication est structurée de la manière suivante :
- le présent chapitre reprend les balises théoriques, tant mathématiques que didactiques, qui ont guidé notre réflexion. « Pourquoi s'intéresser à l'enseignement de la proportionnalité ? », « Quels éléments prendre en considération pour définir un cadre conceptuel pour l'enseignement de la proportionnalité à la liaison primaire-secondaire ? », sont des questions pour lesquelles nous apportons des éléments de réponse au travers notamment d'une

proposition de progression didactique pour l'apprentissage de la proportionnalité (cf. §5).

- Les chapitres 2, 3 et 4 constituent la partie pratique de cette réflexion sur l'enseignement de la proportionnalité. Trois kits pédagogiques y sont présentés selon un même canevas composé de quatre parties qui seront détaillées dans la section 5.1 de ce chapitre (cf. page 35).
  Chacun de ces trois kits pédagogiques est consacré à une des trois facettes de la proportionnalité que nous avons retenues :

  - Le premier kit pédagogique proposé aux enseignants constitue le chapitre 2 de cette brochure. Il est entièrement consacré à la proportionnalité simple, la plus fréquemment rencontrée dans le primaire et le secondaire.

  - Le deuxième kit pédagogique concerne des problèmes dont les grandeurs ne sont pas toujours liées par une relation de proportionnalité (cf. Chapitre 3). L'objectif est de confronter les élèves à différents types de problèmes pour susciter une prise de conscience de leur part : le modèle multiplicatif ne convient pas toujours !

  - Le dernier kit concerne les problèmes de proportionnalité simple composée et de proportionnalité multiple (cf. Chapitre 4). Nous les avons regroupés au sein du même kit parce que leurs différences n'émergent clairement que lorsqu'on les compare : ils font intervenir trois grandeurs, l'une étant proportionnelle aux deux autres, et c'est la relation existant ou non entre ces deux dernières grandeurs qui détermine le type du problème posé.

3. Quels repères mathématiques pour développer l'enseignement de la proportionnalité ?

3.1 Quelques définitions

3.1.1 Qu'est-ce qu'une grandeur ?

Il s'agit d'une caractéristique d'un objet qui permet de le comparer à d'autres.
Les grandeurs les plus couramment utilisées sont la longueur, l'aire, le volume, la masse, la durée, le prix,… mais cela peut être aussi une grandeur discrète comme le nombre de personnes, de crayons, de jours…
Cela ne se limite donc pas aux traditionnelles unités de mesure rencontrées en primaire.

Pour Nicolas Rouche, dans « Le sens de la mesure » : « *dans la pensée commune, il y a d'abord des objets, et la grandeur est considérée comme une propriété de ceux-ci* ». Cependant, « *lorsqu'on mathématise l'idée de grandeur, on ne peut pas en faire un attribut absolu des objets. Au contraire, on ne définit pour commencer que des relations entre objets, à savoir une relation d'égalité (appelée plus précisément 'équivalence') et une relation d'ordre (est plus petit que). On considère d'abord un ensemble d'objets de même nature (par ex. l'ensemble des objets allongés, ou l'ensemble des objets lourds, etc.), puis les sous-ensembles dont chacun est formé de tous les objets équivalents à l'un d'eux. On dit alors que chacun de ces sous-ensembles est une grandeur.* »

3.1.2 Qu'est ce que la proportionnalité[8] ?

Il s'agit d'une relation particulière entre deux grandeurs (ou plutôt leurs mesures) ou entre deux suites de nombres.
Ces deux suites de nombres (associées ou non à des grandeurs) doivent être multiples l'une de l'autre et être donc telles que toute combinaison linéaire de valeurs de l'une corresponde à la même combinaison linéaire des valeurs correspondantes de l'autre.

Illustrons cette définition par un exemple :

Masse de jambon en g	1000	500	250	750
Prix du jambon en €	15	7,5	3,75	11,25

Le prix d'un demi kilo de jambon correspond à la moitié du prix d'un kilo de jambon.

: 2

Masse de jambon en g	1000	500	250	750
Prix du jambon en €	15	7,5	3,75	11,25

: 2

De plus, on détermine le prix de 750g de jambon, soit en multipliant le prix d'un kilo de jambon par ¾ (puisque 750g = ¾ de 1000g),

× ¾

Masse de jambon en g	1000	500	250	750
Prix du jambon en €	15	7,5	3,75	11,25

× ¾

[8] Nous limitons volontairement nos développements aux aspects de la proportionnalité abordés dans le cadre de la liaison primaire-secondaire.

soit en additionnant les prix de 500g et 250g de jambon (puisque 750g = 500g + 250g).

750 = 500 + 250

Masse de jambon en g	1000	500	250	750
Prix du jambon en €	15	7,5	3,75	?

7.5 + 3.75 = **11.25**

3.2 Les différents processus de résolution à disposition des élèves

Les élèves ont le choix entre plusieurs procédés de résolution : utilisation du rapport interne, du rapport externe, des propriétés de linéarité,...
Il n'existe pas de méthode unique de résolution à privilégier. Pour que les élèves aient réellement le choix, il est indispensable qu'ils aient rencontré et travaillé tous les procédés en question. Dans un premier temps, il faut donc orienter et diversifier les démarches de résolution pour que les élèves les maîtrisent et puissent faire leur choix en connaissance de cause.

Explicitons-en quelques-unes et pour illustrer notre propos, prenons comme point de départ l'exemple suivant :

> Pour peindre 16 m² il me faut 2 litres de peinture. Combien me faut-il de peinture pour faire 32 m², 64m² et 8m² ?

Pour mieux visualiser les données, organisons-les sous forme de tableau :

Aire de la surface à peindre en m²	16	32	64	8
Nombre de litres de peinture	2	.	.	.

3.2.1 Rapport interne ou rapport externe ?

Deux procédures peuvent être utilisées par les élèves du primaire et du secondaire pour résoudre ce problème : l'utilisation **<u>du rapport interne ou du rapport externe</u>**, ce dernier étant également appelé coefficient de proportionnalité.
Le rapport interne s'établit entre deux valeurs d'une même grandeur tandis que le rapport externe permet de passer d'une grandeur à l'autre.
Ainsi, dans notre exemple et pour la première valeur à trouver, le rapport interne est de 2 tandis que le rapport externe est de $\frac{1}{8}$.

Rapport interne
$\times 2$

Aire de la surface à peindre en m²	16	32
Nombre de litres de peinture	2	4

Rapport externe
$\times \frac{1}{8}$

Le choix des enfants d'utiliser l'un ou l'autre rapport est souvent guidé par les nombres en jeu. Ils choisiront plus volontiers le nombre (naturel) le plus petit ou dont la table de multiplication est la mieux connue, quel que soit le rapport qu'il représente.

Ceci est le cas lorsqu'une seule valeur est à trouver. Si tel n'est pas le cas et que plusieurs valeurs sont à trouver (plusieurs lignes ou colonnes du tableau sont à 'compléter'), il sera plus simple d'utiliser le rapport externe puisque celui-ci ne change pas quelles que soient les valeurs des données et ce, contrairement au rapport interne.

Rapports internes

$\times \frac{1}{2}$ ou : 2

$\times 4$

$\times 2$

Aire de la surface à peindre en m²	16	32	64	8
Nombre de litres de peinture	2	4	.	.

Rapport externe

$\times \frac{1}{8}$ ou : 8

Il est par ailleurs possible d'influencer l'utilisation de l'un ou l'autre rapport en choisissant judicieusement les nombres en jeu comme par exemple des nombres décimaux, souvent dissuasifs.

Outre l'utilisation des rapports internes et externe, la mise en tableau permet aussi de visualiser et d'utiliser plus aisément les propriétés de linéarité, à condition que la question posée induise l'utilisation de ces propriétés.

3.2.2 Les propriétés de linéarité

Il est possible de résoudre le problème ci-dessous de deux manières différentes : en utilisant une démarche additive (linéaire) ou multiplicative (rapport interne ou externe).

> Louis roule à bicyclette, compte le nombre de tours de roue et mesure les distances parcourues. Il obtient le tableau suivant :

Nombre de tours de roue	5	10	23	30
Distance parcourue en m	11	22	50,6	66

> Quelle est la distance parcourue après 43 tours de roue ?

Le rapport externe étant égal à $\frac{11}{5}$, peu d'élèves sont susceptibles de choisir cette méthode de résolution. De même, le rapport interne est, dans ce cas, égal à $\frac{43}{5}$ et ne sera donc pas facile à manipuler. Par contre, une méthode simple et efficace pour résoudre ce problème est celle qui utilise les **propriétés de linéarité**.
En effet, 43 = 10 + 10 + 23. Le nombre de tours peut donc être obtenu par combinaison linéaire de données du tableau. Les grandeurs étant proportionnelles, les propriétés de linéarité sont conservées et la distance parcourue sera donc égale à la combinaison linéaire des valeurs correspondantes : 22 + 22 + 50,6 c'est-à-dire 94,6.

43 = 10 + 10 + 23

Nombre de tours de roue	5	10	23	30	43
Distance parcourue en m	11	22	50,6	66	?

22 + 22 + 50,6 = **94,6**

Cette méthode de résolution permet aux enfants du primaire d'éviter l'utilisation du rapport externe quand celui-ci devient trop compliqué. Il est sans doute judicieux de proposer aussi cette méthode aux élèves du secondaire en même temps qu'une première approche de la notion de fonction.
Ici encore la question posée et les nombres en jeu sont des variables didactiques importantes puisqu'elles influencent la méthode de résolution privilégiée par les élèves et permettent de faire varier le niveau de difficulté du problème de manière à l'adapter à différents niveaux d'enseignement.

3.2.3 La règle de trois

Jusqu'il y a peu, la procédure classique de résolution des problèmes de proportionnalité était la **règle de trois** avec ou sans passage par l'unité. Elle était utilisée dans les classes comme outil répondant aux besoins de la vie courante et non comme méthode d'apprentissage mathématique de la proportionnalité.

En effet, Boisnard souligne que « *ceux qui fréquentent l'école* (avant 1945 notamment) *auront besoin rapidement de savoir résoudre de tels problèmes. On leur fournit alors les savoir-faire correspondants : à chaque collection de problèmes correspond une méthode de résolution particulière à laquelle on entraîne les élèves* ».

Aujourd'hui, l'accent n'est plus tant mis sur l'application des techniques de résolution mais davantage sur la perception d'une relation particulière entre deux grandeurs.

Selon Boisnard, « *les progrès accomplis* (dans l'enseignement de la proportionnalité) *ne peuvent se mesurer que par rapport à l'augmentation de nos ambitions : on veut que les élèves sachent résoudre un plus grand nombre de problèmes et de manière plus intelligente, on veut qu'ils soient plus nombreux à accéder à une vraie compréhension et une véritable maîtrise de la notion, on veut donner à cette notion un statut mathématique plus rigoureux afin que les élèves possèdent un modèle plus puissant pour résoudre les problèmes.* »

Il s'agit dès lors, non pas d'abandonner cette règle de trois, d'autant qu'elle est encore beaucoup utilisée lors des cours de sciences notamment, mais de la proposer aux enfants comme un outil parmi d'autres.

Il convient également de rappeler que cette méthode de résolution n'est qu'un cas particulier d'utilisation de rapport interne.

En effet, il suffit de décomposer un rapport fractionnaire par exemple ($\frac{3}{5}$ dans l'exemple ci-dessous) en deux opérations (: 5 puis $\times$ 3). Ceci est d'autant plus visible lorsqu'on met les données de l'exemple ci-dessous sous forme de tableau :

Je vois que le prix de 5 kg de girolles est de 32 €. Combien vais-je payer pour 3 kilos ?

	Nombre de kg de girolles	Prix en €	
: 5	5	32	: 5
	1	6,4	
× 3	3	19,2	× 3

L'utilisation systématique de la règle de trois proprement dite mettait trop l'accent sur la résolution du problème et pas assez sur le lien existant entre deux grandeurs.
Or, il est indispensable que les élèvent perçoivent cette relation.
Il semble donc que la règle de trois soit de moins en moins une méthode imposée à tous mais de plus en plus un outil parmi d'autres à proposer aux enfants pour leur permettre de choisir une procédure de résolution adaptée au problème posé et à ses variables didactiques.

3.3 L'organisation des données

L'organisation des données est une étape primordiale dans la résolution d'un problème de proportionnalité.

Plusieurs méthodes existent :
- graphe sagittal (6 œufs → 1€),
- phrases courtes type 'règle de trois' (6 œufs coûtent 1€),
- mise en tableau,
- graphiques, …

Les deux premières sont étroitement liées à la troisième. Même si le tableau n'y apparaît pas explicitement, la disposition des données s'en approche grandement.
Peu importe le choix des élèves, l'important est que la méthode utilisée facilite la résolution du problème.
Il est à noter que les graphiques sont plus utilisés et travaillés en secondaire, en accord avec les Socles de compétences (cf. point 2.1).

3.3.1 La mise en tableau

La **mise en tableau** est une méthode schématique, visuelle et accessible pour les enfants tant du primaire que du secondaire. Deux formats sont possibles :

Rapport(s) interne(s)

Aire de la surface à peindre en m²	16	32	64	8	Rapport externe
Nombre de litres de peinture	2	.	.	.	

ou

Rapport externe

Aire de la surface à peindre en m²	Nombre de litres de peinture
16	2
32	.
64	.
8	.

Rapport(s) interne(s)

Ceci influence la 'position' du rapport externe puisque, dans le premier, c'est celui qu'on obtient quand on passe d'une ligne à l'autre alors que dans le second, c'est celui qu'on obtient en passant d'une colonne à l'autre. D'où l'importance de ne pas réduire les définitions et illustrations à un seul cas de figure pour permettre à chacun d'utiliser à bon escient les outils qui lui conviennent le mieux.

3.3.2 Les graphiques

Comme déjà mentionné ci-avant, le recours au graphique comme outil de résolution est davantage spécifique au <u>**secondaire**</u> puisqu'il est également lié à l'apprentissage des fonctions.

> Une compagnie de transport propose deux formules :
> Formule A : le billet ordinaire pour un voyage, soit 3 euros.
> Formule B : une carte demi-tarif qui coûte 24 euros pour un maximum de 16 voyages.
> Compléter le tableau suivant :

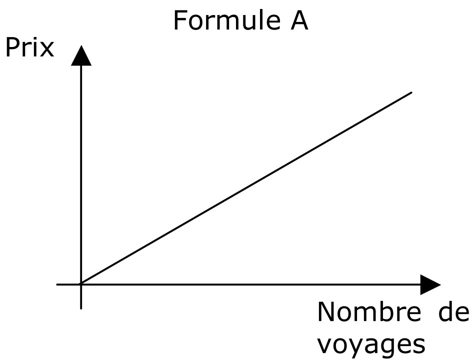
Nombre de voyages	6	10	16	20	24
Prix payé avec la formule A					
Prix payé avec la formule B					

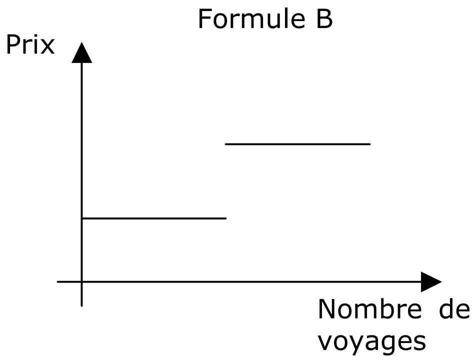
> Peut-on dire qu'il y a proportionnalité entre le prix et le nombre de voyages avec la formule A ? Justifier.
> Qu'en est-il pour la formule B ?
> Représenter les données de ce tableau dans un diagramme cartésien et expliquer comment on peut contrôler s'il y a ou non proportionnalité.

L'utilisation du tableau permet une traduction rapide de l'énoncé :

Nombre de voyages	6	10	16	20	24
Prix payé avec la formule A	18	30	48	60	72
Prix payé avec la formule B	24	24	24	48	48

La résolution sous forme graphique permet de bien visualiser la différence entre les deux formules proposées dans l'énoncé. Les points donnés par la formule A sont bien sur une droite passant par l'origine des axes (d'où la proportionnalité) tandis que les points donnés par la formule B sont rangés 'en escaliers' (d'où la non-proportionnalité).





3.4 D'autres variables didactiques pour analyser les problèmes

Une variable didactique est un paramètre du problème sur lequel on peut agir pour augmenter ou diminuer la complexité du problème.
Les différents éléments analysés dans les paragraphes précédents peuvent être assimilés à des variables didactiques. Dans cette partie, nous allons nous centrer sur deux autres paramètres essentiels des problèmes de proportionnalité : les nombres en jeu et le domaine mathématique concerné.

3.4.1 Nombres en jeu

Outre le fait que les nombres en jeu peuvent influencer la méthode de résolution privilégiée par les élèves, ceux-ci permettent aussi d'adapter les problèmes au niveau d'enseignement visé : dans le primaire, on utilisera davantage les nombres entiers et décimaux tandis que les rationnels (et les réels) seront davantage réservés au secondaire.

Par exemple, si on propose aux enfants le problème suivant,

> Pour peindre 16 m² il me faut 2 litres de peinture. Combien me faut-il de peinture pour faire 32 m² ?

il y a de fortes chances pour qu'ils utilisent le rapport interne 2 plutôt que le rapport externe $\frac{1}{8}$.

Rapport interne
$\times 2$

Aire de la surface à peindre en m²	16	32
Nombre de litres de peinture	2	4

Rapport externe
$\times \frac{1}{8}$

Par contre si on modifie la question et qu'on demande combien de peinture il faut pour faire 40m², on peut s'attendre à voir le rapport externe davantage utilisé, puisque trouver le rapport interne à partir de 16 et 40 est moins aisé que de trouver le rapport externe existant entre 16 et 2.

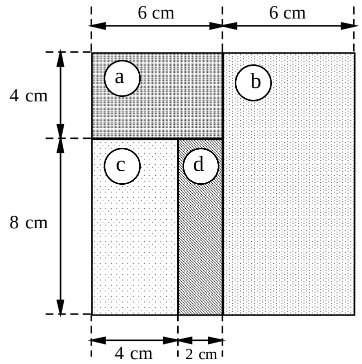
Rapport interne
$\times 2{,}5$

Aire de la surface à peindre en m²	16	40
Nombre de litres de peinture	2	5

Rapport externe
$\times \frac{1}{8}$

Modifier les nombres en jeu peut donc fortement influencer l'utilisation d'une procédure de résolution particulière par les enfants.
De plus, de la même manière, la difficulté du problème posé peut être facilement adaptée. Le problème ci-dessous par exemple pourrait être considérablement simplifié en demandant que le segment qui mesure 4 cm sur le modèle mesure 8 cm sur le puzzle agrandi au lieu de 5 cm.

Voici un puzzle constitué de 4 pièces a, b, c, d :



Construire un agrandissement de ce puzzle de telle manière que le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 5 cm sur le puzzle agrandi.

3.4.2 Domaine mathématique

Le domaine des grandeurs (géométriques ou non) convient aussi bien aux élèves du primaire qu'à ceux du secondaire. C'est le cas notamment des deux problèmes présentés dans le paragraphe précédent, moyennant, pour le secondaire, des choix de nombres plus adéquats.
En revanche, le domaine purement numérique ne s'applique qu'aux élèves du secondaire. C'est le cas notamment dans les problèmes du type 'machines à nombres[9]' : aucune grandeur n'y apparaît et le rapport externe est utilisé de même que son inverse. Ce dernier peut être modifié à foison pour adapter la difficulté du problème à l'objectif poursuivi.

Observe les machines à transformer les nombres puis complète les transformations.

2	→	3
-4	→	-6
1,5	→	2,25
70	→	105
0	→	?
0,01	→	?
2,5	→	?

4,5	→	31,5
1,5	→	10,5
60	→	420
?	→	21
?	→	451,5
3,5	→	?
x	→	?

36	→	12
-3	→	-1
1200	→	400
?	→	500
?	→	1/3
?	→	10^6
?	→	N

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, pour permettre aux élèves de disposer d'un maximum d'outils face à une situation nouvelle, il est indispensable de leur faire travailler toutes les procédures. Agir sur les nombres en jeu constitue un moyen facile à disposition des enseignants pour aiguiller les élèves vers une procédure plutôt qu'une autre et leur permettre ainsi de la maîtriser.

---

[9] Source : Mathématiques 7-8-9

4. Quels repères didactiques pour structurer l'enseignement de la proportionnalité ?

Nous proposons de classer les problèmes de proportionnalité au départ d'un cadre conceptuel qui s'appuie largement sur une typologie proposée par Vergnaud.

Celui-ci distingue trois types de proportionnalité :

- la proportionnalité simple et directe,
- la proportionnalité simple composée et
- la proportionnalité multiple.

4.1 Proportionnalité simple et directe

Un problème de proportionnalité simple met en jeu deux grandeurs[10] dont on ne considère, pour chacune, que deux valeurs. En tout, trois données et une inconnue sont la plupart du temps rencontrées. Les problèmes de quatrième proportionnelle font donc partie de cette catégorie de même que les problèmes d'agrandissement et de réduction de figures.
Prenons un exemple :

Exemple 1

Aurélie achète 30cm de ruban et paie 0,20€. Son amie Marie a besoin de 90cm du même ruban. Combien va-t-elle payer ?

autrement dit,

Longueur du ruban (en cm)	30	90
Prix (en €)	0,20	?

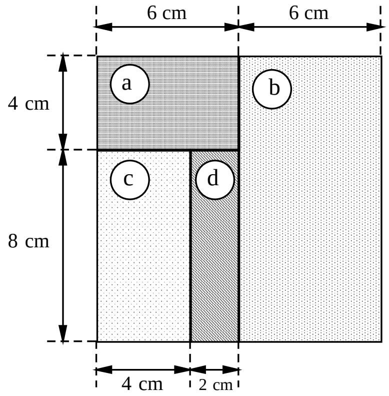
Les deux grandeurs en jeu sont la longueur du ruban et le prix. Il s'agit là d'un problème classiquement rencontré dans les manuels. La résolution du problème est assez rapide, quelle que soit la méthode utilisée pour organiser les données ou pour réaliser le calcul.

[10] Nous limiterons le cadre de nos illustrations à celui des grandeurs, applicable aussi bien dans le primaire que dans le secondaire. Il est bien entendu que tout ceci est transposable dans le domaine strictement numérique.

Un autre exemple de ce type de proportionnalité fait intervenir des grandeurs géométriques.

Exemple 2

Voici un puzzle constitué de 4 pièces a, b, c, d :



Construire un agrandissement de ce puzzle de telle manière que le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 5 cm sur le puzzle agrandi.

Dans cet exemple, seule une grandeur est à considérer : la longueur des différents segments. Toutefois, deux types de longueur sont à différencier : celle des segments de départ et celle des segments agrandis.

Longueur du segment de départ (en cm)	4	6	8	2
Longueur du segment agrandi (en cm)	5	?	?	?

Malgré le nombre de colonnes et le nombre de données et d'inconnues plus élevés que pour l'exemple précédent, il s'agit bien de proportionnalité simple puisque, pour résoudre ce problème, il suffit de considérer successivement la colonne des données $\binom{4}{5}$ avec une des trois colonnes comportant les inconnues ramenant ainsi la résolution à trois problèmes du même type que ci-dessus :

Longueur du segment de départ (en cm)	4	6
Longueur du segment agrandi (en cm)	5	?

Longueur du segment de départ (en cm)	4	8
Longueur du segment agrandi (en cm)	5	?

Longueur du segment de départ (en cm)	4	2
Longueur du segment agrandi (en cm)	5	?

Tous les problèmes traitant de proportionnalité simple ont la même structure même si une sous-classification est encore possible en fonction de la question posée comme le détaille le tableau de la figure 1 ci-après (cf. point 5.1).

Ce type de problème est le plus couramment utilisé en primaire et en secondaire. Cela étant, il existe deux autres classes de problème de proportionnalité qui se distinguent de la première par le nombre de grandeurs en jeu. Dans les deux sections suivantes, nous allons définir et illustrer d'un exemple chacune de ces classes avant de revenir sur leur principale différence.

4.2 Proportionnalité simple composée

Un problème de proportionnalité simple composée met en jeu plus de deux grandeurs et il s'agit, pour la résolution, d'appliquer successivement la proportionnalité simple à deux paires de grandeurs. Dans ce cas, il apparaît également une seule inconnue mais elle est liée à plusieurs données dépendant les unes des autres.
Analysons un exemple pour souligner la différence existant avec les problèmes du premier type.

Exemple 3

> Un directeur d'école commande 4 boîtes de compas. Dans chacune des boîtes, il y a 8 compas. Un compas coûte 3€. Combien le directeur doit-il payer en tout ?

Trois grandeurs apparaissent dans cet énoncé : le nombre de boîtes, le nombre de compas et le prix.
Le prix est proportionnel au nombre de compas.
Le prix est également proportionnel au nombre de boîtes.
Les deux grandeurs 'nombre de boîtes' et 'nombre de compas' dépendent aussi l'une de l'autre. Toute variation de l'une entraîne une variation de l'autre et elles sont elles aussi proportionnelles.
Les trois grandeurs sont donc proportionnelles deux à deux.

Nombre de boîtes	Nombre de compas	Prix (en €)
4		?
1	8	
	1	3

La résolution de ce problème ne consiste pas en une seule opération mais en deux opérations 'type proportionnalité simple' qui s'enchaînent. En effet, dans un premier temps, il s'agit par exemple de trouver le nombre total de compas

Nombre de boîtes	Nombre de compas
4	?
1	8

avant d'utiliser ce résultat pour trouver le prix total à payer.

Nombre de compas	Prix (en €)
32	?
1	3

Reprenons encore l'exemple mentionné dans la figure 1 du point 5.1 :

Exemple 4

Une voiture consomme 5l aux 100km.
Avec 30€, son conducteur peut acheter 20l d'essence.
Combien coûtera un voyage de 500km avec cette voiture?

Nombre de litres	Nombre de kilomètres	Prix (en €)
5	100	.
20	.	30
.	500	?

Il existe plusieurs manières de résoudre ce problème. Revenons sur deux d'entre elles. Dans le première, on considère d'abord que le prix est proportionnel au nombre de litres de façon à trouver le prix de 5l d'essence (7,5€) grâce au rapport interne (× ¼ ou :4).

