PISA 2003

Évaluation de la culture mathématique des jeunes de 15 ans

Document à l'attention des professeurs de mathématiques des 1er et 2ème degrés de l'enseignement secondaire

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE
SERVICE GÉNÉRAL DU PILOTAGE DU SYSTÈME ÉDUCATIF

INTRODUCTION

Le programme PISA, Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves de 15 ans, constitue une initiative émanant des pays membres de l'Ocdé. Ces pays ont décidé de mettre au point une évaluation commune afin d'étudier les acquis des jeunes de 15 ans dans trois disciplines : la lecture, les mathématiques et les sciences.

Afin d'assurer un suivi dans le recueil des données, des cycles d'évaluation de trois ans, envisageant chaque fois les trois disciplines, sont organisés. L'évaluation de 2000 était centrée principalement sur la lecture, celle de 2003 a placé les mathématiques au cœur du programme et celle de 2006 accordera une place plus importante à la culture scientifique.

Le présent document s'adresse aux enseignants des quatre premières années du secondaire, et principalement à ceux qui s'occupent de la formation mathématique des élèves. Il vise à présenter l'évaluation de 2003 en mathématiques, afin de mieux faire connaître l'épreuve proposée ainsi que quelques résultats de nos jeunes de 15 ans, dont la majorité fréquente le deuxième degré de l'enseignement secondaire général, technique, artistique ou professionnel. D'autres documents, davantage centrés sur les comparaisons des performances entre les différents pays (41 pays ont participé à PISA 2003) peuvent être consultés sur le site : http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/A007/index.asp.

Le document est composé de trois parties : la première décrit le cadre général du programme PISA, la deuxième propose quelques résultats obtenus en Communauté française de Belgique et la troisième esquisse brièvement des pistes didactiques.

La première partie précise tout d'abord en quoi le programme PISA se distingue des autres épreuves à large échelle menées précédemment sur un plan international ou encore actuellement en Communauté française de Belgique. Elle propose ensuite une présentation détaillée de la « culture mathématique » envisagée dans le programme PISA : description du processus de mathématisation au cœur de cette « culture mathématique », ainsi que des trois composantes majeures de l'évaluation (tout cela étant accompagné de multiples exemples de questions). Enfin, quelques réflexions relatives à la construction de l'épreuve proprement dite et à sa correction clôturent cette première partie.

La deuxième partie du document présente quelques résultats obtenus en Communauté française de Belgique. Les résultats de l'épreuve sont tout d'abord présentés en termes de profils de performances ; on peut alors voir comment nos élèves se répartissent sur cette échelle mettant en évidence des compétences plus ou moins étendues en regard de la culture mathématique évaluée. Des illustrations plus spécifiques relatives aux quatre grands domaines de contenus envisagés dans PISA 2003 sont ensuite proposées. Les résultats sont nuancés en fonction de l'année d'études et de la filière à laquelle appartiennent les élèves, de façon à permettre à chaque enseignant de mieux cerner les forces et les faiblesses du public auquel il est confronté. La partie « résultats » est largement illustrée d'exemples de questions et des taux de réussite correspondants obtenus en Communauté française de Belgique.

Enfin, la dernière partie du document vise à « dépasser les constats » en cherchant à fournir des pistes aux enseignants pour qu'ils puissent tirer profit d'une telle épreuve : quel regard porter sur les résultats, selon que l'on se situe dans l'enseignement général, technique, artistique ou professionnel ? Quelle place accorder à cette « culture mathématique » dans notre enseignement ? Les outils créés dans le cadre de cette évaluation internationale peuvent-ils être utilisés comme outils d'enseignement et si oui, comment ? Etc.

Encore quelques précisions …

En plus des épreuves « matières », les élèves et les directions d'établissements ont été invités à remplir différents **questionnaires contextuels**. Les **questions posées aux élèves** concernent leurs caractéristiques personnelles (sexe, milieu socio-économique, langue parlée à la maison, organisation de la famille,…), leurs attitudes envers l'apprentissage et l'école, leurs loisirs, leurs habitudes et attitudes envers les mathématiques, …
Le **questionnaire au chef d'établissement** envisage de nombreux aspects de l'organisation de l'établissement : population, formes d'enseignement organisées, ressources humaines et matérielles, climat de l'école, …

Les renseignements contextuels obtenus via ces questionnaires sont mis en relation avec les résultats et sont très utiles à leur interprétation. Ils permettent de comparer les résultats internationaux sous différents angles : ampleur des différences entre les scores des filles et des garçons, liens entre les résultats obtenus et les sommes d'argent investies par les différents pays dans l'enseignement, réussite des élèves provenant de milieux socio-économiquement défavorisés, etc. Ces différentes analyses permettent notamment de mettre en évidence que certains systèmes éducatifs sont plus inégalitaires que d'autres, comme c'est le cas pour la Communauté française de Belgique (voir les différents rapports liés aux résultats de PISA 2000 et PISA 2003, accessibles sur le site http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/A007/index.asp).

L'implication active de chaque pays participant est attendue dès les préparatifs de la construction de l'épreuve. En effet, chacun est invité à procéder à une relecture critique des questions (intérêt pour les jeunes de 15 ans, lien avec les programmes d'enseignement, biais culturels possibles,…), et ceci dès les premières versions en langue anglaise et tout au long du processus de traduction et d'adaptation, au cours duquel des experts nationaux sont impliqués (il s'agit notamment d'inspecteurs des différents réseaux, de professeurs expérimentés, de chargés de mission et de chercheurs).

Pour s'engager dans une étude internationale comparative, chaque pays a besoin d'un certain nombre de **garanties** lui assurant que les performances observées ne sont pas dues à des caractéristiques particulières des instruments utilisés, à la nature des échantillons testés, à la variabilité des procédures de recueil de données ou de correction, …

Le programme PISA met en place des mesures importantes visant à assurer la qualité du dispositif mis en place. Nous ne faisons que les esquisser brièvement ici[1] :

- la construction de **l'échantillon** participant à l'épreuve doit se faire selon des règles strictes, définies et vérifiées par un organisme spécialisé dans ce domaine ;

- **l'administration des épreuves** doit respecter les règles décrites dans le « Manuel de l'administrateur », les administrateurs de tests étant nécessairement des personnes extérieures à l'établissement, dûment formées à cette tâche ; des visites de contrôle de la qualité du déroulement des séances sont organisées (en Communauté française, elles ont été effectuées par des Inspecteurs de l'enseignement) ;

- **la correction des épreuves** est réalisée par des correcteurs formés à cette tâche (il s'agissait ici de professeurs de mathématiques), de nombreux items sont codés par plusieurs correcteurs du pays et un certain nombre de carnets sont à nouveau corrigés hors du pays, une évaluation de la fidélité des corrections étant ainsi réalisée sur un plan international ;

- **la traduction des questions et les adaptations nationales** sont réalisées par des spécialistes (traducteurs et spécialistes des contenus) pour s'assurer que les termes utilisés dans les questions sont bien ceux qui sont généralement employés dans le système scolaire de chaque pays participant.

Précisons encore qu'un prétest de grande ampleur est organisé avant la mise en place de l'épreuve définitive ; ceci permet notamment de sélectionner les questions les plus pertinentes. A titre indicatif, 225 items ont été prétestés pour l'épreuve de mathématiques et 85 d'entre eux ont été choisis pour l'épreuve définitive.

[1] Pour une présentation détaillée des différents contrôles de qualité développés dans les épreuves PISA, le lecteur est invité à consulter le document « PISA 2000 : Programme international de l'Ocdé pour le suivi des acquis des élèves. Présentation de l'enquête » rédigé par D. Lafontaine, A. Baye et A. Matoul (disponible sur le site http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/A002/index.asp).

I. PRÉSENTATION DU PROGRAMME PISA

I.1. Le programme PISA, un regard neuf sur les compétences des élèves en mathématiques

Ce n'est pas la première fois qu'une étude évaluant les compétences en mathématiques d'un grand nombre d'élèves est développée : certaines épreuves externes, organisées depuis 1994 en Communauté française de Belgique, ainsi que des études internationales organisées par l'IEA (notamment l'étude TIMSS en 1995) poursuivaient également cet objectif.

Le programme PISA présente deux caractéristiques essentielles qui le distinguent des autres études menées jusqu'ici en mathématiques : il s'agit d'une part de la définition du public évalué et d'autre part du contenu des épreuves.

I.1.1. Les jeunes de 15 ans, qu'ils soient dans l'enseignement général, technique, artistique ou professionnel, sont évalués dans PISA

Tant les épreuves externes que l'étude internationale TIMSS se sont intéressées aux jeunes de l'enseignement secondaire, en se **focalisant sur des classes regroupant des élèves d'un niveau scolaire donné** (premier degré de l'enseignement secondaire pour l'étude TIMSS ; première et troisième années de l'enseignement secondaire pour les épreuves externes). Ainsi, dans tous les cas, les élèves testés n'avaient pas nécessairement le même âge : certains étaient plus âgés parce qu'ils avaient redoublé une ou plusieurs année(s), et d'autres, en avance dans leur scolarité, étaient plus jeunes que la majorité des élèves testés.

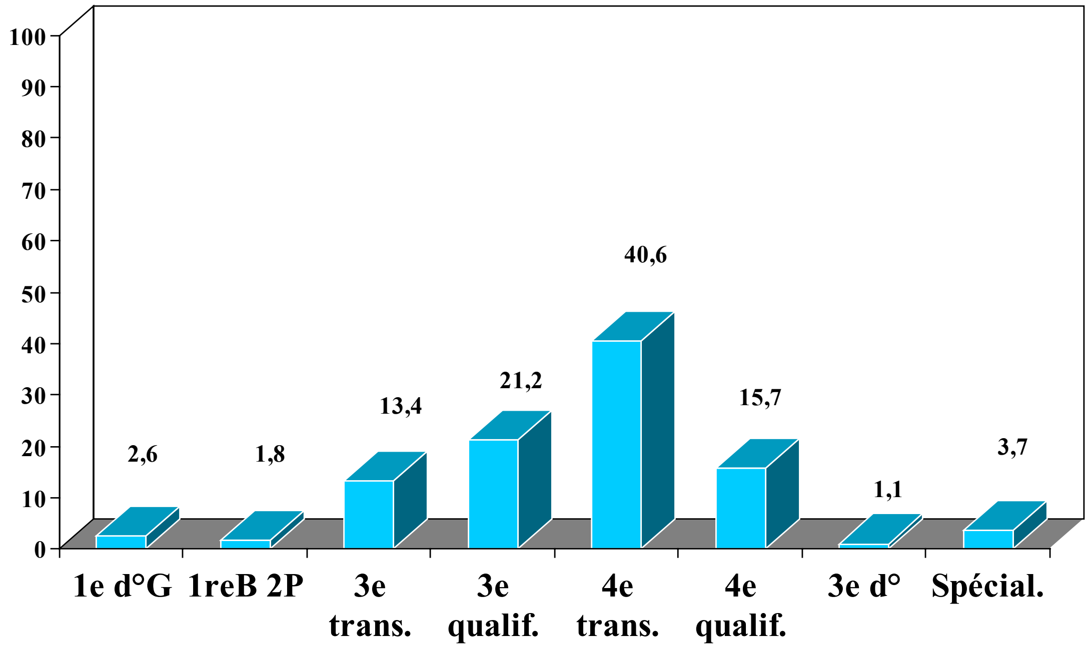
Le programme PISA, quant à lui, ne prend pas l'information au niveau des classes et **s'intéresse ainsi aux élèves d'un âge donné : 15 ans** (plus précisément, entre 15 et 16 ans, c'est-à-dire les jeunes nés en 1987 pour PISA 2003).
Cet âge a été choisi parce qu'il correspond à la fin de la scolarité obligatoire à temps plein ou à temps partiel dans la plupart des pays.

Ainsi, en Communauté française de Belgique, 2940 élèves de 15 ans issus de 103 écoles ont passé l'épreuve au mois d'avril 2003. Une procédure d'échantillonnage a tout d'abord permis une sélection des écoles secondaires puis, au sein de chaque école, 35 élèves de 15 ans ont été tirés au sort, et ceci quelles que soient l'année scolaire et la filière d'enseignement dans lesquelles ils se situaient au sein de l'établissement sélectionné.

Dans l'échantillon, les différents réseaux sont représentés dans des proportions équivalentes à celles qu'ils occupent dans l'ensemble de la population scolaire en Communauté française. Il en va de même en ce qui concerne la représentativité de l'enseignement spécialisé. De plus, l'échantillon comporte des écoles de tailles différentes, de manière à représenter tant les petits que les gros établissements.

Le graphique proposé à la page suivante présente la variété des niveaux d'enseignement où se positionnaient les élèves soumis à l'évaluation.

Figure 1 – Répartition des élèves de l'échantillon PISA 2003 dans les différentes années et filières d'enseignement



Bien que la majorité des élèves soient au deuxième degré de l'enseignement secondaire (91 %), ils suivent des programmes de mathématiques très différents. En troisième année, 21 % sont dans la filière qualifiante (enseignement technique ou artistique de qualification ou professionnel)[2] et 13 % sont dans la filière de transition (enseignement général, technique ou artistique de transition). En quatrième année, ils sont 16 % dans la filière qualifiante et 41 % dans la filière de transition. Quelques élèves de l'enseignement spécial (4%)[3] ont également participé à l'épreuve.

Les matières abordées ainsi que le nombre hebdomadaire d'heures de mathématiques sont variables d'une filière à l'autre, et même parfois au sein d'une même filière, en fonction de l'option choisie.

I.1.2. L'évaluation des acquis des jeunes de 15 ans, sans référence directe aux programmes scolaires

Les évaluations internationales organisées précédemment par l'IEA (ex. TIMSS) avaient la volonté de construire des épreuves fondées sur les programmes en vigueur dans les différents pays. Elles cherchaient à définir un ensemble de convergences entre ces programmes, de façon à déterminer un bagage commun qui constituerait en quelque sorte une unité de base des mathématiques. Dans la même lignée, les évaluations externes organisées en Communauté française de Belgique se centrent explicitement sur les référentiels : les Socles de compétences et les compétences terminales définissent le bagage que les élèves doivent posséder aux différentes étapes de la scolarité.

---

[2] Les quelques élèves de CEFA qui ont participé à PISA 2003 (0,03%) ont été inclus dans la filière qualifiante.

