Chapitre 4 : Kit 3 : Proportionnalité simple composée et proportionnalité multiple.

1. Références théoriques indispensables[18]

De manière à éviter les redites, nous invitons le lecteur désireux d'en savoir plus sur les notions abordées dans ce kit à consulter la section 3 du chapitre 1 de cette brochure. Il y trouvera des pistes de réflexion sur :

- la proportionnalité simple composée et
- la proportionnalité multiple.

[18] Pour plus de détails, se référer à la section 3 du chapitre 1 : « Quels repères mathématiques pour développer l'enseignement de la proportionnalité ? »

2. Items d'évaluation

Voici une série d'exercices pouvant servir de point de départ à la construction d'une épreuve diagnostique permettant d'évaluer le niveau de compréhension et de réflexion des élèves de manière à leur proposer des activités plus adéquates.
Pour faciliter la lecture, nous les avons classés en deux catégories.

A. Proportionnalité simple composée

Exercice 1 : (source Suisse romande)

Avec un œuf d'autruche, on fait la même omelette qu'avec dix-huit œufs de poule. Avec quatre œufs de poule, on fait une omelette pour trois personnes.
a) Dans ces conditions, combien faut-il d'œufs d'autruche pour nourrir vingt-sept hommes des cavernes ?
b) Si un œuf de « diplodoeufcus » correspond à trente-cinq œufs d'autruche, combien six œufs de ce reptile auraient permis de nourrir d'hommes des cavernes, s'ils avaient vécu à cette époque ?

Exercice 2 : (source IREM)

Une entreprise d'électronique fabrique des téléviseurs et des magnétoscopes. Cette entreprise est soumise à trois contraintes :

Contrainte de main d'oeuvre
70 ouvriers travaillent à la fabrication : en une heure, l'entreprise dispose de 70h de main d'œuvre. Il faut 1h de main d'œuvre pour fabriquer un téléviseur et 2h pour un magnétoscope.

Contrainte de budget
Les services comptables estiment qu'il ne faut pas dépasser un budget horaire de 9000€ pièces et main d'œuvre. Le prix de revient, pièces et main d'œuvre est de 200€ pour un téléviseur et de 150€ pour un magnétoscope.

Contrainte de vente
Les services commerciaux ne peuvent pas écouler plus de 40 téléviseurs à l'heure ni plus de 30 magnétoscopes à l'heure.

D'autre part, les bénéfices réalisés sont de 120€ par téléviseur et de 80€ par magnétoscope.

1) Est-il possible en respectant toutes les contraintes de produire et commercialiser 40 téléviseurs à l'heure ? Justifiez votre réponse.
2) Est-il possible en respectant toutes les contraintes de produire et commercialiser 30 magnétoscopes à l'heure ? Justifiez votre réponse.
3) Est-il possible en respectant toutes les contraintes de produire et commercialiser 40 téléviseurs et 30 magnétoscopes à l'heure ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 : Le baril de pétrole brut (source Greff, Mull, Rousselet)

La baril de pétrole brut vaut 78 \$. Quel est le prix d'un litre en euros ?
(1 baril = 170 litres et 1 dollar US = 0,845 €)

Exercice 4 : Olympiades : ex 219 pg 60

Un malade pèse 90kg. Pour se soigner, il doit absorber chaque jour une dose de tonique cardiaque correspondant à 10mg par kilogramme de masse corporelle. Ce tonique est distribué sous la forme de mélange d'eau et de médicament, contenant 300mg de médicament par 10ml de potion. Combien de millilitres de potion le malade doit-il absorber quotidiennement ?

Exercice 5 : Echanges2 (source Greff, Mull, Rousselet)

Des enfants utilisent le système d'échanges suivant :
pour 9 pogs, on obtient 20 billes ;
pour 15 pogs, on obtient 16 agates.

Combien obtient-on d'agates en échange de 25 billes ?