	Nombre de litres	Nombre de kilomètres	Prix (en €)	
	5	100	7,5	
:4	20	.	30	:4
	.	500	?	

Ensuite, il suffit d'utiliser le fait que le prix est également proportionnel au nombre de kilomètres pour trouver le coût d'un voyage de 500km.

Nombre de litres	Nombre de kilomètres	Prix (en €)	
5	100	7,5	
20	. ×5	30	×5
.	500	37,5	

Dans la seconde méthode, on utilise d'abord la relation de proportionnalité entre le nombre de kilomètres et le nombre de litres avant celle liant le prix au nombre de kilomètres.

	Nombre de litres	Nombre de kilomètres	Prix (en €)	
	5	100	.	
×4	20	×4 400 $\times \frac{5}{4}$	30	$\times \frac{5}{4}$
	.	500	37,5	

Quel que soit le choix des grandeurs sur lesquelles on opère, la réponse est obtenue par applications successives de deux rapports internes puisque les trois grandeurs sont <u>proportionnelles deux à deux</u>.

4.3 Proportionnalité multiple

Un problème de proportionnalité multiple met également en jeu plus de deux grandeurs mais dans ce cas, il est impossible de se ramener à un ou plusieurs problèmes successifs de proportionnalité simple. Il faut obligatoirement associer simultanément plusieurs données qui ne dépendent pas les unes des autres pour trouver la valeur de l'inconnue. De ce fait, il est impossible de ne considérer les colonnes du tableau que 2 par 2.

Exemple 5

Pour un séjour à la montagne, le prix est de 20€ par personne et par jour. Quel est le prix d'un séjour pour un groupe de 4 personnes et pour 6 jours ?

Trois grandeurs sont repérées dans ce problème : le prix, le nombre de personnes et le nombre de jours.
Pour un nombre de jours donné, le prix est proportionnel au nombre de personnes.
Pour un nombre de personnes donné, le prix est également proportionnel au nombre de jours.
Mais le nombre de personnes n'est pas proportionnel au nombre de jours. Ces deux grandeurs sont indépendantes.

Inconnue	Données	
Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
20	1	1
?	4	6

Lors de la résolution, il faut tenir compte des trois grandeurs sans les dissocier. Dans un premier temps, il s'agit de 'bloquer' la valeur d'une des deux données (par exemple le nombre de jours) tout en faisant varier la deuxième (le nombre de personnes) proportionnellement à l'inconnue (le prix).

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
20	1	1
×4 → 80	×4 → 4	1
?	4	6

Dans un deuxième temps, il suffit alors d'appliquer le même procédé une seconde fois en faisant varier l'autre donnée (le nombre de jours) proportionnellement à l'inconnue (le prix) sans plus s'occuper du nombre de personnes déjà égal à 4.

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
20	1	1
80	4	1
×6 → 480	4	×6 → 6

Dans ce cas-ci aussi, la résolution du problème revient à utiliser deux fois le rapport interne. Mais la grande différence avec la classe de problème précédente réside dans le fait que les trois grandeurs ne sont pas proportionnelles deux à deux et que pour pouvoir appliquer deux fois le rapport interne, il faut bloquer une des deux données.

Sur un plan strictement mathématique, il faut être particulièrement attentif avec ce genre de problèmes car la stratégie de résolution présentée ci-dessus est applicable lorsque l'inconnue concerne la grandeur proportionnelle aux deux autres mais devient inadéquate lorsque la question porte sur une valeur d'une des deux grandeurs indépendantes.

Exemple 6

Pour un séjour de 6 jours à la montagne, le prix est de 480€ pour 4 personnes. Un groupe de 8 personnes dispose de 1440€. Combien de jours peut durer leur séjour ?

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
480	4	6
1440	8	?

Les deux méthodes présentées pour l'exemple précédent mènent, à un moment ou un autre, à bloquer le prix, proportionnel aussi bien au nombre de personnes qu'au nombre de jours :
soit on bloque d'abord la donnée 'nombre de personnes' puis la donnée 'prix',

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
480	4	6
1440	4	18
1440	8 ×2	? 9 :2

soit on bloque d'abord la donnée 'prix' puis la donnée 'nombre de personnes'.

Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
480	4 ×2	6 :2
480	8	3
1440	8	? 9

Dans les deux cas, lorsqu'on fixe le prix, on revient non pas à un problème de proportionnalité entre les deux autres grandeurs mais à un problème de proportionnalité inverse. En effet, pour un même prix, plus il y a de personnes, moins le séjour est long.
Pour éviter l'utilisation de la proportionnalité inverse et revenir à deux problèmes de proportionnalité simple, il faut bloquer la grandeur dont on cherche une valeur (le nombre de jours) puis une des deux autres grandeurs :

	Prix (en €)	Nombre de personnes	Nombre de jours
	480	4	6
	960 ×2	8 ×2	6
×1,5	1440	8	? 9 ×1,5

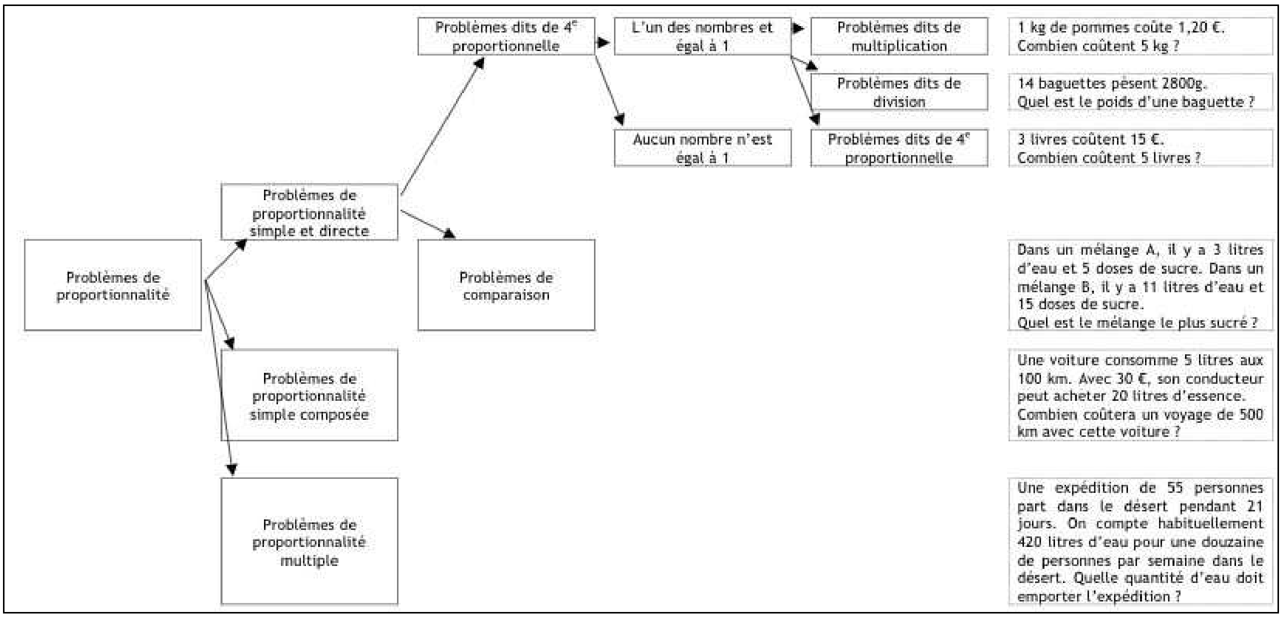
En résumé, la principale différence entre les problèmes de proportionnalité simple composée et de proportionnalité multiple réside dans les relations existant entre les grandeurs : pour la proportionnalité simple composée, les trois grandeurs sont proportionnelles deux à deux tandis que pour la proportionnalité multiple, une grandeur est proportionnelle aux deux autres, qui sont indépendantes entre elles.

5. En conclusion : que retenir de tout ceci ?

5.1 Sur un plan mathématique

Pour résumer, voici un tableau qui reprend la typologie de Vergnaud illustrée par les exemples qui servaient de support aux explications du paragraphe précédent :

Figure 1 : une classification des problèmes de proportionnalité adaptée de Vergnaud



Il est encore à noter que les problèmes de proportionnalité simple et directe sont scindés en deux catégories : les problèmes de 4^{e} proportionnelle et les problèmes de comparaison.

- Pour les derniers, il s'agit de traduire l'énoncé sous forme d'égalité de rapports (donc de proportion) et de les comparer.
- Pour les autres, il s'agit de calculer la valeur manquante. On peut encore affiner davantage cette classification en différenciant les problèmes pour lesquels un des nombres est égal à un (ce qui permet de relier la proportionnalité au champ conceptuel de la multiplication) des problèmes pour lesquels ce n'est pas le cas. Cette catégorie regroupe les problèmes de proportionnalité traditionnellement envisagés dans les manuels.

Nous avons choisi de privilégier les problèmes dits de 4^{e} proportionnelle et de ne pas nous attarder sur les problèmes de comparaison (de rapports) puisqu'on les retrouve dans la brochure consacrée à l'enseignement des rationnels : résoudre ce type de problème revient en effet à comparer deux rapports exprimés sous la forme de fractions.

Par exemple, la réponse du problème suivant est obtenue en comparant $\frac{5}{3}$ et $\frac{15}{11}$.

> Dans un mélange A, il y a 3 litres d'eau et 5 doses de sucre. Dans un mélange B, il y a 11 litres d'eau et 15 doses de sucre.
> Quel est le mélange le plus sucré ?

Cette première clarification conceptuelle doit être complétée par la prise en compte des éléments suivants, déjà explicités dans la section 2 de ce chapitre :

- les domaines mathématiques concernés (grandeurs, géométrie, numérique) ;
- le nombre de grandeurs en jeu, les éventuelles liaisons entre celles-ci ;

- les stratégies de résolution attendues (rapport interne *vs* rapport externe, …).

Par ailleurs, la classification proposée (des problèmes de proportionnalité simple vers des problèmes de proportionnalité multiple) ne doit pas être conçue comme un axe de progression du primaire (proportionnalité simple) vers le début de l'enseignement secondaire (proportionnalité multiple). En effet, il est possible de rencontrer des problèmes de proportionnalité simple plus complexes que des problèmes de proportionnalité multiple. La distinction à opérer entre le primaire et le secondaire tient sans doute davantage à la nature des nombres en jeu, le type de grandeurs utilisées ou le cadre mathématique de résolution ... le cadre strictement numérique étant réservé à l'enseignement secondaire car il va permettre le passage vers le cadre graphique. Il est indispensable à l'école primaire d'amener les élèves à résoudre des problèmes de proportionnalité dans des cadres variés mais en référence à des situations concrètes. Dans cet esprit, la question des outils de résolution proposés aux enfants doit davantage préoccuper que la seule prise en compte des modalités de résolution (rapport interne *versus* rapport externe par exemple).

Il apparaît également que cette classification fait l'impasse sur la distinction entre des problèmes dont la résolution met en jeu la proportionnalité et d'autres problèmes mettant en jeu d'autres types de relations numériques entre deux ensembles de nombres (relations inversement proportionnelles, fonctions affines, ...). Pourtant, n'est-il pas important, avant de résoudre des problèmes, de s'assurer de l'adéquation des outils utilisés, autrement dit de s'assurer d'être réellement face à un problème de proportionnalité ? Diverses recherches soulignent la nécessité de confronter les élèves à des situations qui ne relèvent pas de proportionnalité.

A la lumière de tout ceci, nous avons choisi de décliner l'apprentissage de la proportionnalité entre 10 à 14 ans au départ de trois kits pédagogiques :

- le premier traite des problèmes de proportionnalité simple et directe,
- le deuxième de problèmes ne relevant pas toujours de la proportionnalité,
- le troisième regroupe les problèmes de proportionnalité simple composée et de proportionnalité multiple. Ces deux types de problèmes sont étroitement liés (puisqu'ils concernent tous deux au minimum trois grandeurs) et leurs différences ne prennent sens qu'en comparant leurs structures respectives. Les regrouper dans l'apprentissage ne semble donc pas dénué de sens.

Chacun des trois kits pédagogiques proposés est composé des éléments suivants :

- une liste d'éléments mathématiques et didactiques susceptibles d'être utilisés lors de la résolution des problèmes proposés. Celle-ci renvoie le lecteur désireux d'en savoir plus aux définitions et pistes de réflexion du présent chapitre.

- des items d'évaluation diagnostique pour organiser un prétest ;

  Où en sont les élèves par rapport au développement des compétences visées ?
  L'objectif de cette section est de donner différents outils aux enseignants pour évaluer les compétences de leurs élèves et ainsi pouvoir proposer des activités d'apprentissage adéquates.

- des activités d'apprentissage ;

  Différentes activités développées, adaptées, expérimentées sont proposées au départ d'un modèle de fiche de présentation des activités. L'identification de ces activités a fait l'objet d'un travail de recherche important. La persistance et la régularité des erreurs produites par les élèves conduisent à s'interroger sur les types de situations habituellement mises en

place par les enseignants. Cette réflexion renvoie au concept d'obstacles didactiques et épistémologiques.
Dans une perspective de re-médiation (au sens de nouvelle médiation entre l'élève et le savoir), le kit propose une série de situations d'apprentissage pour aider l'enseignant à mettre en place de nouvelles pratiques d'enseignement de la proportionnalité.
La structure générale d'une fiche d'activité est présentée à la page 9 de cette brochure.
Les activités proposées dans les kits constituent un complément à celles proposées habituellement dans les classes. Elles ne les remplacent en aucun cas puisqu'elles n'abordent pas tous les aspects de la proportionnalité, comme par exemple, les problèmes d'échelle.

- des exercices d'application.

  Au-delà des situations d'apprentissage développées, comment stabiliser les compétences des élèves ?
  Des propositions d'activités pour aller plus loin ou pour venir en aide aux élèves en difficultés sont présentées au sein des fiches d'activité.

5.2 Sur un plan didactique

5.2.1 Des objectifs d'apprentissage

De l'analyse qui précède, on retiendra trois objectifs essentiels à l'enseignement de la proportionnalité à l'école primaire :

Rendre les élèves capables :

- d'augmenter la capacité à mobiliser une procédure donnée et en accroître l'efficacité (notamment en permettant aux élèves de l'utiliser avec d'autres types de nombres que ceux avec lesquels elle a d'abord fonctionné) ;
- d'augmenter la variété des procédures utilisables et inciter les élèves à opérer le choix le plus approprié à la situation particulière à traiter ;
- de renforcer la compréhension des liens qui existent entre ces différentes procédures, avec, en secondaire, une synthèse possible à l'aide de la fonction linéaire et de ses propriétés.

Pour permettre aux élèves d'atteindre ces objectifs, l'enseignant doit ajuster sa gestion de la classe de manière à, par exemple, :

- éviter d'imposer un type particulier de résolution de problème,
- confronter, en classe, les différentes résolutions des élèves,
- travailler et comparer les différentes procédures,
- opérer constamment des aller-retour entre concret et abstrait,
- respecter une gradation,
- varier les nombres en jeu,
- adapter les variables didactiques,
- …

5.2.2 Un axe de progression didactique pour l'apprentissage de la proportionnalité

5.2.2.1 La notion de dialectique outil-objet et de jeux de cadres de Régine Douady

La dialectique outil-objet est un processus cyclique organisant les rôles respectifs de l'enseignant et des élèves, au cours duquel les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'outil pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir organisé.
Le mot "cadre" est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique… Les jeux de cadres sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves…

Quels pourraient être ces cadres ?

- Cadre des grandeurs : situations concrètes, quantités, mesures. Il faut donner du sens aux manipulations. C'est celui dans lequel se rencontrent le plus souvent les situations de proportionnalité, mettant en relation deux grandeurs (masse et prix, masse et longueur dans le cas de l'allongement d'un ressort, longueurs dans le cas du périmètre du disque en fonction de son rayon, longueur et aire dans le cas de triangles de même base et de hauteur variable, distance et durée dans le cas d'un mouvement uniforme...). Il reprend aussi le cadre géométrique dans le cas notamment de l'agrandissement ou réduction de figures ;

> Le nombre de domaines de grandeurs mis en jeu dans les problèmes est un paramètre important qui va jouer sur la difficulté ou non d'un problème. On laisse trop souvent de côté l'enseignement des grandeurs dans la résolution des problèmes et la compréhension des écritures mathématiques. Or, insérer les grandeurs dans une écriture mathématique, cela permet à l'élève de savoir exactement ce qu'il calcule. On s'aperçoit que les élèves, dans la plupart des cas, ne savent pas à quelle grandeur correspond le résultat qu'ils ont trouvé.

- Cadre numérique : manipulations abstraites (on ne s'intéresse qu'aux relations entre les nombres) ;

- Cadre graphique : représentation de la relation entre les grandeurs ou entre les nombres dans un système d'axes gradués.

5.2.2.2 Tableau récapitulatif

Notre objectif est de proposer un tableau récapitulatif de progression didactique. Il reprend les principales variables didactiques qui influencent le niveau de difficulté et la résolution des problèmes de proportionnalité et spécifie pour chacune d'elles les différences à apporter, à notre avis, selon le niveau d'enseignement des élèves auxquels on s'adresse.

Pour le construire, nous nous sommes basés sur tous les éléments développés dans les paragraphes précédents et plus particulièrement sur la typologie de Vergnaud, les Socles de compétences et la notion de dialectique outil-objet de Douady.

Proposition de progression didactique pour l'apprentissage de la proportionnalité[11]

Variables	5e – 6e primaire	1ere secondaire
Champs Conceptuels	Proportionnalité simple : Multiplication et division simple, recherche d'une 4e proportionnelle, … Proportionnel ou non ?	Proportionnalité simple : Multiplication et division simple, recherche d'une 4e proportionnelle, … Proportionnel ou non ? Proportionnalité simple composée Proportionnalité multiple
Domaine mathématique	Grandeurs (géométriques ou non)	Grandeurs (géométriques ou non) Numérique (avec ou sans graphique)
Nombre de grandeurs ou suites de nombres mises en jeu	2	2 ou 3
Nature des nombres mis en jeu dans le problème ou dans les rapports	Entiers, décimaux et quelques rationnels 'simples'	Rationnels et réels
Procédures de résolution	Mise en tableau, rapports internes (et 'règle de trois'), rapport externe.	Mise en tableau, utilisation de graphiques, rapports internes (et 'règle de trois'), rapport externe, propriétés de linéarité.

[11] Cet outil permet aussi aux enseignants de s'assurer que l'ensemble des problèmes qu'ils abordent avec leurs élèves couvre bien toutes les catégories répertoriées dans ce tableau.

En conclusion : **Que faire dans les classes ?**

On peut construire des connaissances mathématiques en faisant jouer la dialectique outil-objet au sein de jeux de cadres appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions :

- L'énoncé (contexte et questions) a du sens pour les élèves ;
- Compte tenu de leurs connaissances, les élèves peuvent engager une procédure de résolution, mais ils ne peuvent pas résoudre complètement le problème ;
- Les connaissances visées par l'apprentissage (contenu et méthode) sont des outils adaptés au problème.

Au niveau de la proportionnalité à la transition primaire-secondaire, on peut donc déduire ceci :

- A l'école primaire, les élèves résolvent des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant des procédures personnelles (proportionnalité en situation, en tant qu'outil sans formalisation) ;
- Au premier cycle de l'enseignement secondaire, il s'agit de mettre en place les principaux raisonnements qui permettent de traiter les situations de proportionnalité (la proportionnalité devient un objet d'études).

Cela signifie peut-être qu'à l'école primaire, toutes les situations proposées aux élèves doivent rester associées à des grandeurs alors qu'en secondaire, le cadre strictement numérique doit progressivement faire son apparition (en lien avec le cadre graphique).

Chapitre 2 : Kit 1 : Proportionnalité simple.

1. Références théoriques indispensables[12]

De manière à éviter les redites, nous listons dans ce paragraphe les éléments théoriques susceptibles d'être utilisés lors de la résolution des problèmes proposés dans ce kit. Nous invitons le lecteur désireux d'en savoir plus à consulter la section 3 du chapitre 1 de cette brochure. Il y trouvera des pistes de réflexion pour l'utilisation des divers outils mentionnés ci-dessous :

- Rapports internes et rapport externe ;
- Propriétés de linéarité ;
- Outils de formalisation : tableaux et graphiques ;
- Variables didactiques : nombres en jeu et domaine mathématique concerné.

[12] Pour plus de détails, se référer à la section 3 du chapitre 1 : « Quels repères mathématiques pour développer l'enseignement de la proportionnalité ? »

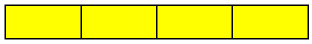
2. Items d'évaluation

Voici une série d'exercices pouvant servir de point de départ à la construction d'une épreuve diagnostique permettant d'évaluer le niveau de compréhension des élèves et de déterminer quel processus de résolution ils mettent plus volontiers en œuvre.
Pour faciliter la lecture, nous les avons classés selon le type de question posée.

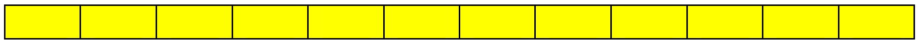
A. Trouve l'intrus :

Item 1

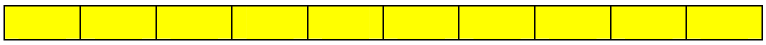
Hassan, Tamara, Thomas et Sophie ont réalisé des barres avec des cubes identiques. Ils ont ensuite mesuré leurs barres.



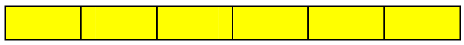
Hassan : 8cm



Tamara : 24cm



Thomas : 20cm



Sophie : 14cm

Un des personnages s'est trompé en mesurant. Lequel ? Explique ta réponse.
Quelle mesure aurait-il dû trouver ?

Item 2

Dans ce magasin, tous les bonbons sont au même prix. Sur le comptoir, on peut voir les sachets suivants :

200g	0,8€	600g	2,4€	500g	1,40€	250g	1€

Il semblerait que la caissière se soit trompée pour l'un d'entre eux. Lequel ? Quel est le prix correct ?

B. Complète

Item 3

Si un article coûte 3 €, alors 4 articles coûtent .... €.
Si trois objets pèsent 6 kg, alors un objet pèse .... kg.
9 kg de pommes coûtent 8 € donc 18 kg de ce fruit coûtent .... €.
Si 15 cubes identiques occupent 27 cm^3 alors 5 cubes occupent .... cm^3.
Avec 3 verres je remplis 0,27 L, donc je peux remplir .... L avec 9 verres.
Quand j'achète 3,5 kg de carottes, je paie 5,95 €. Je paierai ....€ si j'en prends 7 kg.

Item 4

Combien cela coûte-il ?

Dans ce magasin, tous les cahiers sont vendus au même prix ... quelle que soit la quantité achetée !

Complète le tableau des prix :

8 cahiers	16 cahiers	40 cahiers	12 cahiers	80 cahiers	96 cahiers	100 cahiers
10 €	.....€	.....€	.....€	.....€	.....€	.....€

Item 5 : le robinet qui coule

Le robinet de l'évier de la cuisine fuit. Paul se demande quelle est la quantité d'eau ainsi gaspillée. Il place un récipient sous le robinet. Après 5 minutes, il constate ainsi qu'il a récolté 15 cl. Pour connaître la quantité qui s'écoule pendant plus longtemps, il a commencé un tableau. Complète-le pour déterminer quelle quantité d'eau est ainsi gaspillée chaque jour.

Durée	5 min	10 min	30 min	60 min	4 h	8 h	12 h	20 h	24 h
Quantité d'eau	15 cl	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Item 6[13]

Reproduis et complète ce tableau

Nombre d'oeufs	6	12	18	24	30	....	....
Prix en €	....	2	....	....	....	12	10

Combien coûtent 6 œufs ? 18 œufs ? 24 œufs ? 30 œufs ?
Combien d'œufs peut-on acheter avec 12 € ? 10 € ?

Item 7: Des machines pour transformer les nombres[14]

Observe les machines à transformer les nombres puis complète les transformations.

2	→	3
-4	→	-6
1,5	→	2,25
70	→	105
0	→	?
0,01	→	?
2,5	→	?

4,5	→	31,5
1,5	→	10,5
60	→	420
?	→	21
?	→	451,5
3,5	→	?
x	→	?

36	→	12
-3	→	-1
1200	→	400
?	→	500
?	→	1/3
?	→	10^6
?	→	N

13 Source : Pour comprendre les mathématiques CM2
14 Source : Mathématiques 7-8-9

C. Construis

Item 8

Agrandis ce rectangle :

La longueur du rectangle agrandi est le segment suivant :

D. Choisis la méthode de résolution que tu préfères

Item 9

Maman achète 400g de jambon chez le boucher. Elle paie 4,8 euros.
Combien doit-elle payer pour un kilo ?
Et pour 700g ?

Item 10 (Source IREM Rennes)

En pressant 3 oranges, on obtient 15cl de jus d'orange. Quelle quantité de jus obtient-on en pressant 12 oranges ?

Ce que j'ai trouvé et comment j'ai fait :

Item 11 (Source IREM Rennes)

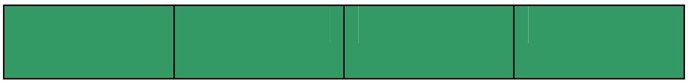
Pour une fête, on prépare de la menthe à l'eau avec du sirop de menthe et de l'eau ; il faut 3 verres de sirop de menthe pour 12 verres d'eau.
Combien utilise-t-on de verres d'eau pour 6 verres de sirop de menthe ?

Item 12 (Source IREM Rennes)

Un photographe a décidé de faire un agrandissement d'une photo. La photo a pour dimension 10 cm de largeur et 30 cm de longueur. L'agrandissement a une largeur de 20 cm. Quelle est la longueur de l'agrandissement ?

Item 13

Paul met bout à bout des bandes de couleur verte, toutes de même longueur. En mettant bout à bout 4 bandes vertes, il obtient une longueur de 9 cm.



Quelle longueur obtiendra-t-il en mettant bout à bout 12 bandes vertes ? 20 bandes vertes ? 24 bandes vertes ? 48 bandes vertes ?

Item 14

Pour peindre 16 m² il me faut 2 litres de peinture. Combien me faut-il de peinture pour faire 32 m², 64m² et 8m² ?
Présente les réponses sous la forme d'un tableau et explique ton raisonnement.