[3] Notons que l'épreuve soumise aux élèves de l'enseignement spécialisé comprenait moins de questions que l'épreuve soumise aux autres élèves.

Dans une optique assez différente, le programme PISA ne se fonde pas sur les programmes scolaires et ne vise pas à analyser le rendement spécifique de l'enseignement secondaire à un moment précis du parcours scolaire. En évaluant les jeunes à l'âge de 15 ans, quels que soient leur parcours scolaire et le programme de mathématiques qu'ils ont suivi, PISA se place dans une vision plus « citoyenne » de l'évaluation : l'objectif est d'évaluer des compétences essentielles pour la vie future des jeunes. Ce ne sont donc pas les compétences effectivement enseignées dans les classes qui sont évaluées ici, mais plutôt l'utilisation d'un bagage mathématique permettant de comprendre en profondeur et de résoudre des situations qu'un adulte peut rencontrer dans sa vie personnelle, publique ou professionnelle.

PISA évalue ainsi la « culture mathématique » des élèves ; plus précisément, il définit des échelles de compétences permettant de situer les élèves sur un continuum correspondant à une intégration plus ou moins profonde ou au contraire, légère (voire insuffisante), de cette « culture mathématique » que nous définissons plus précisément au point suivant.

I.2. La culture mathématique, au cœur de l'évaluation de 2003

L'option majeure défendue dans PISA est que les mathématiques concernent tout un chacun, et pas seulement une portion réduite de la population qui se destinerait à poursuivre des études spécialisées dans ce domaine, dans les sciences ou les technologies. Le concept de « **culture mathématique** » concerne donc tous les citoyens, c'est-à-dire ici tous les futurs adultes responsables qui devront trouver leur place dans la société.

Cette culture mathématique est définie comme *l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de la vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi.* (Ocdé, 2003, p.27)[4]. Elle implique la capacité des élèves à analyser, raisonner et communiquer de manière efficace lorsqu'ils posent, résolvent et interprètent des problèmes mathématiques dans une variété de situations impliquant des quantités, des concepts spatiaux, probabilistes ou autres.

Pour définir plus précisément cette « culture mathématique » et la façon dont PISA a choisi de l'évaluer, il convient de décrire plus précisément deux aspects centraux du programme : d'une part, le processus de mathématisation (ou la résolution de problèmes au centre du dispositif), et d'autre part, les trois composantes majeures de l'évaluation.

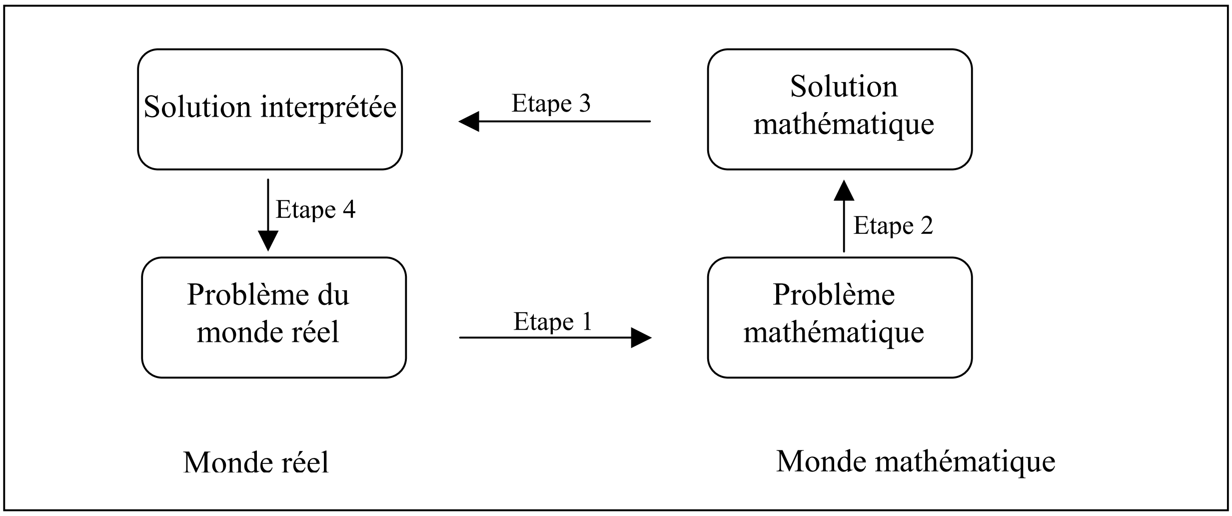
I.2.1. Le processus de mathématisation

PISA porte davantage sur la maîtrise des compétences que sur l'acquisition de savoirs et de contenus scolaires. Dans son optique de « culture mathématique », PISA confronte principalement les élèves à des problèmes ancrés dans le monde réel. L'objectif est de voir dans quelle mesure ils peuvent se servir d'un bagage mathématique qu'ils ont acquis au cours de leur scolarité pour résoudre des problèmes variés.

[4] La définition de la culture mathématique est issue d'un document publié par l'Ocdé (2003). *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, sciences, résolution de problèmes.* Paris :Ocdé.

Par le terme de « mathématisation », PISA désigne le processus fondamental appliqué par les élèves pour résoudre des problèmes de la vie courante. Le processus de mathématisation peut se schématiser comme suit :

Figure 2 – Le cycle de mathématisation



Dans cette perspective, la mathématisation apparaît comme un processus permettant d'utiliser les mathématiques pour résoudre des situations issues du monde réel. Deux domaines doivent ainsi être mis en relation : d'une part, le monde réel (envisagé dans le problème de départ et dans la solution réelle qui y est apportée) et, d'autre part, le monde mathématique (dans lequel on retrouve le problème mathématique ainsi que la solution mathématique qui en résulte).

Le processus de mathématisation comporte **différentes étapes qui impliquent la mobilisation d'un vaste ensemble de compétences**.

La **première étape** consiste à transposer le problème issu du monde réel en un problème mathématique. Ce processus implique notamment les activités suivantes[5] :

- *identifier les éléments mathématiques pertinents se rapportant à un problème situé dans la réalité ;*
- *représenter le problème sous une forme différente, en particulier, l'organiser en fonction de concepts mathématiques, et élaborer les hypothèses appropriées ;*
- *comprendre les relations entre le langage employé pour décrire le problème et le langage symbolique et formel indispensable à sa compréhension mathématique ;*
- *identifier des régularités, des relations et des récurrences ;*
- *identifier les aspects qui sont isomorphes par rapport à des problèmes connus ;*
- *traduire le problème en termes mathématiques, c'est-à-dire en un modèle mathématique* (p.43).

[5] La description qui suit est issue d'un document publié par l'Ocdé, (2003). *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, sciences, résolution de problèmes*. Paris : Ocdé.

Au cours de la **deuxième étape**, le processus se poursuit au sein même des mathématiques : il s'agit d'effectuer des opérations sur le problème mathématique posé en vue d'en dégager une solution mathématique. Cet aspect du processus comporte les activités suivantes :

- *utiliser différentes représentations et passer des unes aux autres ;*
- *utiliser un langage et des opérations de nature symbolique, formelle et technique ;*
- *définir et ajuster des modèles mathématiques, les combiner et les intégrer les uns avec les autres ;*
- *argumenter ;*
- *généraliser* (p.44).

La (ou les) dernière(s) étape(s) de la résolution d'un problème consiste(nt) alors à réfléchir à l'ensemble du processus de mathématisation et aux résultats obtenus. Il s'agit alors de mener à bien les activités suivantes :

- *comprendre la portée et les limites de concepts mathématiques ;*
- *réfléchir sur les arguments mathématiques mis en œuvre, expliquer et justifier les résultats obtenus ;*
- *communiquer le processus et la solution ;*
- *critiquer le modèle et ses limites* (p.44).

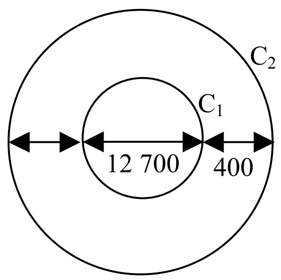
La « **confrontation à la réalité** » pour interpréter et communiquer les résultats est représentée par les **étapes 3 et 4** sur le schéma.
La validation de l'ensemble du processus et des résultats doit se faire **tout au long de la démarche**, mais est principalement cruciale lors de **l'étape finale**.

Illustrons cette démarche de résolution de problèmes à l'aide du problème suivant, élaboré dans le cadre du programme PISA.

VOL SPATIAL

La station Mir tournait autour de la Terre à une altitude d'à peu près 400 kilomètres. Le diamètre de la Terre est d'environ 12 700 km et sa circonférence d'environ 40 000 km $(\pi \times 12700)$.

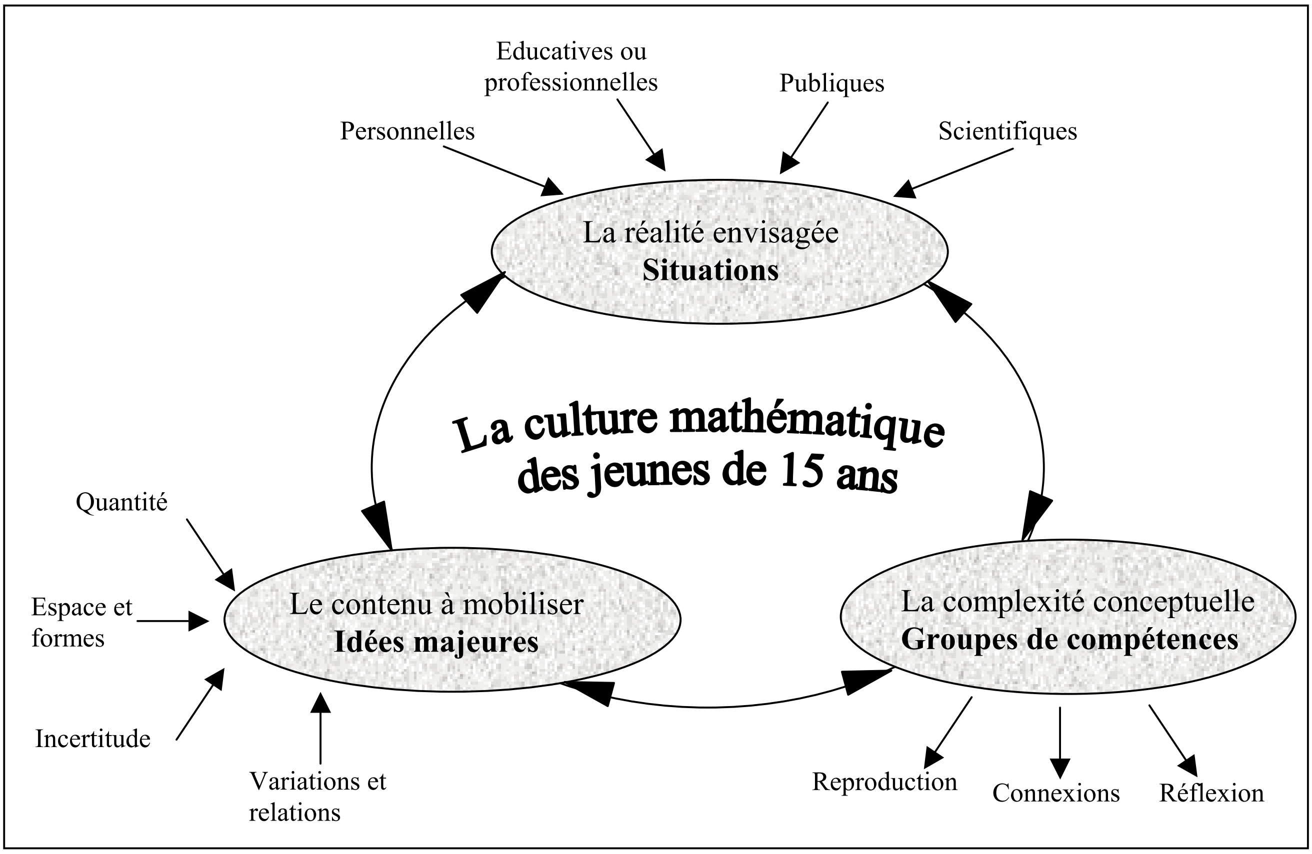
Donnez une estimation de la distance totale parcourue par la station Mir pendant les 86 500 révolutions qu'elle a accomplies lorsqu'elle était sur orbite. Arrondissez votre réponse à la dizaine de millions la plus proche.

<table>
<tr><td>Première étape
Transformation du problème en un problème mathématique</td><td>Un schéma annoté permet de mieux comprendre les relations évoquées dans le problème :

Quelle est la longueur correspondant à 86 500 fois la circonférence du cercle C_2 ?</td></tr>
<tr><td>Deuxième étape
Résolution du problème mathématique en vue de dégager une solution mathématique</td><td>- Formule pour calculer la circonférence d'un cercle :
2π x rayon
- Circonférence de C_2 :
2π x (6350 + 400), soit environ 42 412 km
- Distance totale parcourue :
2π x (6350 + 400) x 86 500, soit environ 3 668 594 829 km</td></tr>
<tr><td>Troisième étape
Transformation de la solution mathématique en une solution réelle</td><td>- Porter un regard réaliste sur la solution mathématique est nécessaire et cette étape du processus est largement facilitée ici (puisque l'énoncé précise qu'il faut arrondir la réponse à la dizaine de millions la plus proche).
- La distance totale parcourue est d'environ 367 dizaines de millions de kilomètres.</td></tr>
<tr><td>Quatrième étape
Confrontation de la solution réelle au problème de départ</td><td>- Différentes confrontations sont possibles ici : calculer la distance à partir d'une approximation pour déceler les erreurs de calculs ; vérifier la représentation du problème, et en particulier, s'assurer que le 12 700 correspond bien à la longueur d'un diamètre (et doit donc être divisé en 2 pour appliquer correctement la formule).</td></tr>
</table>

I.2.2. Contextes, contenus et compétences : trois composantes majeures de l'évaluation

Afin de fournir des données pertinentes sur les niveaux de performances des élèves, leurs acquis et leurs difficultés, le programme PISA a élaboré des questions susceptibles d'évaluer différentes facettes du processus complexe de résolution de problèmes. Le schéma ci-dessous présente les trois composantes majeures prises en compte dans l'élaboration des épreuves.