Exercice 6 : Fabrication de la fonte (Pythagore, 6e)

Pour charger un haut fourneau, on doit mélanger 10 tonnes de minerai avec 3 tonnes de coke. Une tonne de minerai fournit en moyenne 325kg de fonte.
Quelles quantités de minerai et de coke faut-il pour obtenir une tonne de fonte ?

Exercice 7

Madame Soulisse a fait des pots de confiture de 180 grammes. Elle met 12 pots de confiture par étagère, dans un placard de 7 étagères.
Quelle est la masse totale de confiture ?

Exercice 8 : Un peu de pain (source Greff, Mull, Rousselet)

Avec 100kg de blé, on fait 75kg de farine et avec 25kg de farine, on fait 30kg de pain.
Quelle est la masse de blé nécessaire pour faire 450kg de pain ?

Exercice 9 : Echanges3 (source Greff, Mull, Rousselet)

On lit dans le journal, à la rubrique « Marché des changes » : 1 euro = 1,1872 dollars US et 1 euro = 139,18 yens.
Quelle est la valeur en euros de 1 dollar US ? Quel est le prix en euros de 850 dollars US ?
Quelle est la valeur en yens de 2400 dollars US ?

B. Proportionnalité multiple

Exercice 10

Depuis quelques années, un gestionnaire des téléphériques d'une station de sports d'hiver remarque que le bénéfice qu'il réalise durant le mois de mars dépend du nombre de réservations enregistrées au 31 décembre et du nombre de jours d'enneigement annoncé fin février par Météo France pour le mois de mars.
En 2007, il a réalisé un bénéfice de 2800€.
Météo France avait prévu 21 jours d'enneigement et l'office du Tourisme enregistrait 868 réservations au 31 décembre.
Pour 2008, quel devrait être le nombre de réservations pour assurer un bénéfice de 3000€ en tablant sur 18 jours d'enneigement (ce qui représente la moyenne de ces 10 dernières années) ?

Exercice 11 : Les problèmes de Tartaglia (Pythagore, 6e)

Si 12 boeufs mangent 3 cens de foin en 15 jours, combien faudra-t-il de boeufs pour manger 5 cens de foin en 10 jours ?

Exercice 12 : (Cinq sur cinq 4e)

En cinq minutes, une machine d'imprimerie effectue le tirage de cinquante journaux.
Clément : « *Donc, en dix minutes, deux machines tireront cent journaux.* »
Didier : « *Pas du tout, en dix minutes, une seule machine tirera cent journaux.* »

Estelle : « *Finalement, en dix minutes, deux machines tireront deux cent journaux.* »
a) Quels sont les élèves qui ont raison ?
b) Au fait ! En un quart d'heure, combien de journaux trois machines tireront-elles ?

Exercice 13 : (Pythagore, 6e)

Si 9 artisans boivent 12 brocs de vin en 8 jours, combien 24 artisans boiront-ils de vin en 30 jours ?

Exercice 14 : Construction (adaptation de Pythagore, 6e)

Une entreprise a construit un building en 2 ans et 80 personnes ont travaillé en permanence sur ce chantier. Cette entreprise souhaite construire un autre building, de même modèle, deux fois plus grand et en deux fois moins de temps. Combien va-t-elle devoir employer de personnes pour réaliser ce travail ?

Exercice 15 : Les jardiniers (Pythagore, 6e)

Voici le texte d'un vieux problème : « un jardinier met 2 heures pour bêcher un jardin. Son voisin, qui a moins l'habitude, met trois heures pour faire le même travail. Ils décident de travailler ensemble. Combien vont-ils mettre de temps pour bêcher ce jardin ? »

Exercice 16 : Drôles de machines (source Greff, Mull, Rousselet)

3 machines identiques tournant à plein régime permettent de fabriquer 21000 bouteilles en 5 jours. Combien de jours faudrait-il pour que 7 machines identiques travaillant dans les mêmes conditions fabriquent 88200 bouteilles ?

