Evaluation externe
en 3^{e} année de l'enseignement secondaire

PISTES DIDACTIQUES

Mathématiques

Mars 2005

Ministère de la Communauté française
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique
Service général du Pilotage du système éducatif

Le document Pistes didactiques a été élaboré par le comité d'accompagnement de l'évaluation externe en mathématiques composé de :

Jacques GREGOIRE, professeur, Florence DEFRESNE et Catherine LECOCQ, chercheurs, en Faculté de Psychologie et des Sciences de l'éducation à l'UCL ;

Martine LEFEBVRE (FELSI), Denise HENNIN (Enseignement de la Communauté française), Monsieur Pol SOUDAN (CPEONS), Françoise VAN DIEREN (FESeC) ;

Carlo BENEDETTI, inspecteur des cours de mathématiques ;

Jean-Paul RAPAILLE, chargé de mission au Service général du Pilotage du système éducatif ;

Sébastien DELATTRE, attaché au Service général du Pilotage du système éducatif.

D/2005/9208/4

Sommaire

Introduction

Ces « Pistes didactiques » ont été élaborées au vu des résultats des élèves à l'épreuve d'évaluation externe en mathématiques, organisée à l'entrée de la troisième année de l'enseignement secondaire en octobre 2004. Tant les enseignants du premier degré que ceux de 3^e et 4^e années de l'enseignement secondaire trouveront dans ce document des suggestions concernant leur enseignement.

Pour élaborer ces propositions didactiques, le groupe de travail responsable de l'évaluation externe en mathématiques est parti des questions les moins bien réussies par les élèves : les réponses de ces derniers ont été analysées de façon plus clinique, afin de repérer les erreurs les plus fréquentes et les plus caractéristiques. Cette analyse des productions erronées des élèves a débouché sur un certain nombre de constats et des hypothèses explicatives ont été avancées, qui ont elles-mêmes abouti à l'élaboration des présentes pistes didactiques

Cette démarche illustre bien la perspective formative dans laquelle s'inscrit l'épreuve : au départ des acquis et des erreurs des élèves, une réflexion s'engage avec en ligne de mire la régulation des actions didactiques. Dans cette optique, s'intéresser aux erreurs est bien plus qu'un constat d'échec : c'est le tremplin sur lequel s'appuyer pour tenter d'améliorer l'action pédagogique au quotidien et, partant, les performances des élèves.

Après un bref rappel des résultats des élèves de l'échantillon et partant des constats formulés, les informations présentées dans ce document sont organisées autour de trois axes majeurs. Le premier souligne l'importance de contrôler et, éventuellement, de retravailler les connaissances censées acquises à l'issue de l'enseignement fondamental. Le second se penche ensuite sur le sens à donner aux nombres. Enfin, un troisième axe met l'accent sur l'acquisition de démarches de recherche ou de résolution de problèmes, au sens large du terme. A travers chacun de ces axes, les erreurs caractéristiques des élèves sont analysées et mises en lien avec des propositions didactiques et ce, dans plusieurs des domaines de compétences visés par l'épreuve d'évaluation externe.

La réflexion menée dans le présent document et les suggestions qui l'accompagnent devraient permettre de développer, dans la continuité, un ensemble harmonieux de compétences sur lesquelles pourront s'appuyer les apprentissages ultérieurs.

1. Bref rappel des résultats des élèves et des classes de l'échantillon

L'épreuve d'évaluation externe en mathématiques, organisée à l'entrée de la 3e année secondaire en octobre 2004, visait à mesurer les acquis des élèves en regard d'un certain nombre de compétences à maîtriser et/ou en construction à l'issue du premier degré de l'enseignement secondaire.

A l'instar des référentiels de compétences, quatre grands domaines relatifs à la maîtrise des mathématiques étaient évalués : les nombres, les solides et les figures, les grandeurs et le traitement des données.