Figure 3 – Les trois composantes de l'évaluation de la culture mathématique



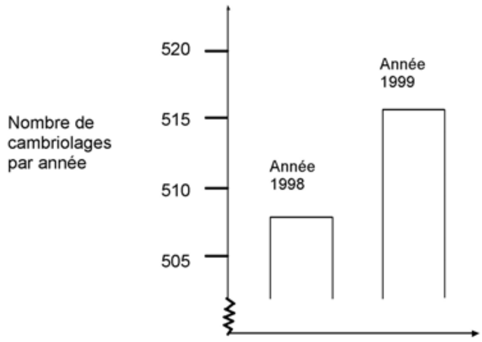
Dans les pages qui suivent, nous présentons plus en profondeur ces différentes composantes. Des exemples de questions permettent d'illustrer quelques considérations développées. Pour donner une vision plus large des unités élaborées, les questions diffusables[6], accompagnées des critères de correction correspondants, sont accessibles sur le site http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/A007/index.asp.

[6] Les autres questions de l'épreuve 2003 ne sont pas actuellement diffusables parce qu'elles risquent d'être utilisées lors des prochains cycles de l'étude.

CAMBRIOLAGES

Lors d'une émission télévisée, un journaliste montre ce graphique et dit :

« Ce graphique montre qu'il y a eu une très forte augmentation du nombre de cambriolages entre 1998 et 1999. »

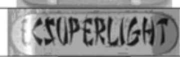


Question 1 :

Considérez-vous que l'affirmation du journaliste est une interprétation correcte de ce graphique ? Justifiez votre réponse par une explication.

PLANCHE À ROULETTES

Éric est un grand amateur de planche à roulettes. Il se rend dans un magasin du nom de SKATERS pour vérifier quelques prix.
Dans ce magasin, il est possible d'acheter une planche à roulettes complète. Ou bien on peut acheter une planche, un jeu de 4 roulettes, un jeu de 2 axes ainsi que les accessoires, et monter soi-même sa planche à roulettes.

Article	Prix en zeds	
Planche à roulette complète	82 ou 84	
Planche	40, 60 ou 65	
Un jeu de 4 roulettes	14 ou 36	
Un jeu de 2 axes	16	
Un jeu d'accessoires (roulements à bille, cales en caoutchouc, écrous et vis)	10 ou 20	

Question 1 :

Éric veut monter lui-même sa planche à roulettes. Quel est le prix minimum et le prix maximum des planches à roulettes à monter soi-même dans ce magasin ?
(a) Prix minimum : ....zeds.
(b) Prix maximum : ....zeds.

Question 2 :
Le magasin propose trois types de planche différents, deux jeux de roulettes différents et deux jeux d'accessoires différents. Il n'y a qu'un seul choix possible pour le jeu d'axes.
Combien de planches à roulettes différentes Éric peut-il monter ?
A 6
B 8
C 10
D 12

Question 3 :
Éric peut dépenser 120 zeds et il veut acheter la planche à roulettes la plus chère qu'il peut obtenir avec l'argent dont il dispose.
Combien d'argent Éric peut-il se permettre de dépenser pour chacun des 4 éléments ? Inscrivez vos réponses dans le tableau ci-dessous.

Élément	Montant (zeds)
Planche	
Roulettes	
Axes	
Accessoires	

a) Les situations et les contextes où se placent les problèmes à résoudre

Cette première composante permet de définir la réalité dans laquelle le problème est posé. Quatre domaines ont été définis : personnel, éducatif et professionnel, public et, enfin, scientifique.

Les quatre domaines se distinguent selon deux dimensions : le degré de familiarité de l'élève avec la situation et le caractère plus ou moins apparent de la structure mathématique du problème.

En ce qui concerne le ***degré de familiarité***, les situations personnelles, éducatives et professionnelles sont assez proches des préoccupations d'un jeune de 15 ans ; les premières se réfèrent directement à des activités quotidiennes des élèves et les secondes relèvent davantage de contextes scolaires ou professionnels. Les situations relevant du domaine public envisagent des contextes plus larges issus de la communauté en général ; les situations scientifiques sont les plus abstraites, elles se rapportent à la compréhension de procédés technologiques, de situations théoriques ainsi que de situations explicitement mathématiques.

En ce qui concerne la deuxième dimension (***caractère plus ou moins apparent de la structure mathématique***), certains problèmes évoquent des situations très contextualisées alors que d'autres proposent des situations présentées plus directement sous une forme mathématique. Les difficultés engendrées par ces deux types de situations sont de nature différente : dans le premier cas, elles portent principalement sur la transposition du problème réel en un problème mathématique ; dans le deuxième cas, c'est sans doute au sein même du processus mathématique à mettre en œuvre que le nœud du problème se situe.

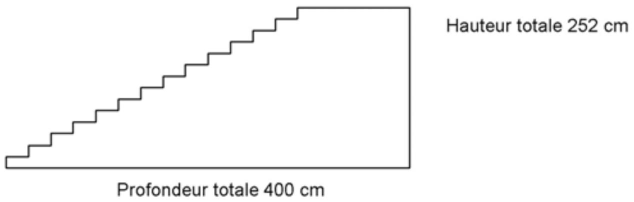
Les deux situations ci-contre permettent d'illustrer cette première composante de l'épreuve. La situation « Planche à roulettes » relève du domaine personnel et la situation « Cambriolages » est quant à elle classée dans le domaine public.

- Elles se distinguent effectivement par le degré de familiarité d'un jeune de 15 ans avec le sujet, l'une étant bien davantage liée à la culture et aux préoccupations des adolescents que l'autre.

- Quant au caractère plus ou moins apparent de la structure mathématique du problème, les situations sont également contrastées : la situation « Cambriolages » comprend un support mathématique à critiquer. La difficulté de la question relève donc de l'interprétation du graphique et en ce sens, elle peut être qualifiée de plus mathématique que l'autre (trois types d'arguments peuvent être proposés ici : seule une partie limitée du graphique est montrée, le pourcentage d'accroissement est très faible ou il faudrait des indications sur les tendances au cours du temps pour pouvoir émettre un jugement pertinent). En revanche, la situation « Planche à roulettes » est très contextualisée, et la structure mathématique du problème est dès lors moins aisée à percevoir : la première question implique de sélectionner les informations utiles dans le tableau et d'effectuer une addition élémentaire (le prix minimum est 80 zeds et le prix maximum, 137 zeds) ; la deuxième question impose de réaliser des combinaisons (il y a en tout 12 combinaisons différentes) et la troisième question nécessite l'élaboration d'un raisonnement peu conventionnel (il dépensera 65 zeds pour la planche, 14 zeds pour les roulettes, 16 zeds pour les axes et 20 zeds pour les accessoires).

ESCALIER

Le schéma ci-dessous représente un escalier de 14 marches, qui a une hauteur totale de 252 cm



Question 1 :

Quelle est la hauteur de chacune des 14 contremarches ?

Hauteur : = ...cm.

b) Les groupes de compétences

Pour développer le processus de mathématisation dans une variété de situations, il est nécessaire de disposer d'un grand nombre de compétences (cf. point I.2.1) Toutes ces compétences interagissent largement lorsqu'on est confronté à un problème à résoudre, certaines étant néanmoins plus centrales ou plus périphériques selon les situations rencontrées. Autrement dit, même si les compétences ne peuvent (et ne doivent) être complètement isolées pour être évaluées, il est possible de proposer des questions qui mettent l'accent de manière plus ou moins pointue sur tel ou tel aspect.
C'est dans cette perspective qu'il convient de comprendre les trois groupes de compétences définis par PISA et présentés ci-après.

Le groupe « reproduction »

Dans ce groupe de compétences, les problèmes proposés sont assez familiers aux élèves. Ils requièrent principalement la reproduction de connaissances acquises : restitution de faits, représentation élémentaire de problèmes, mise en œuvre d'une démarche mathématique connue. Résoudre ces problèmes consiste donc souvent à exécuter des opérations mathématiques de routine et à reproduire des acquis mathématiques dans des situations dépouillées, comme l'illustre la situation « Escalier » présentée ci-contre.

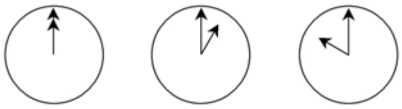
- La réussite à ce problème implique la mise en œuvre d'une opération de division. Tant le support visuel que le texte comportent les données utiles à la résolution du problème (252 cm et 14 marches). La solution mathématique ne demande pas d'interprétation par confrontation au monde réel : il suffit d'indiquer le nombre obtenu comme résultat de la division (18) ; l'unité est déjà fournie.

Le groupe « connexions »

Dans ce groupe de compétences, la distance séparant le problème mathématique du problème réel est plus importante. Les problèmes à résoudre, même s'ils impliquent des notions familières, ne sont plus routiniers : des connexions doivent par exemple être réalisées au niveau de la traduction du problème en un problème mathématique (il s'agit alors de mettre en relation diverses représentations d'un problème) et au niveau de la résolution proprement dite du problème (ce qui peut nécessiter l'intégration de diverses procédures mathématiques).

CONVERSATION PAR INTERNET

Mark (de Sydney, en Australie) et Hans (de Berlin, en Allemagne) communiquent souvent entre eux en utilisant le « chat » sur Internet. Ils doivent se connecter à Internet au même moment pour pouvoir « chatter ».
Pour trouver une heure qui convient pour « chatter », Mark a consulté un tableau des fuseaux horaires et a trouvé ceci :



Question 1 :

Lorsqu'il est 19h00 à Sydney, quelle heure est-il à Berlin ?
Réponse : ....

Question 2 :

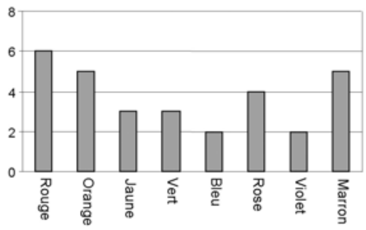
Mark et Hans ne peuvent pas « chatter » entre 9h00 et 16h30 de leur heure locale respective, parce qu'ils doivent aller à l'école. Ils ne pourront pas non plus « chatter » entre 23h00 et 7h00 parce qu'ils seront en train de dormir.

Quel moment conviendrait à Mark et Hans pour « chatter » ? Inscrivez les heures locales dans le tableau.

Lieu	Heure
Sydney	
Berlin	

BONBONS DE COULEUR

La mère de Robert lui permet de prendre un bonbon dans un sachet. Robert ne peut pas voir les bonbons. Le nombre de bonbons de chaque couleur qu'il y a dans le sachet est illustré dans le graphi-



Question 1 :

Quelle est la probabilité que Robert prenne un bonbon rouge ?
A 10 %
B 20 %
C 25 %
D 50 %

Le groupe « réflexion »

C'est dans le troisième groupe que la distance entre le problème réel et le problème mathématique est la plus importante : tant la phase de définition du problème mathématique que celle d'interprétation de la solution mathématique doivent faire l'objet d'une réflexion élaborée. Dans le développement de ce raisonnement approfondi, des capacités de modélisation, d'argumentation, d'abstraction et de généralisation doivent être mises en œuvre.

La situation « Conversation par internet » illustre deux types de compétences, l'un relevant du deuxième groupe de compétences (question 1) et l'autre, du troisième groupe de compétences (question 2).

- La réussite à la question 1 implique une phase de représentation du problème qui amène à mettre en relation certaines informations présentées sous forme de texte et celles fournies par les horloges. La résolution du problème mathématique et la solution (10h00) découlent assez logiquement de la mise en relation des diverses données importantes du problème.

- Quant à la question 2, elle s'avère plus difficile pour diverses raisons : la mise en évidence des différentes contraintes, ainsi qu'une traduction mathématique de ce qu'elles impliquent sont indispensables pour dégager une solution mathématique pertinente. La solution doit ensuite être communiquée sous la forme d'un tableau. La confrontation de la solution finale avec le problème peut s'avérer très utile, notamment pour s'assurer que toutes les contraintes ont bien été prises en compte dans la résolution (plusieurs réponses correctes étaient acceptées pour autant que le laps de temps proposé prenne en compte le décalage horaire de 9 heures et qu'il soit situé dans l'un des deux intervalles de temps suivants : Sydney, de 16h30 à 18h00 et Berlin, de 7h30 à 9h00 ou Sydney, de 7h00 à 8h00 et Berlin, de 22h00 à 23h00).

Hiérarchie entre les groupes de compétences ?

Les trois groupes de compétences représentent des niveaux de difficulté conceptuelle relativement hiérarchisés. Cependant, la complexité conceptuelle mise en évidence à travers les groupes de compétences n'est qu'une variable parmi d'autres influençant le niveau de performance des élèves. Par exemple, un problème de type « reproduction » impliquant la mise en oeuvre d'une procédure mathématique particulière peut s'avérer très difficile si la majorité des élèves ne maîtrisent pas cette procédure. C'est le cas pour la question « Bonbons de couleurs » présentée ci-contre.

- La question requiert explicitement le calcul d'une probabilité, matière qui est enseignée de façon formelle dans nos classes au dernier degré de l'enseignement secondaire. Il n'est donc pas étonnant de constater que cette question, d'un niveau de difficulté conceptuelle élémentaire, soit réussie par moins de 50 % de nos jeunes de 15 ans (la réponse correcte est ici la proposition B – 20 %).

c) ***Les contenus mathématiques ou « idées majeures »***

Cette dernière composante envisage la situation évoquée sous l'angle du contenu à mobiliser pour la résoudre. La définition des contenus a été réalisée en fonction des types de problèmes pour lesquels ils ont été créés, et non en fonction de la façon dont ils sont classiquement définis (arithmétique, algèbre, géométrie, …).

Quatre domaines de savoirs (quatre idées majeures) ont ainsi été déterminés.

La quantité

Nombres et grandeurs sont les deux composantes principales de cette idée majeure :

- représenter un nombre sous diverses formes, donner du sens aux opérations arithmétiques de base, effectuer mentalement des opérations ou en estimer le résultat sont autant de facettes du raisonnement quantitatif envisagé ici ;

- appréhender les grandeurs dans leur aspect relatif, analyser des récurrences, rechercher des régularités dans des assemblages de figures, quantifier des situations réelles en utilisant des nombres constituent l'autre facette de ce thème.

L'espace et les formes

Cette idée majeure envisage l'analyse des composantes structurelles des formes et des constructions en vue d'en dégager des similitudes et des différences. Cette perspective est fortement liée à la connaissance de l'espace : l'orientation dans l'espace, les diverses représentations de l'espace sont également largement investiguées ici.