Exercice 17

Le secrétaire de mairie d'une commune a calculé que l'entretien de la salle de sports revient à 0,5€ par personne et par jour d'ouverture. En moyenne, 72 personnes participent aux activités sportives, pour chaque jour d'ouverture.
Quel est le coût de l'entretien pour un mois (25 jours d'ouverture de la salle)?

Exercice 18 : (Triangle 3e)

Dans une entreprise, cinq couturières mettent deux heures pour fabriquer 20 jeans. Combien de jeans seront fabriqués par 7 couturières en 4h ?

Exercice 19

Deux singes sont transférés au zoo d'Animalville. Ils y retrouvent les 4 singes déjà présents.
Le responsable veut faire une provision de nourriture de 30 jours pour ces 6 singes.
Quelle quantité de nourriture doit-il commander si on sait que, la dernière fois, les 10kg reçus avaient permis de nourrir les 4 singes pendant 15 jours ?

Exercice 20 : Consommation de crayons (source Greff, Mull, Rousselet)

L'étude de la fréquentation d'une école primaire qui comporte 125 enfants montre qu'ils sont généralement présents 29 semaines par an. Quelle sera la quantité de crayons à commander sachant que 10 élèves usent en moyenne 16 crayons par mois (4 semaines) ?

Exercice 21

Mon voisin utilise 3l d'eau par jour et par arbre pour arroser son jardin. En 4 jours, il consomme 72l. Combien d'arbres possède-t-il ?

Exercice 22 : Vendanges

Une équipe de 10 personnes a ramassé 3,2 tonnes de raisin en 4h. Si tout le monde ramasse de la même manière, quelle quantité de raisin est récoltée par une personne en 1h ?

Exercice 23 : Inondations

On utilise des pompes pour assécher les caves inondées. Chaque pompe retire 40l d'eau par heure.
La cave de Mr Léopold a été inondée par 960l d'eau. Pour l'assécher, on utilise 9 pompes. Combien d'heures faut-il pour mettre la cave à sec ?

3. Activités d'apprentissage

Les activités développées dans ce paragraphe sont au nombre de quatre. Elles sont toutes construites selon le même canevas de fiche, détaillé à la page 9 de cette brochure.

Voici un tableau reprenant les quatre activités proposées dans ce paragraphe. Outre le titre de l'activité, il y est également fait mention du cadre mathématique concerné, des enjeux du problème de départ, des compétences plus spécifiquement travaillées, du niveau d'enseignement auquel s'adresse cette activité et enfin, la source dont elle est extraite. Les items d'évaluation liés aux différentes activités sont également indiqués.

Titre de l'activité	Cadre	Enjeux	Compétences	Niveau(x) d'enseignement	Source(s)	Item(s) d'évaluation concerné(s)
Echanges	Grandeurs	Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de **proportionnalité simple composée.** Appliquer plusieurs fois les propriétés de proportionnalité simple et directe, le résultat de l'une étant nécessaire à l'application de l'autre.	M56, M57 et M59	6P, 1S	Chastellain M., Calame J.-A. et Brêchet M., « *Fonctions, logique et raisonnement* », Mathématiques 7-8-9, CIIP, suisse romande, Ed. LEP, 2003 Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes)	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Jardiniers	Grandeurs	Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de **proportionnalité multiple (double).**	M56, M57 et M59	6P, 1S	Equipe de recherche Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes)	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23

Casse-tête	Grandeurs	Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de **proportionnalité double.**	M56, M57 et M59	6P, 1S	Pythagore, 6e	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23
Recettes	Grandeurs	Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre des problèmes de **proportionnalité simple (plusieurs grandeurs en jeu).** Appliquer plusieurs fois les propriétés de proportionnalité simple et directe.	M56, M57 et M59	6P, 1S	ERMEL CM2 (2005)	2

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58		M59

Echanges

De quoi s'agit-il ?

