PISA 2003

PRÉSENTATION DE LA CULTURE MATHÉMATIQUE

Isabelle Demonty, Annick Fagnant,
Ariane Baye, Anne Matoul, Christian Monseur
Coordination : Dominique Lafontaine
Service de Pédagogie expérimentale – Université de Liège

L'option majeure défendue dans PISA est que les mathématiques concernent tout un chacun, et pas seulement une portion réduite de la population qui se destinerait à poursuivre des études spécialisées dans ce domaine, dans les sciences ou les technologies. Le concept de « **culture mathématique** » concerne donc tous les citoyens, c'est-à-dire ici tous les futurs adultes responsables qui devront trouver leur place dans la société.

Cette culture mathématique est définie comme *l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de la vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi.* (Ocdé, 2003, p.27)[1]. Elle implique la capacité des élèves à analyser, raisonner et communiquer de manière efficace lorsqu'ils posent, résolvent et interprètent des problèmes mathématiques dans une variété de situations impliquant des quantités, des concepts spatiaux, probabilistes ou autres.

Pour définir plus précisément cette « culture mathématique » et la façon dont PISA a choisi de l'évaluer, il convient de décrire plus précisément deux aspects centraux du programme : d'une part, le processus de mathématisation (ou la résolution de problèmes au centre du dispositif), et d'autre part, les trois composantes majeures de l'évaluation.

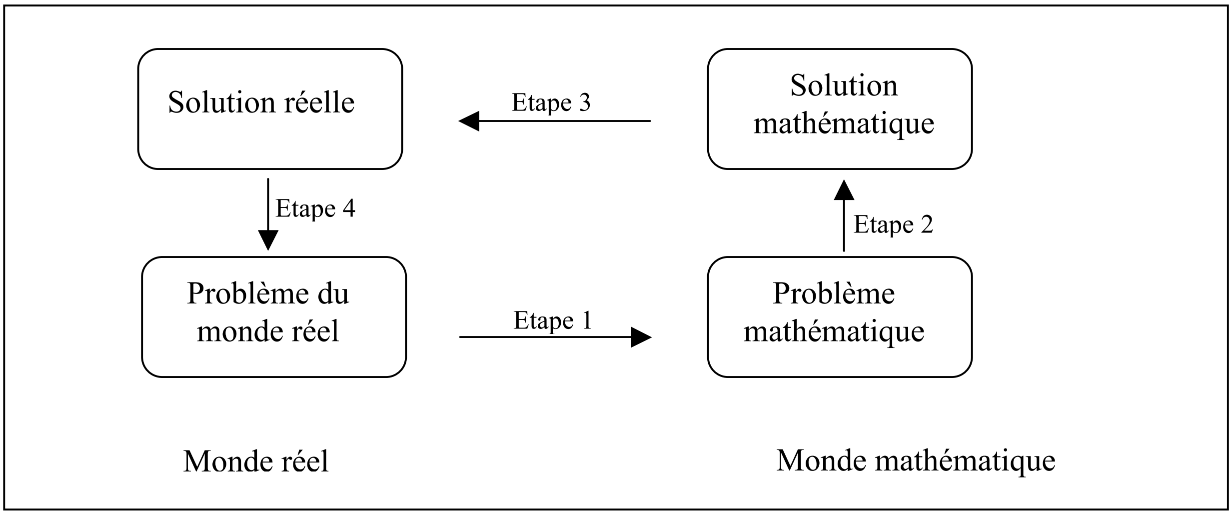
I. Le processus de mathématisation

PISA porte davantage sur la maîtrise des compétences que sur l'acquisition de savoirs et de contenus scolaires. Dans son optique de « culture mathématique », PISA confronte principalement les élèves à des problèmes ancrés dans le monde réel. L'objectif est de voir dans quelle mesure ils peuvent se servir d'un bagage mathématique qu'ils ont acquis au cours de leur scolarité pour résoudre des problèmes variés.

Par le terme de « mathématisation », PISA désigne le processus fondamental appliqué par les élèves pour résoudre des problèmes de la vie courante. Le processus de mathématisation peut se schématiser comme suit :

[1] La définition de la culture mathématique est issue d'un document publié par l'Ocdé (2003). *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, sciences, résolution de problèmes.* Paris :Ocdé.

Figure 2 – Le cycle de mathématisation



Dans cette perspective, la mathématisation apparaît comme un processus permettant d'utiliser les mathématiques pour résoudre des situations issues du monde réel. Deux domaines doivent ainsi être mis en relation : d'une part, le monde réel (envisagé dans le problème de départ et dans la solution réelle qui y est apportée) et, d'autre part, le monde mathématique (dans lequel on retrouve le problème mathématique ainsi que la solution mathématique qui en résulte).

Le processus de mathématisation comporte **différentes étapes qui impliquent la mobilisation d'un vaste ensemble de compétences**.

La **première étape** consiste à transposer le problème issu du monde réel en un problème mathématique. Ce processus implique notamment les activités suivantes[2] :

- *identifier les éléments mathématiques pertinents se rapportant à un problème situé dans la réalité ;*
- *représenter le problème sous une forme différente, en particulier, l'organiser en fonction de concepts mathématiques, et élaborer les hypothèses appropriées ;*
- *comprendre les relations entre le langage employé pour décrire le problème et le langage symbolique et formel indispensable à sa compréhension mathématique ;*
- *identifier des régularités, des relations et des récurrences ;*
- *identifier les aspects qui sont isomorphes par rapport à des problèmes connus ;*
- *traduire le problème en termes mathématiques, c'est-à-dire en un modèle mathématique* (pp.43-44).

[2] La description qui suit est issue d'un document publié par l'Ocdé, (2003). *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, sciences, résolution de problèmes*. Paris : Ocdé.