Les variations et les relations

La variation est un concept important qui se manifeste dans un grand nombre de situations. Certaines de ces situations peuvent être modélisées par des fonctions mathématiques simples (fonctions linéaires, exponentielles, périodiques, logistiques). D'autres, en revanche, relèvent de catégories différentes : dans ce cas, l'analyse des données s'avère essentielle pour mieux appréhender la relation envisagée.

La capacité à raisonner en termes de relations et à propos des relations est au cœur de cette idée majeure. Deux éléments clés sont particulièrement exploités ici :

- la variété des représentations envisagées : symbolique, algébrique, graphique, géométrique ou sous forme de tableaux ;

- le passage d'un mode de représentation à un autre : cette flexibilité dans les modes de représentation s'avère essentielle, puisque les diverses représentations peuvent avoir des propriétés spécifiques et servir des objectifs différents.

L'incertitude

La compréhension et la critique de données fournies sous différents supports constituent un aspect essentiel de ce domaine, qui implique deux sujets d'études issus des statistiques et des probabilités : les données et le hasard.

Les quelques questions présentées ci-avant permettent d'illustrer ces quatre idées majeures :

- Quantité : « Vol spatial » et « Planches à roulettes ».
- Espace et formes : « Escaliers ».
- Variations et relations : « Conversation par internet ».
- Incertitude : « Cambriolages » et « Bonbons de couleur ».

D'autres exemples de questions relevant de ces quatre idées majeures sont présentés dans la suite de ce document (voir point II.2. de la partie « Résultats »).

I.3. Comment l'épreuve PISA est-elle construite ?

Les questions d'évaluation ont été construites de façon à couvrir les différentes dimensions décrites ci-avant : mise en œuvre d'un processus de mathématisation face à des questions impliquant différents types de situations, groupes de compétences et idées majeures.

PISA utilise des « unités » qui permettent d'associer plusieurs questions à un même contexte. Ceci permet d'impliquer les élèves dans la situation en leur proposant une série de questions de complexité croissante. Cette manière de procéder permet de concevoir des tâches réalistes, qui reflètent la complexité de la vie courante. Dans cette perspective, les élèves peuvent avoir recours à certaines ressources : des calculatrices et un répertoire de quelques formules mathématiques utiles (théorème de pythagore, aire d'un rectangle, circonférence d'un cercle ou aire d'un disque).

Les questions de l'épreuve recouvrent une variété de formats : questions à choix multiple, questions à réponse brève, questions à réponse ouverte.
Les réponses aux deux premiers types de questions peuvent aisément être encodées de façon informatique. En effet, les premières requièrent de choisir une réponse parmi plusieurs propositions ; les autres demandent une réponse précise, souvent présentée sous forme numérique.
Par contre, les questions ouvertes doivent être codées par des correcteurs expérimentés. Ceux-ci doivent utiliser une grille de correction qui fait appel, dans une certaine mesure, à leur jugement professionnel. Afin de s'assurer de la fiabilité de ces corrections, des codages multiples sont réalisés et des calculs de cohérence entre les différents correcteurs sont effectués.
En Communauté française de Belgique, ce sont des professeurs de mathématiques qui ont réalisé ces tâches de correction.

Le test de mathématiques est réparti le plus également possible entre les quatre idées majeures (*quantité, espace et formes, variations et relations* et *incertitude*) et entre les quatre situations (*personnelle, éducative / professionnelle, publique* et *scientifique*) décrites précédemment. Les proportions d'items associés aux compétences des trois groupes (*reproduction, connexions, réflexion*) sont respectivement de 25 %, 50 % et 25 %. Les trois formats (*questions à choix multiple, questions à réponse brève* ou *question ouverte*) sont représentés de manière équilibrée (à peu près un tiers chacun).

Les épreuves de mathématiques utilisées lors de l'évaluation de PISA 2003 comportent 85 items (soit un total d'environ 210 minutes de test). Ces items sont alors répartis dans treize carnets, avec des recouvrements entre carnets : ainsi, des questions identiques apparaissent dans plusieurs carnets, tantôt en début, tantôt en fin de carnet, afin d'obtenir une information fiable sur les compétences des élèves, tout en évitant à chaque élève de répondre à la totalité des questions. En définitive, chaque élève dispose de deux heures pour compléter un carnet de test (comprenant une majorité de questions de mathématiques, ainsi que quelques questions portant sur les autres disciplines évaluées : lecture, sciences et résolution de problèmes[7]).

La mise au point d'un tel dispositif rend possible l'analyse des réponses des élèves sur base du modèle IRT (*Item Response Theory* - théorie de la réponse à l'item)[8] permettant de positionner sur une même échelle, à l'aide de procédures itératives, à la fois le niveau de compétences de chaque élève évalué dans PISA et la difficulté de chacune des questions :

- la compétence relative de chaque élève peut être estimée en considérant la proportion de questions qu'il a réussies ;
- de même, la difficulté relative des questions peut être estimée en fonction de la proportion d'élèves qui y ont répondu correctement.

Une fois que la difficulté de chaque question est estimée, il est possible de déterminer le niveau de compétence de chaque élève[9]/[10].

[7] Comme son nom l'indique, le thème « résolution de problèmes » envisage également la résolution de problèmes, mais dans une perspective transdisciplinaire, dans la mesure où la résolution de ces situations implique chaque fois l'intégration d'informations provenant de diverses disciplines. Par ailleurs, les contenus mathématiques à mobiliser sont d'un niveau très élémentaire.

[8] Pour plus d'informations concernant cette théorie, consulter le document rédigé par Demeuse, M. (2000). *Les échelles de mesure : Thurstone, Likert, Guttman et le modèle de Rasch.* Les Cahiers du Service de pédagogie expérimentale-Note technique.

[9] Cela ne signifie pas que cet élève réussira « à coup sûr » toutes les questions de difficulté inférieure ou égale à sa performance, mais que la probabilité pour qu'il y arrive est élevée.

[10] Des détails plus techniques sur les méthodes utilisées pour estimer le niveau de compétence des élèves et la difficulté des questions sont fournis dans le rapport technique de PISA 2003 (Ocdé, à paraître).

II. QUELQUES RÉSULTATS DES ÉLÈVES EN COMMUNAUTÉ FRANÇAISE

Le modèle statistique (modèle IRT) utilisé par PISA permet de positionner les questions et les élèves sur une même échelle de compétences. En tout, cinq échelles ont été élaborées pour les mathématiques : quatre sous-échelles, une par idée majeure (quantité, espace et formes, variations et relations et incertitude) et une échelle combinée (globale, reprenant toutes les questions). Pour faciliter l'interprétation des résultats, par convention, l'échelle combinée de mathématique fixe à 500 points le résultat de la moyenne des pays de l'Ocdé ; deux tiers environ des élèves ont un score compris entre 400 et 600 points. Chaque pays se voit alors attribuer un score sur chaque échelle ; ce score doit être interprété en référence au score moyen de l'Ocdé et permet de situer les pays les uns par rapport aux autres (ce sont les fameux « classements » abondamment repris dans la presse). Pour information, la Communauté française de Belgique a obtenu un score très proche de la moyenne Ocdé pour l'échelle combinée de mathématiques (498 points). Les scores moyens attribués à chaque pays n'ont qu'un intérêt limité dans la mesure où ils masquent complètement la diversité des résultats propres à chaque pays, comme notamment la répartition des élèves à l'intérieur des différentes échelles de compétences. Chaque échelle est en effet constituée de plusieurs niveaux de compétences (six pour les échelles de mathématiques) qui correspondent à des niveaux de performances hiérarchisés ou, autrement dit, à un ensemble de tâches de complexité croissante.

Chaque élève ayant participé à l'évaluation de PISA 2003 a été positionné à un niveau de l'échelle en fonction de son niveau de performances, estimé grâce au modèle statistique sur base des réponses qu'il a fournies à l'ensemble des questions qui lui ont été soumises. Un élève situé à un niveau donné a une probabilité de réussir 50 % des questions se situant à ce niveau de l'échelle. Plus précisément, on peut considérer qu'un élève situé au niveau 2, par exemple, est capable de réussir au minimum 50 % des questions situées à ce niveau ; il a une probabilité supérieure à 50 % de réussir les questions situées au niveau 1 et une probabilité inférieure à 50 % de réussir celles situées aux niveaux 3, 4, 5 et 6.

Tous les élèves soumis à l'évaluation ont ainsi été placés à un niveau donné de chacune des échelles de mathématiques. Il est alors possible d'analyser la répartition de l'ensemble des élèves aux différents niveaux de l'échelle. Une telle analyse portant sur l'échelle combinée en mathématiques est proposée au point II.1 ; elle envisage la répartition des élèves entre les différents niveaux de l'échelle, en fonction de l'année et de la filière d'études dans lesquelles ils se trouvent. Des exemples de questions, accompagnés des pourcentages de réussite des jeunes de 15 ans en Communauté française, permettent d'illustrer quelques caractéristiques de l'échelle.

Par la suite (point II.2.), nous présentons quelques questions relevant de chacune des sous-échelles élaborées. Ce second éclairage approfondit l'analyse en montrant de façon plus précise les divergences qui se manifestent en fonction de la filière d'études suivie par les élèves de l'échantillon.

II.1. L'échelle combinée en mathématiques : aperçu des profils de performances

Le tableau suivant présente la répartition des élèves entre les différents niveaux de l'échelle combinée, de manière globale pour notre Communauté tout d'abord, en fonction de l'année d'études et de la filière d'enseignement fréquentées par la suite[11].

Pour l'analyse relative aux filières d'enseignement, les élèves ont été regroupés selon les finalités principales de chacune des orientations : d'une part, la **filière de transition,** préparant majoritairement à poursuivre des études dans l'enseignement supérieur et d'autre part, la **filière qualifiante**, offrant un diplôme ouvrant directement l'accès à une profession[12].

La **filière de transition** regroupe ainsi les élèves de l'enseignement général et de l'enseignement technique et artistique de transition. Ce choix se justifie dans la mesure où les programmes d'études sont sensiblement les mêmes dans les deux cas (hormis bien sûr les variations liées aux options choisies et au nombre d'heures de mathématiques reçues) et parce que les deux types de formations sont soumises au même référentiel de compétences terminales[13].

La **filière qualifiante** regroupe les élèves de l'enseignement technique et artistique de qualification et ceux de l'enseignement professionnel, soumis tous deux au même référentiel de compétences terminales[14]. Notons toutefois qu'il peut exister des variations importantes de programmes, tant entre le technique, l'artistique et le professionnel qu'au sein même de chaque orientation, en fonction du type de profession auquel se préparent les élèves.

Pour faciliter la lecture du tableau, les cases grisées indiquent à quels niveaux de l'échelle se situent majoritairement les élèves de chaque année et filière données.

[11] Seuls les élèves situés au deuxième degré de l'enseignement secondaire sont présentés ici ; ceux situés au premier ou au troisième degré (ainsi que dans l'enseignement spécial) sont en effet trop peu nombreux pour permettre ce type d'analyse.

[12] Précisons que cette seconde filière d'études ne ferme pour autant pas la voie à la poursuite d'études ultérieures.

[13] *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques. Humanités générales et technologiques*. Ministère de la Communauté française, 1999.

[14] *Compétences terminales et savoirs communs. Humanités professionnelles et techniques.* Ministère de la Communauté française, 2000.

Tableau 1 : Répartition des élèves sur l'échelle combinée en mathématiques.

	Pourcentage d'élèves situés à chacun des niveaux				
	Toutes filières confondues	Filière qualifiante		Filière de transition	
		3^e année	4^e année	3^e année	4^e année
Niveau 6	4,4 %	-	-	1,1 %	10,0 %
Niveau 5	11,7 %	0,3 %	4 %	6,2 %	24,0 %
Niveau 4	19,4 %	3,6 %	12,7 %	19,7 %	32,3 %
Niveau 3	21,9 %	15,8 %	25,9 %	35,1 %	23,2 %
Niveau 2	19,5 %	30,2 %	34,7 %	26,2 %	8,6 %
Niveau 1	12,7 %	30,5 %	17,1 %	9,9 %	1,7 %
En dessous du niveau 1	10,4 %	19,3 %	5,5 %	1,8 %	0,2 %

Un premier examen de la répartition des élèves entre les différents niveaux, **toutes années et filières confondues,** fait apparaître une dispersion importante des compétences des jeunes de 15 ans. Une majorité des élèves ont des compétences moyennes (41 % des élèves atteignent les niveaux 3 ou 4 de l'échelle) à très bonnes en mathématiques (16 % des élèves sont aux niveaux 5 ou 6). Ce qui inquiète, en revanche, c'est le pourcentage assez élevé d'élèves se situant au bas de l'échelle : 10 % des élèves ont des compétences en-deçà du niveau 1. Ces élèves n'ont pas pu répondre de façon correcte à au moins la moitié des questions relevant du niveau 1. Ceci ne signifie pas qu'ils n'ont aucune compétence en mathématiques, mais on peut raisonnablement penser qu'ils ne disposent pas d'un bagage suffisant pour pouvoir mener à bien des tâches impliquant la mise en œuvre d'une stratégie basique de résolution de problèmes. La situation des élèves classés au niveau 1 de l'échelle (13 %) est également préoccupante. Au total, on peut donc affirmer qu'environ 23 % de nos jeunes ne disposent pas des compétences mathématiques élémentaires, leur permettant de réagir efficacement dans des situations qui impliquent un usage minimal des mathématiques. Ces élèves-là sont donc en grande difficulté et, dans leur scolarité future, tout devrait être mis en œuvre pour leur permettre d'acquérir une culture mathématique de base.

Une analyse plus détaillée montre qu'une **hiérarchie** nette se dégage **entre les filières d'enseignement** et, au sein de chaque filière, **entre les années d'étude**. Les élèves de la filière qualifiante se trouvent en grande difficulté face aux problèmes proposés ; le niveau de « culture mathématique » d'un nombre beaucoup trop important d'entre eux est réellement préoccupant ! Près de 50 % des élèves de 3^e année et plus de 20 % des élèves de 4^e n'atteignent pas le niveau 2, considéré comme basique par le programme PISA.
Les constats sont plus rassurants dans la filière de transition où les élèves sont nettement moins nombreux à se situer sous ce seuil de base en 3^e année (environ 10 %) et où l'on ne trouve pratiquement plus aucun élève dans cette situation en 4^e (moins de 2 %). En 4^e année, une proportion non négligeable atteint même des performances d'un niveau élevé (35 % des élèves sont situés aux niveaux 5 et 6).