Item 15

Paul constate que son paquet de feuilles jaunes a la même épaisseur que son paquet de feuilles vertes ; ils mesurent tous les deux 35 mm d'épaisseur. Pourtant, il y a 250 feuilles jaunes et 200 vertes. Que peux-tu en conclure ? Explique ta réponse.

E. Représente graphiquement

Item 16

Une compagnie de transport propose deux formules :
a) Formule A : le billet ordinaire pour un voyage, soit 3 euros.
b) Formule B : une carte demi-tarif qui coûte 24 euros pour un maximum de 16 voyages.
Compléter le tableau suivant :

Nombre de voyages	6	10	16	20	24
Prix payé avec la formule A					
Prix payé avec la formule B					

a) Peut-on dire qu'il y a proportionnalité entre le prix et le nombre de voyages avec la formule A ? Justifier.
b) Qu'en est-il pour la formule B ?
c) Représenter les données de ce tableau dans un diagramme cartésien et expliquer comment on peut contrôler s'il y a ou non proportionnalité.

3. Activités d'apprentissage

Les activités développées dans ce paragraphe sont au nombre de six. Elles sont toutes construites selon le même canevas de fiche, détaillé à la page 9 de cette brochure.

Voici un tableau reprenant les six activités proposées dans ce paragraphe. Outre le titre de l'activité, il y est également fait mention du cadre mathématique concerné, des enjeux du problème de départ, des compétences plus spécifiquement travaillées, du niveau d'enseignement auquel s'adresse cette activité et enfin, la source dont elle est extraite. Les items d'évaluation liés aux différentes activités sont également indiqués.

Titre de l'activité	Cadre	Enjeux	Compétences	Niveau(x) d'enseignement	Source(s)	Item(s) d'évaluation concerné(s)
Le sirop	Grandeurs (quantité de verres d'eau, nombre de sucres)	Comparer deux sirops et indiquer si les sirops réalisés sont aussi sucrés l'un que l'autre.	M56	5P, 6P	ERMEL CM1 (2005)	1, 2, 11, 15
Le puzzle	Grandeurs géométriques	Agrandir des figures géométriques	M56, M57 et M59 M40	5P, 6P	Brousseau (1981) IREM Rennes, Mathenpoche 6^{e} ERMEL CM2 (2005)	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14
Où il faut faire mouche	Grandeurs géométriques	Réduire une figure géométrique, sans donner le système de repérage	M56 et M59 M40	6P, 1S, 2S	7^{e} RMT (@ARMT) http://cii.sesamath.net/	8, 12
Décoration	Grandeurs (mesures d'aire et nombres de pots de peinture)	Calculer l'aire de différentes figures. Établir la relation numérique qui lie les deux grandeurs en jeu.	M56 et M59 M45 et M47	5P, 6P, 1S	- 9^{e} RMT (@ARMT), épreuve 2. - Vernex, M. (2001). Analyse et utilisation du problème *Décoration* du 9^{e} RMT, Math-Ecole, 198, pp. 4-18.	1, 13, 14

					- Jaquet, F. (2005). Successioni proporzionali e variabili didattiche, L'Educazione matematica, 3. - Charnay, R., Combier, G. & Dussuc, MP. (2004). ***Cap maths CM1***. Paris : Hatier	
Truffes au chocolat	Grandeurs (nombre de truffes et masse des différents modes de conditionnement)	Identifier le nombre de truffes contenues dans chacune des boîtes ; Établir une relation numérique entre le résultat de ces dénombrements et les différentes étiquettes à coller sur les emballages ; Calculer la masse de la boîte pour laquelle il n'y a pas d'étiquette.	M56 et M59	6P, 1S, 2S	- 11e RMT (@ARMT), finale. - Vernex, M. (2001). Analyse et utilisation du problème *Décoration* du 9e RMT, Math-Ecole, 198, pp. 4-18. - Jaquet, F. (2005). Successioni proporzionali e variabili didattiche, L'Educazione matematica, 3. - Jaquet, F. (2005). Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT in Jaquet, F. et Grugnetti, L. (2006). RMT : des problèmes à la pratique de la classe. ARMT : Universités de Parme & de Cagliari.	1, 13
Dynamomètre	Grandeurs (masses)	Mesurer la masse de différents produits à l'aide d'un dynamomètre ; Les comparer.	M56 et M59 M45	5P, 6P, 1S	- Equipe de recherche - Pythagore 6e – Paris : Hatier	3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56	M57	M58	M59		

Le sirop

De quoi s'agit-il ?

Cette activité est une adaptation de ERMEL CM1. L'activité décrite peut être résolue, dans un premier temps, en réalisant l'expérience proposée ou en travaillant uniquement au départ de ce support écrit.

Je prépare du sirop dans les bouteilles A et B

	
Bouteille A	Bouteille B

Dans la bouteille A, je mets 4 verres d'eau et 2 morceaux de sucre.
Dans la bouteille B, je mets 12 verres d'eau et 10 morceaux de sucre.

Caroline dit : « C'est le sirop de la bouteille A qui est le plus sucré ! ».
Sophie dit : « C'est le sirop de la bouteille B qui est le plus sucré ! ».
Paul dit : « Les deux sirops sont pareils ! »

Qui a raison ? Explique pourquoi.

Enjeux :

Deux bouteilles contenant de l'eau et du sucre en proportions différentes sont présentées aux élèves. Il s'agit pour eux d'indiquer si les sirops réalisés sont aussi sucrés l'un que l'autre.
Selon la classification proposée par Vergnaud, on se situe ici dans un problème de comparaison de rapports.
Deux domaines de grandeurs sont en jeu : nombre de verres d'eau et nombre de sucres.
Les quantités en jeu (entiers inférieurs à 20) et les rapports simples qui lient ces deux ensembles permettent aux élèves de développer différentes procédures personnelles (voir *Identification des tâches attendues des élèves*). Le choix de ces variables didactiques permet de travailler spécifiquement la proportionnalité.

Comment s'y prendre ?

Cette activité s'adresse prioritairement aux élèves du dernier cycle primaire. Les variables didactiques favorisent l'émergence de procédures personnelles. Lors de la mise en commun, la confrontation de ces différentes procédures devrait permettre aux élèves d'approcher la notion de proportionnalité dans un aspect un peu particulier (comparaison de rapports).

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

- identifier les deux types de grandeurs en jeu (la quantité de verres d'eau et le nombre de sucres) et la valeur des relations numériques qui les lient ;
- établir que celles-ci ne sont pas équivalentes ;
- en déduire que la bouteille B est plus sucrée que la bouteille A ;
- confronter ce constat avec les affirmations présentées dans l'énoncé afin de conclure que « c'est Sophie qui a raison !»

Comment les élèves vont-ils s'y prendre pour comparer le taux de sucre contenu dans chaque sirop ?
L'analyse des productions des élèves fait apparaître les constats suivants :
- il y a d'abord ceux qui arrivent à la réponse correcte mais au départ d'un raisonnement erroné : « le sirop de la bouteille B est plus sucré car il contient plus de sucres ! ». Dans ce cas, la comparaison des quantités de sucre est effectuée sans prendre en considération les quantités d'eau correspondantes ;
- toujours au niveau des raisonnements erronés, il y a ceux qui arrivent à une réponse incorrecte au départ d'un raisonnement qui l'est tout autant : « c'est la même chose car il y a chaque fois deux verres de plus que de morceaux de sucre ! ». Par rapport au raisonnement précédent, la réponse est erronée mais on retrouve cette fois un raisonnement fondé sur une liaison arithmétique entre les deux ensembles de grandeurs ; malheureusement, il s'agit d'une relation additive ;
- au niveau des raisonnements corrects qui aboutissent à de bonnes réponses (sans erreur de calcul), on note les stratégies suivantes :
    - « dans la bouteille A, il y a la moitié de sucres et dans la bouteille B, il y a plus que la moitié de sucres ». Ce raisonnement s'inscrit dans la recherche d'un coefficient de proportionnalité (rapport externe) même si celui-ci n'est pas clairement identifié : « on sait que c'est plus ! », ce qui suffit pour produire la réponse attendue ;
    - « il y a trois fois plus d'eau dans la bouteille B mais il y a cinq fois plus de sucres ». Ce raisonnement s'appuie davantage sur les rapports internes qui lient les grandeurs.
    - Ce travail au départ des rapports internes permet à certains élèves d'arriver à comparer les deux sirops en faisant comme s'ils avaient la même contenance : « Si on mettait 12 verres d'eau dans A, il faudrait 6

morceaux de sucre. C'est quatre de moins que pour le sirop B. Le sirop A est donc moins sucré. »

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Cette situation peut être mise en scène réellement. L'occasion est ainsi offerte aux élèves de goûter les différents sirops et de constater la différence de taux de sucre. Pour essayer de les amener à visualiser les opérations effectuées, il peut être intéressant de représenter graphiquement les manipulations effectuées (4 verres et 2 sucres d'une part et, d'autre part, 12 verres et 10 sucres).

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Au niveau de la mise en commun, l'accent doit être mis sur la confrontation des démarches de résolution utilisées par les élèves.
Pour organiser cette phase un peu délicate, il est sans doute utile de commencer par un recensement des élèves qui sont d'accord avec chacune des trois affirmations (celle de Caroline, de Sophie et de Paul).
L'enseignant note le nombre d'élèves favorables à chacune des propositions puis, en dessous, et sans faire de commentaires, les arguments développés par les élèves pour étayer ce choix.
Une fois tous les arguments notés, la discussion peut commencer. Une manière simple de procéder : demander aux élèves si, au vu de ce qui a été dit, certains ont envie de changer d'avis et, si oui, quels sont les arguments qui les ont convaincus.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

le but du débat décrit au point précédent est de faire apparaître la notion de proportionnalité en jeu dans la résolution de ce problème et la mise en évidence d'un raisonnement du type « s'il y a trois fois plus de … alors il faut trois fois plus de … ». Il est alors possible de rapprocher la résolution de ce problème à d'autres types de problèmes déjà résolus par les élèves.

Quels sont les prolongements possibles ?

Donner aux élèves un autre problème à résoudre individuellement. Le contexte reste identique (verres d'eau et sucres) mais la structure du problème change un peu : il s'agit cette fois d'un problème classique de recherche de quatrième proportionnelle.

Exemple de problème :

Dans la bouteille A, je mets 5 verres d'eau et 4 morceaux de sucre.
Dans la bouteille B, je mets 30 verres d'eau et du sucre.

Combien dois-je mettre de sucres dans la bouteille B pour que les deux sirops soient aussi sucrés ?
Explique pourquoi.

On notera ici des changements au niveau des variables didactiques : outre la structure du problème, le choix des nombres 5 et 4 est destiné à favoriser un raisonnement basé sur les rapports internes.

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement :

- proportionnalité simple
- comparaison de rapports
- rapports externe et internes

Source(s) :

ERMEL CM1 (2005)

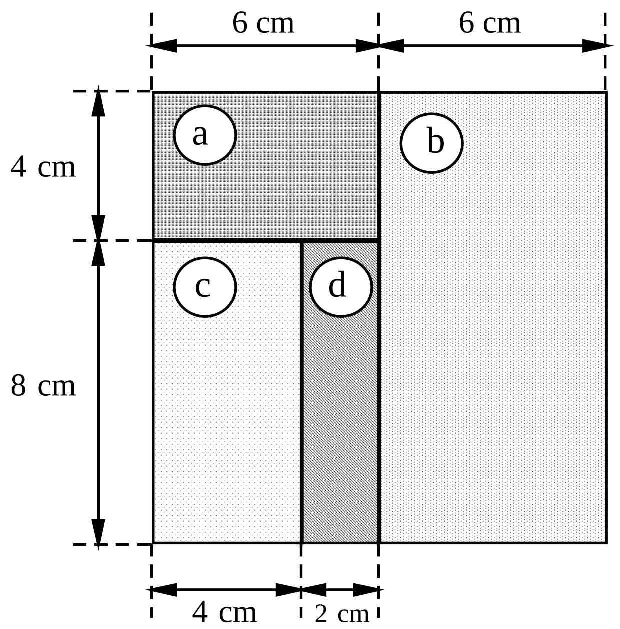
3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58		M59

Le puzzle

De quoi s'agit-il ?

Cette activité est une adaptation de la situation « agrandissement d'un puzzle » développée par Brousseau (1981).
Cette fois, le puzzle est composé de 4 rectangles de dimensions différentes. Connaissant la valeur d'une des dimensions, les élèves doivent agrandir toutes les pièces de ce puzzle.

Voici un puzzle constitué de 4 pièces a, b, c, d :



Vous devez construire un agrandissement de ce puzzle. La seule information qui vous est donnée est la suivante : le segment qui mesure 4 cm sur le modèle reçu devra en mesurer 5 sur le puzzle agrandi.

Enjeux :

Cette situation propose aux élèves de réaliser des agrandissements de figures géométriques (des rectangles). Au delà des compétences plus spécifiques liées à la proportionnalité, une telle activité permet également de développer la compétence suivante :

Solides et figures, dégager des régularités, des propriétés, argumenter :

- M40 : Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures

Comment s'y prendre ?

Cette activité étant complexe, il est bon de permettre dans un premier temps aux élèves de se familiariser avec le matériel sur lequel ils vont travailler.

Mise en situation :

<u>1. Un temps de familiarisation</u>

- Les élèves sont répartis par groupes de 4 (un élève par pièce, idéalement).
- Chaque groupe reçoit un puzzle à découper et à reconstituer (voir modèle ci-dessus. Les mesures ne sont évidemment pas indiquées sur chacune des pièces ; par contre, celles-ci sont identifiées au moyen des lettres a, b, c et d).
- L'enseignant place au tableau une copie de ce puzzle de départ.
- Après avoir découpé le puzzle, chaque enfant prend une pièce, en mesure les dimensions et les note sur la pièce (dimensions en cm).
- Une première mise en commun permet de vérifier les mesures et de les noter au TN sur le puzzle affiché.

<u>2. Agrandir le puzzle</u>

- Montrer aux élèves un exemple d'agrandissement du puzzle qu'ils ont devant eux.
- L'afficher au TN (à côté du puzzle initial) et leur donner la consigne suivante : « *J'ai réalisé un agrandissement de ce puzzle. Je vous demande d'agrandir à votre tour votre puzzle de manière à ce que vous obteniez le même résultat que moi. Pour y arriver, je vous donne un seul indice : le côté de ce rectangle, qui mesurait 4 cm, mesure 5 cm sur le puzzle agrand*i. *Une fois que vous avez terminé, vous collez les différentes pièces agrandies de manière à reconstituer le puzzle et vous désignez un rapporteur chargé d'expliquer comment vous avez procédé* ».

<u>3. Première mise en commun</u>

Il convient dans un premier temps de laisser les élèves se débrouiller seuls.
Toutefois, l'expérience montre que certains élèves sont assez vite démunis lorsqu'ils constatent que la solution « ajouter 1 cm à chaque segment » ne fonctionne pas.
Si un trop grand nombre de groupes bloque sur cette résolution erronée, il est utile d'organiser une première mise en commun, non pas pour mettre en évidence des « méthodes qui fonctionnent » mais davantage pour permettre aux élèves d'expliquer les difficultés qu'ils rencontrent.
Il est alors possible de leur venir en aide, sans dénaturer la tâche de résolution, en leur demandant par exemple d'observer la pièce d.

> Les dimensions de celles-ci doivent passer de 2 sur 8 cm à, normalement, 2,5 sur 12 cm ...
> Si les élèves n'ont ajouté qu'un cm à chaque côté, ils sont en présence d'un rectangle de 3 sur 9 dont l'allure générale est assez différente de celle de départ.
> L'observation des différences peut mettre les élèves sur la voie .... d'autant que certains vont peut être assez vite faire le lien entre 4 cm qui en deviennent 5 ... et deux qui en deviennent 2,5 cm (prise de conscience des propriétés de linéarité).

Cette première mise en commun ne doit pas être trop longue et doit permettre aux élèves de reprendre rapidement leur recherche.

Identification des tâches attendues des élèves :

Grâce au support proposé (il n'est pas possible de reconstituer le puzzle si les démarches d'agrandissement ne sont pas correctes), les élèves doivent prendre conscience que l'agrandissement des différents rectangles du puzzle ne se réalise pas en ajoutant simplement un cm à la longueur de chacun des côtés.
Ils doivent trouver une autre procédure. Le choix des nombres en jeu n'étant pas laissé au hasard (les mesures des côtés valant respectivement 2, 4, 6 et 8 cm), il est vraisemblable que les élèves vont développer des stratégies de résolution faisant intervenir les propriétés de linéarité. Le coefficient de proportionnalité est en effet de 1,25 ... mais il ne faut pas attendre des élèves du primaire qu'ils constatent d'emblée qu'ajouter le nombre et le quart du nombre correspond à une multiplication par 1,25 ... ou 5/4.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Il a été demandé aux élèves de coller leur agrandissement et d'expliquer leurs démarches. Cette mise en commun a pour objet d'analyser les différentes méthodes utilisées en distinguant celles qui ont réussi de celles qui échouent (autrement dit celles qui ne permettent pas de reconstituer le puzzle de départ).
Il est préférable de commencer par les procédures qui échouent et de regrouper les stratégies qui se ressemblent.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

A ce stade de l'activité, il est intéressant que les élèves dégagent les éléments suivants :

- agrandir, ce n'est pas ajouter la même chose à toutes les dimensions ; de la même manière, pour réduire une figure, il ne s'agit pas de retrancher la même chose à toutes les dimensions ;
- pour agrandir, on peut regarder les dimensions du puzzle : celles qui sont les mêmes sur le petit puzzle seront les mêmes sur le grand. De même, si la mesure d'un côté est deux fois plus petite qu'une autre sur le petit puzzle, elle sera également deux fois plus petite sur le puzzle agrandi.

La mise en forme des données est également importante. Ainsi, un tableau de ce type sera progressivement construit avec les élèves.

Dimensions du puzzle de départ	Dimensions du puzzle agrandi
4 cm	5 cm
8 cm	10 cm
6 cm	7,5 cm
2 cm	2,5 cm

Il permettra de dégager les rapports internes puis externe.
Avec les élèves du primaire, même si le tableau ci-dessus s'y prête bien, il vaut mieux ne pas relever les propriétés de linéarité. En effet, la situation « puzzle » est prévue pour faire obstacle à une stratégie d'agrandissement de type « additif ». Constater que la dimension 8 cm devient, une fois agrandie, 10 cm (soit l'addition, par exemple, des dimensions correspondant à 4 cm et 4 cm ou à 6 cm et 2 cm) risque de grandement perturber les élèves.

Quels sont les prolongements possibles ?

1. Des variations autour du problème de départ

Selon les difficultés rencontrées par les élèves, cette activité peut être prolongée par de nouvelles propositions d'agrandissement, soit « faciles » (4 cm deviennent 6 cm), soit plus difficiles (4 cm deviennent 7 cm).
Dans ce cas, les élèves doivent chercher les dimensions des pièces du puzzle agrandi sans réaliser le puzzle. Il est intéressant de voir dans quelle mesure, ils utilisent un tableau pour mettre en forme leurs données. On peut aussi leur proposer d'agrandir des pièces d'autres dimensions.

2. Proposer d'autres problèmes aux élèves

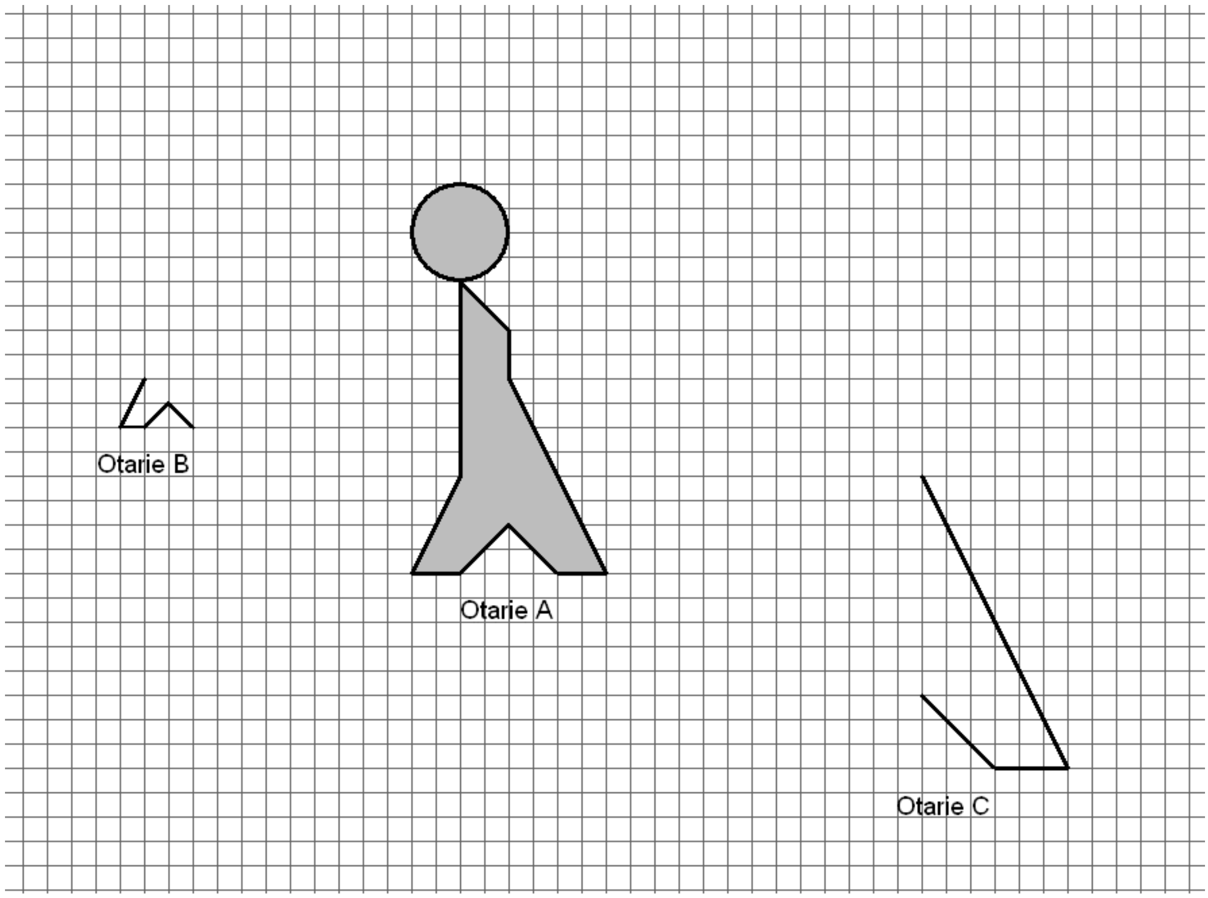
De nouveau, en fonction des difficultés rencontrées par les élèves, il est possible de proposer des activités de complexité différente.
Ainsi, la résolution du problème « agrandissement d'une photo de Leila » est sans doute plus complexe que celle de « l'otarie ».

a) Agrandissement d'une photo

J'aimerais réaliser un agrandissement d'une photo de ma copine Leila. La photo a un format de 8 cm sur 12 cm. Je voudrais que la largeur de la photo agrandie soit de 20 cm. Quelle sera sa longueur ?
Sur cette photo, Leila mesure 9,2 cm. Quelle sera sa taille sur l'agrandissement ?

b) L'otarie (source : IREM Rennes, Mathenpoche 6^{e})

Termine chaque dessin pour obtenir une otarie B réduite et une otarie C agrandie "de même forme".



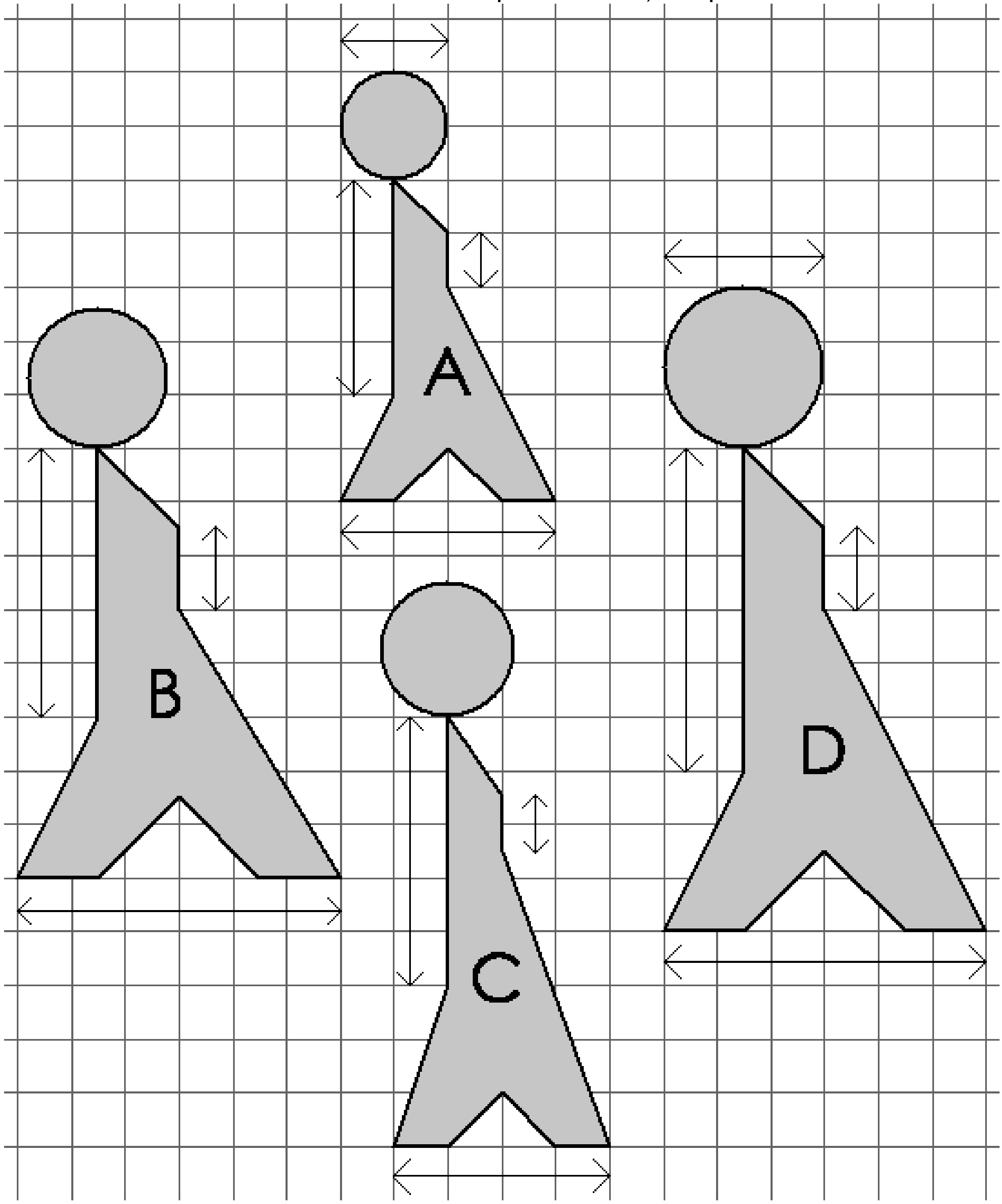
Complète les phrases suivantes :

Pour obtenir les longueurs de l'otarie B, j'ai multiplié les longueurs de l'otarie A par ....