Au cours de la **deuxième étape**, le processus se poursuit au sein même des mathématiques : il s'agit d'effectuer des opérations sur le problème mathématique posé en vue d'en dégager une solution mathématique. Cet aspect du processus comporte les activités suivantes :

- *utiliser différentes représentations et passer des unes aux autres ;*
- *utiliser un langage et des opérations de nature symbolique, formelle et technique ;*
- *définir et ajuster des modèles mathématiques, les combiner et les intégrer les uns avec les autres ;*
- *argumenter ;*
- *généraliser.*

La (ou les) dernière(s) étape(s) de la résolution d'un problème consiste(nt) alors à réfléchir à l'ensemble du processus de mathématisation et aux résultats obtenus. Il s'agit alors de mener à bien les activités suivantes :

- *comprendre la portée et les limites de concepts mathématiques ;*
- *réfléchir sur les arguments mathématiques mis en œuvre, expliquer et justifier les résultats obtenus ;*
- *communiquer le processus et la solution ;*
- *critiquer le modèle et ses limites.*

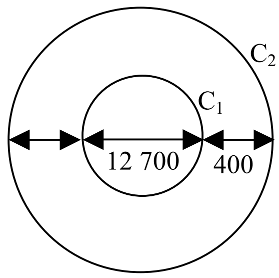
La « confrontation à la réalité » pour interpréter et communiquer les résultats est représentée par les **étapes 3 et 4** sur le schéma.
La validation de l'ensemble du processus et des résultats doit se faire **tout au long de la démarche**, mais est principalement cruciale lors de **l'étape finale**.

Illustrons cette démarche de résolution de problèmes à l’aide du problème suivant, élaboré dans le cadre du programme PISA.

VOL SPATIAL

La station Mir tournait autour de la Terre à une altitude d’à peu près 400 kilomètres. Le diamètre de la Terre est d’environ 12 700 km et sa circonférence d’environ 40 000 km $(\pi \times 12700)$.

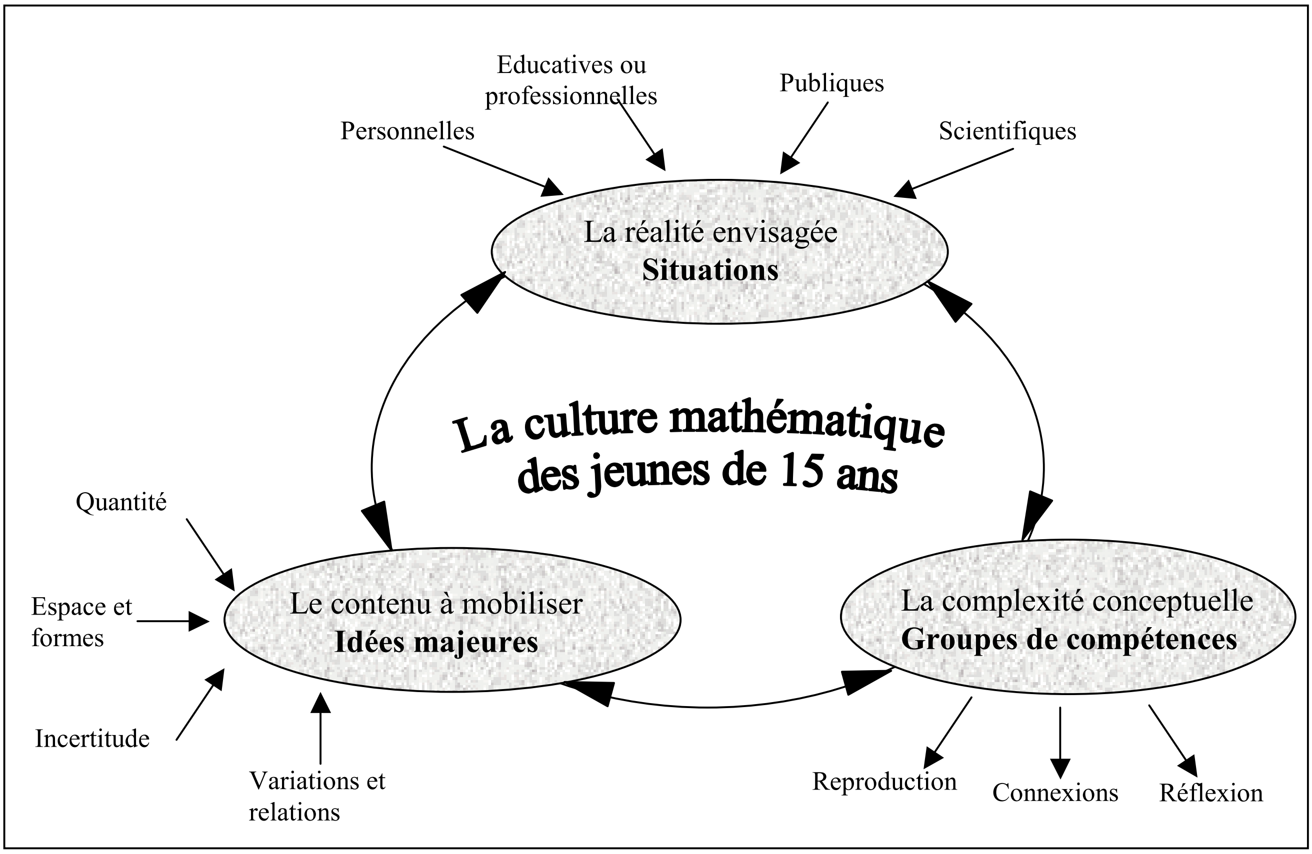
Donnez une estimation de la distance totale parcourue par la station Mir pendant les 86 500 révolutions qu’elle a accomplies lorsqu’elle était sur orbite. Arrondissez votre réponse à la dizaine de millions la plus proche.