TOURNOI DE TENNIS DE TABLE

Question 1 :

Tom, Robin, Bruno et Didier ont formé un groupe d'entraînement dans un club de tennis de table. Chaque joueur jouera une fois contre chacun des autres joueurs. Ils ont réservé deux tables d'entraînement pour ces matchs.

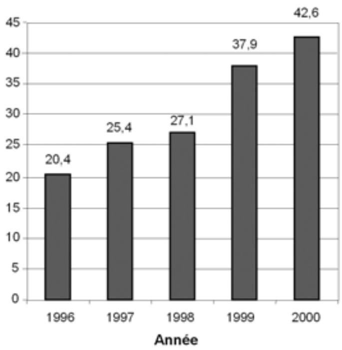
Complétez le programme des matchs ci-dessous en y inscrivant le prénom des joueurs qui disputent chaque match.

	Table d'entraînement 1	Table d'entraînement 2
1er tour	Tom - Robin	Bruno - Didier
2ème tour	…………… - ……………	…………… - ……………
3ème tour	…………… - ……………	…………… - ……………

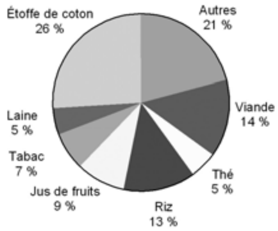
EXPORTATIONS

Les graphiques ci-dessous fournissent des informations sur les exportations de la Zedlande, un pays dont la devise est le zed.

Total des exportations annuelles de la Zedlande en millions de zeds, 1996-2000



Répartition des exportations de la Zedlande pour l'année 2000



Question 1 :

Quel était le montant total (en millions de zeds) des exportations de la Zedlande en 1998 ?
Réponse : ....

Que recouvrent les différents niveaux de l'échelle ?

Nous présentons ici trois paliers contrastés de l'échelle combinée, en illustrant chaque fois les propos par des exemples de questions de l'épreuve, accompagnés des taux de réussite en Communauté française.

Aux niveaux les plus élémentaires de l'échelle, les situations sont énoncées dans des contextes relativement familiers. Elles requièrent des interprétations limitées de la situation et impliquent l'application directe de procédures mathématiques élémentaires.

Par exemple, il peut s'agir :

- de lire directement une donnée dans un graphique ou un tableau ;
- d'effectuer un calcul arithmétique simple et direct ;
- d'ordonner des nombres correctement ;
- de lister et de dénombrer des quantités dans une situation combinatoire simple ;
- d'utiliser un taux de change simple.

Les deux exemples présentés ci-contre relèvent tous deux de niveaux élémentaires.

La question « Tournoi de tennis de table » amène à lister les combinaisons possibles dans diverses situations particulières[15] (plusieurs solutions sont possibles ici pour autant que les quatre matchs restants soient correctement décrits et répartis sur les deuxième et troisième tours : par exemple, au deuxième tour, Tom contre Bruno et Robin contre Didier et au troisième tour, Tom contre Didier et Robin contre Bruno).

La question « Exportations » impose de lire directement une information sur un graphique assez familier (27,1). Elle est réussie par 85 % des élèves.

[15] Nous ne pouvons fournir les résultats des élèves à cette question : bien qu'elle remplisse tous les critères de qualité requis pour faire partie de l'épreuve de 2003, cette question issue du prétest de l'épreuve n'a pas été conservée pour l'épreuve définitive.

ÉTAGÈRES

Pour construire une étagère complète, un menuisier a besoin du matériel suivant :

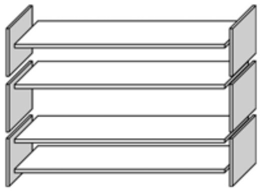
4 planches longues ;

6 planches courtes ;

12 petites équerres;

2 grandes équerres ;

14 vis.



Question 1 :

Le menuisier dispose d'un stock de 26 planches longues, 33 planches courtes, 200 petites équerres, 20 grandes équerres et 510 vis.

Combien d'étagères complètes le menuisier peut-il construire ?

Réponse : ....

DECHETS

Pour un devoir portant sur l'environnement, des élèves ont recueilli des informations sur le temps de décomposition des différents types de déchets que les gens jettent :

Type de déchets	Temps de décomposition
Peau de banane	1–3 ans
Pelure d'orange	1–3 ans
Boîtes en carton	0,5 année
Chewing-gum	20–25 ans
Journaux	Quelques jours
Gobelets en polystyrène	Plus de 100 ans

Question 1 :

Un élève envisage de présenter ces résultats sous forme d'un diagramme en bâtons.

Donnez une raison pour laquelle le diagramme en bâtons ne conviendra pas pour présenter ces données.

Aux niveaux intermédiaires, les situations requièrent des interprétations plus élaborées. Les contextes évoqués sont moins familiers. Il s'agit souvent d'utiliser et de mettre en relation de façon pertinente différentes représentations de la situation, dont notamment des représentations mathématiques plus formelles. Les questions impliquent souvent des raisonnements à plusieurs étapes et peuvent requérir une communication du raisonnement sous la forme d'une explication simple.
Par exemple, il peut s'agir :

- d'interpréter et de mettre en relation plusieurs graphiques ;
- d'interpréter un texte en le mettant en relation avec les données d'un tableau ou d'un graphique ;
- d'isoler les informations pertinentes et d'effectuer des calculs ;
- d'utiliser des conversions d'unités pour calculer une distance sur une carte ;
- d'utiliser le raisonnement spatial et des connaissances géométriques pour effectuer des calculs de distance de vitesse ou de temps.

Les deux questions présentées ci-contre relèvent de niveaux intermédiaires.

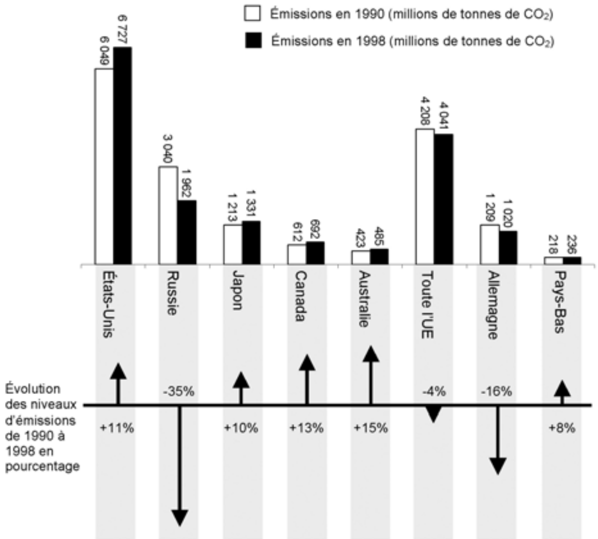
La situation « Etagères » amène les élèves à élaborer une stratégie de résolution de problèmes : des informations présentées à plusieurs endroits dans l'énoncé doivent être mises en relation et plusieurs résultats d'opérations doivent être comparés (la réponse correcte est ici *5 étagères*). 70 % des élèves sont parvenus à répondre correctement à cette question.

Dans la situation « Déchets », il s'agit de communiquer une argumentation basée sur l'interprétation de données. Assez peu familière pour nos jeunes de 15 ans, cette question concerne leur compréhension approfondie des conditions d'utilisation d'un histogramme. Deux types d'arguments peuvent être avancés : la très grande variance dans les données (comment représenter sur une même échelle « de quelques jours à plus de cent ans » ?) ou la variabilité des données pour certaines catégories (on ne peut pas représenter « de 1 à 3 ans » avec des bâtons).
La moitié des élèves ont répondu correctement à cette question. Le pourcentage d'omission est assez important (21 %), comme c'est souvent le cas pour les questions requérant des compétences liées à la communication ou l'argumentation.

RÉDUIRE LES ÉMISSIONS DE CO_2

De nombreux scientifiques craignent que la concentration croissante de gaz CO2 dans notre atmosphère entraîne des changements climatiques.

Le diagramme ci-dessous montre, pour plusieurs pays ou aires géographiques, les niveaux d'émissions de CO2 en 1990 (barres claires), les niveaux d'émissions en 1998 (barres foncées), et l'évolution de ces niveaux d'émissions entre 1990 et 1998, exprimée en pourcentage (flèches accompagnées d'un pourcentage).



Question 1 :

Vous pouvez lire sur le diagramme qu'aux États-Unis l'augmentation du niveau d'émissions de CO2 entre 1990 et 1998 a été de 11 %.

Montrez les calculs indiquant comment ce chiffre de 11 % peut être obtenu.

Question 2 :

Manuela a étudié le diagramme et affirme qu'elle a découvert une erreur dans les pourcentages d'évolution des niveaux d'émissions : « La diminution du pourcentage en Allemagne (16 %) est plus élevée que la diminution du pourcentage pour l'ensemble de l'Union Européenne (Toute l'UE : 4 %). C'est impossible, puisque l'Allemagne fait partie de l'UE. »

Êtes-vous d'accord avec Manuela quand elle dit que c'est impossible ? Expliquez votre raisonnement.

Question 3 :

Manuela et Nicolas ont discuté pour savoir quel est le pays (ou l'aire géographique) qui a connu la plus forte augmentation d'émissions de CO2.

Sur la base du diagramme, ils sont arrivés à deux conclusions différentes.

Donnez deux réponses « correctes » possibles à cette question, et montrez comment vous avez obtenu chacune de ces réponses.

OPINIONS FAVORABLES AU PRESIDENT

Question 1 :

En Zedlande, des sondages d'opinion ont été menés pour déterminer la cote de popularité du président en vue de la prochaine élection. Quatre éditeurs de journaux ont chacun mené leur propre sondage d'opinion à l'échelle nationale. Les résultats des quatre sondages sont les suivants :

Journal 1 : 36,5 % (sondage effectué le 6 janvier sur un échantillon de 500 citoyens ayant le droit de vote, tirés au hasard) ;

Journal 2 : 41,0 % (sondage effectué le 20 janvier sur un échantillon de 500 citoyens ayant le droit de vote, tirés au hasard) ;

Journal 3 : 39,0 % (sondage effectué le 20 janvier sur un échantillon de 1 000 citoyens ayant le droit de vote, tirés au hasard) ;

Journal 4 : 44,5 % (sondage effectué le 20 janvier, sur 1 000 lecteurs qui ont appelé la rédaction pour voter).

Quel est le journal qui fournit probablement le résultat le plus fiable pour prédire le taux d'opinions favorables au président si les élections se tiennent le 25 janvier ? Donnez deux arguments à l'appui de votre réponse.

Aux niveaux les plus élevés de l'échelle, les questions font intervenir plusieurs éléments différents et requièrent des niveaux élevés d'argumentation (qui apparaissent souvent sous la forme d'une explication de la solution avancée). Ces situations sont souvent peu familières aux élèves et requièrent des raisonnements élaborés et de la créativité.
Quelques activités typiques relevant de ces niveaux :

- l'interprétation de données complexes et peu familières ;
- l'élaboration d'un modèle mathématique d'une situation réelle assez complexe ;
- la mise en relation de plusieurs informations ainsi qu'une décomposition du problème en plusieurs étapes.

La situation « Réduire les émissions de CO_2 »[16] est une situation assez complexe. Le graphique est peu familier et doit être analysé de diverses façons ; lecture et interprétation sont ici largement investiguées, de même que la communication et l'argumentation des raisonnements :

- la première question envisage la communication d'une technique de résolution. Pour y parvenir, il faut aller sélectionner les informations pertinentes sur le graphique (6049 et 6727) et effectuer les opérations requises : 100 x (6727 – 6049) / 6049 ;
- la deuxième et la troisième questions sont davantage centrées sur l'argumentation critique :
  - pour la deuxième question, il s'agit de fournir une justification correcte (par exemple, la forte diminution en Allemagne est en réalité compensée par des diminutions moins importantes ou par des augmentations - par exemple, celle observée aux Pays-Bas) ;
  - la troisième question, quant à elle, amène à dégager deux types d'augmentation : augmentation absolue la plus élevée pour les Etats-Unis (ils sont passé de 6049 millions de tonnes à 6727 millions de tonnes) et augmentation relative la plus élevée pour l'Australie (+ 15 %).

La situation « Opinions favorables au président » est une situation relativement peu structurée dans le sens où la démarche mathématique à mettre en œuvre est peu apparente. Il s'agit ici de présenter un raisonnement qui nécessite d'interpréter les informations données et de les mettre en relation. Il convient de proposer le journal 3 en présentant au moins deux des quatre arguments suivants : le sondage est plus récent, la taille de l'échantillon est plus importante, l'échantillon a été tiré au hasard, et seuls des électeurs ont été interrogés.
En Communauté française, 43 % des élèves ont répondu correctement à cette question. A nouveau, comme dans les autres questions où une argumentation doit être élaborée, on constate un taux d'omission assez élevé (23 %).

[16] Nous ne pouvons fournir les résultats des élèves à cette question : cette question est issue du prétest de l'épreuve mais elle n'a pas été conservée pour l'épreuve définitive.

TAUX DE CHANGE

Mademoiselle Mei-Ling, de Singapour, prépare un séjour de 3 mois en Afrique du Sud dans le cadre d'un échange d'étudiants. Elle doit changer des dollars de Singapour (SGD) en rands sud-africains (ZAR).

Question 1 :

Mei-Ling a appris que le taux de change entre le dollar de Singapour et le rand sud-africain est de :
1 SGD = 4,2 ZAR.

Mei-Ling a changé 3 000 dollars de Singapour en rands sud-africains à ce taux de change.

Combien Mei-Ling a-t-elle reçu de rands sud-africains ?

Question 2 :

Lorsque Mei-Ling rentre à Singapour après 3 mois, il lui reste 3 900 ZAR. Elle les reconvertit en dollars de Singapour, constatant que le taux de change a évolué et est à présent de :

1 SGD = 4,0 ZAR.

Combien Mei-Ling reçoit-elle de dollars de Singapour ?

Réponse : ....

Question 3 :

Au cours de ces trois mois, le taux de change a évolué et est passé de 4,2 à 4,0 ZAR pour un SGD.

Est-il plus avantageux pour Mei-Ling que le taux de change soit de 4,0 ZAR au lieu de 4,2 ZAR lorsqu'elle reconvertit ses rands sud-africains en dollars de Singapour ? Donnez une explication à l'appui de votre réponse.