Pour obtenir les longueurs de l'otarie C, j'ai multiplié les longueurs de l'otarie A par ....

Comment obtient-on l'otarie C à partir de l'otarie B ?
....
....
....
....

L'un des 3 dessins B, C, D est un agrandissement du dessin A (c'est-à-dire que l'otarie dessinée a exactement la "même forme" que l'otarie A). Laquelle ?



Pour cet agrandissement, toutes les longueurs de l'otarie A ont été multipliées par ....

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement :
- proportionnalité simple
- cadre géométrique
- rapport interne et propriétés de linéarité

Source(s) :

Brousseau (1981)
IREM Rennes, Mathenpoche 6^e
ERMEL CM2 (2005)

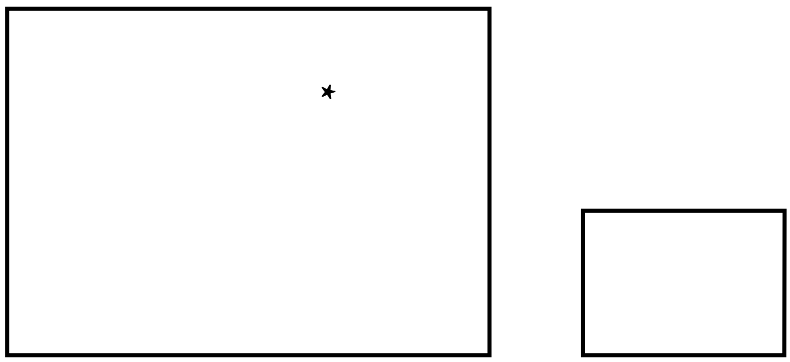
3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56	M57	M58	M59		

Où il faut faire mouche

De quoi s'agit-il ?

Le point de départ est un problème proposé dans le cadre du 7e Rallye Mathématique Transalpin. Il peut être proposé aux élèves de 6P mais il s'adresse prioritairement aux élèves du premier cycle du secondaire.

OÙ IL FAUT FAIRE MOUCHE (@ARMT Cat. 6, 7, 8)



Le petit rectangle de droite, est une photographie du grand rectangle de gauche.
Au moment où la photographie a été prise, une mouche s'était posée sur le grand rectangle.
Le photographe a pris soin de l'effacer lors du développement de la photographie.
Replacez la mouche sur la photographie.
Expliquez comment vous avez procédé.

Enjeux :

Cette situation propose aux élèves de réduire une figure géométrique. Au delà des compétences plus spécifiques liées à la proportionnalité, une telle activité permet également de développer la compétence suivante :

Solides et figures, dégager des régularités, des propriétés, argumenter :

- M40 : Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures

Ce problème peut être vu comme un prolongement de « puzzle » puisque le système de repérage est ici à construire par les enfants.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

- Au niveau de ***l'enseignement primaire*** : les élèves doivent trouver l'***échelle*** ; il est donc nécessaire de prévoir un rapport entier entre les deux rectangles (adapter au besoin les mesures).
- Au niveau de ***l'enseignement secondaire*** : les notions d'***échelle*** et de ***distance*** (en particulier, la notion de distance entre un point et une droite ; soit la distance entre le point et le pied de la perpendiculaire abaissée ou élevée du point sur la droite).

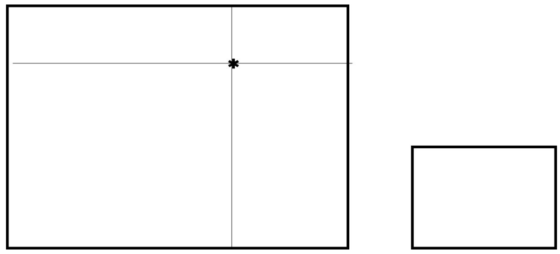
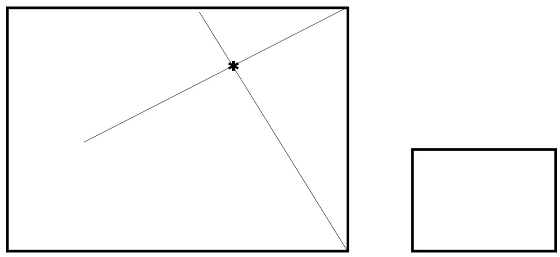
Comment s'y prendre ?

L'organisation du dispositif méthodologique à mettre en place (questions à poser aux élèves, indications pour l'organisation du travail, ...) peut être structurée au départ des éléments-clés suivants :

Mise en situation :

Dernier cycle primaire (10/12 ans)	***Premier cycle secondaire (12/14 ans)***
Proposer aux élèves de travailler seuls dans un premier temps avant de les placer par groupes de trois. Adapter la situation de manière à proposer un rapport entier entre les deux rectangles.	Placer les élèves en duos et leur demander de résoudre le problème (10 minutes)

Identification des tâches attendues des élèves :

<table>
<tr><th>Dernier cycle primaire (10/12 ans)</th><th>Premier cycle secondaire (12/14 ans)</th></tr>
<tr><td></td><td>
Procédures attendues qui mettent en jeu la proportionnalité :
Prendre les distances de la mouche par rapport aux côtés (tracer les perpendiculaires, ...) ;

Déterminer l'échelle ;
Construire un tableau de proportionnalité ;
Utiliser ces informations pour replacer la mouche dans le petit rectangle.
Une autre possibilité ne faisant pas intervenir la proportionnalité :
travailler au départ de la mesure de l'amplitude des angles

</td></tr>
</table>

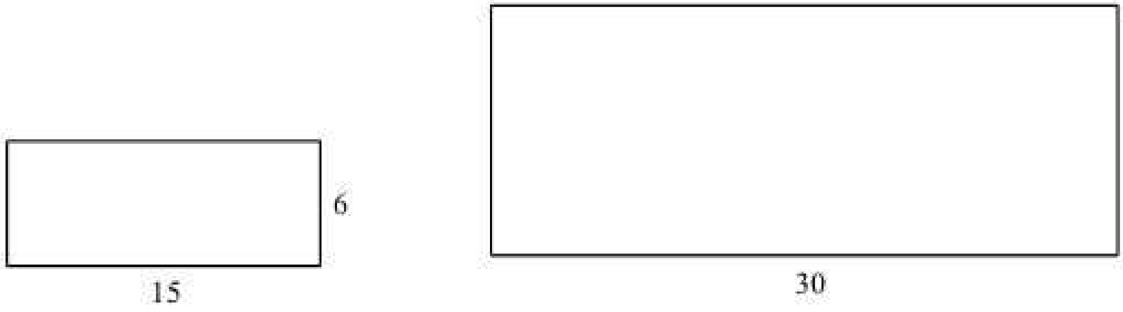
Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Pour les élèves qui ne s'en sortent pas, il peut être utile de leur proposer les situations suivantes avant de revenir au problème de départ :

Exercice :

Pour chaque situation, le rectangle de droite est un agrandissement ou une réduction du rectangle de gauche.
Calcule la longueur ou la largeur manquante du rectangle de droite.
Attention : l'unité de longueur n'est pas le centimètre et est différente pour chaque situation.

Situation 1 :

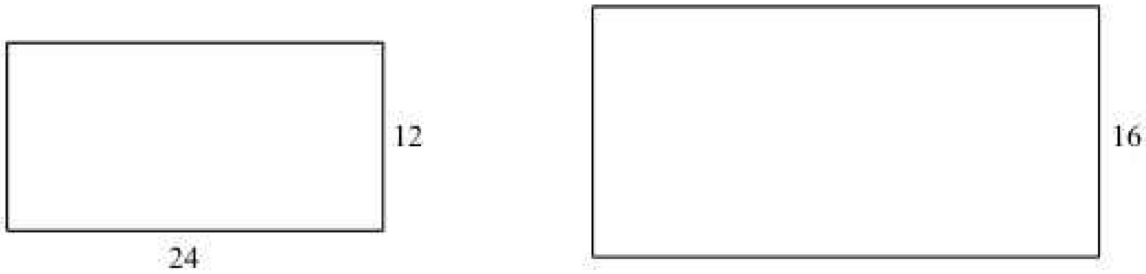


Explique ce que tu as fait : ....

....

....

Situation 2 :



Explique ce que tu as fait : ....

....

....

Situation 3 :

Explique ce que tu as fait : ....

....

....

source : http://cii.sesamath.net/

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Dernier cycle primaire (10/12 ans)	*Premier cycle secondaire (12/14 ans)*
	• construire un tableau avec les grandeurs ; • prendre d'autres distances si nécessaire (si seules les distances par rapport aux côtés les plus proches ont été choisies, demander aux élèves de prendre les distances par rapport à d'autres endroits) ; • identifier les rapports internes ; • expliciter le rapport externe.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Dernier cycle primaire (10/12 ans)	*Premier cycle secondaire (12/14 ans)*
	• l'échelle est le rapport entre l'agrandissement (la réduction) et l'original ; • ce rapport est constant ; il a pour nom le coefficient de proportionnalité ; • deux grandeurs sont proportionnelles si ce rapport est constant.

Quels sont les prolongements possibles ?

Dernier cycle primaire (10/12 ans)	*Premier cycle secondaire (12/14 ans)*
	• prendre d'autres mesures afin de mettre en évidence que les mesures d'angles ne sont pas proportionnelles ; les angles conservent la même amplitude au fil des agrandissements et réductions.

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement :
- proportionnalité simple
- cadre géométrique

Source(s) :

7e RMT (@ARMT)
Les 3 situations proposées en guise de remédiation sont extraites de Sesamath (http://cii.sesamath.net/).

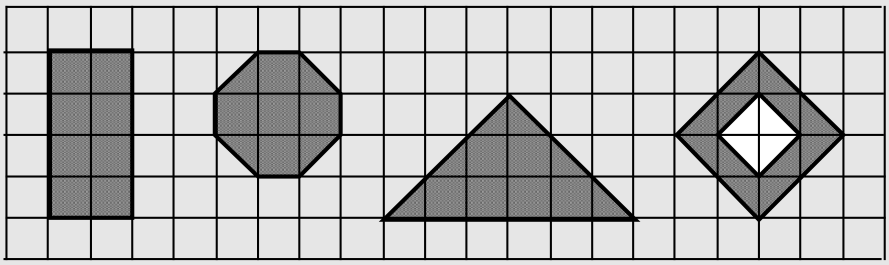
3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58	M59	

Décoration

De quoi s'agit-il ?

Le point de départ est un problème proposé dans le cadre du 9e Rallye Mathématique Transalpin.
Il s'agit d'un ***problème de recherche*** dont le mode de résolution experte met notamment en jeu la ***proportionnalité***.

DÉCORATION (Cat. 5, 6, 7)
Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur :
- 18 pots de rouge pour une des figures
- 27 pots de jaune pour une autre figure
- 21 pots de bleu pour une autre figure,
- des pots de noir pour la figure qui reste.

À la fin de son travail, tous les pots étaient vides.
Indiquez la couleur de chaque figure.
Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

Enjeux :

Pour résoudre ce problème, la première étape consiste à calculer l'aire des différentes figures présentées. Ensuite, les élèves doivent établir la relation numérique qui lie ces mesures d'aire et le nombre de pots de peinture nécessaires.

Sur un plan mathématique, on se situe donc dans le domaine des grandeurs ; soit :
- définir une unité de mesure d'aires ;
- comparer et classer des mesures d'aires ;
- utiliser la proportionnalité (première approche).

Selon les Socles de compétences, au delà des compétences plus spécifiques liées à la proportionnalité, les principales compétences visées par cette activité sont :

Les grandeurs, comparer et mesurer *(mesure d'aires) :*

- M45 : Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat (longueurs, capacités, masses, aires, volumes, durées, coût).

- M47 : Construire et utiliser des démarches pour calculer des périmètres, des aires et des volumes.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Ce problème a pour objectif principal une première approche de la proportionnalité. Toutefois, pour le résoudre, les élèves doivent d'abord être capables de déterminer l'aire de figures au départ de recouvrement et/ou de comptage d'unités.
Ils ne doivent pas calculer l'aire au départ d'une formule exprimée au départ des unités conventionnelles (m^2, cm^2, dm^2 , ...) comme cela est classiquement demandé.
Cette démarche n'est peut-être pas habituelle pour eux. On trouvera dans la section « Que faire si les élèves ne 'rentrent' pas dans le problème ? », des exemples d'activités de re-médiation à proposer aux élèves qui éprouvent des difficultés dans le calcul de l'aire des différentes figures.

Comment s'y prendre ?

Cette activité est prévue pour des élèves de la 5P à la 1S ... soit des élèves qui présentent des niveaux de compétences mathématiques en principe assez différents.
La démarche proposée est davantage ciblée pour des élèves du dernier cycle de l'enseignement primaire. Il va de soi que ce canevas est proposé à titre indicatif.

Mise en situation :

- Mettre les élèves par deux puis leur distribuer une feuille sur laquelle est reproduit le problème en leur précisant qu'ils ont 20 minutes pour le résoudre.
- Préciser également qu'il ne leur sera pas donné d'autres indications ; les élèves doivent prendre en charge seuls l'organisation de l'ensemble des tâches de résolution.

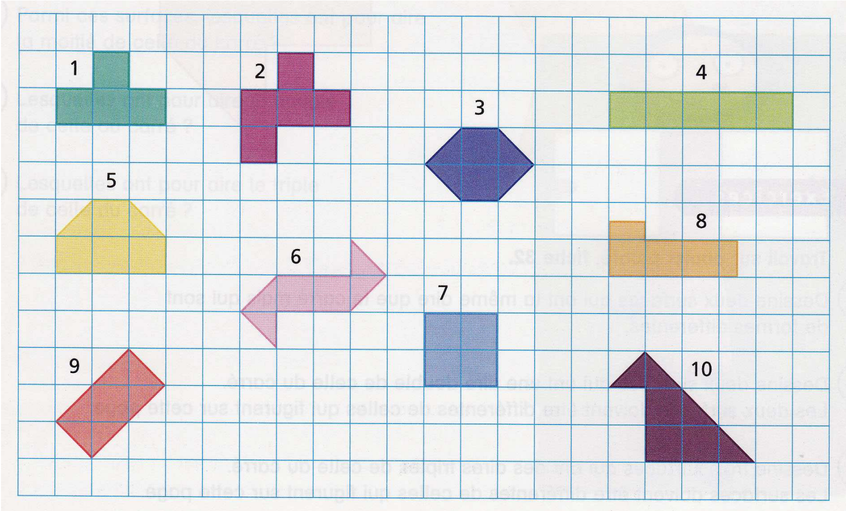
Identification des tâches attendues des élèves :

- Choisir une unité d'aire ;
- Utiliser celle-ci pour calculer le nombre d'unités dans chacune des figures ;
- Classer ces figures selon leur aire, en triangles (double carré = 12 ; octogone = 14 ; rectangle = 16 ; triangle = 18) ou en carrés (double carré = 6 ; octogone = 7 ; rectangle = 8 ; triangle = 9).
- Mettre en relation ces deux ensembles de données numériques afin d'identifier les relations numériques qui les lient :
    - o Etablir la correspondance entre les aires de figures et le nombre de pots de peinture (double carré en rouge, octogone en bleu, rectangle en noir et triangle en jaune).
    - o Déterminer le nombre de pots de peinture noire (24).

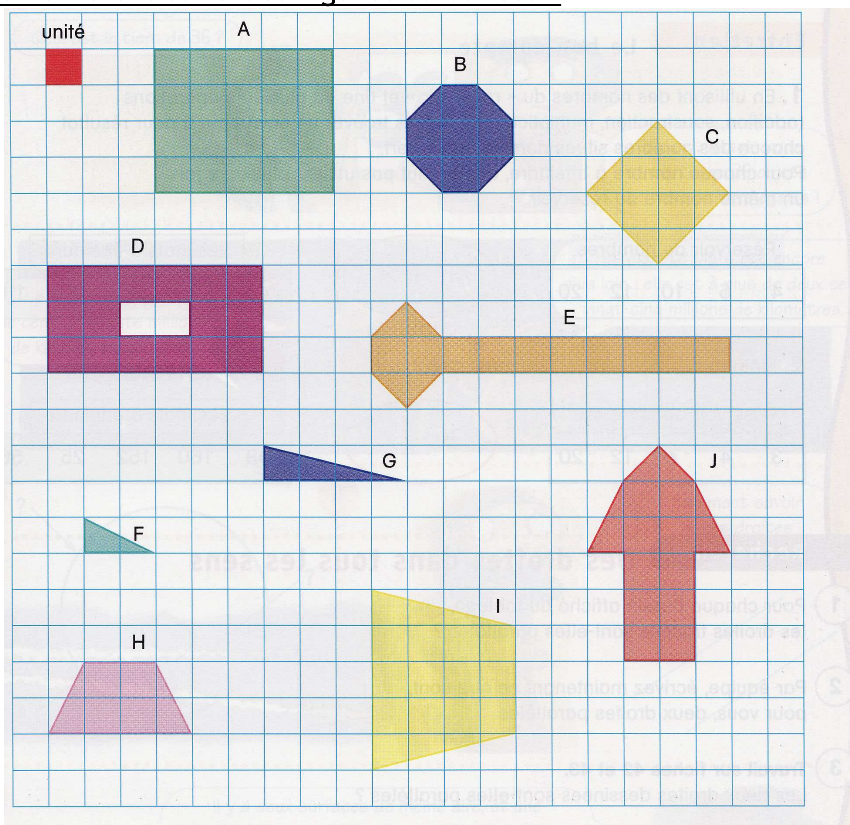
Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Comme cela a été précisé, les élèves doivent être capables de calculer l'aire d'une figure en choisissant un étalon (dans ce cas-ci un rectangle ou un triangle). Cela peut poser des difficultés aux élèves habitués à concevoir la mesure d'aire uniquement au départ des formules classiques.
Pour ces élèves-là, il est peut être utile de proposer, en guise de remédiation, des activités[15] autour des supports suivants. Ensuite, il leur sera demandé de revenir à la résolution du problème initial.

1. Quelles surfaces ont la même aire ?



2. Quelle est l'aire de chacune des figures suivantes ?



[15] Source : Cap maths CM1

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Pour faciliter l'organisation de la phase de mise en commun, il est sans doute utile de la faire précéder par une mise en commun à 4 : deux duos se rassemblent, comparent et confrontent leurs démarches et leurs solutions.
Au niveau de la mise en commun, l'accent doit sans doute être mis sur les démarches de résolution utilisées par les élèves.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

La réponse à cette question varie selon les intentions de l'enseignant et la manière dont il va approfondir le problème (voir section « Quels sont les prolongements possibles ? »).

Quels sont les prolongements possibles ?

Décoration permet une première approche de la notion de proportionnalité. Toufefois, la nature des nombres en jeu permet une résolution intuitive : les élèves qui résolvent correctement ce type de problème ne sont pas nécessairement conscients qu'ils ont eu recours intuitivement à la proportionnalité.

Si l'objectif de l'enseignant est de faire prendre conscience aux élèves de cette notion centrale en mathématiques, il importe de poursuivre la phase de résolution par diverses activités de structuration.

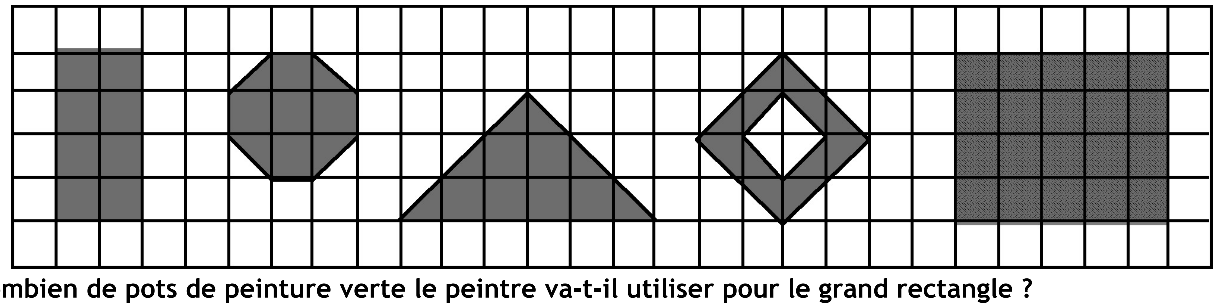
La méthodologie proposée ici s'inspire des travaux de Vernex (2001) et de Jaquet (2005) qui ont proposé différentes variantes au départ du problème ***Décoration***.

<u>1. Une première variation : proposer d'autres figures à peindre</u>

Objectif : vérifier la manière dont les élèves sont capables de généraliser leur démarche pour calculer le nombre de pots de peinture nécessaires pour recouvrir d'autres figures.
Comme point de départ, on peut partir de l'exemple ci-dessous dans lequel les élèves doivent calculer le nombre de pots de peinture nécessaires pour recouvrir une figure de 20 carrés.

DÉCORATION (variante 1)

Le peintre remarque qu'il reste encore de la place sur le mur, à droite. Il décide de peindre encore un grand rectangle, de 4 carreaux de large et de 5 carreaux de long, avec de la peinture verte.



Combien de pots de peinture verte le peintre va-t-il utiliser pour le grand rectangle ?
Explique**z comment vous avez trouvé.**

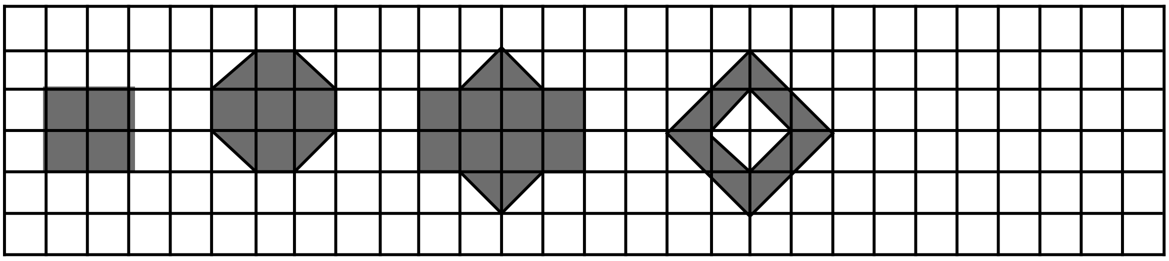
Ce nombre de 20 carrés n'est pas choisi au hasard ; ce n'est pas un multiple direct des mesures d'aire des autres figures. Ce qui est visé ici, c'est bien le rapport externe qui lie les deux ensembles de mesure. Ce dernier peut être exprimé de la manière suivante : « il faut trois pots de peinture pour peindre un carré ».
Ce rapport peut être mis en évidence au départ d'un tableau de correspondance ... qui va permettre d'imaginer la quantité de couleur nécessaire pour des figures qui ne seront cette fois plus nécessairement représentées.

Aires (Nombre de carrés)	X 3	Nombre de pots
6	==>	18
7	==>	21
8	==>	24
9	==>	27
20	==>	?

Pour aider les élèves dans cette tâche, on peut leur proposer cette nouvelle variante qui propose d'autres figures à peindre :

DÉCORATION (variante 2)

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur :

- 12 pots de rouge pour une des figures
- 30 pots de jaune pour une autre figure
- 18 pots de bleu pour une autre figure,
- des pots de noir pour la figure qui reste.

À la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

Indiquez la couleur de chaque figure.

Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

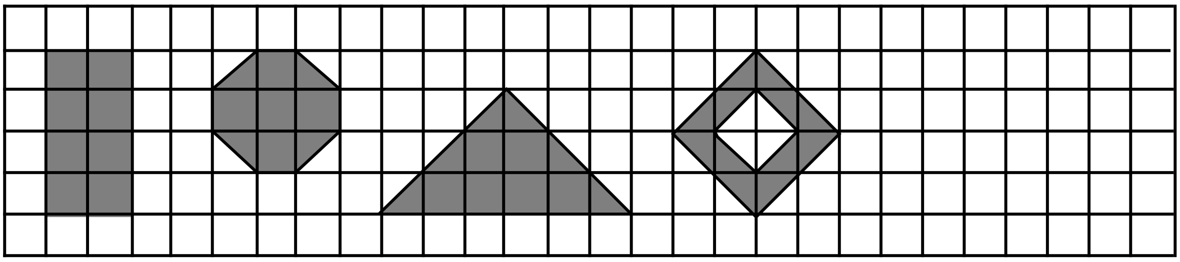
2. Une variante plus complexe!

La démarche de généralisation proposée ici ne doit pas aboutir à la mise en évidence d'un seul rapport externe possible pour associer numériquement l'aire de figures à peindre et le nombre de pots de peinture nécessaires.

Dans cette nouvelle variante du problème, on a modifié les paramètres suivants :
- le nombre de pots de peinture nécessaires pour peindre chacune des figures (le rapport externe est de 12 dans ce cas-ci) ;
- la position de l'inconnue (cette fois, le nombre de pots inconnu concerne la plus grande figure à peindre).

DÉCORATION (variante 3)

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des petits pots de peinture de même grandeur :

- 72 pots de rouge pour une des figures
- 96 pots de jaune pour une autre figure
- 84 pots de bleu pour une autre figure,
- des pots de noir pour la figure qui reste.