Première étape Transformation du problème en un problème mathématique	Un schéma annoté permet de mieux comprendre les relations évoquées dans le problème :  Quelle est la longueur correspondant à 86 500 fois la circonférence du cercle C_2 ?
Deuxième étape Résolution du problème mathématique en vue de dégager une solution mathématique	- Formule pour calculer la circonférence d’un cercle : 2π x rayon - Circonférence de C_2 : 2π x (6350 + 400), soit environ 42 412 km - Distance totale parcourue : 2π x (6350 + 400) x 86 500, soit environ 3 668 594 829 km
Troisième étape Transformation de la solution mathématique en une solution réelle	- Porter un regard réaliste sur la solution mathématique est nécessaire et cette étape du processus est largement facilitée ici (puisque l’énoncé précise qu’il faut arrondir la réponse à la dizaine de millions la plus proche). - La distance totale parcourue est d’environ 367 dizaines de millions de kilomètres.
Quatrième étape Confrontation de la solution réelle au problème de départ	Différentes confrontations sont possibles ici : calculer la distance à partir d’une approximation pour déceler les erreurs de calculs ; vérifier la représentation du problème, et en particulier, s’assurer que le 12 700 correspond bien à la longueur d’un diamètre (et doit donc être divisé en 2 pour appliquer correctement la formule).

2. Contextes, contenus et compétences : trois composantes majeures de l'évaluation

Afin de fournir des données pertinentes sur les niveaux de performances des élèves, leurs acquis et leurs difficultés, le programme PISA a élaboré des questions susceptibles d'évaluer différentes facettes du processus complexe de résolution de problèmes. Le schéma ci-dessous présente les trois composantes majeures prises en compte dans l'élaboration des épreuves.

Figure 3 – Les trois composantes de l'évaluation de la culture mathématique



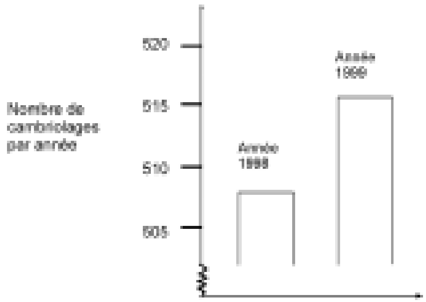
Dans les pages qui suivent, nous présentons plus en profondeur ces différentes composantes. Des exemples de questions permettent d'illustrer quelques considérations développées. Pour donner une vision plus large des unités élaborées, d'autres questions diffusables[3], accompagnées des critères de correction correspondants, seront accessibles sur le site http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/A007/index.asp

[3] Les autres questions de l'épreuve 2003 ne sont pas actuellement diffusables parce qu'elles risquent d'être utilisées lors des prochains cycles de l'étude.

CAMBRIOLAGES

Lors d'une émission télévisée, un journaliste montre ce graphique et dit :

« Ce graphique montre qu'il y a eu une très forte augmentation du nombre de cambriolages entre 1998 et 1999. »



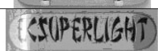
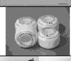
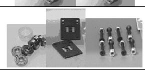
Question 1 :

Considérez-vous que l'affirmation du journaliste est une interprétation correcte de ce graphique ? Justifiez votre réponse par une explication.

PLANCHE À ROULETTES

Éric est un grand amateur de planche à roulettes. Il se rend dans un magasin du nom de SKATERS pour vérifier quelques prix.

Dans ce magasin, il est possible d'acheter une planche à roulettes complète. Ou bien on peut acheter une planche, un jeu de 4 roulettes, un jeu de 2 axes ainsi que les accessoires, et monter soi-même sa planche à roulettes.

Article	Prix en zeds	
Planche à roulette complète	82 ou 84	
Planche	40, 60 ou 65	
Un jeu de 4 roulettes	14 ou 36	
Un jeu de 2 axes	16	
Un jeu d'accessoires (roulements à bille, cales en caoutchouc, écrous et vis)	10 ou 20	

Question 1 :

Éric veut monter lui-même sa planche à roulettes. Quel est le prix minimum et le prix maximum des planches à roulettes à monter soi-même dans ce magasin ?
(a) Prix minimum : ....zeds.
(b) Prix maximum : ....zeds.

Question 2 :

Le magasin propose trois types de planche différents, deux jeux de roulettes différents et deux jeux d'accessoires différents. Il n'y a qu'un seul choix possible pour le jeu d'axes.
Combien de planches à roulettes différentes Éric peut-il monter ?
A 6
B 8
C 10
D 12

Question 3 :

Éric peut dépenser 120 zeds et il veut acheter la planche à roulettes la plus chère qu'il peut obtenir avec l'argent dont il dispose.
Combien d'argent Éric peut-il se permettre de dépenser pour chacun des 4 éléments ? Inscrivez vos réponses dans le tableau ci-dessous.

Élément	Montant (zeds)
Planche	
Roulettes	
Axes	
Accessoires	

a) <u>Les situations et les contextes où se placent les problèmes à résoudre</u>

Cette première composante permet de définir la réalité dans laquelle le problème est posé. Quatre domaines ont été définis : personnel, éducatif et professionnel, public et, enfin, scientifique.

Les quatre domaines se distinguent selon deux dimensions : le degré de familiarité de l'élève avec la situation et le caractère plus ou moins apparent de la structure mathématique du problème.

En ce qui concerne le ***degré de familiarité***, les situations personnelles, éducatives et professionnelles sont assez proches des préoccupations d'un jeune de 15 ans ; les premières se réfèrent directement à des activités quotidiennes des élèves et les secondes relèvent davantage de contextes scolaires ou professionnels. Les situations relevant du domaine public envisagent des contextes plus larges issus de la communauté en général ; les situations scientifiques sont les plus abstraites, elles se rapportent à la compréhension de procédés technologiques, de situations théoriques ainsi que de situations explicitement mathématiques.