II.2. L'analyse de quelques questions relevant des différentes sous-échelles en mathématiques

Les quatre idées majeures sont présentées plus en détail ici. Pour chacune d'elles, un bref aperçu du moment où les thèmes clés sont envisagés dans la scolarité est proposé. Cette analyse, présentée dans les cases grisées au début de chaque partie, se base sur les « Socles de compétences » et sur les « Compétences terminales », selon les thématiques envisagées. Elle a également été documentée par l'avis d'experts (inspecteurs de mathématiques) qui ont été invités à donner un avis critique sur chacune des questions en vue de préciser quel(s) étai(en)t, selon eux, le(s) moment(s) clé(s) de scolarité où les contenus mathématiques impliqués étaient envisagés. Par la suite, quelques questions sont analysées plus précisément. Elles permettent de mieux cerner les raisonnements face à des situations relevant de niveaux contrastés de difficulté. Les résultats présentés se focalisent sur les divergences en fonction des filières et des années d'études auxquelles se situent les élèves.

II.2.1. La quantité

Dans nos référentiels officiels, la quantité est largement développée. Les aspects évoqués ici concernent principalement l'enseignement primaire et le début de l'enseignement secondaire. A ce sujet, les « Socles de compétences » précisent que « *l'apprentissage des nombres et des opérations trouve un ancrage dans des contextes de grandeurs* » ; de même, « *l'aisance dans l'univers des nombres* » constitue une priorité largement développée dans la formation mathématique de base.

A titre illustratif, deux situations sont proposées ici, l'une envisage la proportionnalité et l'autre, la recherche de régularités.

La proportionnalité, envisagée sous différents aspects

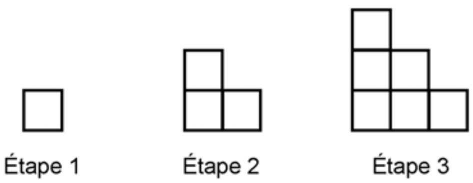
La situation « Taux de change », présentée ci-contre, aborde la proportionnalité sous divers aspects.

- Dans les deux premières questions, il s'agit d'identifier un rapport de proportionnalité directe. Pour la première, la résolution mathématique du problème consiste alors simplement à effectuer une multiplication (la réponse correcte est alors 12600 ZAR). Pour la deuxième, cette étape nécessite d'effectuer une division (pour arriver à la solution 975 SGD).

  Ces deux questions (niveaux 1 et 2) sont bien réussies en moyenne par les élèves de l'échantillon : 79 % pour la première et 78 % pour la deuxième. Ces résultats moyens cachent toutefois quelques différences en fonction de l'année et de la filière d'études où se situent les élèves : on observe un continuum hiérarchique allant de plus de 90 % de réussite en 4^{e} année dans la filière de transition pour les deux questions, à moins de 66 % de réussite en 3^{e} année dans la filière qualifiante.
- **La troisième question est plus complexe à différents égards :** il s'agit de déterminer le taux de change le plus avantageux ; rien n'indique explicitement qu'il faut calculer la somme en SGD relative aux deux taux de change. Cette interprétation amène alors à représenter le problème sous une forme mathématique et à l'organiser en fonction du concept de proportionnalité. Répondre à la question consiste alors à comparer deux rapports proportionnels :

1 SGD => 4,2 ZAR	1 SGD => 4,0 ZAR
? SGD => 3900 ZAR	? SGD => 3900 ZAR

MOTIF EN ESCALIER



Question 1 :

Robert réalise un motif en escalier en utilisant des carrés. Il suit les étapes suivantes :

Comme on peut le voir, il utilise un carré à l'étape 1, trois carrés à l'étape 2 et six carrés à l'étape 3.

Combien de carrés devra-t-il utiliser à la quatrième étape ?

Réponse : ....carrés

La résolution mathématique implique une division qui permet de découvrir les deux sommes en SGD. Cette solution doit ensuite être interprétée en vue de répondre à la première partie de la question : le taux de change à 4,2 est moins avantageux puisqu'il rapporte moins de ZAR que celui à 4,0. La deuxième partie de la question demande de donner une explication à l'appui de la réponse fournie : les résultats obtenus par calcul permettent de justifier cette réponse (c'est donc la résolution mathématique du problème qui permet d'argumenter la solution).

Les résultats des élèves à cette troisième question (niveau 4) reflètent assez bien sa difficulté conceptuelle : elle est réussie en moyenne par 49 % des élèves de l'échantillon. Notons qu'ils sont environ 10 % à répondre « oui » (c'est à dire que le taux de 4,0 est le plus avantageux) mais sans parvenir à donner une explication correcte.

La dispersion des résultats en fonction de l'année et de la filière d'études se hiérarchise nettement :

- dans la filière de transition, plus de 70 % en 4^{e} année et environ 55 % en 3^{e} ;
- dans la filière qualifiante, moins de 50 % en 4^{e} et moins de 25 % en 3^{e}. Ces faibles pourcentages de réussite s'expliquent en partie par des omissions assez massives : de l'ordre de 30 % en 4^{e} année et presque 50 % en 3^{e} année.

Hormis pour les élèves de 4^{e} dans la filière de transition qui s'en sortent plutôt bien, les interprétations et argumentations requises posent d'importantes difficultés aux élèves.

La recherche de régularités dans une suite de figures

La situation « Motif en escalier » relève du niveau 3. Elle propose la recherche d'une régularité dans une suite de figures.

Dans ce problème, il s'agit d'identifier des régularités dans le motif représenté et d'en conclure qu'il faudra 10 carrés pour réaliser le motif à la quatrième étape. Ce type d'activité apparaît souvent dans les manuels destinés aux élèves du premier degré de l'enseignement secondaire.

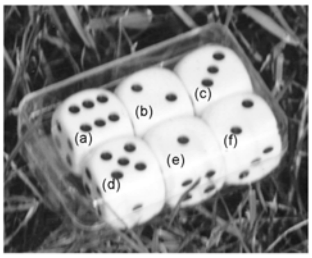
Cette question est réussie en moyenne par 68 % des élèves de l'échantillon. On observe une dispersion des résultats en fonction de l'année et de la filière d'études : près de 80 % en 4^{e} et près de 70 % en 3^{e} pour la filière de transition, et aux alentours de 50 % pour la filière qualifiante. Une erreur fréquente (rencontrée chez près d'un quart des élèves de la filière qualifiante) consiste à proposer la réponse « 9 », basée sur une analyse superficielle des nombres (1 cube => 3 cubes => 6 cubes => 9 cubes).

DES

Question 1 :

Sur la photographie ci-dessous, vous apercevez six dés, correspondant aux lettres (a) à (f). Il existe une règle commune à tous les dés :

la somme des points figurant sur deux faces opposées de chaque dé est toujours égale à sept.



Écrivez dans chacune des cases le nombre de points qui figurent sur la face inférieure de chaque dé de la photo.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

DÉS À JOUER

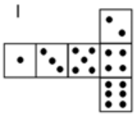
Le dessin à droite représente deux dés.
Les dés sont des cubes avec des faces numérotées selon la règle suivante :

La somme des points figurant sur deux faces opposées doit toujours être égale à 7.

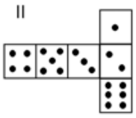
Question 1 :

Vous pouvez aisément réaliser un dé en découpant, pliant et collant du carton. Cela peut se faire de plusieurs manières. Ci-dessous, vous pouvez voir quatre découpages qui peuvent être utilisés pour faire des dés, avec des points sur les faces.
Parmi les découpages ci-dessous, lequel ou lesquels peu(ven)t être plié(s) de manière à former un dé qui obéit à la règle selon laquelle la somme des faces opposées est égale à 7 ? Pour chacun des découpages, entourez soit « Oui », soit « Non » dans le tableau ci-dessous.

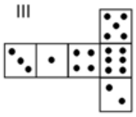
I



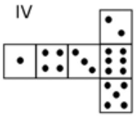
II



III



IV



Découpage	Obéit-il à la règle selon laquelle la somme des faces opposées est égale à 7 ?
I	Oui / Non
II	Oui / Non
III	Oui / Non
IV	Oui / Non

II.2.2. Espace et formes

Les référentiels de compétences, en particulier le document « Socles de compétences », envisagent l'étude des solides et figures dans une perspective comparable : « *se situer et situer un objet dans l'espace sont des apprentissages essentiels qui jalonnent toutes les étapes d'une formation géométrique. Apprendre à passer d'un solide à ses représentations planes et inversement contribue à l'éducation de la vision dans l'espace ». « Repérer, reconnaître, comparer, dégager des régularités »* sont des compétences qui apparaissent prioritaires dans la formation géométrique de base des élèves. Ces compétences sont également envisagées au deuxième degré de l'enseignement secondaire, quelle que soit la filière d'enseignement.

Pour illustrer cette idée majeure, deux thèmes sont développés ici : l'un envisage les dés comme support d'une représentation de l'espace et l'autre, l'exploitation de figures planes peu conventionnelles.

Les dés, supports d'une représentation dans l'espace

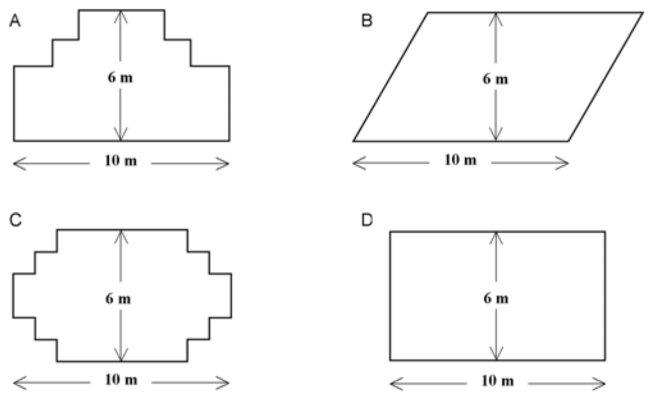
Les deux situations présentées ci-contre « Dés » et « Dés à jouer » envisagent une réflexion autour des dés : ces supports sont plutôt familiers aux élèves et permettent d'aborder divers aspects liés à la compréhension de l'espace et des formes.

Dans les deux cas, une même propriété doit être utilisée (la somme des points figurant sur deux faces opposées est toujours égale à 7). Ces problèmes se distinguent en revanche nettement en fonction de la complexité de la représentation à élaborer, ce qui contribue à expliquer qu'ils ne se situent pas au même niveau de difficulté.

- Dans la situation « Dés », relevant du niveau 2, la difficulté se situe principalement à l'étape de représentation du problème : la lecture du petit texte doit amener à dégager et à comprendre en profondeur la règle *La somme des points figurant sur deux faces opposées est égale à 7*. Il faut alors dégager les informations utiles sur la photo en vue d'appliquer à bon escient la règle de calcul (on arrive alors à la solution : 1 - 5 - 4 pour la rangée supérieure et 2 - 6 - 5 pour la rangée inférieure). Une majorité des élèves de 15 ans parvient à la réponse correcte (76 %). Remarquons cependant que ce problème n'est pas élémentaire pour une proportion importante d'élèves de troisième année de la filière qualifiante (où le taux de réussite est proche de 50 %).
- La situation « Dés à jouer » implique de mobiliser des compétences relatives à la perception visuelle pour reconstituer mentalement le cube au départ des différents développements. Une bonne représentation des développements amène ainsi à identifier les paires de faces opposées. Un raisonnement analogue doit être réalisé dans plusieurs situations. Cette accumulation de tâches à réaliser amplifie la difficulté de la question (en effet, le point n'est accordé à cette question que si tous les développements sont correctement analysés, c'est-à-dire dans l'ordre « non », « oui », « oui », « non »). Au total, 74 % de nos élèves répondent correctement à cette question, qui relève du niveau 3. Hormis pour les élèves de 3^{e} année de la filière qualifiante (où le taux de réussite est inférieur à 50 %), cette question est réussite par plus de 60 % des élèves. Ce taux de réussite dépasse 80 % pour les élèves de 4^{e} année de la filière de transition.

MENUISIER

Un menuisier dispose de 32 mètres de planches et souhaite s'en servir pour faire la bordure d'une plate-bande dans un jardin. Il envisage d'utiliser un des tracés suivants pour cette bordure :



Question 1 :

Indiquez, pour chacun des tracés, s'il peut être réalisé avec les 32 mètres de planches. Répondez en entourant « Oui » ou « Non ».

Tracé de la bordure	En utilisant ce tracé, peut-on réaliser la plate-bande avec 32 mètres de planches ?
Tracé A	Oui / Non
Tracé B	Oui / Non
Tracé C	Oui / Non
Tracé D	Oui / Non

L'exploitation de figures planes peu conventionnelles

Apparaissant au plus haut niveau de l'échelle (niveau 6), le problème « Menuisier », présenté ci-contre, amène les élèves à interpréter, en termes de périmètre, diverses représentations dont certaines leur sont familières (figures B et D) et d'autres, moins (A et C).

Le recours au mesurage est rendu très peu fiable, vu la taille des représentations ; la perception immédiate risque également d'aboutir à des conclusions erronées dans certains cas (notamment, les figures B et D semblent assez identiques : elles ont effectivement la même aire, mais pas le même périmètre).

Bien qu'elle fasse appel à des notions élémentaires de géométrie (comparaison de périmètres de figures), cette question (qui implique d'analyser correctement les quatre représentations) n'est pas basique. Seul un raisonnement logique et assez abstrait peut amener à des conclusions valides :

- pour la figure D, le calcul du périmètre aboutit très vite à la conclusion que 32 mètres suffiront ;
- la figure B est également une figure familière. Le calcul du périmètre de cette figure est cependant difficile à établir : un raisonnement logique, basé sur la comparaison des figures B et D, amène à constater que les longueurs sont identiques, mais les largeurs du parallélogramme sont plus grandes que les largeurs du rectangle. Cette figure est donc à rejeter ;
- pour la figure A et la figure C, une comparaison du périmètre de la figure D avec les périmètres des deux figures amène à constater l'égalité des longueurs des contours dans les trois cas.