Dans un premier temps, nous rappelons les résultats obtenus par les élèves issus de l'enseignement général et technique, d'une part, et de l'enseignement professionnel, d'autre part. Ces données chiffrées sont ensuite brièvement détaillées en fonction du domaine mathématique ciblé. L'accent est mis sur les compétences dont la maîtrise est essentielle au développement des apprentissages ultérieurs.

1.1. Résultats par domaine

Pour l'ensemble des compétences évaluées par le test, les élèves de l'enseignement général et technique réussissent, en moyenne, 54% des questions. Les élèves de 3e professionnel, quant à eux, obtiennent un score global moyen de 47,5%.

Le tableau suivant présente, de manière synthétique, les pourcentages moyens de réussite pour chacun des domaines mathématiques pris isolément.

Domaine	% moyen de réussite	
	3e général et technique	3e professionnel
Nombres	58%	56%
Solides et figures	45%	67%
Grandeurs	55%	28%
Traitement de données	52%	35%

Pour rappel, deux épreuves différentes ont été proposées aux élèves de l'enseignement générale et technique, d'une part et aux élèves de l'enseignement professionnel, d'autre part. Toute comparaison du niveau de réussite entre les formes d'enseignement devrait donc être exclue. C'est l'ampleur des différences entre les domaines qui doit guider la lecture des résultats.

1.2. Commentaires

A la lecture de ce tableau, on peut constater une disparité importante des résultats obtenus par les élèves en fonction du type de compétences ciblées par les questions et ce, particulièrement dans l'enseignement professionnel. Ce sont les questions relatives aux grandeurs qui posent le plus de difficultés à ces élèves (moins de 30% de réussite), suivies par le traitement des données (35%).

Dans l'enseignement général et technique, les questions relatives aux nombres sont les mieux réussies, avec un pourcentage moyen néanmoins inférieur à 60%. Viennent ensuite les questions relatives aux grandeurs (55%) et au traitement de données (52%). Les questions relatives aux solides et aux figures, quant à elles, donnent lieu à de faibles résultats (45% de réussite).

Détaillons quelque peu les performances des élèves pour chacun des domaines qui ont fait l'objet d'investigation.

- *Nombres*

Les questions dans ce domaine sont généralement bien réussies et portaient, notamment, sur les compétences suivantes : classer des nombres, identifier et effectuer des opérations (en connaître les propriétés, en respecter l'ordre de priorité), utiliser les conventions d'écriture mathématique, appliquer le (sens du) calcul algébrique. De manière générale, les difficultés des élèves touchent aux conventions d'écriture et aux opérations. Pour de nombreux élèves, la compréhension des notions et/ou l'utilisation des fractions, des nombres décimaux et de l'élévation à la puissance reste trop incertaine.

- *Solides et figures*

Les questions relatives aux solides et aux figures portaient sur des aspects variés de la géométrie : figures, espace, transformations du plan, … Ainsi, la plupart des élèves sont capables de tracer des figures simples en lien avec les propriétés des figures et des instruments. A noter que dans l'enseignement général et technique, le degré de complexité et la formulation des questions ont pu avoir un impact négatif sur les résultats.

- *Grandeurs*

Dans des contextes de grandeurs, l'utilisation des nombres et des opérations revêt tout son sens. Ainsi, le calcul et le retrait d'un pourcentage d'un nombre donné restent difficiles et témoignent de la complexité de la notion de pour-cent pour de nombreux élèves. De même, les questions faisant intervenir le calcul du périmètre et de l'aire sont peu réussies par les élèves. L'analyse d'une figure en s'appuyant sur des mesures, sur des décompositions ou encore sur le raisonnement semble être une tâche complexe pour beaucoup. Par ailleurs, les questions d'échelle et de proportionnalité (évaluées ou non à partir d'exemples de la vie quotidienne) restent assez difficiles.