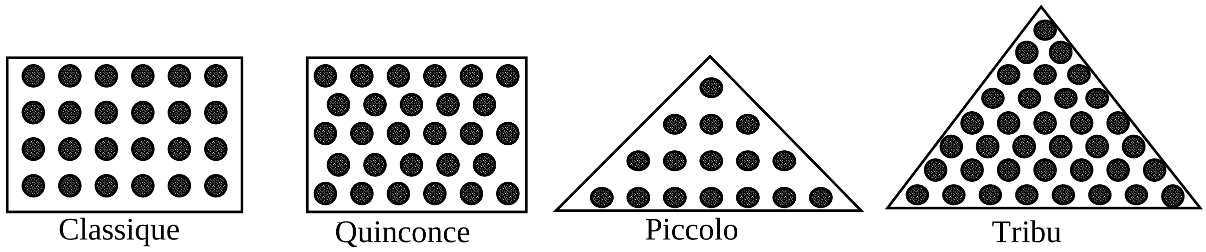
À la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

Indiquez la couleur de chaque figure.
Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

3. Une dernière variante plus radicale !

Pour tenter d'appréhender ce que les élèves ont retenu de cette activité, il est possible de proposer un nouveau problème aux élèves ; celui-ci met en jeu une procédure de résolution analogue mais dans un contexte tout à fait différent (la structure est identique mais l'habillage change). Il s'agit d'un autre problème du RMT : « Truffes au chocolat », proposé lors de la finale du 11e RMT[16].

TRUFFES AU CHOCOLAT (Cat. 6, 7, 8) @ARMT
Voici quelques emballages de la maison Truffardi, qui contiennent tous le même type de truffes au chocolat :



Et voici les étiquettes qui indiquent le poids des truffes, à coller sur les emballages :

540 g

810 g

630 g

Mais elles sont en désordre et il en manque une.

Trouvez l'emballage pour lequel il n'y a pas d'étiquette et indiquez son poids.
Expliquez comment vous avez trouvé.

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement :
- proportionnalité simple
- cadre grandeurs
- rapports internes et rapport externe

Source(s) :

Le problème ***Décoration*** est extrait de l'épreuve 2 du 9e RMT.
Les éléments d'analyse proposés prennent appui sur des recherches effectuées par :
- Vernex, M. (2001). Analyse et utilisation du problème *Décoration* du 9e RMT, Math-Ecole, 198, pp. 4-18.
- Jaquet, F. (2005). Successioni proporzionali e variabili didattiche, L'Educazione matematica, 3.

Les activités de remédiation pour le calcul de l'aire sont extraits de : Charnay, R., Combier, G. & Dussuc, MP. (2004). ***Cap maths CM1***. Paris : Hatier

[16] L'exploitation de ce problème fait l'objet d'une fiche particulière.

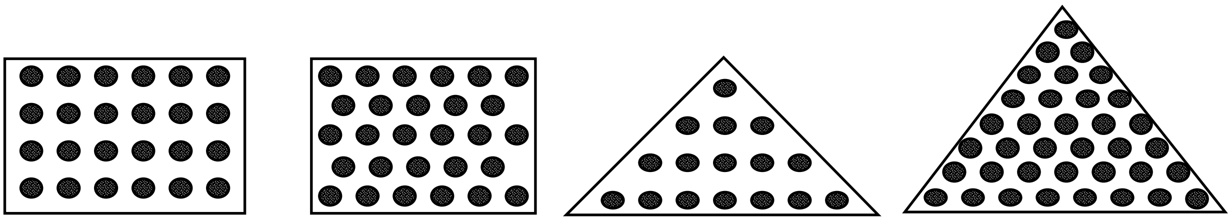
3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56	M57	M58	M59		

Truffes au chocolat

De quoi s'agit-il ?

Truffes au chocolat est un ***problème de recherche*** proposé lors de la finale du 11e Rallye Mathématique Transalpin (RMT). Il est destiné aux classes de 6e année primaire et au premier cycle de l'enseignement secondaire.

TRUFFES AU CHOCOLAT (Cat. 6, 7, 8) @ARMT
Voici quelques emballages de la maison Truffardi, qui contiennent tous le même type de truffes au chocolat :



Classique — Quinconce — Piccolo — Tribu

Et voici les étiquettes qui indiquent le poids des truffes, à coller sur les emballages :

Mais elles sont en désordre et il en manque une.

540 g

810 g

630 g

Trouvez l'emballage pour lequel il n'y a pas d'étiquette et indiquez son poids.
Expliquez comment vous avez trouvé.

Enjeux :

La résolution de ce problème passe par les étapes suivantes :

- une première étape consiste à identifier le nombre de truffes contenues dans chacune des boîtes ;
- les élèves doivent ensuite établir une relation numérique entre le résultat de ces dénombrements et les différentes étiquettes à coller sur les emballages ;
- le rapport identifié, les élèves doivent calculer la masse de la boîte pour laquelle il n'y a pas d'étiquette.

Deux domaines de grandeur sont en jeu : le nombre de truffes et la masse des différents modes de conditionnement.
Les tâches de dénombrement et de classement de nombres étant assez simples, il ne paraît pas utile de préciser d'autres compétences que celles liées explicitement à la recherche de la relation numérique qui relie ces deux ensembles de nombres.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

En réalité, ***Truffes au chocolat*** est une variante proposée dans le prolongement de l'exploitation du problème ***Décoration*** ; ***Truffes au chocolat*** met en jeu une procédure de résolution analogue mais dans un contexte tout à fait différent. La structure du problème est identique mais l'habillage est modifié. Le but poursuivi par ces modifications est de complexifier les tâches de résolution attendues.

Comment s'y prendre ?

Initialement ce problème est prévu pour des élèves de la 6P à la 2S ... soit des élèves qui présentent des niveaux de compétences mathématiques en principe assez différents. La démarche proposée ici est davantage ciblée pour des élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire. Les différentes expérimentations menées dans les classes des enseignants de l'espace de collaboration montrent que ce problème est une bonne situation de départ pour aborder la proportionnalité avec les élèves de ce niveau d'enseignement. Il est assez (voire trop) difficile pour des élèves de 6P. Pour ces derniers, il sera éventuellement proposé comme défi dans le prolongement direct de la résolution du problème ***Décoration*** (comme cela est proposé sur cette fiche).

Mise en situation :

- mettre les élèves par deux puis leur distribuer une feuille sur laquelle est reproduit le problème en leur précisant qu'ils ont 20 minutes pour le résoudre.
- préciser également qu'il ne leur sera pas donné d'autres indications ; les élèves doivent prendre en charge seuls l'organisation de l'ensemble des tâches de résolution.

Identification des tâches attendues des élèves :

- identifier les deux types de grandeur en jeu (la quantité de truffes par boîte et la masse de chacun des conditionnements) entre lesquels ils vont devoir établir une relation numérique ;
- dénombrer le nombre de truffes contenues dans chaque boîte et les ordonner de la plus petite à la plus grande (Piccolo : 16 truffes, Classique : 24 truffes, Quinconce : 28 truffes et Tribu : 36 truffes) ;
- ordonner les trois étiquettes de masses ;
- établir la correspondance entre ces deux ensembles de données. Contrairement à ce qui se passe dans un problème classique de recherche de 4^{e} proportionnelle, les élèves ne disposent pas d'indication sur la position de l'inconnue. C'est à eux de la trouver au départ d'une démarche de type « essais-erreurs ». Dans ***Truffes au chocolat***, il y a 4 quantités différentes de truffes et trois masses identifiées. Cela définit donc 4 hypothèses sur la position de l'inconnue. Celles-ci peuvent être formalisées de la manière suivante :

Hypothèse 1	16	24	28	36
	?	540	630	810
Hypothèse 2	16	24	28	36
	540	?	630	810
Hypothèse 3	16	24	28	36
	540	630	?	810
Hypothèse 4	16	24	28	36
	540	630	810	?

Pour choisir la « bonne » hypothèse, les élèves doivent identifier celle pour laquelle la relation « nombre de truffes – masse » est proportionnelle ; c'est-à-dire celle qui donne, pour chaque couple de nombres, un même facteur (ou rapport externe) ; soit 540 : 24 = 630 : 28 = 810 : 36 = 22,5

- déduire de cette mise en correspondance que l'étiquette manquante est celle de la boîte Piccolo et utiliser le rapport externe pour calculer sa masse. Celle-ci vaut 360g ; soit le résultat de la multiplication du nombre de truffes (16) par le coefficient externe (22,5).

Malgré les précautions prises, il est à noter qu'une procédure davantage intuitive peut être développée par les élèves. La mise en correspondance des deux ensembles ordonnés de nombres peut faire apparaître que le premier ensemble est constitué de multiples de 4 et le second des mêmes multiples de 90.

Nombre de truffes
16
24
28
36

Masses des boîtes
?
540
630
810

Au départ de ce constat, il est possible de déduire que la masse de 4 truffes est de 90g et donc qu'une truffe pèse 22,5g.

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Comme cela a été précisé, il est possible de proposer aux élèves de résoudre au préalable une des variantes ou la situation initiale du problème ***Décoration***.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Au niveau de la mise en commun, l'accent doit être mis sur la confrontation des démarches de résolution utilisées par les élèves. Au premier cycle de l'enseignement secondaire, une attention particulière sera accordée à la manière de formaliser ces démarches.
Il est par exemple important de faire apparaître les données sous forme de tableaux et mettre en évidence pourquoi le positionnement de l'inconnue à une autre place n'est pas correcte.
Ainsi, par exemple, cette solution, souvent proposée par les élèves, n'est pas correcte :

Nombre de truffes		Masses des boîtes
16	x 33,75	540
24	x 26,25	630
28	x 25,7	? (720)
36	x 22,5	810

Le coefficient de proportionnalité n'est pas constant ; ce n'est donc pas une relation de proportionnalité qui unit ces deux ensembles de nombres et la solution proposée n'est donc pas correcte.

Lors de la phase de mise en commun, il est également important de procéder à des variations de manière à généraliser progressivement les rapports à d'autres nombres. L'enseignant propose aux élèves d'effectuer de nouvelles recherches. Il leur donne d'autres quantités de truffes et il leur demande de trouver la valeur correspondante de la masse de la boîte.

Cette façon de procéder peut amener vers un travail plus spécifique sur la découverte des propriétés de linéarité.
Imaginons que l'enseignant ait demandé aux élèves de calculer la masse de boîtes contenant 44 ou 52 truffes.
Progressivement, le tableau de départ peut être complété par les réponses produites. On obtient ainsi un tableau de ce type :

Nombre de truffes	Masses des boîtes
16	360
24	540
28	630
36	810
44	? (990)
52	? (1170)

L'enseignant demande alors aux élèves de trouver une autre manière que le rapport externe pour trouver la masse d'une boîte contenant 44 truffes. Le choix des nombres en jeu pour le nombre de truffes ne résulte pas du seul hasard. Les rapports internes ne sont pas simples à calculer. Il en va autrement pour les propriétés de linéarité : 44 truffes = 16 truffes + 28 truffes donc la masse de la boîte contenant 44 truffes peut s'obtenir en additionnant 360g et 630g. Un raisonnement semblable peut être développé pour 52 truffes.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

La réponse à cette question varie selon les intentions de l'enseignant et la manière dont il a exploité la phase de mise en commun (voir la rubrique « Pour en savoir plus »).

Quels sont les prolongements possibles ?

Pourquoi pas un autre problème proposé lors de la deuxième épreuve du 15e RMT ? A nouveau, il s'agit d'un autre habillage d'une même structure de problème relevant de la proportionnalité simple.

Le troc (©ARMT, Cat. 7, 8, 9, 10)

Sur la petite île de Bellemer les enfants de la région récoltent des coquillages qu'ils échangent au kiosque de la plage.
Voici les tarifs pour cinq objets demandés par les enfants :

- *36 coquillages pour une glace,*
- *40 coquillages pour un sandwich,*
- *24 coquillages pour un jus de fruit,*
- *100 coquillages pour un masque de plongée,*
- *60 coquillages pour un cerf-volant.*

Les enfants peuvent aussi échanger les oursins qu'ils prennent sous l'eau dans les rochers pour obtenir les cinq objets précédents.
Voici les tarifs :

- *45 oursins pour l'un des cinq objets,*
- *27 oursins pour un autre objet,*
- *75 oursins pour un autre objet encore.*

Combien faudra-t-il d'oursins pour chacun des deux autres objets qui restent ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement :

- proportionnalité simple
- rapport externe
- mise en forme des données en tableaux
- propriétés de linéarité

Source(s) :

Le problème ***Truffes au chocolat*** est extrait de l'épreuve finale du 11e RMT.
Les éléments d'analyse proposés prennent appui sur des recherches effectuées par :

– Vernex, M. (2001). Analyse et utilisation du problème *Décoration* du 9e RMT, Math-Ecole, 198, pp. 4-18.
– Jaquet, F. (2005). Successioni proporzionali e variabili didattiche, L'Educazione matematica, 3.
– Jaquet, F. (2005). Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT in Jaquet, F. et Grugnetti, L. (2006). RMT : des problèmes à la pratique de la classe. ARMT : Universités de Parme & de Cagliari.

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58		M59

Dynamomètre

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit de l'application des règles de proportionnalité à une situation concrète de mesures et de comparaisons de différentes masses à l'aide d'un dynamomètre non gradué.
Un dynamomètre peut être assimilé à une sorte de ressort. L'allongement de ce dernier est proportionnel à la masse de l'objet (du moins, au vu des masses en jeu, on va le considérer comme tel). Connaissant la masse d'un objet de référence et la valeur de l'allongement du ressort qui y correspond, les élèves vont devoir calculer la masse d'autres objets.
Cette activité place les élèves en situation de manipulations concrètes : ils mesurent effectivement les différentes masses afin de les comparer. Si ce n'était pas le cas, il est possible de l'adapter sous une forme plus classique

Enjeux :

Cette situation permet une première approche de la proportionnalité dans un contexte de mesures de grandeurs (comparaison de masses).
Au delà des compétences plus spécifiques liées à la proportionnalité, la principale compétence développée dans cette activité est :

Les grandeurs*, *comparer et mesurer :

- M45 : Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat (longueurs, capacités, masses, aires, volumes, durées, coût).

Comment s'y prendre ?

Le matériel nécessaire pour la mise en œuvre concrète de cette activité est le suivant :

- des dynamomètres non gradués et des lattes ;
- des sachets numérotés contenant différents éléments (billes, riz, pois, farine, sucre …) ; leur masse n'est pas précisée. Le choix des masses doit tenir compte des dynamomètres mis à la disposition des élèves. Pour que l'allongement soit bien proportionnel à la masse, il importe de rester dans une certaine plage de mesures (identifée sur le dynamomètre) ;
- un sachet de référence contenant 200g de riz et dont la masse est indiquée sur le sachet.

Matériel pour l'activité sous une forme évoquée :

- Une fiche présentant une évocation de la situation, le schéma d'un dynamomètre et les mesures d'allongement constatées.

Cette évocation est disponible sur le site internet de la recherche :
http://www.hypo-these.be/spip

Mise en situation :

Placer les élèves par groupes de 3 ou 4 puis leur donner la consigne suivante (laisser une trace écrite de celle-ci) :

« *Vous avez devant vous 5 sachets numérotés contenant différents objets, un dynamomètre, une latte.*
Dans un premier temps, par simple estimation, je vous demande d'essayer de classer ces différents sachets du plus léger au plus lourd.

Ensuite, vous devez vérifier si votre estimation est correcte. Pour cela, vous devez trouver la masse précise de chacun des sachets. Pour vous aider dans cette tâche, vous avez quatre éléments à votre disposition :

- *un indice : la masse d'un des sachets est connue (200g) ;*
- *deux instruments de mesure : une latte et un dynamomètre non gradué ;*
- *un dernier indice : l'allongement du ressort du dynamomètre est proportionnel à la masse de l'objet* ».

Identification des tâches attendues des élèves :

Pour résoudre ce défi, les élèves doivent :

- utiliser la masse repère 200g et identifier la mesure de l'allongement correspondant ;
- utiliser le dynamomètre et la latte pour mesurer l'allongement correspondant aux masses inconnues ;
- mettre en relation ces deux ensembles de nombres afin d'identifier les relations numériques qui les lient ; établir la correspondance entre les mesures de longueurs et de masses ;
- formaliser l'ensemble des données dans un tableau de ce type :

Sachet par ordre de masse croissante (du plus léger au plus lourd)	Allongement en centimètres (arrondir à 0,5 cm)	Masse en grammes
Sachet n°		
Sachet n°		
Sachetn n°		
Sachet n°		
Sachet n°		

- utiliser ce tableau pour préciser la masse de chacun des sachets ;
- classer les sachets par ordre croissant de masses.

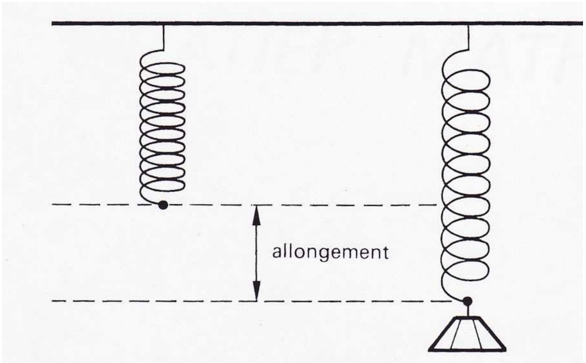
Exemple de démarche de mesure mise en œuvre par les élèves :

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

La phase de mise en commun permet aux élèves de vérifier si les différents classements sont équivalents ; elle favorise la comparaison des étalonnages proposés par les élèves.
Une mise en tableau faisant correspondre les mesures de longueurs et de masses est très importante.
Cette phase de mise en commun peut également déboucher sur une confrontation des mesures obtenues par les élèves et celles obtenues au départ d'une balance conventionnelle.

Quels sont les prolongements possibles ?

Un prolongement peut être donné à cette activité au départ de l'énoncé suivant ; il est extrait de Pythagore 6^{e}.



Lorsqu'aucune masse n'est suspendue, le ressort mesure 15cm.
Lorsqu'on y suspend une masse de 150g, il mesure 16,5cm.
Combien mesure-t-il quand on y suspend 250g ?
Quelle est la masse suspendue lorsqu'il mesure 18,3cm ?

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement :
- proportionnalité simple
- cadre grandeurs
- rapports internes, rapport externe et propriétés de linéarité

Source(s) :

Equipe de recherche
Pythagore 6e – Paris : Hatier

4. Exercices d'application

Pour stabiliser les compétences des élèves, les enseignants peuvent utiliser certains exercices proposés comme items d'évaluation diagnostique, autres que ceux utilisés comme point de départ de leur séquence didactique.

Vous pouvez également trouver dans les fiches d'activité du paragraphe précédent, des propositions d'activités pour aller plus loin ou pour venir en aide aux élèves qui éprouvent encore des difficultés.

Chapitre 3 : Kit 2 : Proportionnel ou non ?

1. Principaux éléments mathématiques en jeu

Pour pouvoir résoudre correctement un problème et utiliser les outils de résolution les plus efficaces, il est impératif que les enfants perçoivent la relation qui existe (ou non) entre deux grandeurs. Il n'est pas concevable d'appliquer les procédures propres à la proportionnalité, telles que le rapport interne, le rapport externe ou les propriétés de linéarité, à des problèmes qui ne relèvent pas de cette catégorie. Il est donc primordial de confronter assez rapidement les enfants à des problèmes de non-proportionnalité afin d'aiguiser leur esprit de réflexion et d'analyse de manière à éviter l'usage abusif du modèle multiplicatif.

Parmi les problèmes pouvant donner aux enfants l'illusion de la proportionnalité, nous en avons pointé trois en particulier : ceux qui révèlent une situation additive (ou autre …), ceux qui font intervenir une fonction affine et ceux qui traitent de proportionnalité inverse.

1.1 Situations additives (ou autres…)

L'exemple même d'un problème donnant l'illusion de la proportionnalité est le suivant :

> Pour faire sécher 8 essuies sur une corde à linge, il faut 24 minutes. Dans les mêmes conditions d'ensoleillement, combien de temps faudra-t-il pour faire sécher 32 linges sur une corde ?

Il n'est pas rare de voir des enfants utiliser aveuglément le rapport 4 existant entre 8 et 32 pour l'appliquer aux 24 minutes et déduire ainsi que le temps nécessaire est de 96 minutes…
C'est le 'bon sens' et leur vécu qui doit les faire réfléchir sur la pertinence de leur raisonnement. Il faut attirer leur attention sur l'absence de relation entre les deux grandeurs en jeu : le nombre d'essuies et le nombre de minutes.

L'exemple ci-dessous fait intervenir les mêmes nombres que le problème précédent.

> Pierre a 8 ans et Aline a 24 ans. Lorsque Pierre aura 32 ans, quel sera l'âge d'Aline ?

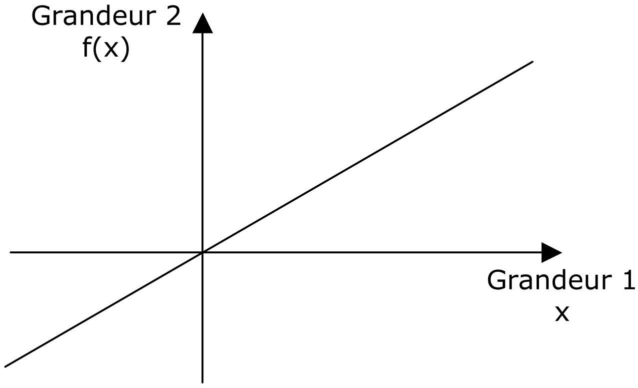
Ici encore, l'utilisation automatique du modèle multiplicatif conduit à une réponse erronée. Pourtant, il existe dans ce cas une relation entre les grandeurs concernées (les âges des protagonistes). Cette relation n'est plus de type multiplicatif mais bien additif puisque Aline aura toujours 16 ans de plus que Pierre.

Ces deux types de 'relation' entre les grandeurs ne sont pas très complexes pour les enfants puisqu'elles concernent des situations de la vie quotidienne. Elles offrent pourtant l'avantage non négligeable d'être en opposition avec les problèmes de proportionnalité, même avec ceux qui font intervenir les mêmes nombres !

> Noémie et son père font une promenade à pied. Lorsque son père fait 8 pas, Noémie doit en faire 24. Lorsque son père fera 32 pas, combien Noémie devra-t-elle en faire ?

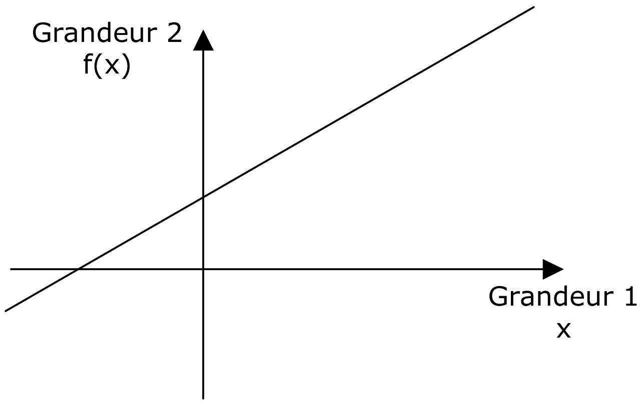
1.2 Fonctions affines

La relation proportionnelle entre deux grandeurs se représente, dans un système d'axes gradués (un graphique), par une droite passant par l'origine :



Les valeurs des deux grandeurs sont multiples les unes des autres et leur relation peut être mathématisée par une fonction du type f(x) = a x, appelée **fonction linéaire**.

Un autre type de relation est celle représentée par une droite ne passant pas par l'origine :



Elle peut s'écrire sous la forme d'une fonction de type f(x) = a x + b, appelée **fonction affine**.

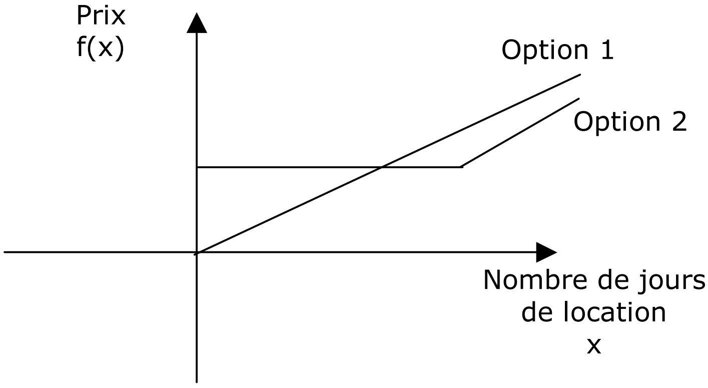
Ces deux types de fonction sont étudiés dans le secondaire et il n'est pas inutile que les enfants les rencontrent dès le primaire au travers, par exemple, de problèmes du type :

> Une entreprise de location propose 2 options pour louer un scooter:
> $1^{\text{ère}}$ option: 20€ par jour
> $2^{\text{ème}}$ option: 100€ la première semaine puis 25€ la journée supplémentaire.
> Si je loue un scooter pendant 4 jours, quelle est l'option la plus avantageuse ?
> Et si je le loue pendant 8 jours ?

Les réponses peuvent être obtenues par les enfants en construisant un tableau reprenant le prix en fonction du nombre de jours de location :

Nombre de jours de location	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix payé avec la $1^{\text{ère}}$ option	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Prix payé avec la $2^{\text{ème}}$ option	100	100	100	100	100	100	100	125	150	175

Ensuite, si l'enseignant construit avec les enfants une représentation graphique du problème, ils verront apparaître deux types de relation, entre le nombre de jours de location et le prix payé, selon l'option choisie : la première concerne une fonction linéaire (le prix est égal au nombre de jours multiplié par 20), la deuxième une fonction constante d'abord (pendant les 7 premiers jours) et affine ensuite (puisque même en prolongeant la droite, elle ne passe pas par l'origine des axes). Le graphique obtenu est donc du style :



1.3 Proportionnalité inverse

Examinons le problème suivant :

> Un fermier a 6 vaches et suffisamment de foin pour les nourrir pendant 36 jours. S'il n'avait eu que 2 vaches, pendant combien de jours aurait-il pu les nourrir avec la même quantité de foin ?

Trop de précipitation conduirait les enfants à diviser 36 par 3 (puisque le nombre de vaches est divisé par 3) et à répondre 12 !
Ce n'est évidemment pas le cas puisque dans ce problème, les deux grandeurs ne varient pas de la même manière : quand une augmente, l'autre diminue (dans le même rapport) et inversement.
Elles sont inversement proportionnelles.

Si on traduit cette relation en terme de fonction, elle sera du type f(x) = a $\frac{1}{x}$.