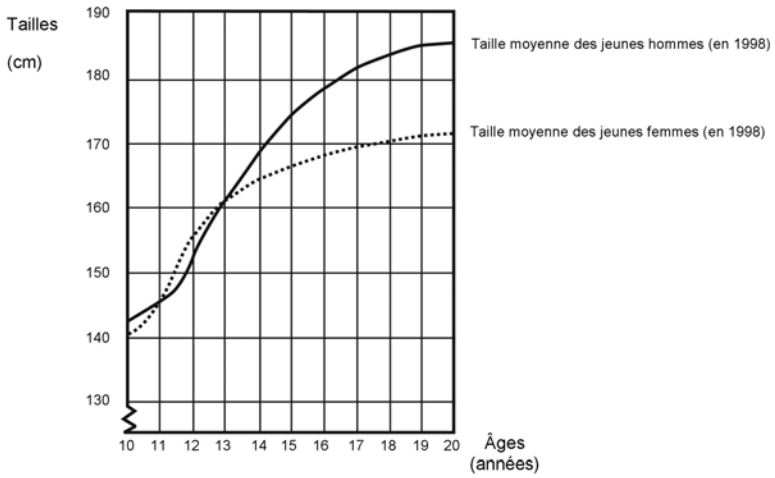
Globalement, cette question est très difficile pour la plupart des élèves (19 % de réussite). On constate que les difficultés sont moins importantes mais conséquentes malgré tout pour la figure D (60 % en moyenne des élèves parviennent à interpréter correctement cette figure) et culminent pour les schémas A et C (où la réussite est proche de 50 %, ce qui correspond à celle que l'on pourrait obtenir lors d'un choix aléatoire).

Les erreurs s'expliquent en général par des choix erronés dans l'un ou l'autre cas : 66 % des élèves ont bien analysé au moins deux des figures. Peu d'élèves omettent de répondre à la question (ils sont 4 % dans ce cas, et cette proportion varie peu en fonction des années et des filières d'études).

CROISSANCE

Les jeunes deviennent plus grands

La taille moyenne des jeunes hommes et des jeunes femmes aux Pays-Bas en 1998 est représentée par le graphique ci-dessous.



Question 1 :

Depuis 1980, la taille moyenne des jeunes filles de 20 ans a augmenté de 2,3 cm, pour atteindre 170,6 cm. Quelle était la taille moyenne des jeunes filles de 20 ans en 1980 ?

Réponse : ....cm

Question 3 :

Expliquez comment le graphique montre qu'en moyenne, la croissance des filles est plus lente après 12 ans.

....

....

....

Question 2 :

D'après ce graphique, pendant quelle période de leur vie les jeunes filles sont-elles, en moyenne, plus grandes que les jeunes hommes du même âge ?

....

....

II.2.3. Variations et relations

Les fonctions, qui constituent un des éléments centraux de ce domaine majeur, sont largement exploitées dans les cours de mathématiques. Dans l'enseignement de transition, l'étude des fonctions du premier et du second degré apparaît comme un des objectifs prioritaires en troisième et quatrième années. Les fonctions sont également abordées dans l'enseignement primaire et au premier degré de l'enseignement secondaire mais de façon plus informelle, dans diverses activités, comme notamment lors de la recherche de régularités dans des suites de nombres ou lors de l'exploitation de situations proportionnelles.

Les questions présentées ici envisagent l'exploitation de deux représentations de relations (graphique et tableau de nombres), ainsi que les démarches des élèves face à la lecture et à l'interprétation de ces deux supports.

L'exploitation d'un graphique

La situation « Croissance », présentée ci-contre, comporte trois questions.

- La première question est un problème arithmétique ne requérant pas l'utilisation du graphique. La difficulté principale consiste ici à traduire le texte en une opération soustractive. Ce problème relève du niveau 2 de l'échelle. La majorité des élèves (73 %) aboutissent à une réponse correcte (168,3 cm). En 3^{e} année de la filière qualifiante, la réussite à cette question est proche de 50 %. Ce taux assez faible s'explique par des omissions (environ 25 %) ou par des erreurs. En effet, une analyse superficielle du petit texte peut induire une opération erronée : le terme « a augmenté » peut induire l'idée d'une addition, alors que l'opération attendue est une soustraction.
- Les deux autres questions nécessitent de prendre en compte des éléments du graphique. Pour résoudre ces problèmes, il s'agit d'interpréter deux affirmations : *la croissance des filles est plus lente après 12 ans* (question 3) et *les jeunes filles sont en moyenne plus grandes que les jeunes garçons du même âge* (question 2), en référence aux deux courbes présentées. Cela peut se réaliser de la façon suivante : *Après 12 ans, la pente de la courbe des filles est moins élevée qu'avant* » (question 3) et *La courbe des filles est au-dessus de la courbe des garçons* (question 2). Les deux questions se distinguent toutefois par le type de communication de la solution attendue : une argumentation est nécessaire dans un cas (question 3, où le point est accordé si l'argumentation fait référence à l'atténuation de la pente de la courbe après 12 ans) et pas dans l'autre (question 2, où la réponse attendue est l'intervalle « entre 11 et 13 ans »), ce qui peut en partie expliquer qu'elles ne se situent pas au même niveau sur l'échelle de performances (la question 3 relève du niveau 4 et la question 2, du niveau 3).
  Les pourcentages de réussite à ces deux questions confirment bien la hiérarchie : 65 % de réussite pour la question 2 contre 48 % pour la question 3. Face à cette question, une erreur fréquente consiste à comparer les deux courbes et à justifier ainsi que les filles sont plus petites que les garçons après 13 ans. Des différences de réussite assez importantes se dégagent en fonction des filières et des années d'études : les élèves de 4^{e} année de la filière de transition, pour lesquels cette matière constitue un point important du programme, obtiennent des résultats très satisfaisants dans un cas (plus de 80 % de réussite pour la question 2) et moins probants dans l'autre (environ 66 % pour la question 3). A l'autre extrême, les élèves de la filière qualifiante, pour lesquels cette matière est sans aucun doute moins familière, ont bien du mal à répondre à ces questions (pourcentages inférieurs à 50 % dans tous les cas et omission massive pour la question 3, surtout en 3^{e} année).

LA MEILLEURE VOITURE

Une revue automobile utilise un système de notation pour évaluer les nouvelles voitures et décerner le label de « Voiture de l'année » à la voiture dont la note totale est la plus élevée. Cinq nouvelles voitures viennent d'être évaluées, et les notes qu'elles ont obtenues figurent dans le tableau ci-dessous.

Voiture	Dispositifs de sécurité (S)	Consommation de carburant (C)	Esthétique de la carrosserie (E)	Équipements intérieurs (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Les notes s'interprètent comme suit :

3 points = Excellent.
2 points = Bon.
1 point = Moyen.

Question 1 :

Pour calculer la note totale de chaque voiture, la revue automobile utilise la règle suivante, qui est une somme pondérée des diverses notes obtenues :

$$\text{Note totale} = (3 \times S) + C + E + T$$

Calculez la note totale obtenue par la voiture « Ca ». Écrivez votre réponse dans l'espace ci-dessous.

Note totale de la voiture « Ca » : ....

Question 2 :

Le constructeur de la voiture « Ca » estime que la règle utilisée pour calculer la note totale n'est pas équitable.

Proposez une règle de calcul de la note totale qui permettrait à la voiture « Ca » de gagner.

Votre règle doit inclure chacune des quatre variables. Répondez en complétant par des nombres positifs les quatre pointillés de la formule ci-dessous.

Note totale = ……… S + ……… C + ……… E + ……… T.

L'exploitation d'un tableau de nombres

Deux questions contrastées, issues de la situation « La meilleure voiture », amènent à envisager cette relation décrite sous la forme d'un tableau de nombres.

- La première question, relevant du niveau 2, envisage le calcul d'une valeur numérique d'une expression algébrique (la réponse correcte attendue est ici *15 points*). Elle est réussie par 73 % des élèves, attestant d'une certaine maîtrise de la plupart d'entre eux dans le domaine. Un nombre non négligeable d'élèves de 3e année de la filière qualifiante ne parvient toutefois pas à obtenir la réponse correcte (environ 40 % de réussite) ; ce résultat n'est guère surprenant, dans la mesure où le calcul de valeurs numériques est peu pratiqué à ce niveau de la scolarité. Le problème posé à ces élèves dépasse clairement la simple mise en œuvre d'un algorithme connu.
- A un niveau largement plus complexe (niveau 5), la deuxième question impose de mettre en relation une formule mathématique et les données sous-jacentes : il s'agit tout d'abord d'analyser plus attentivement le tableau afin de repérer les points forts de la voiture « CA ». Il s'agit ensuite de concevoir une procédure mathématique originale (attribuer plus de poids aux points forts de la voiture « CA », procéder par essais-erreurs, …) pouvant aboutir à plusieurs réponses correctes (le seul critère à respecter est que la pondération proposée attribue la victoire à la voiture « Ca »). D'une nature assez peu routinière, ce problème est complexe pour beaucoup (29 % de réussite), quel que soit le niveau d'enseignement envisagé (dans tous les cas, le pourcentage de réussite est inférieur à 50 %). Les omissions (8 % en moyenne) expliquent peu les faibles taux de réussite : au contraire, un nombre important d'élèves a répondu à cette question, mais de façon inadéquate.

CONTRÔLES DE SCIENCES

Question 1 :

A l'école de Mei Lin, son professeur de sciences fait passer des contrôles qui sont notés sur 100.
Mei Lin a obtenu une moyenne de 60 points pour ses quatre premiers contrôles de sciences. Pour son cinquième contrôle, elle a une note de 80 points.

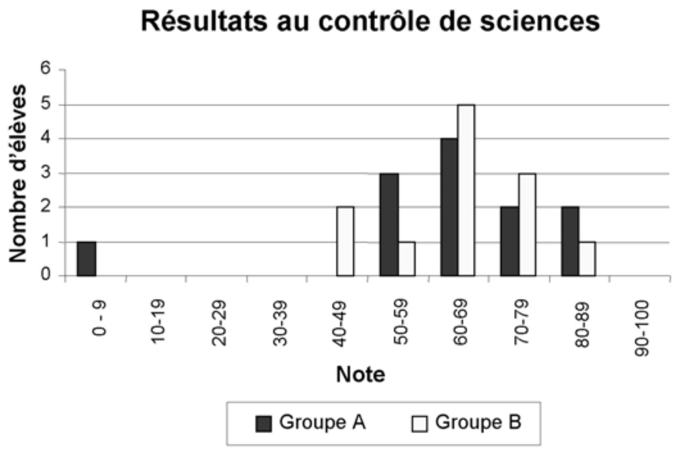
Quelle sera la moyenne des notes de Mei Lin en sciences après les cinq contrôles ?

Moyenne : ....

RESULTATS A UN CONTROLE

Le graphique ci-dessous montre les résultats à un contrôle de sciences obtenus par deux groupes d'élèves, désignés par « Groupe A » et « Groupe B ».

La note moyenne pour le Groupe A est de 62,0 et de 64,5 pour le Groupe B. Les élèves réussissent ce contrôle lorsque leur note est de 50 points ou davantage.



Question 1 :

Sur la base de ce graphique, le professeur conclut que le Groupe B a mieux réussi ce contrôle que le Groupe A.

Les élèves du Groupe A ne sont pas d'accord avec le professeur. Ils essaient de le convaincre que le Groupe B n'a pas nécessairement mieux réussi.

En vous servant du graphique, donnez un argument mathématique que les élèves du Groupe A pourraient utiliser.

II.2.4. Incertitude

Les référentiels de compétences accordent une place importante au traitement de données en général.

- Les « Socles de compétences » mettent l'accent sur l'interprétation et la comparaison de données fournies sous diverses formes (tableaux, graphiques, arbres). Les calculs de pourcentages, moyennes, effectifs et fréquences apparaissent comme « *des outils pour répondre à des questions* » (p. 31) impliquant ce vaste champ de connaissances.
- Dans une perspective comparable, les « Compétences terminales » amènent à un approfondissement tant conceptuel que technique des notions de statistiques et de probabilités, et visent à amener les élèves à « *apprécier l'intérêt et les limites d'une étude statistique ou probabiliste* » (p. 59). Le point de vue critique est ainsi placé au cœur de notre enseignement dans ce domaine.

Cette idée majeure fait donc l'objet d'un enseignement assez continu, qui débute au primaire et se prolonge jusqu'à la fin du secondaire. Plusieurs aspects évalués dans PISA, en particulier le calcul de probabilités et la réflexion critique, font partie des cours de mathématiques du dernier degré de l'enseignement secondaire. Contrairement aux autres idées majeures, des dépassements de programme apparaissent donc dans certaines questions relevant de ce domaine.

Deux situations sont présentées ci-contre. L'une et l'autre envisagent la notion de moyenne.

Un regard peu habituel sur la notion de moyenne

Bien que le calcul de moyenne soit abordé chez nous dès l'école primaire, la résolution correcte du problème « Contrôles de sciences » n'est possible que si l'élève a une compréhension approfondie du concept de moyenne. Cette question relève du niveau 4 (la réponse attendue est ici 64). Globalement, elle s'avère difficile pour nos élèves (44 % de réussite), même si des différences de réussite importantes se dégagent en fonction de la filière d'enseignement (presque 60 % de réussite pour les élèves de 3^e ou 4^e années de la filière de transition, moins de 40 % pour les autres). Dans tous les cas, on constate peu d'omissions (8 % en moyenne) ; une erreur fréquemment commise aboutit à la réponse 70 % (moyenne arithmétique de 60 % et 80 %). Ces élèves n'ont pas adapté leur formule en pondérant les valeurs entre elles : la donnée « 60 % » doit en effet avoir quatre fois plus de poids que la donnée « 80 % ».

La question « Résultats à un contrôle », située au niveau 5 de l'échelle, envisage une matière qui relève davantage des apprentissages réalisés en 5^e et 6^e années. La prise en compte de l'étendue de la dispersion est ici nécessaire pour discriminer les deux groupes, les moyennes étant identiques. Malgré des pourcentages de réussite globalement assez faibles (35 %), plus de la moitié des élèves de 4^e année de la filière de transition aboutit à une argumentation jugée suffisante. Les arguments valables peuvent ici se fonder sur le nombre d'élèves qui a réussi, sur l'influence disproportionnée du résultat obtenu par l'élève le plus faible, ou sur le nombre d'élèves qui a obtenu les scores les plus élevés.
Beaucoup d'élèves omettent de répondre à cette question (plus de 50 % d'omissions dans tous les cas), surtout ceux issus de la filière qualifiante.