- *Traitement de données*

Au niveau du traitement des données, plus que la simple lecture d'une information c'est la compréhension et la critique de tableaux et/ou graphiques qui sont visées. Globalement, les résultats sont étonnamment faibles malgré le fait que ce type de présentation des données numériques est aujourd'hui d'usage courant tant à l'école que dans la vie quotidienne. La simple lecture d'une information est, de fait, plus facile que la mise en relation de plusieurs informations mais l'usage du simple bon sens fait souvent défaut chez les élèves.

1.3 Constats & pistes

Au-delà de ces constats généraux, chaque enseignant est invité à identifier les difficultés propres aux élèves de sa (ses) classe(s). Il disposera alors d'informations précises quant aux savoirs et savoir-faire déjà maîtrisés par ses élèves et pourra, le cas échéant, baliser son enseignement en fonction des caractéristiques de sa (ses) classe(s).

Les propositions didactiques qui suivent ont été élaborées en ce sens. Trois axes majeurs de l'enseignement des mathématiques y sont ainsi développés, indiquant l'importance de :

- assurer les bases (contrôler et, éventuellement, retravailler les connaissances censées acquises à l'issue de l'enseignement fondamental) ;

- donner du sens aux nombres (explorer les situations, estimer, vérifier, stimuler les échanges et les discussions entre élèves, permettre des procédures originales) ;

- encourager les démarches de recherche ou de résolution de problèmes.

Au sein de chacun de ces axes, les erreurs caractéristiques des élèves sont analysées et mises en lien avec des propositions de séquences d'apprentissage. Un certain nombre de notions ont d'ores et déjà été pointées. Elles feront l'objet d'une attention particulière au travers de l'ensemble du document :

Domaine	Notions
Nombres	- conventions d'écriture - opérations (ordre et propriétés) - fractions, décimaux et pourcentages - élévation à la puissance - résolution de problèmes
Solides et figures	
Grandeurs	- pourcentages - périmètre, aire et volume - échelle et proportionnalité (tableaux)
Traitement de données	- lecture critique de tableaux et graphiques

2. Premier axe : assurer les bases

Les Socles de compétences présentent, de manière systématique, les compétences de base à exercer depuis l'entrée dans l'enseignement fondamental jusqu'au terme du premier degré de l'enseignement secondaire. Partant des productions erronées des élèves, force est pourtant de constater que certaines connaissances mathématiques de base sont encore fragiles à l'entrée de la 3e année secondaire et, ce faisant, entravent les apprentissages ultérieurs.

En effet, l'apprentissage en mathématiques est caractérisé par son caractère intégratif, les nouvelles notions s'élaborant à partir d'autres. Favoriser une complexification progressive des savoirs construits nécessite dès lors de vérifier l'état des connaissances censées acquises et, le cas échéant, de les consolider. Il ne s'agit toutefois pas de reproduire des séries d'exercices antérieures ni de consacrer un temps considérable à la révision systématique des notions déficientes, mais plutôt de réaliser un apprentissage en spirale.

Cette option se fonde sur les trois principes de l'enseignement édictés par J.S. BRUNER dans les années '60 et qui peuvent être résumés comme suit[1] :

✓ **Tout, tout le temps et tout de suite**

L'ensemble des compétences à acquérir par les élèves doit faire l'objet d'une constante sollicitation. En outre, les savoirs et savoir-faire les plus importants doivent faire l'objet d'un apprentissage précoce et être abordés le plus souvent possible par la suite.

✓ **Autrement mais mieux**

Au cours de cet apprentissage permanent, l'élève doit être confronté à des situations de plus en plus diversifiées et de plus en plus complexes, faisant appel à des niveaux de conceptualisation de plus en plus élaborés. Il s'agit de passer progressivement d'une appréhension intuitive des concepts à un degré d'abstraction de plus en plus élevé.

✓ **Réfléchir pour progresser**

Au fur et à mesure de l'intégration des concepts, l'élève doit pouvoir réfléchir à son apprentissage et analyser ses démarches pour les organiser en procédures plus rationnelles.