L'activité proposée est une adaptation d'une situation développée dans « *Fonctions, logique et raisonnement* », Mathématiques 7-8-9, Suisse romande. Les élèves doivent déterminer le nombre de cartes d'un certain type qu'ils peuvent obtenir en échange de cartes d'un autre type, en respectant les règles établies.

> Dans la cour de l'école, des enfants essaient de compléter leur collection d'images.
> Les règles d'échanges sont les suivantes :
> a) 2 « Saturne » valent 5 « Lune »
> b) 3 « Lune » valent 4 « Voie Lactée »
> Tu possèdes 6 « Saturne ».
> Combien pourras-tu obtenir de « Voie Lactée » ?
> Combien obtiendrais-tu de « Saturne » si tu possédais 80 « Voie Lactée » ?
> Explique comment tu as procédé.

Enjeux :

Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de proportionnalité simple composée.
Appliquer plusieurs fois les propriétés de proportionnalité simple et directe, le résultat de l'une étant nécessaire à l'application de l'autre.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes de proportionnalité simple et directe.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

Les élèves doivent percevoir le lien existant entre les trois grandeurs en jeu. Un tableau reprenant les données peut être construit :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3	4

Le compléter n'est pas chose aisée puisque les rapports ne sont pas entiers.
Pour répondre à la première question (« Tu possèdes 6 'Saturne', combien pourras-tu obtenir de 'Voie Lactée' ? »), il faut procéder en deux temps en utilisant, comme intermédiaire, le nombre de « Lune ».

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3	4
6	.	?

En effet, le nombre de « Saturne » étant proportionnel au nombre de « Lune », il est facile d'utiliser le rapport interne (3) pour obtenir l'équivalent de 6 « Saturne » en terme de « Lune » :

	Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
× 3	2	5 × 3	.
	.	3	4
	6	15	?

La relation de proportionnalité entre le nombre de « Lune » et le nombre de « Voie lactée » permet alors d'obtenir la réponse au problème posé en utilisant à nouveau le rapport interne :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3 × 5	4 × 5
6	15	20

Le lien direct ainsi établi entre le nombre de « Saturne » (6) et le nombre de « Voie Lactée » (20) permet alors de répondre directement à la deuxième question du problème (Combien obtiendrais-tu de 'Saturne' si tu possédais 80 'Voie Lactée' ?) en utilisant une fois encore le rapport interne :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3	4
6 × 4	15	20 × 4
24		80

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Les différents types de cartes peuvent être matérialisés par différents types de jetons. Les échanges peuvent alors être réalisés concrètement par les élèves.
Dans un premier temps, il est sans doute utile de les laisser se familiariser avec le matériel en les laissant le manipuler. D'autres règles d'échanges peuvent aussi être établies, pour faciliter la manipulation. Par exemple, 1 « Saturne » vaut 2 « Lune » et 1 « Lune » vaut 3 « Voie Lactée ».
Les élèves peuvent alors trouver facilement les réponses à des questions telles que « J'ai 2 'Saturne', combien puis-je avoir de 'Lune' ? » ou « J'ai 8 'Lune', combien puis-je avoir de 'Voie Lactée' ? ».
Progressivement, on peut amener des questions liant les 'Saturne' et les 'Voie Lactée' : « J'ai 4 'Saturne', combien puis-je avoir de 'Voie Lactée' ? ».
Grâce à la matérialisation des échanges, le passage par le nombre de 'Lune' se fera naturellement et on pourra alors revenir au problème de départ.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Lors de cette phase, il faut insister sur le lien existant entre les trois grandeurs : elles sont proportionnelles deux à deux. C'est grâce à ces relations que le problème peut être résolu en appliquant successivement deux propriétés de proportionnalité simple (voir tableaux ci-avant).
Il est également intéressant d'insister sur une autre particularité du tableau due au type de problème traité et plus spécifiquement à la **succession** de deux propriétés de proportionnalité simple. Par exemple, si on modifie le point b de l'énoncé de manière à ce que 3 « Lune » valent 7 « Voie Lactée », dans la résolution, **seule** la partie de droite du tableau va être modifiée, pas la partie de gauche :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3 × 5	**7** × 5
6	15	**35**