L'important est ici de faire prendre conscience aux enfants que les grandeurs sont liées par un autre type de relation et qu'elles ne varient pas dans 'le même sens'.
En faisant l'impasse sur la formalisation (réservée au secondaire lors de l'étude des fonctions), il est important de proposer ce genre de problèmes aux enfants du primaire de manière à les familiariser avec ces relations rencontrées par ailleurs dans la vie courante :

> Pour essuyer toute la vaisselle, trois personnes mettent 30 min. Combien de temps mettrais-je pour la faire seul ?

2. Items d'évaluation

Voici une série d'exercices pouvant servir de point de départ à la construction d'une épreuve diagnostique permettant d'évaluer le niveau de compréhension et de réflexion des élèves de manière à leur proposer des activités plus adéquates.
Pour faciliter la lecture, nous les avons classés selon leur spécificité.

A. Proportionnel ou non ?

Problème 1

Antonio a pris deux fois le même taxi. La première fois, le trajet était de 5 km et il a payé 8€. La seconde fois, le trajet était de 20 km et il a payé 25€. Le prix de la course est-il proportionnel à la longueur du trajet ?

Problème 2

Voici un tableau décrivant le lien entre des longueurs de pied et les pointures des chaussures correspondantes. S'agit-il d'une situation de proportionnalité ? Explique ton raisonnement.

Longueur du pied en cm	18	22	26	28
Pointure	27	33	39	42

Problème 3

Le tableau ci-dessous donne le tarif des péages d'autoroute à régler entre différentes villes françaises.
Indiquer si le prix est proportionnel à la distance parcourue et pourquoi.

ville départ		Reims	Paris	Marseille	Paris	Reims
ville arrivée		Paris	Rennes	Nice	Bordeaux	Lyon
distance parcourue	km	140	340	197	575	482
prix	€	12	29	17	50	41

Problème 4

Olivier et Cédric sont deux frères. On a indiqué ci-dessous leurs âges respectifs à différentes dates. Leurs âges sont-ils proportionnels ? Explique ton raisonnement.

Âge d'Oliver	10	15	17	20
Âge de Cédric	13	18	20	23

Problème 5

A 8 ans, Jean avait 24 dents. A 32 ans, combien Jean aura-t-il de dents ?

Problème 6

Pour faire sécher 8 essuies sur une corde à linge, il faut 24 minutes. Dans les mêmes conditions d'ensoleillement, combien de temps faudra-t-il pour faire sécher 32 linges sur une corde ?

Problème 7

Noémie et son père font une promenade à pied. Lorsque son père fait 8 pas, Noémie doit en faire 24. Lorsque son père fera 32 pas, combien Noémie devra-t-elle en faire ?

Problème 8 (Source : Résoudre des problèmes : pas de problème !)

Le fermier Gus a besoin d'environ 4 jours pour creuser un fossé autour d'un pâturage carré de 100 m de côté. Combien lui faudra-t-il de jours pour creuser un fossé autour d'un pâturage carré de 300 m de côté ?

Le fermier Carl a besoin d'environ deux heures pour répandre du fumier sur un terrain carré de 20 m de côté. Combien de temps lui faudra-t-il pour étendre du fumier sur un terrain carré de 60 mètres de côté ?

Problème 9

Justine et Hélène courent à la même vitesse. Justine est partie en premier. Quand elle a parcouru 9 tours, Hélène en a parcouru 3. Combien Justine aura-t-elle couru de tours quand Hélène en aura couru 15 ?

Problème 10

Une pompe évacue 50 litres d'eau en 30 sec. Combien de litres d'eau deux pompes évacueront–elles en 30 sec ?

Problème 11

Pierre a 8 ans et Aline a 24 ans. Lorsque Pierre aura 32 ans, quel sera l'âge d'Aline ?

B. Inversement proportionnel

Problème 12 (source : résoudre des problèmes : pas de problème !)

Madame la Grille a demandé à une entreprise de construction de repeindre les barrières qui entourent sa propriété. Le patron de l'entreprise lui a dit qu'il faudrait que deux hommes travaillent pendant 4 heures pour repeindre l'ensemble des barrières.
Madame la Grille se demande combien de temps il faudrait pour repeindre le tout si quatre hommes travaillaient.

Problème 13

Archibald se rend chaque jour à l'école en vélo. S'il roule à la vitesse de 20 km/h, il met 15 min pour faire le trajet. Et s'il roule à la vitesse de 25 km/h ?

Problème 14 (source : IREM Rennes)

Un fermier a 6 vaches et suffisamment de foin pour les nourrir pendant 36 jours. S'il n'avait eu que 2 vaches, pendant combien de jours aurait-il pu les nourrir avec la même quantité de foin ?

Problème 15

Pour essuyer toute la vaisselle, trois personnes mettent 30 min. Combien de temps mettrais-je pour la faire seul ?

C. Différents types de fonctions

Problème 16

Une entreprise de location propose 3 options pour louer un scooter:
1ère option: 20€ par jour
2ème option: 100€ la première semaine puis 25€ la journée supplémentaire.
3ème option: un abonnement à 80€ + 10€ par jour.
Déterminer le tarif le plus faible et le plus avantageux suivant le nombre de jours de location.

Problème 17 (source : J'apprends les maths - CM1)

Voici le tarif des photocopies couleur d'une librairie :

PHOTOCOPIES COULEUR	
Quantité achetée	***Prix à l'unité***
De 1 à 6	85 c
De 7 à 10	80 c
De 11 à 20	70 c
Plus de 21	60 c

Calcule le prix de 5 photocopies.
M. Dubois fait 9 photocopies. Le libraire lui demande 7,20 €.
Vérifie que le libraire ne s'est pas trompé.
M. Diot fait 15 photocopies. Le libraire lui demande 10,50 €.
Vérifie que le libraire ne s'est pas trompé.
Combien coûtent 25 photocopies ?
On a vu que le prix de 9 photocopies est de 7,20 € et que celui de 15 photocopies est de 10,50 €.
Sans regarder dans le tableau, cela permet-il de calculer le prix de 24 photocopies ? 90 photocopies ?

Problème 18 (source : Suisse)

Eric et Jean-Pierre, accoudés au bar du tennis-club, ont décidé de jouer, en principe, 1 heure chaque semaine, durant la saison d'hiver, toujours à la même heure et le même jour.
Les prix affichés dans la salle sont les suivants :

Tennis-club de La Veyre.
Saison d'hiver
2006-2007
(30 semaines – 1h/sem)

Non-membres :
- de 7h à 17h : 7 €/h
- de 17h à 22h : 8 €/h

Membres :
Taxe d'introduction : 30 €
- de 7h à 17h : 4,8 €/h
- de 17h à 22h : 6,6 €/h

Abonnement de 30 semaines :
- de 7h à 17h : 168 €
- de 17h à 22h : 190 €

Détermine les avantages et inconvénients des différentes possibilités.

Problème 19 (source : Résoudre des problèmes : pas de problème !)

Au cours de gymnastique, les enfants font de l'athlétisme. Ils ont fait des sprints sur une distance de 50 m, ils ont sauté en hauteur, ils ont lancé le javelot et ils ont aussi couru un 5000 m.
Loïc a gagné le 50 m grâce à un sprint qui lui a permis de franchir la ligne d'arrivée en 8 secondes.
Yann a couru le 5000 m en 22 minutes et 30 secondes. Loïc pense qu'il va battre Yann.
A ton avis, en combien de temps Loïc va-t-il courir le 5000 m ?

D. Comparaison de rapports

Problème 20 (source : Charnay)

Avec une peinture blanche et une peinture verte, on réalise deux mélanges :
- le mélange A est obtenu avec 5 litres de peinture blanche et 3 litres de peinture verte ;
- le mélange B est obtenu avec 7 litres de peinture blanche et 4 litres de peinture verte.

Quel est le mélange le plus vert ?

Problème 21

Pour la fête du collège, les élèves d'une classe décident de préparer des crêpes.
Ils trouvent la recette suivante dans un livre de cuisine :
« Pour quatre personnes, préparer une pâte avec :
120 g de farine,
4 œufs,
4 dl de lait,
30 g de beurre,
1 cuillerée à café d'huile,
2 cuillerées à café de sel. »

Pour qu'il y ait suffisamment de crêpes, ils augmentent les quantités indiquées dans la recette. Ils préparent une pâte avec :
300 g de farine,
10 œufs,
10 dl de lait,
75 g de beurre,
2 cuillerées et demie à café d'huile,
7 cuillerées à café de sel.

Malheureusement les crêpes risquent de ne pas être très bonnes car les élèves ont fait une petite erreur.
Pour quel produit se sont-ils trompés ?
Quelle quantité de ce produit auraient-ils dû mettre pour respecter la recette ?

Problème 22

Deux élèves font un concours de lancers francs.

	Luc	Jacques
Nombre de lancers réussis	16	18
Nombre de lancers	20	24

Quel est le joueur le plus habile ?

Problème 23 (source : IREM Rennes)

Pour faire une expérience de chimie, le professeur demande à des élèves de préparer de l'eau sucrée dans plusieurs récipients qui contiennent de l'eau :

JACQUES a un récipient qui contient	6 dL d'eau
PIERRE a un récipient qui contient	10 dL d'eau
DIDIER a un récipient qui contient	8 dL d'eau
ISABELLE a un récipient qui contient	20 dL d'eau
BENOIT a un récipient qui contient	16 dL d'eau
LAURENCE a un récipient qui contient	6 dL d'eau

Le professeur donne alors le sucre aux élèves et leur dit de s'arranger entre eux pour que l'eau soit aussi sucrée dans tous les récipients.

JACQUES met dans son récipient	15 g de sucre
PIERRE met dans son récipient	25 g de sucre
DIDIER met dans son récipient	20 g de sucre
ISABELLE met dans son récipient	50 g de sucre
BENOIT met dans son récipient	35 g de sucre
LAURENCE met dans son récipient	15 g de sucre

Mais l'expérience risque de ne pas marcher car un des élèves a fait une petite erreur : dans son récipient l'eau n'est pas aussi sucrée que dans celui des autres élèves.
Quel élève s'est trompé ?
Quelle quantité de sucre aurait-il dû mettre ?

Problème 24

Voici des renseignements nutritionnels de trois produits laitiers pour une même quantité comparée :

lait	crème glacée	yogourt aux fraises
énergie : 458 kJ	énergie : 720 kJ	énergie : 510 kJ
protéines : 8,5 g	protéines : 6,2 g	protéines : 10 g
matières grasses : 2,6 g	matières grasses : 1,8 g	matières grasses : 4,2 g
glucides : 12 g	glucides : 34 g	glucides : 40 g

- Quel est le produit qui contient le plus de matières grasses en comparaison des glucides ?
- Quel est le produit qui contient le plus de matières grasses en comparaison des protéines?
- Quel est le produit qui contient le plus de protéines en comparaison des glucides ?

3. Activités d'apprentissage

Les activités développées dans ce paragraphe sont au nombre de cinq. Elles sont toutes construites selon le même canevas de fiche, détaillé à la page 9 de cette brochure.

Voici un tableau reprenant les cinq activités proposées dans ce paragraphe. Outre le titre de l'activité, il y est également fait mention du cadre mathématique concerné, des enjeux du problème de départ, des compétences plus spécifiquement travaillées, du niveau d'enseignement auquel s'adresse cette activité et enfin, la source dont elle est extraite. Les items d'évaluation liés aux différentes activités sont également indiqués.

Titre de l'activité	Cadre	Enjeux	Compétences	Niveau(x) d'enseignement	Source(s)	Item(s) d'évaluation concerné(s)
Verres gradués	Grandeurs (capacités et hauteurs d'eau)	Constater que dans certaines situations, on peut anticiper certains résultats par calcul et que dans d'autres, ce n'est pas le cas. Construire un graphique	M56, M57, M58 et M59	5P, 6P, 1S	ERMEL CM2 (2005)	1, 2, 3, 4
Prix réduits	Grandeurs (prix)	Distinguer une règle additive d'une règle qui met en jeu la proportionnalité. Utiliser les pourcentages.	M55, M56, M57, M58 et M59	5P, 6P, 1S	ERMEL CM2 (2005)	5, 6, 7, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19
Bonjour les vacances !	Grandeurs (prix)	Etablir des tableaux de correspondance, comparer des rapports et en déterminer le plus grand.	M56, M57 et M59 M18	6P, 1S, 2S	Chastellain M., Calame J.-A. et Brêchet M., « *Fonctions, logique et raisonnement* », Mathématiques 7-8-9, CIIP,Suisse romande, Ed. LEP, 2003	20, 21, 22, 23, 24

Rectangles	Grandeurs (longueurs)	Dessiner des formes géométriques (rectangles), comparer les mesures des longueurs et largeurs et déterminer si elles sont proportionnelles ou non. Prendre conscience du caractère inversement proportionnel des grandeurs en jeu.	M58 M32	6P, 1S	Equipe de recherche	8, 12, 13, 14, 15
Distances de freinage	Grandeurs (distances et vitesses)	Lire des documents et des tableaux pour rechercher des informations. Construire des graphiques et les utiliser pour déterminer de nouvelles informations. Distinguer une situation de proportionnalité d'une situation de non proportionnalité.	M56, M57, M58 et M59	6P, 1S	ERMEL CM2 (2005) U.L.B. Computer Algebra Division	2, 3, 4, 16

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55		M56	M57		M58	M59

Verres gradués

De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'une activité expérimentale adaptée d'ERMEL CM2. Elle a pour objectif de comparer la hauteur d'eau obtenue en versant un certain volume d'eau dans un récipient selon que ce dernier soit de forme cylindrique (situation de proportionnalité) ou conique (situation de non-proportionnalité).

Le matériel suivant est nécessaire :
- un récipient cylindrique (voire parallélépipédique) d'environ 1l à fond plat et de préférence pas trop large ;
- un récipient conique ou tronconique (ou de forme irrégulière) de telle sorte que la hauteur d'eau ne soit pas proportionnelle au volume d'eau versé ;
- un verre en plastique transparent sur lequel on a fait une marque correspondant à 10 cl ;
- de l'eau colorée, une règle graduée (ou une baguette de bois pour mesurer la hauteur d'eau dans le récipient).

Enjeux :

Amener les élèves à constater que dans certaines situations, ils peuvent anticiper le résultat de certaines actions par calcul (utiliser les propriétés de linéarité pour prévoir la hauteur de l'eau, par exemple) et que dans d'autres, ce n'est pas le cas.
Construire un graphique, à partir d'un tableau de nombres, dans un système d'axes déjà gradués et constater que les deux représentations graphiques sont différentes.

Comment s'y prendre ?

Cette activité se déroule en trois phases qui peuvent être espacées dans le temps :
- phase 1 : travail de mesures et d'anticipations au départ d'un récipient régulier,
- phase 2 : travail identique mais au départ d'un récipient irrégulier,
- phase 3 : analyse, construction et utilisation de graphiques.

Phase 1 : travail de mesures et d'anticipations au départ du récipient régulier

<u>1. Etape 1 : calcul de la hauteur de liquide</u>

Un récipient est posé sur la table, à la vue de tous les élèves. Trois élèves sont requis pour les manipulations :
- le premier (A) remplit le verre mesureur jusqu'à la marque (il n'est pas utile à ce stade de communiquer la contenance du verre mesureur) et le transvase le nombre de fois demandé par l'enseignant ;

- le deuxième (B) mesure la hauteur d'eau (attention à prévoir un latte dont le 0 coïncide avec l'extrémité ou utiliser une baguette puis mesurer avec une latte classique) ;
- le troisième(C) note au TN le nombre de verres et la hauteur d'eau mesurée.

Les autres élèves observent ; ils disposent également d'une feuille sur laquelle ils peuvent noter et calculer.

Les premières manipulations et observations concernent les mesures suivantes : hauteur de 2 verres, puis hauteur de 3 verres et, enfin, hauteur de 5 verres.
Selon la valeur des mesures observées (nombre décimal ou non), les élèves vont très rapidement constater ou anticiper que la hauteur de 5 verres est égale à la somme de celle de 2 verres et de 3 verres.

L'enseignant demande à l'élève A d'ajouter 3 verres et demande aux autres élèves de prévoir, par deux, la hauteur d'eau obtenue pour ces 8 verres.

Plusieurs procédures peuvent être développées par les élèves pour prévoir la hauteur d'eau équivalente au volume de 8 verres :

- ajouter la hauteur obtenue pour 3 verres à celle relevée pour 5 verres ;
- multiplier par 4 la hauteur obtenue pour 2 verres ;
- ...

Les stratégies utilisées sont dépendantes des nombres en jeu (valeur de la mesure exprimée à l'aide d'un décimal ou d'un entier).

Au terme de cette première phase de travail en duos, une phase de mise en commun permet de

- procéder à une confrontation des procédures développées par les élèves ;
- éliminer celles qui ne produisent pas le résultat attendu (mesurable via le dispositif expérimental) ;
- formaliser mathématiquement les procédures correctes (par exemple, de la manière suivante : $8 = 5 + 3$ ou $8 = 4 \times 2$).

Dans le prolongement de celle-ci, l'enseignant peut demander aux élèves d'anticiper la hauteur correspondant à 10 verres.

2. Etape 2 : Utilisation des données et organisation en tableau

L'enseignant précise aux élèves que le verre mesureur contient 10 cl ... Il fait rappeler par les élèves que 10 × 10 cl = 1l.
Il fait graduer le récipient de 10 cl en 10 cl puis demande aux élèves de compléter un tableau de ce type en fonction des données recueillies précédemment :

Capacité en cl	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Hauteur en cm											

Le but de cette activité est de placer les hauteurs connues puis de trouver les autres par calcul en utilisant les propriétés de linéarité.

Une phase de mise en commun permet de vérifier, de valider et de formaliser les calculs produits par les duos. En cas de litige, il est toujours possible de recourir au mesurage.

Une bande graduée de 10 cl en 10 cl peut alors être confectionnée et collée sur le récipient de manière à réaliser ... un verre gradué.

L'enseignant peut proposer ensuite aux élèves le problème suivant : j'ai besoin de 45 cl de lait et je veux utiliser ce récipient pour déterminer cette quantité de lait. Quelle hauteur de liquide faut-il verser dans le récipient ?

Phase 2 : travail de mesures et d'anticipations au départ du récipient irrégulier

1. Etape 1 : recherche de hauteurs de liquide

Même dispositif que celui de la phase précédente mais cette fois, le récipient n'est pas régulier.

> Au niveau des mesures, il peut être utile de prévoir de passer directement de 20 cl, par exemple, à 60 cl pour obtenir un écart important entre ce qui était prévu et ce qui a été réellement mesuré.
> La discussion qui suit le constat de différence entre ce qui était prévu et ce qui a été mesuré doit permettre aux élèves d'émettre des hypothèses sur l'origine des discordances observées.

D'autres mesures peuvent être proposées afin de vérifier si le même phénomène se reproduit.

2. Etape 2 : mesure pour différentes capacités

Comme les résultats ne peuvent être obtenus par calcul, l'enseignant demande aux élèves de réaliser les mesures afin de pouvoir compléter le tableau suivant :

Capacité en cl	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Hauteur en cm											

L'objectif de cette seconde phase est de faire apparaître que l'accroissement de la hauteur n'est pas régulier « cela ne monte plus régulièrement ! ». « Cela ne marche pas comme pour le premier récipient, on ne peut pas prévoir la hauteur de l'eau ! ».

Il est possible de terminer cette étape en effectuant le constat suivant :

- pour le premier récipient, lorsque l'on met deux fois plus d'eau, la hauteur est double, trois fois, elle est triple ... on dit que la hauteur d'eau est proportionnelle à la quantité versée ;
- pour le second récipient, la hauteur n'est pas proportionnelle à la quantité versée.

Phase 3 : analyse, construction et utilisation de graphiques

1. Etape 1 : découverte du graphique

- Distribuer aux élèves le matériel suivant :
  - une feuille A4 quadrillée de petits carreaux de 5 mm,
  - le tableau des données de la première situation ;

- un graphique incomplet correspondant à cette situation (les nombres en abscisse 10, 20, 30, ... sont tous placés, quelques points du graphique – 20 cl, 30 cl, 50 cl, 80 cl et 100 cl – ainsi que les nombres en ordonnée correspondant au point du graphique). La graduation est volontairement simplifiée : 1 cm sur l'axe correspond à 1 cm de hauteur d'un liquide.

- Analyser collectivement le graphique :
  - repérer les nombres écrits sur les axes horizontal et vertical,
  - découvrir à quoi ces nombres renvoient,
  - repérer les points du graphique et identifier ce qu'ils signifient.

- Donner aux élèves la consigne suivante : « *j'ai commencé à représenter sur ce graphique les quantités de liquide et les hauteurs correspondantes pour le récipient de forme régulière. Je n'ai placé que quelques points ... A vous de poursuivre le travail* ! ».

> Certains élèves risquent d'éprouver des difficultés à concevoir un point comme la représentation d'un couple de nombres. Ils placent les nombres du tableau sur l'axe des ordonnées mais ne cherchent pas à construire le point correspondant à la fois à la capacité et à la hauteur.
> On notera aussi que la régularité du positionnement des points peut aider les élèves à les situer correctement dans le graphique.

- Procéder à une correction collective dont le but est de faire apparaître que tous les points sont alignés et qu'une droite qui représente la hauteur du liquide en fonction de la capacité peut ainsi être tracée.

- Proposer des activités complémentaires :
  - Demander aux élèves de trouver, à l'aide du graphique, la hauteur d'une quantité donnée, non envisagée dans les séances précédentes (exemple ¼ l).

> Pour y parvenir, les élèves doivent convertir le ¼ de l en cl puis placer le nombre 25 sur l'axe des capacités, soit au milieu du segment correspondant à 20 et 30. Une fois le point du graphique d'abscisse 25 trouvé, il ne reste plus qu'à déterminer son ordonnée.

  - Donner une hauteur, exprimée en cm, et demander aux élèves de trouver, à l'aide du graphique, la quantité de liquide qui correspond à cette mesure.

> Le déroulement est semblable à celui de la recherche précédente sauf que cette fois on part de l'ordonnée pour déterminer l'abscisse.

2. Etape 2 : un graphique pour la deuxième situation ?

Procéder de la même manière pour les données obtenues avec le récipient de forme irrégulière et constater que les points positionnés sur le graphique prennent l'allure non pas d'une droite passant par l'origine mais bien d'une courbe.

A ce stade de la formation, il importe essentiellement de constater qu'il y a un alignement dans un des graphiques et pas dans un autre. Il ne s'agit aucunement de travailler la propriété graphique caractéristique d'une situation de proportionnalité.

Pour en savoir plus :

Voir le paragraphe 1 du présent chapitre.

Voir également le chapitre 1 et plus particulièrement :

- proportionnalité simple
- cadre grandeurs
- rapports internes, rapport externe et propriétés de linéarité

Source(s) :

ERMEL CM2 (2005)

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56	M57	M58	M59		

Prix réduits

De quoi s'agit-il ?

L'activité proposée est une adaptation d'une situation développée dans ERMEL CM2. Les élèves doivent comparer trois types de réduction : une réduction constante (de 50 € par exemple) et deux réductions proportionnelles au prix initial.

Enjeux :

Distinguer une règle additive (exemple : retrancher toujours 50 €) d'une règle qui met en jeu la proportionnalité (diminuer de 25 %, par exemple).
Utiliser les pourcentages.

Comment s'y prendre ?

L'activité proposée par ERMEL se déroule en deux phases principales suivies d'une phase d'application.

PHASE 1 : Découverte en groupes de prix réduits

Distribuer aux élèves la fiche suivante :

A	B	C
Table ~~200~~ 180	Lit ~~200~~ 150	Fauteuil ~~200~~ 150

Commenter brièvement cette fiche et préciser la consigne de travail : « *Je suis allé dans trois grandes surfaces qui proposent des soldes. J'ai noté les prix de certains articles avant et après réduction. Dans chaque magasin, on calcule toujours la réduction de la même façon, en appliquant la même règle de calcul.*
Par groupes de 4, essayez de prévoir des nouveaux prix à partir d'informations que je vais donner. Notez à chaque fois le nombre de bonnes réponses obtenues. »

Proposer un premier prix aux élèves : 1000 €. L'inscrire dans le tableau, le barrer et demander aux élèves de prévoir les nouveaux prix en A, B, C.

Les enfants doivent se concerter et proposer un prix réduit dans chacun des trois magasins sans indiquer leur calcul. Il n'y a pas d'échanges entre les groupes ni de mise en commun durant cette phase.

Annoncer, sans commentaire, le prix pour chacun des différents magasins et le noter dans le tableau collectif.

	A			B			C	
Table	~~200~~	180	Lit	~~200~~	150	Fauteuil	~~200~~	150
	~~1000~~	900		~~1000~~	950		~~1000~~	750

A l'intérieur des groupes, les élèves doivent procéder aux corrections des réponses, aux décomptes du nombre de bonnes réponses puis se concerter pour tenter d'identifier la stratégie à développer pour atteindre les bonnes réponses.

Procéder de la même manière, ligne par ligne, pour les prix suivants :

	A			B			C	
Table	~~200~~	180	Lit	~~200~~	150	Fauteuil	~~200~~	150
	~~1000~~	900		~~1000~~	950		~~1000~~	750
	~~500~~	450		~~500~~	450		~~500~~	375
	~~100~~	90		~~100~~	50		~~100~~	75
	~~300~~	270		~~300~~	250		~~300~~	225
	~~800~~	720		~~800~~	750		~~800~~	600

Lorsque le nombre de bonnes réponses paraît suffisant dans chacun des groupes, passer à la phase suivante.

Phase 2 : sélectionner des affiches et choisir des règles de calculs

Pour cette deuxième phase, les élèves sont placés en groupes. Ils ont à leur disposition les feuilles comportant le contenu des affiches réalisées lors de la phase précédente.

Distribuer une nouvelle feuille aux élèves ; elle contient les énoncés suivants :

1. Economisez 1/10 du prix !
2. Réduction : 50€ sur tous les articles.
3. Economisez 25€ tous les 100€.
4. Pour payer, enlever 10€ tous les 100€.
5. Toujours 20€ d'économie.
6. Remise 50% !
7. Payez ¾ du prix ! Economisez ¼ du prix !
8. Faites 10% d'économie !
9. Gagnez 10€ sur chaque achat !
10. Rabais 25%.