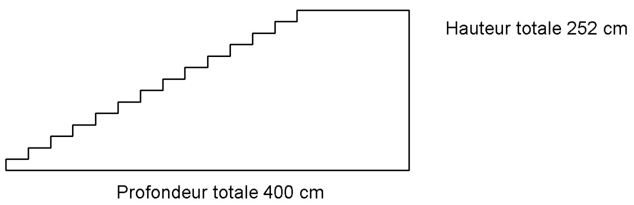
En ce qui concerne la deuxième dimension (***caractère plus ou moins apparent de la structure mathématique***), certains problèmes évoquent des situations très contextualisées alors que d'autres proposent des situations présentées plus directement sous une forme mathématique. Les difficultés engendrées par ces deux types de situations sont de nature différente : dans le premier cas, elles portent principalement sur la transposition du problème réel en un problème mathématique ; dans le deuxième cas, c'est sans doute au sein même du processus mathématique à mettre en œuvre que le nœud du problème se situe.

Les deux situations ci-contre permettent d'illustrer cette première composante de l'épreuve. La situation « Planche à roulettes » relève du domaine personnel et la situation « Cambriolages » est quant à elle classée dans le domaine public.

- Elles se distinguent effectivement par le degré de familiarité d'un jeune de 15 ans avec le sujet, l'une étant bien davantage liée à la culture et aux préoccupations des adolescents que l'autre.
- Quant au caractère plus ou moins apparent de la structure mathématique du problème, les situations sont également contrastées : la situation « Cambriolages » comprend un support mathématique à critiquer. La difficulté de la question relève donc de l'interprétation du graphique et en ce sens, elle peut être qualifiée de plus mathématique que l'autre (trois types d'arguments peuvent être proposés ici : seule une partie limitée du graphique est montrée, le pourcentage d'accroissement est très faible ou il faudrait des indications sur les tendances au cours du temps pour pouvoir émettre un jugement pertinent). En revanche, la situation « Planche à roulettes » est très contextualisée, et la structure mathématique du problème est dès lors moins aisée à percevoir : la première question implique de sélectionner les informations utiles dans le tableau et d'effectuer une addition élémentaire (le prix minimum est 80 zeds et le prix maximum, 137 zeds) ; la deuxième question impose de réaliser des combinaisons (il y a en tout 12 combinaisons différentes) et la troisième question nécessite l'élaboration d'un raisonnement peu conventionnel (il dépensera 65 zeds pour la planche, 14 zeds pour les roulettes, 16 zeds pour les axes et 20 zeds pour les accessoires).

ESCALIER

Le schéma ci-dessous représente un escalier de 14 marches, qui a une hauteur totale de 252 cm



Question 1 :

Quelle est la hauteur de chacune des 14 contremarches ?

Hauteur : = ...cm.

b) __Les groupes de compétences__

Pour développer le processus de mathématisation dans une variété de situations, il est nécessaire de disposer d'un grand nombre de compétences (cf. point I.2.1) Toutes ces compétences interagissent largement lorsqu'on est confronté à un problème à résoudre, certaines étant néanmoins plus centrales ou plus périphériques selon les situations rencontrées. Autrement dit, même si les compétences ne peuvent (et ne doivent) être complètement isolées pour être évaluées, il est possible de proposer des questions qui mettent l'accent de manière plus ou moins pointue sur tel ou tel aspect.
C'est dans cette perspective qu'il convient de comprendre les trois groupes de compétences définis par PISA et présentés ci-après.

Le groupe « reproduction »

Dans ce groupe de compétences, les problèmes proposés sont assez familiers aux élèves. Ils requièrent principalement la reproduction de connaissances acquises : restitution de faits, représentation élémentaire de problèmes, mise en œuvre d'une démarche mathématique connue. Résoudre ces problèmes consiste donc souvent à exécuter des opérations mathématiques de routine et à reproduire des acquis mathématiques dans des situations dépouillées, comme l'illustre la situation « Escalier » présentée ci-contre.

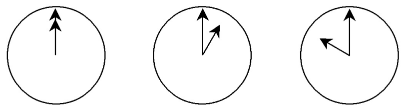
- La réussite à ce problème implique la mise en œuvre d'une opération de division. Tant le support visuel que le texte comportent les données utiles à la résolution du problème (252 cm et 14 marches). La solution mathématique ne demande pas d'interprétation par confrontation au monde réel : il suffit d'indiquer le nombre obtenu comme résultat de la division (18) ; l'unité est déjà fournie.

Le groupe « connexions »

Dans ce groupe de compétences, la distance séparant le problème mathématique du problème réel est plus importante. Les problèmes à résoudre, même s'ils impliquent des notions familières, ne sont plus routiniers : des connexions doivent par exemple être réalisées au niveau de la traduction du problème en un problème mathématique (il s'agit alors de mettre en relation diverses représentations d'un problème) et au niveau de la résolution proprement dite du problème (ce qui peut nécessiter l'intégration de diverses procédures mathématiques).

CONVERSATION PAR INTERNET

Mark (de Sydney, en Australie) et Hans (de Berlin, en Allemagne) communiquent souvent entre eux en utilisant le « chat » sur Internet. Ils doivent se connecter à Internet au même moment pour pouvoir « chatter ».
Pour trouver une heure qui convient pour « chatter », Mark a consulté un tableau des fuseaux horaires et a trouvé ceci :



Question 1 :

Lorsqu'il est 19h00 à Sydney, quelle heure est-il à Berlin ?
Réponse : ....

Question 2 :

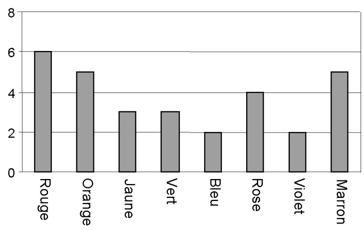
Mark et Hans ne peuvent pas « chatter » entre 9h00 et 16h30 de leur heure locale respective, parce qu'ils doivent aller à l'école. Ils ne pourront pas non plus « chatter » entre 23h00 et 7h00 parce qu'ils seront en train de dormir.

Quel moment conviendrait à Mark et Hans pour « chatter » ? Inscrivez les heures locales dans le tableau.