La première application de proportionnalité simple n'est en rien modifiée puisque les données qui la concernent ne changent pas.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Les trois grandeurs en jeu sont proportionnelles deux à deux. Le problème concerne la proportionnalité simple composée.
Les problèmes de ce type peuvent être résolus en appliquant deux fois (successivement) les propriétés de proportionnalité simple.

Quels sont les prolongements possibles ?

1) La mise en tableau fait apparaître que l'on privilégie ici un mode de raisonnement fondé sur les rapports internes. Il peut également être utile de travailler au départ des rapports externes en définissant d'<u>autres règles d'échanges</u>.
Par exemple, la solution du problème de départ peut être obtenue grâce aux rapports externes, simplement en les multipliant (ce qui constitue encore une particularité des problèmes de proportionnalité simple composée) :

Nombre de « Saturne »	Nombre de « Lune »	Nombre de « Voie Lactée »
2	5	.
.	3	4
6	15	20

$\times \frac{5}{2}$ $\qquad$ $\times \frac{4}{3}$

$$\times \frac{5}{2} . \frac{4}{3} \text{ ou } \times \frac{10}{3}$$

Une question peut alors être posée aux élèves : « Comment modifier les règles d'échanges en conservant le même rapport externe global (autrement dit pour que 6 'Saturne' correspondent encore à 20 'Voie Lactée') ? »

2) Un autre problème peut être proposé aux élèves. Il est extrait de Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes) et concerne aussi la proportionnalité simple composée :

> Un transporteur doit livrer du sucre dans un magasin. Les sacs de 7kg de sucre sont placés dans des caisses. Chaque caisse contient 20 sacs. Le transporteur charge 80 caisses pleines dans son camion. Quelle quantité de sucre le transporteur a-t-il chargée dans son camion ?

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement la proportionnalité simple composée.

Source(s) :

Chastellain M., Calame J.-A. et Brêchet M., « *Fonctions, logique et raisonnement* », Mathématiques 7-8-9, Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin, Ed. LEP, 2003

Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes)

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58		M59

Jardiniers

De quoi s'agit-il ?

Dans l'activité proposée, les élèves doivent déterminer la quantité d'eau nécessaire en fonction de deux autres grandeurs, indépendantes entre elles.

> Un jardinier consomme 630l d'eau par semaine pour arroser tous les jours ses 45 arbres.
> Combien de litres d'eau supplémentaires devra-t-il prévoir pour arroser les 15 arbres de son voisin pendant les vacances (4 semaines) de celui-ci ?

Enjeux :

Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de proportionnalité multiple.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes de proportionnalité simple et directe.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

La première étape est d'identifier les grandeurs en jeu et les relations qui existent (ou non) entre elles :

- Trois grandeurs : Nombre de litres d'eau, nombre de semaines, nombre d'arbres ;
- Le nombre de litres d'eau est proportionnel au nombre de semaines, quand le nombre d'arbres ne varie pas ;
- Le nombre de litres d'eau est proportionnel au nombre d'arbres, quand le nombre de semaines ne varie pas ;
- Le nombre d'arbres et le nombre de semaines <u>ne dépendent pas</u> l'un de l'autre.