Donner aux élèves la consigne suivante : « *Voici une série de phrases que j'ai pu lire sur des affiches dans des magasins qui font des réductions. A vous de trouver celles qui conviennent pour les magasins A, B ou C. Attention : plusieurs phrases peuvent convenir pour un même magasin et certaines phrases peuvent ne pas convenir du tout.* »

Les élèves doivent écrire en face d'une phrase le ou les magasins pour lesquels elle paraît s'appliquer et justifier leur choix.

Pour la phase de mise en commun, les phrases sont successivement travaillées dans l'ordre de la feuille.

Procéder au départ de questions du type : « Qui pense que cela convient pour le magasin A ? », « pour B ? », « pour C ? ». Ne pas hésiter à instaurer un débat s'il y a désaccord.

Quels sont les prolongements possibles ?

Proposer aux élèves de travailler individuellement au départ de la fiche suivante :

Consigne : « Complète et écris la règle utilisée dans chacun des magasins. »

D			E			F		
	~~500~~	350	Lit	~~500~~	400	Fauteuil	~~500~~	400
	~~800~~	560		~~800~~	700		~~800~~	640
	~~1000~~			~~1000~~			~~1000~~	
	~~200~~			~~200~~			~~200~~	
	Règle			Règle			Règle	

Pour en savoir plus :

Voir le paragraphe 1 du présent chapitre.

Voir également le chapitre 1 et plus particulièrement :
- proportionnalité simple
- cadre grandeurs
- rapport externe et propriétés de linéarité

Source(s) :

ERMEL CM2 (2005)

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58		M59

Bonjour les vacances !

De quoi s'agit-il ?

L'activité proposée est une adaptation d'une situation développée dans « *Fonctions, logique et raisonnement* », Mathématiques 7-8-9, Suisse romande. Les élèves doivent identifier puis comparer quatre taux de change afin de déterminer le plus avantageux.

> Dans un pays, l'unité de monnaie est le β.
> Au bureau de change officiel, on te donne 60 β pour 100 €.
> Un porteur te propose 40 β pour le billet de 50 € qui dépasse de ta poche.
> Tu paies une glace de 1 β avec une pièce de 2 € et on ne te rend rien.
> Dans une boutique de souvenirs, on t'offre 15 β pour 20 €.
> **Quel est le change le plus favorable ?**

Enjeux :

Etablir des tableaux de correspondance, comparer des rapports et en déterminer le plus grand.
Au delà des compétences plus spécifiques liées à la proportionnalité, une telle activité permet également de développer la compétence suivante :

Les nombres, calculer :

- M18 : Écrire des nombres sous une forme adaptée (entière, décimale ou fractionnaire) en vue de les comparer, de les organiser ou de les utiliser.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

Pour répondre à la question les élèves doivent comparer les quatre règles d'échange détaillées dans l'énoncé :

$$\begin{array}{rcr} 60\,\beta & \rightarrow & 100\text{ €} \\ 40\,\beta & \rightarrow & 50\text{ €} \\ 1\,\beta & \rightarrow & 2\text{ €} \\ 15\,\beta & \rightarrow & 20\text{ €} \end{array}$$

Pour ce faire, plusieurs procédures peuvent convenir.

- L'une d'entre elles consiste à utiliser les propriétés de proportionnalité (et plus précisément les rapports internes) pour exprimer les quatre règles d'échange en fonction d'une même somme (exprimée soit en € soit en β). Quatre tableaux peuvent alors être construits :

Situation 1

$60\,\beta \rightarrow 100$ €

Situation 2

$\times 2$: $40\,\beta \rightarrow 50$ € ; $80\,\beta \rightarrow 100$ € : $\times 2$

Situation 3

$\times 50$: $1\,\beta \rightarrow 2$ € ; $50\,\beta \rightarrow 100$ € : $\times 50$

Situation 4

$\times 5$: $15\,\beta \rightarrow 20$ € ; $75\,\beta \rightarrow 100$ € : $\times 5$

ou

Situation 1

$\times 2$: $60\,\beta \rightarrow 100$ € ; $120\,\beta \rightarrow 200$ € : $\times 2$

Situation 2

$\times 3$: $40\,\beta \rightarrow 50$ € ; $120\,\beta \rightarrow 150$ € : $\times 3$

Situation 3

$\times 120$: $1\,\beta \rightarrow 2$ € ; $120\,\beta \rightarrow 240$ € : $\times 120$

Situation 4

$\times 8$: $15\,\beta \rightarrow 20$ € ; $120\,\beta \rightarrow 160$ € : $\times 8$

C'est l'échange effectué avec le porteur (situation 2) qui est le plus avantageux.

Que le montant commun soit exprimé en € ou en β, il correspond au plus petit commun multiple (PPCM) des quatre nombres donnés. En effet 100 = PPCM(100, 50, 2 et 20) et 120 = PPCM(60, 40, 1 et 15).

- Une autre solution est d'exprimer les correspondances sous forme de rapports (fractionnaires) et de les comparer.

  Il faut donc déterminer quel est le plus grand rapport parmi $\frac{60}{100}$, $\frac{40}{50}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{15}{20}$ ou quel est le plus petit parmi $\frac{100}{60}$, $\frac{50}{40}$, $\frac{2}{1}$ et $\frac{20}{15}$.

  Pour ce faire, les élèves doivent aussi trouver le PPCM des différents dénominateurs.

  Cette procédure de résolution relève aussi de l'enseignement des rationnels qui fait l'objet d'une autre brochure produite par l'équipe de recherche.

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

1) Si le nombre de données est un élément perturbateur pour les enfants, on peut le limiter en ne leur proposant, par exemple, que les trois premières phrases de l'énoncé :

> Dans un pays, l'unité de monnaie est le β.
> Au bureau de change officiel, on te donne 60 β pour 100 €.
> Un porteur te propose 40 β pour le billet de 50 € qui dépasse de ta poche.

Dans un premier temps, il importe que les élèves prennent conscience que ces deux échanges ne sont pas équivalents (puisqu'il n'existe ni de rapport interne, ni de rapport externe entre les grandeurs en jeu) et que le second est plus avantageux.
Les autres données du problème peuvent alors être communiquées progressivement aux élèves.

2) Une autre façon de mettre les élèves sur la piste de la solution est de leur donner le tableau représentant les échanges et de l'observer avec eux de manière à mettre en évidence le fait qu'il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité.

60 β	→	100 €
40 β	→	50 €
1 β	→	2 €
15 β	→	20 €

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

La phase de mise en commun permet aux élèves d'exprimer le résultat de leurs observations et la procédure utilisée.
Il est également intéressant d'amener les élèves à se demander comment il faut s'y prendre pour rendre ces taux proportionnels. Par exemple, on peut partir de la dernière équivalence (15β pour 20€) et demander aux élèves ce que coûterait dans ces conditions une glace de 1β. Pour aller plus loin, on peut aussi demander combien on recevrait d'euros en retour si on payait cette glace avec une pièce de 2€ comme le suggère l'énoncé du problème.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Les élèves doivent pouvoir différencier les situations pour lesquelles ils peuvent utiliser les propriétés de proportionnalité des situations pour lesquelles ils ne le peuvent pas.

Quels sont les prolongements possibles ?

Les nombres en jeu constituent une variable didactique importante du problème.
Dans le problème de départ, les rapports internes sont des nombres entiers et les différences entre les quatre taux de change sont assez importantes.
Une modification à apporter serait, par exemple, de proposer les quatre taux de change ci-dessous. En effet, ils ne sont pas aussi facilement comparables que ceux du problème de départ puisque la plupart des rapports internes sont fractionnaires. De plus, deux taux de change sont équivalents et les différences avec les autres taux ne sont pas très

importantes. Cela étant, exprimer tous ces taux en fonction de 300€ (le PPCM) permet de trouver une solution grâce à des rapports internes entiers.

$$10\,\beta \rightarrow 15\text{ €}$$
$$37\,\beta \rightarrow 50\text{ €}$$
$$2\,\beta \rightarrow 3\text{ €}$$
$$13\,\beta \rightarrow 20\text{ €}$$

Pour en savoir plus :

Voir le paragraphe 1 du présent chapitre.

Voir également le chapitre 1 et plus particulièrement :

- proportionnalité simple
- cadre grandeurs
- rapport interne, rapport externe et propriétés de linéarité

Source(s) :

Chastellain M., Calame J.-A. et Brêchet M., « *Fonctions, logique et raisonnement* », Mathématiques 7-8-9, Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin, Ed. LEP, 2003

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56	M57	M58	M59		

Rectangles

De quoi s'agit-il ?

Dans cette activité, les élèves doivent comparer les variations de longueur et largeur de différents rectangles de même aire.

Demander aux élèves d'effectuer les tâches suivantes :

a) Dessinez trois rectangles différents ayant chacun une aire de 24 cm².
b) Comparez les variations des longueurs et largeurs. Sont-elles proportionnelles ? Pourquoi ?
c) Vérifiez vos conclusions sur un quatrième rectangle de 24 cm².
d) Que peut-on constater ?

Enjeux :

Dessiner des formes géométriques (rectangles), comparer les mesures des longueurs et largeurs et déterminer si elles sont proportionnelles ou non.
Prendre conscience du caractère inversement proportionnel des grandeurs en jeu.
Au delà des compétences plus spécifiques liées à la proportionnalité, une telle activité permet également de développer la compétence suivante :

Solides et figures, reconnaître, comparer, construire, exprimer :

- M32 : Tracer des figures simples.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Pour pouvoir effectuer les tâches qui leur sont proposées, les élèves doivent au préalable savoir tracer des rectangles et en calculer les aires respectives.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

Laisser les élèves travailler seuls.

Identification des tâches attendues des élèves :

Plusieurs rectangles peuvent être construits. Voici les dimensions de quelques-uns d'entre eux :

Mesure de la largeur (en cm)	Mesure de la longueur (en cm)	Aire (en cm²)
1	24	24
1,5	16	24
2	12	24
3	8	24
4	6	24

La construction du tableau n'est pas explicitement demandée dans l'énoncé. Toutefois, on peut s'attendre à ce que les élèves en construise un pour comparer les dimensions des trois rectangles qu'ils ont construits.
Grâce à ce tableau, le caractère non proportionnel des deux grandeurs (longueurs) apparaît.

- Du point de vue du rapport interne, pour passer de 1 à 2, on multiplie par 2, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on passe de 24 à 12.

Mesure de la largeur (en cm)	Mesure de la longueur (en cm)	Aire (en cm²)
1	24 × ?	24
× 2 2	12	24

- Il est également impossible de trouver un rapport (externe) commun puisque pour passer de 1 à 24, on multiplie par 24, ce qui n'est pas le cas pour passer de 4 à 6 par exemple.

Mesure de la largeur (en cm)	Mesure de la longueur (en cm)	Aire (en cm²)
1 × 24	24	24
4	6	24

~~× 24~~

Un dernier constat que les élèves doivent dresser est le caractère inversement proportionnel des deux grandeurs :

Mesure de la largeur (en cm)	Mesure de la longueur (en cm)	Aire (en cm²)
1	24 : 2	24
× 2 2	12	24

Elles varient dans des sens opposés (quand une augmente, l'une diminue) et ce, dans le même rapport : quand on multiplie une par 2, l'autre est divisée par 2.

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Limiter le nombre de rectangles à dessiner et laisser aux élèves le temps de s'approprier les consignes en évitant de les donner toutes en même temps.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Pour faciliter l'organisation de la phase de mise en commun, il est sans doute utile de la faire précéder par une mise en commun à 4 : les élèves se rassemblent, comparent et confrontent leurs démarches et leurs solutions.
La phase de mise en commun permet à chacun des groupes d'afficher leurs rectangles (différents) et d'exprimer le résultat de leurs observations.
Cette mise en commun permet aussi de vérifier que les constats effectués sur certains rectangles conviennent à tous les rectangles tracés.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Ils doivent pouvoir repérer les situations mettant en jeu des grandeurs inversement proportionnelles.

Quels sont les prolongements possibles ?

Dans le prolongement de cette activité, il est intéressant de proposer différentes variantes qui insistent sur la distinction proportionnel/non-proportionnel.

Par exemple, proposons aux élèves une série de rectangles ayant tous une largeur de 3cm et dont les longueurs mesurent respectivement : 4cm ; 5cm ; 6,5cm ; 7cm ; 7,9cm ; 9cm.

- Calcule le périmètre de chaque rectangle et complète le tableau ci-dessous :

Longueur en cm	4	5	6,5	7	7,9	9
Périmètre en cm						

- Construis un graphique représentant le périmètre en fonction de la longueur.

- Peut-on dire que pour ces rectangles, le périmètre est proportionnel à la longueur ? Pourquoi ?

- Calcule l'aire de chaque rectangle et complète le tableau ci-dessous :

Longueur en cm	4	5	6,5	7	7,9	9
Aire en cm^2						

- Construis un graphique représentant l'aire en fonction de la longueur.

- Peut-on dire que pour ces rectangles, l'aire est proportionnelle à la longueur ? Pourquoi (à quelle(s) condition(s)) ?

Pour en savoir plus :

Voir le paragraphe 1 du présent chapitre, en particulier la proportionnalité inverse.

Voir également le chapitre 1 et plus particulièrement :

- proportionnalité simple
- cadre grandeurs
- rapport interne, rapport externe

Source(s) :

Equipe de recherche

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56	M57	M58	M59		

Distances de freinage

De quoi s'agit-il ?

Cette activité est adaptée de ERMEL CM2. Les élèves doivent calculer la distance parcourue par une voiture avant de s'arrêter en fonction de diverses données mises à leur disposition.

Enjeux :

Les objectifs spécifiques de cette activités sont les suivants :
- Lire des documents et des tableaux pour rechercher des informations.
- Construire des graphiques et les utiliser pour déterminer de nouvelles informations.
- Distinguer une situation de proportionnalité d'une situation de non proportionnalité.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- Préciser que le but de l'activité est de chercher à savoir la distance parcourue par une voiture avant de s'arrêter à partir du moment où un conducteur décide de s'arrêter (en lien par exemple avec le constat de la présence de certains panneaux de limitation de vitesse aux abords des écoles).
- Faire exprimer par les élèves les différentes vitesses autorisées : en ville, en agglomération, sur autoroute, ... et les noter au TN
- Demander aux élèves d'expliciter le sens de certaines expressions comme 60 km/h, 120 km/h (parcourir 60 km ou 120 km en 1 heure)
- Distribuer aux élèves le document suivant :

> ***Quand on est en voiture et que l'on voit un obstacle, il faut freiner. Quelle distance parcourt une voiture avant de s'immobiliser totalement ?***
>
> Face à un obstacle, un conducteur met en moyenne une seconde pour réagir.
> La ***distance de réaction*** est la distance parcourue par le véhicule durant cette seconde (colonne 2).
>
> Plus une voiture va vite, plus il lui faut du temps pour freiner et mettre le véhicule à l'arrêt ; la distance ainsi parcourue pendant le freinage s'appelle la distance de freinage (colonne 3).
>
> La distance d'arrêt est égale à la différence de réaction plus la distance de freinage (colonne 4).

Le tableau suivant détaille partiellement les distances de réactions et de freinage pour des vitesses comprises entre 30 km/h et 90 km/h. Calculer les distances d'arrêt.

Vitesse du véhicule (en km/h)	Distance de réaction (en m)	Distance de freinage sur sol sec (en m)	Distance d'arrêt sur sol sec (en m)
30	9	14	
40	12	20	
50	15	28	
60	?	36	
70	21	46	
80	?	56	
90	27	68	
100	30	80	
110	33	94	
120	36	?	

Identification des tâches attendues des élèves :

Pour calculer les ***distances d'arrêt***, les Es doivent additionner les distances de réaction et les distances de freinage. Cette tâche ne devrait pas leur poser de problème particulier.

Deux distances de réaction sont manquantes dans le tableau mais les Es peuvent les calculer selon les propriétés de linéarité :

- 60 km/h, c'est deux fois plus rapide que 30 km/h ... la distance de réaction est donc deux fois plus longue ... soit 18 m.
- Pour 80 km/h, on peut aussi jouer sur les propriétés additives : 80 km/h, c'est 50 km/h + 30 km/h soit des distances de réactions équivalentes : 15 m + 9 m = 24 m ... cela se vérifie également en multipliant par deux la distance de réaction de 40 km/h.

En ce qui concerne la ***distance de freinage*** par temps sec pour une voiture roulant à 120 km/h, les données ne permettent pas de la calculer car la distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse du véhicule ... on peut toutefois en donner une approximation à l'aide d'un graphique.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

La phase de mise en commun permet aux élèves d'exprimer le résultat de leurs observations.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Dans tous les cas, plus la vitesse augmente plus les distances augmentent également.

Toutefois, si l'on va deux fois plus vite (exemple : calcul de la distance de réaction pour 60 km/h), la distance de réaction est deux fois plus longue mais la distance de freinage n'est pas exactement deux fois plus longue ... elle est plus de deux fois plus longue. La distance de freinage n'est donc pas proportionnelle à la vitesse du véhicule ce qui rend difficile le calcul de la distance de freinage pour 120 km/h.
La distance d'arrêt est égale à la distance de réaction plus la distance de freinage ; cette distance d'arrêt n'est pas proportionnelle à la vitesse du véhicule.
Un lien peut être établi avec la situation des verres gradués[17].

Quels sont les prolongements possibles ?

Réalisation de graphiques pour représenter les données et poursuivre les constats opérés lors de l'activité « verres gradués ». Essayer d'approximer la distance de freinage à 120 km/h.

Pour en savoir plus :

Voir le paragraphe 1 du présent chapitre.

Voir également le chapitre 1 et plus particulièrement :

- proportionnalité simple
- cadre grandeurs
- rapport externe et propriétés de linéarité

Source(s) :

ERMEL CM2 (2005)
U.L.B. Computer Algebra Division

[17] Celle-ci fait l'objet d'une fiche particulière.

4. Exercices d'application

Pour stabiliser les compétences des élèves, les enseignants peuvent utiliser certains exercices proposés comme items d'évaluation diagnostique, autres que ceux utilisés comme point de départ de leur séquence didactique.

Vous pouvez également trouver dans les fiches d'activité du paragraphe précédent, des propositions d'activités pour aller plus loin ou pour venir en aide aux élèves qui éprouvent encore des difficultés.

Chapitre 4 : Kit 3 : Proportionnalité simple composée et proportionnalité multiple.

1. Références théoriques indispensables[18]

De manière à éviter les redites, nous invitons le lecteur désireux d'en savoir plus sur les notions abordées dans ce kit à consulter la section 3 du chapitre 1 de cette brochure. Il y trouvera des pistes de réflexion sur :

- la proportionnalité simple composée et
- la proportionnalité multiple.

[18] Pour plus de détails, se référer à la section 3 du chapitre 1 : « Quels repères mathématiques pour développer l'enseignement de la proportionnalité ? »

2. Items d'évaluation

Voici une série d'exercices pouvant servir de point de départ à la construction d'une épreuve diagnostique permettant d'évaluer le niveau de compréhension et de réflexion des élèves de manière à leur proposer des activités plus adéquates.
Pour faciliter la lecture, nous les avons classés en deux catégories.

A. Proportionnalité simple composée

Exercice 1 : (source Suisse romande)

Avec un œuf d'autruche, on fait la même omelette qu'avec dix-huit œufs de poule. Avec quatre œufs de poule, on fait une omelette pour trois personnes.
a) Dans ces conditions, combien faut-il d'œufs d'autruche pour nourrir vingt-sept hommes des cavernes ?
b) Si un œuf de « diplodoeufcus » correspond à trente-cinq œufs d'autruche, combien six œufs de ce reptile auraient permis de nourrir d'hommes des cavernes, s'ils avaient vécu à cette époque ?

Exercice 2 : (source IREM)

Une entreprise d'électronique fabrique des téléviseurs et des magnétoscopes. Cette entreprise est soumise à trois contraintes :

Contrainte de main d'oeuvre
70 ouvriers travaillent à la fabrication : en une heure, l'entreprise dispose de 70h de main d'œuvre. Il faut 1h de main d'œuvre pour fabriquer un téléviseur et 2h pour un magnétoscope.

Contrainte de budget
Les services comptables estiment qu'il ne faut pas dépasser un budget horaire de 9000€ pièces et main d'œuvre. Le prix de revient, pièces et main d'œuvre est de 200€ pour un téléviseur et de 150€ pour un magnétoscope.

Contrainte de vente
Les services commerciaux ne peuvent pas écouler plus de 40 téléviseurs à l'heure ni plus de 30 magnétoscopes à l'heure.

D'autre part, les bénéfices réalisés sont de 120€ par téléviseur et de 80€ par magnétoscope.

1) Est-il possible en respectant toutes les contraintes de produire et commercialiser 40 téléviseurs à l'heure ? Justifiez votre réponse.
2) Est-il possible en respectant toutes les contraintes de produire et commercialiser 30 magnétoscopes à l'heure ? Justifiez votre réponse.
3) Est-il possible en respectant toutes les contraintes de produire et commercialiser 40 téléviseurs et 30 magnétoscopes à l'heure ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 : Le baril de pétrole brut (source Greff, Mull, Rousselet)

La baril de pétrole brut vaut 78 $. Quel est le prix d'un litre en euros ?
(1 baril = 170 litres et 1 dollar US = 0,845 €)

Exercice 4 : Olympiades : ex 219 pg 60

Un malade pèse 90kg. Pour se soigner, il doit absorber chaque jour une dose de tonique cardiaque correspondant à 10mg par kilogramme de masse corporelle. Ce tonique est distribué sous la forme de mélange d'eau et de médicament, contenant 300mg de médicament par 10ml de potion. Combien de millilitres de potion le malade doit-il absorber quotidiennement ?

Exercice 5 : Echanges2 (source Greff, Mull, Rousselet)

Des enfants utilisent le système d'échanges suivant :
pour 9 pogs, on obtient 20 billes ;
pour 15 pogs, on obtient 16 agates.

Combien obtient-on d'agates en échange de 25 billes ?

Exercice 6 : Fabrication de la fonte (Pythagore, 6^e)

Pour charger un haut fourneau, on doit mélanger 10 tonnes de minerai avec 3 tonnes de coke. Une tonne de minerai fournit en moyenne 325kg de fonte.
Quelles quantités de minerai et de coke faut-il pour obtenir une tonne de fonte ?

Exercice 7

Madame Soulisse a fait des pots de confiture de 180 grammes. Elle met 12 pots de confiture par étagère, dans un placard de 7 étagères.
Quelle est la masse totale de confiture ?

Exercice 8 : Un peu de pain (source Greff, Mull, Rousselet)

Avec 100kg de blé, on fait 75kg de farine et avec 25kg de farine, on fait 30kg de pain.
Quelle est la masse de blé nécessaire pour faire 450kg de pain ?

Exercice 9 : Echanges3 (source Greff, Mull, Rousselet)

On lit dans le journal, à la rubrique « Marché des changes » : 1 euro = 1,1872 dollars US et 1 euro = 139,18 yens.
Quelle est la valeur en euros de 1 dollar US ? Quel est le prix en euros de 850 dollars US ?
Quelle est la valeur en yens de 2400 dollars US ?

B. Proportionnalité multiple

Exercice 10

Depuis quelques années, un gestionnaire des téléphériques d'une station de sports d'hiver remarque que le bénéfice qu'il réalise durant le mois de mars dépend du nombre de réservations enregistrées au 31 décembre et du nombre de jours d'enneigement annoncé fin février par Météo France pour le mois de mars.
En 2007, il a réalisé un bénéfice de 2800€.
Météo France avait prévu 21 jours d'enneigement et l'office du Tourisme enregistrait 868 réservations au 31 décembre.
Pour 2008, quel devrait être le nombre de réservations pour assurer un bénéfice de 3000€ en tablant sur 18 jours d'enneigement (ce qui représente la moyenne de ces 10 dernières années) ?

Exercice 11 : Les problèmes de Tartaglia (Pythagore, 6^e)

Si 12 boeufs mangent 3 cens de foin en 15 jours, combien faudra-t-il de boeufs pour manger 5 cens de foin en 10 jours ?

Exercice 12 : (Cinq sur cinq 4^e)

En cinq minutes, une machine d'imprimerie effectue le tirage de cinquante journaux.
Clément : « *Donc, en dix minutes, deux machines tireront cent journaux.* »
Didier : « *Pas du tout, en dix minutes, une seule machine tirera cent journaux.* »

Estelle : « *Finalement, en dix minutes, deux machines tireront deux cent journaux.* »
a) Quels sont les élèves qui ont raison ?
b) Au fait ! En un quart d'heure, combien de journaux trois machines tireront-elles ?

Exercice 13 : (Pythagore, 6e)

Si 9 artisans boivent 12 brocs de vin en 8 jours, combien 24 artisans boiront-ils de vin en 30 jours ?

Exercice 14 : Construction (adaptation de Pythagore, 6e)

Une entreprise a construit un building en 2 ans et 80 personnes ont travaillé en permanence sur ce chantier. Cette entreprise souhaite construire un autre building, de même modèle, deux fois plus grand et en deux fois moins de temps. Combien va-t-elle devoir employer de personnes pour réaliser ce travail ?

Exercice 15 : Les jardiniers (Pythagore, 6e)

Voici le texte d'un vieux problème : « un jardinier met 2 heures pour bêcher un jardin. Son voisin, qui a moins l'habitude, met trois heures pour faire le même travail. Ils décident de travailler ensemble. Combien vont-ils mettre de temps pour bêcher ce jardin ? »

Exercice 16 : Drôles de machines (source Greff, Mull, Rousselet)

3 machines identiques tournant à plein régime permettent de fabriquer 21000 bouteilles en 5 jours. Combien de jours faudrait-il pour que 7 machines identiques travaillant dans les mêmes conditions fabriquent 88200 bouteilles ?

Exercice 17

Le secrétaire de mairie d'une commune a calculé que l'entretien de la salle de sports revient à 0,5€ par personne et par jour d'ouverture. En moyenne, 72 personnes participent aux activités sportives, pour chaque jour d'ouverture.
Quel est le coût de l'entretien pour un mois (25 jours d'ouverture de la salle)?

Exercice 18 : (Triangle 3e)

Dans une entreprise, cinq couturières mettent deux heures pour fabriquer 20 jeans. Combien de jeans seront fabriqués par 7 couturières en 4h ?