Lieu	Heure
Sydney	
Berlin	

BONBONS DE COULEUR

La mère de Robert lui permet de prendre un bonbon dans un sachet. Robert ne peut pas voir les bonbons. Le nombre de bonbons de chaque couleur qu'il y a dans le sachet est illustré dans le graphi-



Question 1 :

Quelle est la probabilité que Robert prenne un bonbon rouge ?
A 10 %
B 20 %
C 25 %
D 50 %

Le groupe « réflexion »

C'est dans le troisième groupe que la distance entre le problème réel et le problème mathématique est la plus importante : tant la phase de définition du problème mathématique que celle d'interprétation de la solution mathématique doivent faire l'objet d'une réflexion élaborée. Dans le développement de ce raisonnement approfondi, des capacités de modélisation, d'argumentation, d'abstraction et de généralisation doivent être mises en œuvre.

La situation « Conversation par internet » illustre deux types de compétences, l'un relevant du deuxième groupe de compétences (question 1) et l'autre, du troisième groupe de compétences (question 2).

- La réussite à la question 1 implique une phase de représentation du problème qui amène à mettre en relation certaines informations présentées sous forme de texte et celles fournies par les horloges. La résolution du problème mathématique et la solution (10h00) découlent assez logiquement de la mise en relation des diverses données importantes du problème.

- Quant à la question 2, elle s'avère plus difficile pour diverses raisons : la mise en évidence des différentes contraintes, ainsi qu'une traduction mathématique de ce qu'elles impliquent sont indispensables pour dégager une solution mathématique pertinente. La solution doit ensuite être communiquée sous la forme d'un tableau. La confrontation de la solution finale avec le problème peut s'avérer très utile, notamment pour s'assurer que toutes les contraintes ont bien été prises en compte dans la résolution (plusieurs réponses correctes étaient acceptées pour autant que le laps de temps proposé prenne en compte le décalage horaire de 9 heures et qu'il soit situé dans l'un des deux intervalles de temps suivants : Sydney, de 16h30 à 18h00 et Berlin, de 7h30 à 9h00 ou Sydney, de 7h00 à 8h00 et Berlin, de 22h00 à 23h00).

Hiérarchie entre les groupes de compétences ?

Les trois groupes de compétences représentent des niveaux de difficulté conceptuelle relativement hiérarchisés. Cependant, la complexité conceptuelle mise en évidence à travers les groupes de compétences n'est qu'une variable parmi d'autres influençant le niveau de performance des élèves. Par exemple, un problème de type « reproduction » impliquant la mise en oeuvre d'une procédure mathématique particulière peut s'avérer très difficile si la majorité des élèves ne maîtrisent pas cette procédure. C'est le cas pour la question « Bonbons de couleurs » présentée ci-contre.

- La question requiert explicitement le calcul d'une probabilité, matière qui est enseignée de façon formelle dans nos classes au dernier degré de l'enseignement secondaire. Il n'est donc pas étonnant de constater que cette question, d'un niveau de difficulté conceptuelle élémentaire, soit réussie par moins de 50 % de nos jeunes de 15 ans (la réponse correcte est ici la proposition B – 20 %).

c) ***Les contenus mathématiques ou « idées majeures »***

Cette dernière composante envisage la situation évoquée sous l'angle du contenu à mobiliser pour la résoudre. La définition des contenus a été réalisée en fonction des types de problèmes pour lesquels ils ont été créés, et non en fonction de la façon dont ils sont classiquement définis (arithmétique, algèbre, géométrie, …).

Quatre domaines de savoirs (quatre idées majeures) ont ainsi été déterminés.

La quantité

Nombres et grandeurs sont les deux composantes principales de cette idée majeure :

- représenter un nombre sous diverses formes, donner du sens aux opérations arithmétiques de base, effectuer mentalement des opérations ou en estimer le résultat sont autant de facettes du raisonnement quantitatif envisagé ici ;

- appréhender les grandeurs dans leur aspect relatif, analyser des récurrences, rechercher des régularités dans des assemblages de figures, quantifier des situations réelles en utilisant des nombres constituent l'autre facette de ce thème.

L'espace et les formes

Cette idée majeure envisage l'analyse des composantes structurelles des formes et des constructions en vue d'en dégager des similitudes et des différences. Cette perspective est fortement liée à la connaissance de l'espace : l'orientation dans l'espace, les diverses représentations de l'espace sont également largement investiguées ici.

Les variations et les relations

La variation est un concept important qui se manifeste dans un grand nombre de situations. Certaines de ces situations peuvent être modélisées par des fonctions mathématiques simples (fonctions linéaires, exponentielles, périodiques, logistiques). D'autres, en revanche, relèvent de catégories différentes : dans ce cas, l'analyse des données s'avère essentielle pour mieux appréhender la relation envisagée.

La capacité à raisonner en termes de relations et à propos des relations est au cœur de cette idée majeure. Deux éléments clés sont particulièrement exploités ici :

- la variété des représentations envisagées : symbolique, algébrique, graphique, géométrique ou sous forme de tableaux ;

- le passage d'un mode de représentation à un autre : cette flexibilité dans les modes de représentation s'avère essentielle, puisque les diverses représentations peuvent avoir des propriétés spécifiques et servir des objectifs différents.

L'incertitude

La compréhension et la critique de données fournies sous différents supports constituent un aspect essentiel de ce domaine, qui implique deux sujets d'études issus des statistiques et des probabilités : les données et le hasard.

Les quelques questions présentées ci-avant permettent d'illustrer ces quatre idées majeures :

- Quantité : « Vol spatial » et « Planches à roulettes ».
- Espace et formes : « Escaliers ».
- Variations et relations : « Conversation par internet ».
- Incertitude : « Cambriolages » et « Bonbons de couleur ».

3. Comment l'épreuve PISA est-elle construite ?

Les questions d'évaluation ont été construites de façon à couvrir les différentes dimensions décrites ci-avant : mise en œuvre d'un processus de mathématisation face à des questions impliquant différents types de situations, groupes de compétences et idées majeures.