Ensuite vient la mise en forme des données :

Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines	Nombre d'arbres
630	1	45
?	4	15

Pour résoudre ce problème, il est indispensable de ne pas faire varier les deux grandeurs (nombre d'arbres et nombre de semaines) en même temps. Il faut en faire varier une <u>puis</u> l'autre (en gardant à chaque fois l'autre grandeur fixe). Pour ce faire, une étape intermédiaire est nécessaire : par exemple, « Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 15 arbres pendant une semaine ? » ou encore « Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 45 arbres pendant quatre semaines ? » Pour répondre à une de ces questions, il suffit d'utiliser le rapport interne :

	Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines	Nombre d'arbres	
: 3	630	1	45	: 3
	210	1	15	
	?	4	15	

ou

	Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines		Nombre d'arbres
× 4	630	1	× 4	45
	2520	4		45
	?	4		15

Grâce à cette valeur intermédiaire, la réponse à la question de départ (« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 15 arbres pendant quatre semaines ? ») s'obtient facilement en utilisant une nouvelle fois le rapport interne :

	Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines		Nombre d'arbres
	630	1		45
× 4	210	1	× 4	15
	840	4		15

ou

	Nombre de litres d'eau	Nombre de semaines	Nombre d'arbres	
	630	1	45	
: 3	2520	4	45	: 3
	840	4	15	

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Proposer aux élèves des questions intermédiaires de manière à décomposer le problème avec eux :

« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 45 arbres pendant deux semaines ? »
« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 45 arbres pendant quatre semaines ? »
« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 15 arbres pendant une semaine ? »
« Quelle quantité d'eau faut-il pour arroser 15 arbres pendant deux semaines ? »

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Lors de cette phase, il faut insister sur les liens existant ou non entre ces trois grandeurs : elles ne sont pas proportionnelles deux à deux !
L'une est proportionnelle aux deux autres mais ces deux autres sont indépendantes.
C'est pourquoi la résolution du problème demande une étape intermédiaire pour laquelle on peut utiliser les propriétés de proportionnalité simple.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Dans un problème concernant plusieurs grandeurs, il est indispensable de repérer les relations qui existent ou non entre elles de manière à utiliser les propriétés de proportionnalité simple à bon escient.
Au delà des techniques de résolution, c'est <u>le sens du problème qui importe</u> !

Quels sont les prolongements possibles ?

Un problème assez similaire peut être proposé aux élèves. Il est extrait de Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes) :

> Dans son jardin, Monsieur Durand utilise pour l'arrosage 3 litres d'eau par jour et par arbre. En 4 jours, il a utilisé 60 litres pour arroser ses arbres. Combien a-t-il d'arbres dans son jardin ?

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement la proportionnalité multiple.

Source(s) :

Equipe de recherche

Mathenpoche 6^{e} (IREM de Rennes)

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57		M58	M59

Casse-tête

De quoi s'agit-il ?

L'activité proposée est une adaptation d'une situation développée dans Pythagore 6^{e}. Les élèves doivent déterminer le nombre d'œufs pondus par des poules en un certain nombre de jours… mais le choix des nombres en jeu est piégeant…

> Sachant que 6 poules pondent 6 œufs en 6 jours, combien 12 poules pondent-elles d'œufs en 12 jours ?

Enjeux :

Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre un problème de proportionnalité multiple (dans ce cas-ci, il s'agit même d'un problème de proportionnalité double).

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes de proportionnalité simple et directe.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

1) Identifier les grandeurs en jeu : nombre de poules, nombre d'œufs, nombre de jours.
2) Analyser les relations entre ces grandeurs :

    - Le nombre d'œufs est proportionnel au nombre de poules, pour un nombre de jours fixe ;
    - Le nombre d'œufs est proportionnel au nombre de jours, pour un nombre de poules fixe ;
    - Il n'existe pas de relation particulière entre le nombre de jours et le nombre de poules.