Exercice 19

Deux singes sont transférés au zoo d'Animalville. Ils y retrouvent les 4 singes déjà présents.
Le responsable veut faire une provision de nourriture de 30 jours pour ces 6 singes.
Quelle quantité de nourriture doit-il commander si on sait que, la dernière fois, les 10kg reçus avaient permis de nourrir les 4 singes pendant 15 jours ?

Exercice 20 : Consommation de crayons (source Greff, Mull, Rousselet)

L'étude de la fréquentation d'une école primaire qui comporte 125 enfants montre qu'ils sont généralement présents 29 semaines par an. Quelle sera la quantité de crayons à commander sachant que 10 élèves usent en moyenne 16 crayons par mois (4 semaines) ?

Exercice 21

Mon voisin utilise 3l d'eau par jour et par arbre pour arroser son jardin. En 4 jours, il consomme 72l. Combien d'arbres possède-t-il ?

Exercice 22 : Vendanges

Une équipe de 10 personnes a ramassé 3,2 tonnes de raisin en 4h. Si tout le monde ramasse de la même manière, quelle quantité de raisin est récoltée par une personne en 1h ?

Exercice 23 : Inondations

On utilise des pompes pour assécher les caves inondées. Chaque pompe retire 40l d'eau par heure.
La cave de Mr Léopold a été inondée par 960l d'eau. Pour l'assécher, on utilise 9 pompes. Combien d'heures faut-il pour mettre la cave à sec ?

3. Activités d'apprentissage

Les activités développées dans ce paragraphe sont au nombre de quatre. Elles sont toutes construites selon le même canevas de fiche, détaillé à la page 9 de cette brochure.

Voici un tableau reprenant les quatre activités proposées dans ce paragraphe. Outre le titre de l'activité, il y est également fait mention du cadre mathématique concerné, des enjeux du problème de départ, des compétences plus spécifiquement travaillées, du niveau d'enseignement auquel s'adresse cette activité et enfin, la source dont elle est extraite. Les items d'évaluation liés aux différentes activités sont également indiqués.

Titre de l'activité	Cadre	Enjeux	Compétences	Niveau(x) d'enseignement	Source(s)	Item(s) d'évaluation concerné(s)
Echanges	Grandeurs	Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de **proportionnalité simple composée.** Appliquer plusieurs fois les propriétés de proportionnalité simple et directe, le résultat de l'une étant nécessaire à l'application de l'autre.	M56, M57 et M59	6P, 1S	Chastellain M., Calame J.-A. et Brêchet M., « *Fonctions, logique et raisonnement* », Mathématiques 7-8-9, CIIP, suisse romande, Ed. LEP, 2003 Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes)	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Jardiniers	Grandeurs	Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de **proportionnalité multiple (double).**	M56, M57 et M59	6P, 1S	Equipe de recherche Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes)	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23

Casse-tête	Grandeurs	Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de **proportionnalité double.**	M56, M57 et M59	6P, 1S	Pythagore, 6e	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23
Recettes	Grandeurs	Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre des problèmes de **proportionnalité simple (plusieurs grandeurs en jeu).** Appliquer plusieurs fois les propriétés de proportionnalité simple et directe.	M56, M57 et M59	6P, 1S	ERMEL CM2 (2005)	2

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58		M59

Echanges

De quoi s'agit-il ?

L'activité proposée est une adaptation d'une situation développée dans « *Fonctions, logique et raisonnement* », Mathématiques 7-8-9, Suisse romande. Les élèves doivent déterminer le nombre de cartes d'un certain type qu'ils peuvent obtenir en échange de cartes d'un autre type, en respectant les règles établies.

> Dans la cour de l'école, des enfants essaient de compléter leur collection d'images.
> Les règles d'échanges sont les suivantes :
> a) 2 « Saturne » valent 5 « Lune »
> b) 3 « Lune » valent 4 « Voie Lactée »
> Tu possèdes 6 « Saturne ».
> Combien pourras-tu obtenir de « Voie Lactée » ?
> Combien obtiendrais-tu de « Saturne » si tu possédais 80 « Voie Lactée » ?
> Explique comment tu as procédé.

Enjeux :

Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de proportionnalité simple composée.
Appliquer plusieurs fois les propriétés de proportionnalité simple et directe, le résultat de l'une étant nécessaire à l'application de l'autre.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes de proportionnalité simple et directe.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

Les élèves doivent percevoir le lien existant entre les trois grandeurs en jeu. Un tableau reprenant les données peut être construit :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3	4

Le compléter n'est pas chose aisée puisque les rapports ne sont pas entiers.
Pour répondre à la première question (« Tu possèdes 6 'Saturne', combien pourras-tu obtenir de 'Voie Lactée' ? »), il faut procéder en deux temps en utilisant, comme intermédiaire, le nombre de « Lune ».

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3	4
6	.	?

En effet, le nombre de « Saturne » étant proportionnel au nombre de « Lune », il est facile d'utiliser le rapport interne (3) pour obtenir l'équivalent de 6 « Saturne » en terme de « Lune » :

	Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
× 3	2	5 × 3	.
	.	3	4
	6	15	?

La relation de proportionnalité entre le nombre de « Lune » et le nombre de « Voie lactée » permet alors d'obtenir la réponse au problème posé en utilisant à nouveau le rapport interne :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3 × 5	4 × 5
6	15	20

Le lien direct ainsi établi entre le nombre de « Saturne » (6) et le nombre de « Voie Lactée » (20) permet alors de répondre directement à la deuxième question du problème (Combien obtiendrais-tu de 'Saturne' si tu possédais 80 'Voie Lactée' ?) en utilisant une fois encore le rapport interne :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3	4
6 × 4	15	20 × 4
24		80

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Les différents types de cartes peuvent être matérialisés par différents types de jetons. Les échanges peuvent alors être réalisés concrètement par les élèves.
Dans un premier temps, il est sans doute utile de les laisser se familiariser avec le matériel en les laissant le manipuler. D'autres règles d'échanges peuvent aussi être établies, pour faciliter la manipulation. Par exemple, 1 « Saturne » vaut 2 « Lune » et 1 « Lune » vaut 3 « Voie Lactée ».
Les élèves peuvent alors trouver facilement les réponses à des questions telles que « J'ai 2 'Saturne', combien puis-je avoir de 'Lune' ? » ou « J'ai 8 'Lune', combien puis-je avoir de 'Voie Lactée' ? ».
Progressivement, on peut amener des questions liant les 'Saturne' et les 'Voie Lactée' : « J'ai 4 'Saturne', combien puis-je avoir de 'Voie Lactée' ? ».
Grâce à la matérialisation des échanges, le passage par le nombre de 'Lune' se fera naturellement et on pourra alors revenir au problème de départ.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Lors de cette phase, il faut insister sur le lien existant entre les trois grandeurs : elles sont proportionnelles deux à deux. C'est grâce à ces relations que le problème peut être résolu en appliquant successivement deux propriétés de proportionnalité simple (voir tableaux ci-avant).
Il est également intéressant d'insister sur une autre particularité du tableau due au type de problème traité et plus spécifiquement à la **succession** de deux propriétés de proportionnalité simple. Par exemple, si on modifie le point b de l'énoncé de manière à ce que 3 « Lune » valent 7 « Voie Lactée », dans la résolution, **seule** la partie de droite du tableau va être modifiée, pas la partie de gauche :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	$3 \xrightarrow{\times 5}$	**7** $\xrightarrow{\times 5}$
6	15	**35**

La première application de proportionnalité simple n'est en rien modifiée puisque les données qui la concernent ne changent pas.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Les trois grandeurs en jeu sont proportionnelles deux à deux. Le problème concerne la proportionnalité simple composée.
Les problèmes de ce type peuvent être résolus en appliquant deux fois (successivement) les propriétés de proportionnalité simple.

Quels sont les prolongements possibles ?

1) La mise en tableau fait apparaître que l'on privilégie ici un mode de raisonnement fondé sur les rapports internes. Il peut également être utile de travailler au départ des rapports externes en définissant d'autres règles d'échanges.
Par exemple, la solution du problème de départ peut être obtenue grâce aux rapports externes, simplement en les multipliant (ce qui constitue encore une particularité des problèmes de proportionnalité simple composée) :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3	4
6	15	20

$\times \frac{5}{2}$ $\times \frac{4}{3}$

$$\times \frac{5}{2} . \frac{4}{3} \text{ ou } \times \frac{10}{3}$$

Une question peut alors être posée aux élèves : « Comment modifier les règles d'échanges en conservant le même rapport externe global (autrement dit pour que 6 'Saturne' correspondent encore à 20 'Voie Lactée') ? »

2) Un autre problème peut être proposé aux élèves. Il est extrait de Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes) et concerne aussi la proportionnalité simple composée :

> Un transporteur doit livrer du sucre dans un magasin. Les sacs de 7kg de sucre sont placés dans des caisses. Chaque caisse contient 20 sacs. Le transporteur charge 80 caisses pleines dans son camion. Quelle quantité de sucre le transporteur a-t-il chargée dans son camion ?

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement la proportionnalité simple composée.

Source(s) :

Chastellain M., Calame J.-A. et Brêchet M., « *Fonctions, logique et raisonnement* », Mathématiques 7-8-9, Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin, Ed. LEP, 2003

Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes)

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57		M58	M59

Jardiniers

De quoi s'agit-il ?

Dans l'activité proposée, les élèves doivent déterminer la quantité d'eau nécessaire en fonction de deux autres grandeurs, indépendantes entre elles.

> Un jardinier consomme 630l d'eau par semaine pour arroser tous les jours ses 45 arbres.
> Combien de litres d'eau supplémentaires devra-t-il prévoir pour arroser les 15 arbres de son voisin pendant les vacances (4 semaines) de celui-ci ?

Enjeux :

Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de proportionnalité multiple.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes de proportionnalité simple et directe.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

La première étape est d'identifier les grandeurs en jeu et les relations qui existent (ou non) entre elles :

- Trois grandeurs : Nombre de litres d'eau, nombre de semaines, nombre d'arbres ;
- Le nombre de litres d'eau est proportionnel au nombre de semaines, quand le nombre d'arbres ne varie pas ;
- Le nombre de litres d'eau est proportionnel au nombre d'arbres, quand le nombre de semaines ne varie pas ;
- Le nombre d'arbres et le nombre de semaines <u>ne dépendent pas</u> l'un de l'autre.

Ensuite vient la mise en forme des données :

Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines	Nombre d'arbres
630	1	45
?	4	15

Pour résoudre ce problème, il est indispensable de ne pas faire varier les deux grandeurs (nombre d'arbres et nombre de semaines) en même temps. Il faut en faire varier une <u>puis</u> l'autre (en gardant à chaque fois l'autre grandeur fixe). Pour ce faire, une étape intermédiaire est nécessaire : par exemple, « Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 15 arbres pendant une semaine ? » ou encore « Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 45 arbres pendant quatre semaines ? » Pour répondre à une de ces questions, il suffit d'utiliser le rapport interne :

	Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines	Nombre d'arbres	
: 3	630	1	45	: 3
	210	1	15	
	?	4	15	

ou

	Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines		Nombre d'arbres
× 4	630	1	× 4	45
	2520	4		45
	?	4		15

Grâce à cette valeur intermédiaire, la réponse à la question de départ (« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 15 arbres pendant quatre semaines ? ») s'obtient facilement en utilisant une nouvelle fois le rapport interne :

	Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines		Nombre d'arbres
	630	1		45
× 4	210	1	× 4	15
	840	4		15

ou

	Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines	Nombre d'arbres	
	630	1	45	
: 3	2520	4	45	: 3
	840	4	15	

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Proposer aux élèves des questions intermédiaires de manière à décomposer le problème avec eux :

« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 45 arbres pendant deux semaines ? »
« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 45 arbres pendant quatre semaines ? »
« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 15 arbres pendant une semaine ? »
« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 15 arbres pendant deux semaines ? »

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Lors de cette phase, il faut insister sur les liens existant ou non entre ces trois grandeurs : elles ne sont pas proportionnelles deux à deux !
L'une est proportionnelle aux deux autres mais ces deux autres sont indépendantes.
C'est pourquoi la résolution du problème demande une étape intermédiaire pour laquelle on peut utiliser les propriétés de proportionnalité simple.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Dans un problème concernant plusieurs grandeurs, il est indispensable de repérer les relations qui existent ou non entre elles de manière à utiliser les propriétés de proportionnalité simple à bon escient.
Au delà des techniques de résolution, c'est <u>le sens du problème qui importe</u> !

Quels sont les prolongements possibles ?

Un problème assez similaire peut être proposé aux élèves. Il est extrait de Mathenpoche 6^e (IREM de Rennes) :

> Dans son jardin, Monsieur Durand utilise pour l'arrosage 3 litres d'eau par jour et par arbre. En 4 jours, il a utilisé 60 litres pour arroser ses arbres. Combien a-t-il d'arbres dans son jardin ?

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement la proportionnalité multiple.

Source(s) :

Equipe de recherche

Mathenpoche 6^e (IREM de Rennes)

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57		M58	M59

Casse-tête

De quoi s'agit-il ?

L'activité proposée est une adaptation d'une situation développée dans Pythagore 6^{e}. Les élèves doivent déterminer le nombre d'œufs pondus par des poules en un certain nombre de jours… mais le choix des nombres en jeu est piégeant…

> Sachant que 6 poules pondent 6 œufs en 6 jours, combien 12 poules pondent-elles d'œufs en 12 jours ?

Enjeux :

Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de proportionnalité multiple (dans ce cas-ci, il s'agit même d'un problème de proportionnalité double).

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes de proportionnalité simple et directe.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

1) Identifier les grandeurs en jeu : nombre de poules, nombre d'œufs, nombre de jours.
2) Analyser les relations entre ces grandeurs :

    - Le nombre d'œufs est proportionnel au nombre de poules, pour un nombre de jours fixe ;
    - Le nombre d'œufs est proportionnel au nombre de jours, pour un nombre de poules fixe ;
    - Il n'existe pas de relation particulière entre le nombre de jours et le nombre de poules.

3) Mettre les données en forme :

Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
6	6	6
?	12	12

La tentation est grande de répondre 12 ! Pourtant, il n'en est rien.
En effet, il est impératif de passer par une étape intermédiaire pour résoudre ce genre de problème : « Combien d'œufs vont pondre 12 poules en 6 jours ? » ou « Combien d'œufs vont pondre 6 poules en 12 jours ? ». La réponse s'obtient grâce au rapport interne :

	Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
× 2	6	6 × 2	6
	12	12	6
	?	12	12

ou

	Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
× 2	6	6	6 × 2
	12	6	12
	?	12	12

C'est seulement ensuite que la réponse au problème de départ (« Combien d'œufs vont pondre 12 poules en 12 jours ? ») peut être obtenue grâce à nouveau au rapport interne :

	Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
	6	6	6
× 2	12	12	6 × 2
	24	12	12

ou

	Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
	6	6	6
× 2	12	6 × 2	12
	24	12	12

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Il est indispensable de séparer les différentes étapes.

Pour faciliter la compréhension des élèves, peut-être est-ce utile de partir d'un énoncé plus simple comme par exemple « 1 poule pond 1 œuf par jour » et de poser différentes questions telles que

- « Combien d'œufs obtiendra-t-on en 2 (ou 3 ou 4 ou …) jours, pour une poule ? »
- « Combien d'œufs obtiendra-t-on par jour si on a 2 (ou 3 ou 4 ou …) poules ? »
- « Combien d'œufs aura-t-on après 2 jours si on a 2 (ou 3 ou 4 ou …) poules ? »
- …

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Lors de cette phase, il faut insister sur les liens existant ou non entre les différentes grandeurs : toutes les grandeurs ne sont pas en relation !
C'est pourquoi la résolution du problème demande une (ou des) étape(s) intermédiaire(s). Moyennant cela, le problème se résout facilement grâce au rapport interne.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Dans un problème concernant plusieurs grandeurs, il est indispensable de repérer les relations qui existent ou non entre elles de manière à utiliser les propriétés de proportionnalité simple à bon escient.
Au delà des techniques de résolution, c'est <u>la signification du problème (et le contexte) qui importe</u> !

Quels sont les prolongements possibles ?

Pourquoi pas un autre problème du même type ?

> Sachant que 6 enfants mangent 6 œufs en 6 jours, combien de jours 12 enfants prendront-ils pour manger 12 œufs ?

La grandeur qui dépend des deux autres est ici encore le nombre d'œufs mais la valeur manquante concerne une des deux grandeurs indépendantes. En fonction de la procédure de résolution choisie par les élèves, une relation de proportionnalité inverse pourrait apparaître (cf. remarque de la page 33).

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement la proportionnalité multiple.

Source(s) :

Pythagore, 6^{e}

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58		M59

Recettes

De quoi s'agit-il ?

L'activité proposée est une adaptation d'une situation développée dans ERMEL (CM2). Les élèves doivent déterminer la quantité de chaque ingrédient nécessaire à l'élaboration d'une recette.

> Pour faire un cake, j'ai trouvé la recette suivante : des raisins secs, 600g de farine, 300g de sucre, 200g de beurre, 6cl de rhum et 12 œufs.
> a) Si je choisis cette recette, quelles quantités de sucre, de rhum et d'œufs me faut-il pour 1kg de farine ?
> b) Avec la même recette, cherchez quelles quantités de sucre, de rhum et de beurre il faut pour 240g de farine.

Enjeux :

Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre des problèmes de proportionnalité simple.
Appliquer plusieurs fois les propriétés de proportionnalité simple et directe.

Ce problème n'est pas à proprement parlé un problème de proportionnalité simple composée dans le sens où toutes les valeurs peuvent être obtenues indépendamment les unes des autres, en partant à chaque fois des quantités de farine données. *A contrario*, pour des problèmes tels que « Echanges »[19], on ne peut trouver la solution du problème en utilisant uniquement les données fournies. Il est impératif de calculer une valeur intermédiaire.
« Recettes » n'est donc pas un problème classique de proportionnalité simple composée mais le nombre de grandeurs intervenant dans l'énoncé le rend moins facile à résoudre aux yeux des élèves qu'un problème de proportionnalité simple et directe traditionnel mettant en jeu deux grandeurs.
Il serait intéressant de proposer aux élèves du secondaire de comparer des problèmes tels que « Recettes » et « Echanges » de manière à en faire ressortir les différences tant au niveau des énoncés qu'au niveau des procédures de résolution.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes de proportionnalité simple et directe.

[19] Celui-ci fait l'objet d'une fiche particulière.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

La construction d'un tableau de correspondance permet de visualiser la situation :

Quantité de farine (g)	Quantité de sucre (g)	Quantité de beurre (g)	Quantité de rhum (cl)	Nombre d'œufs
600	300	200	6	12
1000	?		?	?
240	?	?	?	

Les élèves ont alors le choix d'utiliser le rapport interne (fractionnaire) ou les rapports externes (entiers).

: 100   : 2   × 2

	Quantité de farine (g)	Quantité de sucre (g)	Quantité de beurre (g)	Quantité de rhum (cl)	Nombre d'œufs
$\times \frac{5}{3}$	600	300 $\times \frac{5}{3}$	200	6 $\times \frac{5}{3}$	12 $\times \frac{5}{3}$
	1000	500	/	10	20
	240	?	?	?	/

: 100   : 3   : 2

	Quantité de farine (g)	Quantité de sucre (g)	Quantité de beurre (g)	Quantité de rhum (cl)	Nombre d'œufs
$\times \frac{4}{10}$	600	300 $\times \frac{4}{10}$	200 $\times \frac{4}{10}$	6 $\times \frac{4}{10}$	12
	1000	?	/	?	?
	240	120	80	2,4	/

Le nombre de grandeurs en jeu (les quantités des différents ingrédients) peut déstabiliser les élèves. Pourtant, ce problème se résout en utilisant les techniques de résolution propres à la proportionnalité simple et directe puisque les grandeurs sont proportionnelles deux à deux et que toutes les données nécessaires pour répondre aux questions posées apparaissent dans l'énoncé.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Lors de cette phase, il faut insister sur le lien existant entre les cinq grandeurs : elles sont proportionnelles deux à deux. C'est grâce à ces relations que le problème peut être résolu en appliquant les propriétés de proportionnalité simple.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Les grandeurs en jeu sont proportionnelles deux à deux. Les problèmes de ce type peuvent être résolus en appliquant successivement les propriétés de proportionnalité simple.

Quels sont les prolongements possibles ?

Proposer le problème « Echanges » qui fait l'objet d'une autre fiche d'exploitation.

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement

- la proportionnalité simple, la proportionnalité simple composée,
- rapport interne, rapport externe et propriétés de linéarité.

Source(s) :

ERMEL CM2 (2005)

4. Exercices d'application

Pour stabiliser les compétences des élèves, les enseignants peuvent utiliser certains exercices proposés comme items d'évaluation diagnostique, autres que ceux utilisés comme point de départ de leur séquence didactique.

Vous pouvez également trouver dans les fiches d'activité du paragraphe précédent, des propositions d'activités pour aller plus loin ou pour venir en aide aux élèves qui éprouvent encore des difficultés.

Bibliographie

ARMT, différents problèmes développés par l'Association du Rallye Mathématique Transalpin et plus particulièrement les problèmes des épreuves 7, 9 et 11.

Baruk, S. (1995). **Dictionnaire de mathématiques élémentaires.** Paris : Seuil.

Blanc, JP., Bramand, P., Debû, P., Gély, J., Lafont, E., Peynichou, D. & Vargas, A. (2005). **Pour comprendre les mathématiques**. Paris : Hachette Education.

Boisnard, D., Houdebine, J., Julo, J., Kerboeuf, M.-P. & Merri M. (1994). **La proportionnalité et ses problèmes.** Paris : Hachette.

Brissiaud, R. (1998). **J'apprends les maths CM1.** Paris : Retz.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 2 (3).

Brousseau, G. (1998). **La théorie des situations didactiques.** Grenoble : la Pensée sauvage.

Burgermeister, P.F., Coray, M. (à paraître). **Apprentissage du raisonnement proportionnel et processus de contrôle de validité**.

Charnay, R. & Mante, M. (1995). **Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles.** Paris : Hatier.

Charnay, P. (1998). De l'école au collège - les élèves et les mathématiques. **Grand N** , 62, pp. 35-46.

Charnay, R. (2003). L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant. In Grugnetti, L., Jaquet, F., Medici, D., Rinaldi, M., Polo, M. **RMT : Potentialités pour la classe et la formation**. Parme : ARMT.

Charnay, R., Combier, G. & Dussuc, M.-P. (2004). ***Cap maths CM1***. Paris : Hatier.

Chastellain, M., Calame, J.-A. & Brêchet M. (2003). **Fonctions, logique et raisonnement. Mathématiques 7-8-9.** Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin : LEP.

Chevallier, A., Degen, D., Docq, C., Krysinska, M., Cuisinier, G. & Hauchart, C. (2002). **Référentiel de mathématiques.** Bruxelles : De Boeck & Larcier.

Cinq sur cinq, Math 4^{e}. (2002). Paris : Hachette Education.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., Verschaffel, L. (2005). Raisonnements proportionnels inappropriés chez les élèves du secondaire en situation de résolution de problèmes géométriques. In Crahay, M., Verschaffel, L., de Corte, E., Grégoire, J. **Enseignement et apprentissage des mathématiques - Que disent les recherches psychopédagogiques ?** Bruxelles : De Boeck.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** 7 (2).

Dupont, P. & Villers C. (2006). **Olympiades Mathématiques Belges. Recueil de questions.** Tome 6. Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française.

ERMEL. (2005). **Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM1.** Paris : Hatier.

ERMEL. (2005). **Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2.** Paris : Hatier.

Greff, E., Mull, A. & Rousselet, M. (2006). **Mathématiques - Professeur des Ecoles.** Paris : Vuibert.

IREM Rennes (2005). Une séquence d'enseignement de la proportionnalité. **Mathenpoche 6e.**

IREM Rennes (2006). Une séquence d'enseignement de la proportionnalité. **Mathenpoche 5e.**

Fagnant, A. & Demonty I. (2005). **Résoudre des problèmes : pas de problème !** Bruxelles : De Boeck.

Groupe Géométrie et Arithmétique de l'Irem d'Aquitaine (1999). Les revues pédagogiques de la **Mission Laïque Française** - Activités mathématiques et scientifiques , 38.

Habran, L. (1988). Nombres et opérations numériques. La mathématique à l'école fondamentale. **Semaine pédagogique**. Mons : Centre technique et pédagogique de l'enseignement de la Communauté française.

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. **Repères-IREM** , 59.

Jaquet, F. (2005). Successioni proporzionali e variabili didattiche. **L'Educazione matematica**, Cagliari, 3.

Jaquet, F. (2005). Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT in Jaquet, F. et Grugnetti, L. (2006). **RMT : des problèmes à la pratique de la classe.** ARMT : Universités de Parme & de Cagliari.

Levain, J.-P. & Vergnaud, G. (1995). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. **Grand N,** 56, IREM de Grenoble.

Levain, JP. (1997). **Faire des maths autrement - Développement cognitif et proportionnalité.** Paris : L'Harmattan.

Ministère de la Communauté française. (1999). **Socles de compétences.** Bruxelles : Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique.

Ministère de l'Education, de la jeunesse et de la formation (2003). **Les nouveaux programmes à l'école primaire – Mathématiques : articulation école-collège**. Paris : Direction de l'enseignement scolaire.

Pour comprendre les mathématiques CM2. (2001). Paris : Hachette Education.

Pythagore 6e. (1996). Paris : Hatier.

Rome, P. (2007). Grandeurs proportionnelles au 3e cycle. **Pratiques d'écoles**, 4.

Rouche, N. (1992). **Le sens de la mesure.** Paris : Hatier.

Rouche, N. (1998). **Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?** Paris : Ellipses.

Rouche, N. (2002). **Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme un fil conducteur.** Nivelles : CREM.

Rouche, N. (2004). **De l'élève aux mathématiques, le chemin s'allonge.** Bull. Assoc. Prof. Math. Ens. Public, 455, pp. 862-880.

Rouche, N. (2006). **Du quotidien aux mathématiques : nombres, grandeurs, proportions.** Paris : Ellipses.

Triangle, Mathématiques 3e. (1999). Paris : Hatier.

Vernex, M. (2001). Analyse et utilisation du problème *Décoration* du 9e RMT. **Math-Ecole**, Neuchâtel, 198, pp. 4-18.