PISA utilise des « unités » qui permettent d'associer plusieurs questions à un même contexte. Ceci permet d'impliquer les élèves dans la situation en leur proposant une série de questions de complexité croissante. Cette manière de procéder permet de concevoir des tâches réalistes, qui reflètent la complexité de la vie courante. Dans cette perspective, les élèves peuvent avoir recours à certaines ressources : des calculatrices et un répertoire de quelques formules mathématiques utiles (théorème de pythagore, aire d'un rectangle, circonférence d'un cercle ou aire d'un disque).

Les questions de l'épreuve recouvrent une variété de formats : questions à choix multiples, questions à réponse brève, questions à réponse ouverte.
Les réponses aux deux premiers types de questions peuvent aisément être encodées de façon informatique. En effet, les premières requièrent de choisir une réponse parmi plusieurs propositions ; les autres demandent une réponse précise, souvent présentée sous forme numérique.
Par contre, les questions ouvertes doivent être codées par des correcteurs expérimentés. Ceux-ci doivent utiliser une grille de correction qui fait appel, dans une certaine mesure, à leur jugement professionnel. Afin de s'assurer de la fiabilité de ces corrections, des codages multiples sont réalisés et des calculs de cohérence entre les différents correcteurs sont effectués.
En Communauté française de Belgique, ce sont des professeurs de mathématiques qui ont réalisé ces tâches de correction.

Le test de mathématiques est réparti le plus également possible entre les quatre idées majeures (*quantité, espace et formes, variations et relations* et *incertitude*) et entre les quatre situations (*personnelle, éducative / professionnelle, publique* et *scientifique*) décrites précédemment. Les proportions d'items associés aux compétences des trois groupes (*reproduction, connexions, réflexion*) sont respectivement de 25 %, 50 % et 25 %. Les trois formats (*questions à choix multiple, questions à réponse brève* ou *question ouverte*) sont représentés de manière équilibrée (à peu près un tiers chacun).

Les épreuves de mathématiques utilisées lors de l'évaluation de PISA 2003 comportent 85 items (soit un total d'environ 210 minutes de test). Ces items sont alors répartis dans treize carnets, avec des recouvrements entre carnets : ainsi, des questions identiques apparaissent dans plusieurs carnets, tantôt en début, tantôt en fin de carnet, afin d'obtenir une information fiable sur les compétences des élèves, tout en évitant à chaque élève de répondre à la totalité des questions. En définitive, chaque élève dispose de deux heures pour compléter un carnet de test (comprenant une majorité de questions de mathématiques, ainsi que quelques questions portant sur les autres disciplines évaluées : lecture, sciences et résolution de problèmes[4]).

La mise au point d'un tel dispositif rend possible l'analyse des réponses des élèves sur base du modèle IRT (*Item Response Theory* - théorie de la réponse à l'item)[5] permettant de positionner sur une même échelle, à l'aide de procédures itératives, à la fois le niveau de compétences de chaque élève évalué dans PISA et la difficulté de chacune des questions :

- la compétence relative de chaque élève peut être estimée en considérant la proportion de questions qu'il a réussies ;
- de même, la difficulté relative des questions peut être estimée en fonction de la proportion d'élèves qui y ont répondu correctement.

Une fois que la difficulté de chaque question est estimée, il est possible d'estimer le niveau de compétence de chaque élève[6]/[7].

---

[4] Comme son nom l'indique, le thème « résolution de problèmes » envisage également la résolution de problèmes, mais dans une perspective transdisciplinaire, dans la mesure où la résolution de ces situations implique chaque fois l'intégration d'informations provenant de diverses disciplines. Par ailleurs, les contenus mathématiques à mobiliser sont d'un niveau très élémentaire.

[5] Pour plus d'informations concernant cette théorie, consulter le document rédigé par Demeuse, M. (2000). *Les échelles de mesure : Thurstone, Likert, Guttman et le modèle de Rasch.* Les Cahiers du Service de pédagogie expérimentale-Note technique.

[6] Cela ne signifie pas que cet élève réussira « à coup sûr » toutes les questions de difficulté inférieure ou égale à sa performance, mais que la probabilité pour qu'il y arrive est élevée.

[7] Des détails plus techniques sur les méthodes utilisées pour estimer le niveau de compétence des élèves et la difficulté des questions sont fournis dans le rapport technique de PISA 2003 (Ocdé, à paraître).

4. Les échelles de compétence

Le modèle statistique utilisé par PISA permet de positionner les questions et les élèves sur une même échelle de compétences. En tout, cinq échelles ont été élaborées pour les mathématiques : quatre sous-échelles, une par idée majeure (quantité, espace et formes, variations et relations et incertitude) et une échelle combinée (globale, reprenant toutes les questions).

Chaque élève ayant participé à l'évaluation de PISA 2003 a été positionné à un niveau de l'échelle en fonction de son niveau de performances, estimé grâce au modèle statistique sur base des réponses qu'il a fournies à l'ensemble des questions qui lui ont été soumises. Un élève situé à un niveau donné a une probabilité de réussir 50 % des questions se situant à ce niveau de l'échelle. Plus précisément, on peut considérer qu'un élève situé au niveau 2, par exemple, est capable de réussir au minimum 50 % des questions situées à ce niveau ; il a une probabilité supérieure à 50 % de réussir les questions situées au niveau 1 et une probabilité inférieure à 50 % de réussir celles situées aux niveaux 3, 4, 5 et 6.

TOURNOI DE TENNIS DE TABLE

Question 1 :

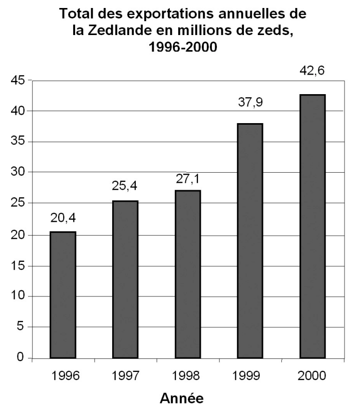
Tom, Robin, Bruno et Didier ont formé un groupe d'entraînement dans un club de tennis de table. Chaque joueur jouera une fois contre chacun des autres joueurs. Ils ont réservé deux tables d'entraînement pour ces matchs.