III. QUE PEUVENT APPORTER LES ÉPREUVES PISA AUX ENSEIGNANTS ?

III.1. La culture mathématique évaluée dans le programme PISA et l'enseignement des mathématiques dans nos écoles

En axant l'évaluation sur la culture mathématique, PISA confronte principalement les élèves avec des problèmes ancrés dans le monde réel. **Cette perspective est clairement envisagée dans les référentiels de compétences** :

> « *La formation mathématique s'élabore au départ d'objets, de situations vécues et observées dans le réel, de questions à propos de faits mathématiques (…)*
> *C'est par la résolution de problèmes que l'élève développe des aptitudes mathématiques, acquiert des connaissances profondes,… »* (Socles de compétences, 1999, p.23).
>
> *« Une formation mathématique réaliste et équilibrée (...) contribue à asseoir des compétences nécessaires au citoyen pour traiter, par exemple, les questions ordinaires de consommation, les systèmes électoraux, les sondages et enquêtes d'opinions, les jeux de hasard, la lecture de plans et de cartes, les représentations en perspectives, etc. »* (Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques. Humanités générales et technologiques, 1999, p.8).

Il est par ailleurs important de préciser que **les cours de mathématiques de l'enseignement secondaire ne se limitent pas à cette facette de la compétence mathématique**.

Comment dès lors les enseignants peuvent-ils tirer parti de l'éclairage offert par le type d'évaluation proposé par PISA ?

- Pour les professeurs qui enseignent au premier degré ou au deuxième degré de **l'enseignement de transition** (général, technique et artistique), il est clair que le cours de mathématiques ne s'attache pas uniquement à la résolution de problèmes proches de la vie réelle. Une partie essentielle du programme est également consacrée à des mathématiques plus « abstraites » (algèbre, géométrie, trigonométrie,…) où des approches de résolution de problèmes assez différentes de celles évaluées ici peuvent être mises en œuvre (comme par exemple, résoudre des problèmes de généralisation en algèbre).

  Autrement dit, si **être compétent en mathématiques implique de pouvoir résoudre des problèmes,** chacun s'accordera à reconnaître que ceci recouvre au moins deux aspects : **une approche horizontale** (consistant à créer des liens entre les mathématiques et la réalité et donc à résoudre, comme dans PISA, des problèmes proches du monde réel) et une **approche verticale** (consistant à développer des raisonnements mathématiques plus abstraits et donc à résoudre des problèmes se situant au sein même des mathématiques). On peut y retrouver en quelque sorte la dichotomie traditionnelle entre mathématiques appliquées (ou concrètes) et mathématiques pures (ou abstraites).

- Pour les enseignants qui se trouvent dans la filière qualifiante (technique, artistique ou professionnelle), les deux aspects susmentionnés ne doivent pas non plus être négligés, mais il est clair qu'une place plus grande est sans doute accordée aux **mathématiques plus concrètes**. Celles-ci peuvent alors prendre **deux versants complémentaires** : la résolution de problèmes relevant de **la vie courante** (démarche essentielle à tout citoyen – en accord avec la notion de culture mathématique prônée dans PISA) et la résolution de problèmes présentant un **lien plus direct avec les spécificités des professions** auxquelles les élèves se préparent.

En bref,

- la perspective de « résolution de problèmes proches de la vie réelle », telle qu'envisagée dans le programme PISA, est incontestablement un aspect important pour les élèves, et ceci quel que soit le type d'études qu'ils ont choisi ;

mais…

- PISA n'évalue pas tous les aspects des mathématiques jugés importants dans nos différents programmes scolaires.

Si l'on accepte le point de vue défendu dans le programme PISA, tous les jeunes de 15 ans devraient pouvoir « se débrouiller » avec une majorité de situations proposées dans les évaluations. On ne peut accepter qu'une frange non négligeable d'élèves n'atteigne que péniblement les premiers niveaux de l'échelle de compétences définis par PISA. **Il convient donc d'accorder une place à l'enseignement de ce type de problèmes dans tous les cours de mathématiques ; et ceci que l'on s'adresse aux élèves du général, du technique, de l'artistique (de transition ou de qualification) ou du professionnel.** Le niveau de difficulté des problèmes à proposer et le type d'apprentissage spécifique à développer doivent bien entendu s'adapter aux publics concernés. La variété de problèmes proposés dans PISA (cf. les échelles de compétences) devrait permettre à chacun de trouver un matériau adapté pour développer les compétences des élèves en résolution de problèmes.

III.2. Utiliser les problèmes proposés dans PISA comme point de départ d'un apprentissage…

La résolution de problèmes issus de la vie réelle implique la mobilisation intégrée de plusieurs compétences. Mais comment aider les élèves à les acquérir ? Comment **les amener à être plus compétents en résolution de problèmes** ?

L'enseignant peut confronter les étudiants à des problèmes variés en estimant, selon le vieil adage (*c'est en forgeant qu'on devient forgeron*), qu'ils vont apprendre à résoudre des problème en résolvant des problèmes. Cette approche a le mérite d'effectuer un pas dans la direction attendue et on peut déjà escompter des progrès si les situations et les différentes démarches de résolution sont débattues de façon constructive au sein de la classe.

Il nous semble toutefois qu'il est possible de faire un pas de plus en **ciblant les apprentissages sur tel ou tel aspect de la démarche** (la prise d'information dans un tableau, l'interprétation des données ou de la solution,…). Ces apprentissages doivent **s'intégrer dans la démarche globale de résolution de problèmes**.
Concrètement, on peut se focaliser sur la lecture d'informations sur un graphique pour développer cette étape essentielle de la démarche. Pour travailler cette compétence, il ne s'agit pas d'apprendre à lire des graphiques en dehors de toute situation problématique, mais plutôt de proposer aux élèves divers problèmes impliquant la lecture d'un graphique. Il conviendra alors de chercher à comprendre les difficultés qu'ils éprouvent de façon à les aider à les dépasser, les surmonter…

Les problèmes proposés dans PISA peuvent servir de point de départ à de tels apprentissages ; c'est ce que nous tentons d'esquisser ici.

Les échelles de compétences et les exemples associés peuvent aider chaque enseignant à repérer quelques forces et lacunes de ses élèves. Chacun devrait ainsi pouvoir choisir les types de problèmes susceptibles de servir de point de départ à des apprentissages (les problèmes ne devant être ni trop simples, ni hors de portée des élèves).

Les niveaux de l'échelle de compétences sont hiérarchisés et impliquent donc que le processus de mathématisation à mettre en œuvre est d'autant plus complexe que les niveaux sont élevés. Autrement dit, les problèmes situés aux niveaux les plus bas n'impliquent pas nécessairement la mise en œuvre d'un ensemble intégré de compétences relatives aux différentes étapes de la démarche, alors que ceux se situant aux niveaux plus élevés intègrent une variété croissante de compétences.

Globalement, **aux niveaux 1 et 2**, il s'agit principalement de situations familières qui requièrent des interprétations limitées et impliquent l'application directe de connaissances ou de procédures mathématiques élémentaires.
Les élèves qui éprouvent des difficultés face aux problèmes situés à ces niveaux élémentaires souffrent donc de lacunes assez profondes. En effet, parvenir au niveau 2 est considéré comme un résultat minimal dans le programme PISA. En deçà, on peut réellement se questionner sur la capacité des élèves à s'intégrer pleinement (et de manière éclairée) dans une société telle que la nôtre.
En Communauté française de Belgique, près d'un quart des élèves testés (toutes filières et années confondues) sont situés en dessous de ce niveau 2. Précisons qu'ils se situent presque exclusivement dans la filière qualifiante (technique, artistique ou professionnel) ; les résultats

sont particulièrement préoccupants en troisième année où près de la moitié des élèves n'atteignent pas ce niveau de base.
Il conviendrait tout d'abord de chercher à comprendre plus finement ce qui « coince » réellement face à ces problèmes : difficultés de lecture, manque de motivation face à la tâche, lacunes profondes au niveau de la mobilisation (voir même de l'effectuation) de procédures mathématiques de base, etc. Afin de mieux cerner les difficultés, l'enseignant pourrait proposer aux élèves une variété de problèmes des niveaux 1 et 2 (et ceci, dans les différents domaines évalués). C'est seulement lorsqu'il aura cerné spécifiquement les difficultés rencontrées par ses élèves (cela ne concerne peut-être que tel ou tel domaine) qu'il pourra chercher des moyens d'action comme, par exemple, revoir certains concepts mathématiques de base (et ceci même s'ils ne font pas partie explicitement du programme de l'année en cours et sont censés être maîtrisés à ce stade de la scolarité).

A partir du niveau 3, les problèmes se complexifient et impliquent réellement la mise en œuvre d'un processus de mathématisation (ou la mise en œuvre d'une démarche de modélisation mathématique). En effet, à partir de ce niveau, les situations sont moins familières et requièrent des interprétations plus élaborées. Les démarches de résolution peuvent comprendre plusieurs étapes et impliquent souvent la mise en relation de plusieurs informations. La communication des raisonnements et l'argumentation prennent également une importance non négligeable.

Les problèmes **des niveaux 3 à 6** sont de complexité croissante et impliquent la mise en œuvre de compétences variées. Il devient alors intéressant de cibler les apprentissages sur tel ou tel aspect de la démarche (rappelons-le : tout en s'intégrant dans l'ensemble du processus de résolution de problèmes afin de ne pas scléroser les apprentissages). A cette fin, le tableau suivant propose une liste (non exhaustive) de compétences intervenant dans la résolution de problèmes et quelques exemples de situations permettant de développer ces compétences. Chaque enseignant devrait pouvoir y trouver des problèmes adaptés aux compétences de ses élèves, afin de les aider à progresser dans les niveaux de l'échelle et à développer des démarches plus efficaces de résolution de problèmes. Ces apprentissages concernent tous les élèves, quelle que soit la filière qu'ils fréquentent : même si les résultats sont meilleurs dans la filière de transition que dans la filière qualifiante, la proportion d'élèves qui atteint les plus hauts niveaux de l'échelle de compétences n'en reste pas moins relativement basse (pour rappel : seuls 7 % des élèves de 3^{e} année et 34 % des élèves de 4^{e} année atteignent les niveaux 5 et 6 de l'échelle). Précisons encore que le fait d'être situé au niveau 6 par exemple témoigne de la capacité de réussir au moins 50% des questions relevant de ce niveau. On est donc encore loin d'un véritable seuil de maîtrise (fixé habituellement à 80%).

Tableau 2 : Organisation des situations en fonction des compétences qu'elles permettent de travailler**.**

Quelques exemples de compétences à développer	**Quelques exemples de problèmes permettant de développer ces compétences**		
	Identification des problèmes		**Contenu impliqué**
Problèmes simples nécessitant l'identification et l'application du rapport mathématique approprié (niveaux 1 et 2 des différentes échelles)	Taux de change (questions 1 et 2) Escalier Croissance La meilleure voiture Exportations Dés Tournoi de tennis de table	p. 28 p. 36 p. 38 p. 22 p. 32 p. 22	Quantité Espace et formes Variations et relations Variations et relations Incertitude Incertitude Incertitude
Lecture de données dans des tableaux, des graphiques,… (lecture directe, interprétation, mise en relation de diverses informations,…)	Planche à roulettes Réduire les émissions de CO_2 Conversation par internet Croissance Cambriolages Déchets Exportations	 p. 26 p. 36 p. 24 p. 22	Quantité Quantité Variations et relations Variations et relations Incertitude Incertitude Incertitude
Analyse de figures géométriques régulières ou non	Motif en escalier Etagères Dés Dés à jouer Escaliers Menuisier	p. 30 p. 24 p. 32 p. 32 p. 34	Quantité Espace et formes Espace et formes Espace et formes Espace et formes Espace et formes
Recherche de régularités (au départ de l'analyse de figures) ou recherche des différentes combinaisons possibles	Motif en escalier Etagères Planche à roulettes (questions 2 et 3)	p. 30 p. 24	Quantité Quantité Quantité
Exploitation de formules	La meilleure voiture Vol spatial	p. 38	Variations et relations Quantité
Compréhension relative à certains contenus spécifiques	**Notion de moyenne** Contrôles de sciences Résultats à un contrôle **Notion de probabilité** Bonbons de couleur	 p. 40 p. 40	 Incertitude Incertitude Incertitude
Interprétation (de données, de la question, de la solution,…), explication (du raisonnement, de la démarche,…), argumentation,…	Taux de change Croissance Cambriolages Déchets Opinons favorables au président	p. 28 p. 36 p. 24 p. 26	Quantité Variations et relations Variations et relations Incertitude Incertitude

Différents problèmes peuvent être proposés aux élèves en vue de développer un apprentissage relatif aux différentes compétences visées. Les discussions et les débats menés au sein de la classe face aux différentes situations problématiques seront alors essentiels pour faire progresser les élèves dans leur réflexion et pour les aider à développer les compétences impliquées. En ce sens, la description détaillée du processus de modélisation mathématique proposé au début de ce document devrait aider l'enseignant à être attentif aux différentes facettes impliquées dans la résolution de problèmes.

Toutes les situations diffusables accompagnées des critères de correction correspondants sont accessibles sur le site :
http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/A007/index.asp
La plupart d'entre elles ont été présentées dans ce document et sont également répertoriées dans le tableau présenté ci-avant. Des informations plus détaillées peuvent également être consultées sur ce site, en particulier la description des différents niveaux des échelles.

QUELQUES RÉFÉRENCES RELATIVES À LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Cognitive and Technology Group at Vanderbilt (1997). The Jasper-project : Lessons in curriculum, instruction, assessment and professional development. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

CREM (2004). *Pour une culture mathématique accessible à tous. Elaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes*. Nivelles. Ce document est accessible à l'adresse suivante :

http://www.enseignement.be/prof/dossiers/recheduc/recheduc_liste.asp

Demonty, I., Fagnant, A. & Lejong, M. (2004). *Résoudre des problèmes : pas de problème ! (8-10 ans). Guide méthodologique et documents reproductibles.* Bruxelles : De Boeck, Collection Maths et Sens.

Descaves, A. (1992). *Comprendre des énoncés et résoudre des problèmes*. Paris : Hachette.

Fagnant, A. & Demonty, (à paraître). *Résoudre des problèmes : pas de problème ! (10-12 ans).*

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. "Psychologies". P.U. de Rennes.

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique*. Québec: Logiques.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.*), Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 334-370). New York : Macmillan.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.