3) Mettre les données en forme :

Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
6	6	6
?	12	12

La tentation est grande de répondre 12 ! Pourtant, il n'en est rien.
En effet, il est impératif de passer par une étape intermédiaire pour résoudre ce genre de problème : « Combien d'œufs vont pondre 12 poules en 6 jours ? » ou « Combien d'œufs vont pondre 6 poules en 12 jours ? ». La réponse s'obtient grâce au rapport interne :

Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
6	6	6
12	12	6
?	12	12

ou

Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
6	6	6
12	6	12
?	12	12

C'est seulement ensuite que la réponse au problème de départ (« Combien d'œufs vont pondre 12 poules en 12 jours ? ») peut être obtenue grâce à nouveau au rapport interne :

Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
6	6	6
12	12	6
24	12	12

ou

Nombre d'œufs	Nombre de poules	Nombre de jours
6	6	6
12	6	12
24	12	12

Que faire si les élèves ne « rentrent » pas dans le problème ?

Il est indispensable de séparer les différentes étapes.

Pour faciliter la compréhension des élèves, peut-être est-ce utile de partir d'un énoncé plus simple comme par exemple « 1 poule pond 1 œuf par jour » et de poser différentes questions telles que

- « Combien d'œufs obtiendra-t-on en 2 (ou 3 ou 4 ou …) jours, pour une poule ? »
- « Combien d'œufs obtiendra-t-on par jour si on a 2 (ou 3 ou 4 ou …) poules ? »
- « Combien d'œufs aura-t-on après 2 jours si on a 2 (ou 3 ou 4 ou …) poules ? »
- …

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Lors de cette phase, il faut insister sur les liens existant ou non entre les différentes grandeurs : toutes les grandeurs ne sont pas en relation !
C'est pourquoi la résolution du problème demande une (ou des) étape(s) intermédiaire(s). Moyennant cela, le problème se résout facilement grâce au rapport interne.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Dans un problème concernant plusieurs grandeurs, il est indispensable de repérer les relations qui existent ou non entre elles de manière à utiliser les propriétés de proportionnalité simple à bon escient.
Au delà des techniques de résolution, c'est <u>la signification du problème (et le contexte) qui importe</u> !

Quels sont les prolongements possibles ?

Pourquoi pas un autre problème du même type ?

> Sachant que 6 enfants mangent 6 œufs en 6 jours, combien de jours 12 enfants prendront-ils pour manger 12 œufs ?

La grandeur qui dépend des deux autres est ici encore le nombre d'œufs mais la valeur manquante concerne une des deux grandeurs indépendantes. En fonction de la procédure de résolution choisie par les élèves, une relation de proportionnalité inverse pourrait apparaître (cf. remarque de la page 33).

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement la proportionnalité multiple.

Source(s) :

Pythagore, 6^{e}

3P	4P	5P	6P	1S	2S	3S
M55	M56		M57	M58		M59

Recettes

De quoi s'agit-il ?

L'activité proposée est une adaptation d'une situation développée dans ERMEL (CM2). Les élèves doivent déterminer la quantité de chaque ingrédient nécessaire à l'élaboration d'une recette.

> Pour faire un cake, j'ai trouvé la recette suivante : des raisins secs, 600g de farine, 300g de sucre, 200g de beurre, 6cl de rhum et 12 œufs.
> a) Si je choisis cette recette, quelles quantités de sucre, de rhum et d'œufs me faut-il pour 1kg de farine ?
> b) Avec la même recette, cherchez quelles quantités de sucre, de rhum et de beurre il faut pour 240g de farine.

Enjeux :

Etablir des tableaux de correspondance pour résoudre des problèmes de proportionnalité simple.
Appliquer plusieurs fois les propriétés de proportionnalité simple et directe.