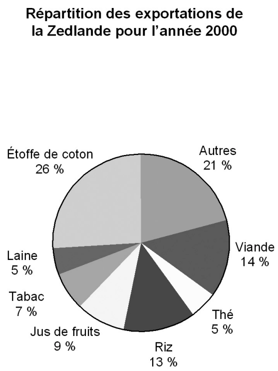
Complétez le programme des matchs ci-dessous en y inscrivant le prénom des joueurs qui disputent chaque match.

	Table d'entraînement 1	Table d'entraînement 2
1er tour	Tom - Robin	Bruno - Didier
2ème tour	…………… - ……………	…………… - ……………
3ème tour	…………… - ……………	…………… - ……………

EXPORTATIONS

Les graphiques ci-dessous fournissent des informations sur les exportations de la Zedlande, un pays dont la devise est le zed.





Question 1 :

Quel était le montant total (en millions de zeds) des exportations de la Zedlande en 1998 ?
Réponse : ....

Que recouvrent les différents niveaux de l'échelle ?

Nous présentons ici trois paliers contrastés de l'échelle combinée, en illustrant chaque fois les propos par des exemples de questions de l'épreuve, accompagnés des taux de réussite en Communauté française.

Aux niveaux les plus élémentaires de l'échelle, les situations sont énoncées dans des contextes relativement familiers. Elles requièrent des interprétations limitées de la situation et impliquent l'application directe de procédures mathématiques élémentaires.

Par exemple, il peut s'agir :

- de lire directement une donnée dans un graphique ou un tableau ;
- d'effectuer un calcul arithmétique simple et direct ;
- d'ordonner des nombres correctement ;
- de lister et de dénombrer des quantités dans une situation combinatoire simple ;
- d'utiliser un taux de change simple.

Les deux exemples présentés ci-contre relèvent tous deux de niveaux élémentaires.

La question « Tournoi de tennis de table » amène à lister les combinaisons possibles dans diverses situations particulières (plusieurs solutions sont possibles ici pour autant que les quatre matchs restants soient correctement décrits et répartis sur les deuxième et troisième tours : par exemple, au deuxième tour, Tom contre Bruno et Robin contre Didier et au troisième tour, Tom contre Didier et Robin contre Bruno).

La question « Exportations » impose de lire directement une information sur un graphique assez familier.

ÉTAGÈRES

Pour construire une étagère complète, un menuisier a besoin du matériel suivant :

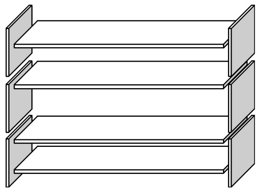
4 planches longues ;

6 planches courtes ;

12 petites équerres;

2 grandes équerres ;

14 vis.



Question 1 :

Le menuisier dispose d'un stock de 26 planches longues, 33 planches courtes, 200 petites équerres, 20 grandes équerres et 510 vis.

Combien d'étagères complètes le menuisier peut-il construire ?

Réponse : ....

DECHETS

Pour un devoir portant sur l'environnement, des élèves ont recueilli des informations sur le temps de décomposition des différents types de déchets que les gens jettent :

Type de déchets	Temps de décomposition
Peau de banane	1–3 ans
Pelure d'orange	1–3 ans
Boîtes en carton	0,5 année
Chewing-gum	20–25 ans
Journaux	Quelques jours
Gobelets en polystyrène	Plus de 100 ans

Question 1 :

Un élève envisage de présenter ces résultats sous forme d'un diagramme en bâtons.

Donnez une raison pour laquelle le diagramme en bâtons ne conviendra pas pour présenter ces données.

Aux niveaux intermédiaires, les situations requièrent des interprétations plus élaborées. Les contextes évoqués sont moins familiers. Il s'agit souvent d'utiliser et de mettre en relation de façon pertinente différentes représentations de la situation, dont notamment des représentations mathématiques plus formelles. Les questions impliquent souvent des raisonnements à plusieurs étapes et peuvent requérir une communication du raisonnement sous la forme d'une explication simple.
Par exemple, il peut s'agir :

- d'interpréter et de mettre en relation plusieurs graphiques ;
- d'interpréter un texte en le mettant en relation avec les données d'un tableau ou d'un graphique ;
- d'isoler les informations pertinentes et d'effectuer des calculs ;
- d'utiliser des conversions d'unités pour calculer une distance sur une carte ;
- d'utiliser le raisonnement spatial et des connaissances géométriques pour effectuer des calculs de distance de vitesse ou de temps.

Les deux questions présentées ci-contre relèvent de niveaux intermédiaires.

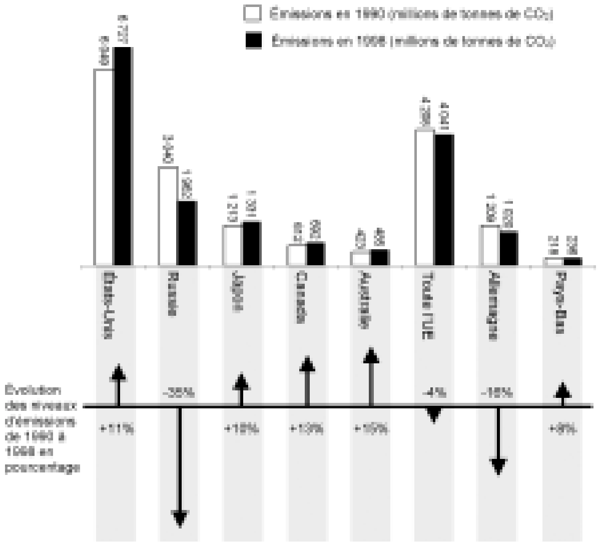
La situation « Etagères » se amène les élèves à élaborer une stratégie de résolution de problèmes : des informations présentées à plusieurs endroits dans l'énoncé doivent être mises en relation et plusieurs résultats d'opérations doivent être comparés (la réponse correcte est ici *5 étagères*).