Ce problème n'est pas à proprement parlé un problème de proportionnalité simple composée dans le sens où toutes les valeurs peuvent être obtenues indépendamment les unes des autres, en partant à chaque fois des quantités de farine données. *A contrario*, pour des problèmes tels que « Echanges »[19], on ne peut trouver la solution du problème en utilisant uniquement les données fournies. Il est impératif de calculer une valeur intermédiaire.
« Recettes » n'est donc pas un problème classique de proportionnalité simple composée mais le nombre de grandeurs intervenant dans l'énoncé le rend moins facile à résoudre aux yeux des élèves qu'un problème de proportionnalité simple et directe traditionnel mettant en jeu deux grandeurs.
Il serait intéressant de proposer aux élèves du secondaire de comparer des problèmes tels que « Recettes » et « Echanges » de manière à en faire ressortir les différences tant au niveau des énoncés qu'au niveau des procédures de résolution.

Quels sont les pré-requis nécessaires ?

Les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes de proportionnalité simple et directe.

[19] Celui-ci fait l'objet d'une fiche particulière.

Comment s'y prendre ?

Mise en situation :

- présenter la situation aux élèves et les laisser travailler seuls dans un premier temps ;
- dans un second temps, demander aux élèves de se mettre par deux avec pour objectif, la confrontation de leurs résultats et de leurs arguments.

Identification des tâches attendues des élèves :

La construction d'un tableau de correspondance permet de visualiser la situation :

Quantité de farine (g)	Quantité de sucre (g)	Quantité de beurre (g)	Quantité de rhum (cl)	Nombre d'œufs
600	300	200	6	12
1000	?		?	?
240	?	?	?	

Les élèves ont alors le choix d'utiliser le rapport interne (fractionnaire) ou les rapports externes (entiers).

$: 100$

$: 2$ $\times 2$

$\times \frac{5}{3}$

Quantité de farine (g)	Quantité de sucre (g)	Quantité de beurre (g)	Quantité de rhum (cl)	Nombre d'œufs
600	300 $\times \frac{5}{3}$	200	6 $\times \frac{5}{3}$	12 $\times \frac{5}{3}$
1000	500	/	10	20
240	?	?	?	/

$: 100$

$: 3$

$: 2$

$\times \frac{4}{10}$

Quantité de farine (g)	Quantité de sucre (g)	Quantité de beurre (g)	Quantité de rhum (cl)	Nombre d'œufs
600	300 $\times \frac{4}{10}$	200 $\times \frac{4}{10}$	6 $\times \frac{4}{10}$	12
1000	?	/	?	?
240	120	80	2,4	/

Le nombre de grandeurs en jeu (les quantités des différents ingrédients) peut déstabiliser les élèves. Pourtant, ce problème se résout en utilisant les techniques de résolution propres à la proportionnalité simple et directe puisque les grandeurs sont proportionnelles deux à deux et que toutes les données nécessaires pour répondre aux questions posées apparaissent dans l'énoncé.

Organisation et gestion de la phase de mise en commun :

Lors de cette phase, il faut insister sur le lien existant entre les cinq grandeurs : elles sont proportionnelles deux à deux. C'est grâce à ces relations que le problème peut être résolu en appliquant les propriétés de proportionnalité simple.

Identification de ce que les élèves doivent retenir au terme de cette activité :

Les grandeurs en jeu sont proportionnelles deux à deux. Les problèmes de ce type peuvent être résolus en appliquant successivement les propriétés de proportionnalité simple.

Quels sont les prolongements possibles ?

Proposer le problème « Echanges » qui fait l'objet d'une autre fiche d'exploitation.

Pour en savoir plus :

Voir chapitre 1 et plus particulièrement
- la proportionnalité simple, la proportionnalité simple composée,
- rapport interne, rapport externe et propriétés de linéarité.

Source(s) :

ERMEL CM2 (2005)

4. Exercices d'application

Pour stabiliser les compétences des élèves, les enseignants peuvent utiliser certains exercices proposés comme items d'évaluation diagnostique, autres que ceux utilisés comme point de départ de leur séquence didactique.

Vous pouvez également trouver dans les fiches d'activité du paragraphe précédent, des propositions d'activités pour aller plus loin ou pour venir en aide aux élèves qui éprouvent encore des difficultés.