Dans la situation « Déchets », il s'agit ici de communiquer une argumentation basée sur l'interprétation de données. Assez peu familière pour nos jeunes de 15 ans, cette question concerne leur compréhension approfondie des conditions d'utilisation d'un histogramme. Deux types d'arguments peuvent être avancés : la très grande variance dans les données (comment représenter sur une même échelle « de quelques jours à plus de cent ans » ?) ou la variabilité des données pour certaines catégories (on ne peut pas représenter « de 1 à 3 ans » avec des bâtons).

RÉDUIRE LES ÉMISSIONS DE CO_2

De nombreux scientifiques craignent que la concentration croissante de gaz CO2 dans notre atmosphère entraîne des changements climatiques.

Le diagramme ci-dessous montre, pour plusieurs pays ou aires géographiques, les niveaux d'émissions de CO2 en 1990 (barres claires), les niveaux d'émissions en 1998 (barres foncées), et l'évolution de ces niveaux d'émissions entre 1990 et 1998, exprimée en pourcentage (flèches accompagnées d'un pourcentage).



Question 1 :

Vous pouvez lire sur le diagramme qu'aux États-Unis l'augmentation du niveau d'émissions de CO2 entre 1990 et 1998 a été de 11 %.

Montrez les calculs indiquant comment ce chiffre de 11 % peut être obtenu.

Question 2 :

Manuela a étudié le diagramme et affirme qu'elle a découvert une erreur dans les pourcentages d'évolution des niveaux d'émissions : « La diminution du pourcentage en Allemagne (16 %) est plus élevée que la diminution du pourcentage pour l'ensemble de l'Union Européenne (Toute l'UE : 4 %). C'est impossible, puisque l'Allemagne fait partie de l'UE. »

Êtes-vous d'accord avec Manuela quand elle dit que c'est impossible ? Expliquez votre raisonnement.

Question 3 :

Manuela et Nicolas ont discuté pour savoir quel est le pays (ou l'aire géographique) qui a connu la plus forte augmentation d'émissions de CO2.

Sur la base du diagramme, ils sont arrivés à deux conclusions différentes.

Donnez deux réponses « correctes » possibles à cette question, et montrez comment vous avez obtenu chacune de ces réponses.

OPINIONS FAVORABLES AU PRESIDENT

Question 1 :

En Zedlande, des sondages d'opinion ont été menés pour déterminer la cote de popularité du président en vue de la prochaine élection. Quatre éditeurs de journaux ont chacun mené leur propre sondage d'opinion à l'échelle nationale. Les résultats des quatre sondages sont les suivants :

Journal 1 : 36,5 % (sondage effectué le 6 janvier sur un échantillon de 500 citoyens ayant le droit de vote, tirés au hasard) ;

Journal 2 : 41,0 % (sondage effectué le 20 janvier sur un échantillon de 500 citoyens ayant le droit de vote, tirés au hasard) ;

Journal 3 : 39,0 % (sondage effectué le 20 janvier sur un échantillon de 1 000 citoyens ayant le droit de vote, tirés au hasard) ;

Journal 4 : 44,5 % (sondage effectué le 20 janvier, sur 1 000 lecteurs qui ont appelé la rédaction pour voter).

Quel est le journal qui fournit probablement le résultat le plus fiable pour prédire le taux d'opinions favorables au président si les élections se tiennent le 25 janvier ? Donnez deux arguments à l'appui de votre réponse.

Aux niveaux les plus élevés de l'échelle, les questions font intervenir plusieurs éléments différents et requièrent des niveaux élevés d'argumentation (qui apparaissent souvent sous la forme d'une explication de la solution avancée). Ces situations sont souvent peu familières aux élèves et requièrent des raisonnements élaborés et de la créativité.
Quelques activités typiques relevant de ces niveaux :

- l'interprétation de données complexes et peu familières ;
- l'élaboration d'un modèle mathématique d'une situation réelle assez complexe ;
- la mise en relation de plusieurs informations ainsi qu'une décomposition du problème en plusieurs étapes.

La situation « Réduire les émissions de CO_2 » est une situation assez complexe. Le graphique est peu familier et doit être analysé de diverses façons ; lecture et interprétation sont ici largement investiguées, de même que la communication et l'argumentation des raisonnements :

- la première question envisage la communication d'une technique de résolution. Pour y parvenir, il faut aller sélectionner les informations pertinentes sur le graphique (6049 et 6727) et effectuer les opérations requises : 100 x (6727 – 6049) / 6049 ;
- la deuxième et la troisième questions sont davantage centrées sur l'argumentation critique :
  - pour la deuxième question, il s'agit de fournir une justification correcte (par exemple, la forte diminution en Allemagne est en réalité compensée par des diminutions moins importantes ou par des augmentations - par exemple, celle observée aux Pays-Bas) ;
  - la troisième question, quant à elle, amène à dégager deux types d'augmentation : augmentation absolue la plus élevée pour les Etats-Unis (ils sont passé de 6049 millions de tonnes à 6727 millions de tonnes) et augmentation relative la plus élevée pour l'Australie (+ 15 %).

La situation « Opinions favorables au président » est une situation relativement peu structurée dans le sens où la démarche mathématique à mettre en œuvre est peu apparente. Il s'agit ici de présenter un raisonnement qui nécessite d'interpréter les informations données et de les mettre en relation. Il convient de proposer le journal 3 en présentant au moins deux des quatre arguments suivants : le sondage est plus récent, la taille de l'échantillon est plus importante, l'échantillon a été tiré au hasard, et seuls des électeurs ont été interrogés.