Les trois principes qui précèdent sont bel et bien à envisager dans une perspective circulaire, voire en forme de spirale, puisque l'on ne revient jamais au point de départ. Sur la base des démarches ou processus mentaux mis en œuvre par l'élève dans les situations d'apprentissage, de nombreuses régulations interviennent en cours de processus et débouchent sur une nécessaire organisation théorique des contenus en vue de l'émergence d'une conceptualisation satisfaisante.

---

[1] Cette synthèse est issue du document « Pistes didactiques » édité en juin 1997 à l'attention des enseignants de 1ère secondaire.

Cette spirale de l'apprentissage n'est cependant pas la même pour tous : elle peut s'arrêter pour certains alors que d'autres sont capables de passer à un niveau d'abstraction supérieur. C'est alors que la différenciation des enseignements prend tout son sens.

2.1. Analyse des erreurs

Dans la perspective d'une évaluation formative et diagnostique centrée sur la maîtrise de compétences, l'observation des productions des élèves est essentielle. Elle permet à l'enseignant d'analyser les stratégies utilisées et/ou les erreurs commises par les enfants et de tenter de comprendre comment ils se représentent le problème.

Dans cette optique, examinons des réponses d'élèves de l'enseignement général et technique aux questions 5, 9, 20, 21A/ et 22 :

- *Quelle est la nature des erreurs commises ?*
- *Quelles démarches les élèves ont-ils mobilisées ?*
- *Quelles conclusions en tirer ?*

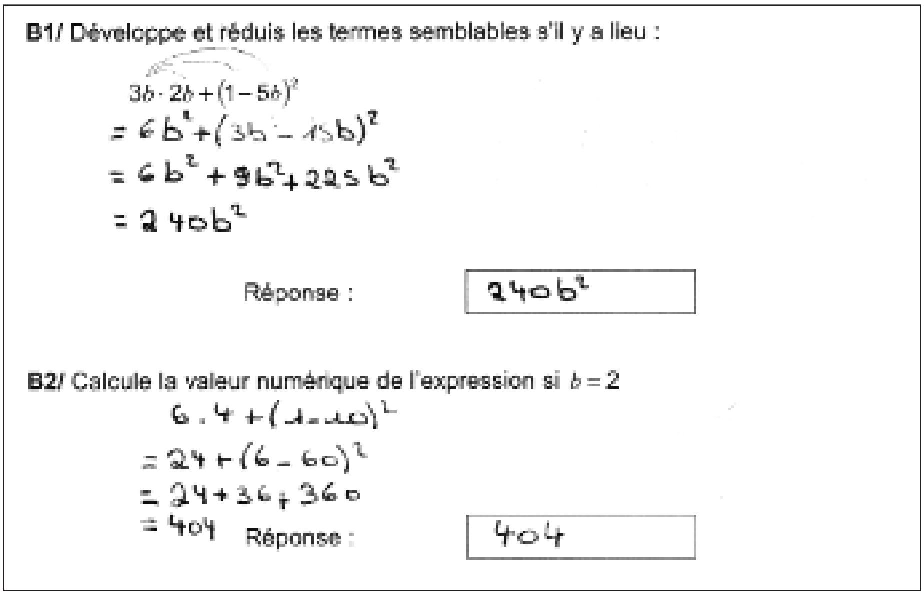
L'analyse qui suit se fonde sur 100 copies d'élèves issus de 5 classes différentes.

2.1.1. Opérations (ordre et propriétés)

Sur le plan des compétences, les questions 5 (produits remarquables) et 9 (utilisation d'une formule) touchent à la compréhension et à l'application du calcul algébrique. Ainsi, dans la question 5, les élèves sont invités à développer et réduire les expressions $(a+5)\cdot(a-5)$ et $3b\cdot 2b+(1-5b)^2$. Dans un second temps, il leur est également demandé de calculer la valeur numérique de l'expression, respectivement si $a=10$ et $b=2$. Le pourcentage moyen de réussite à cette question est de 39%. Pour résoudre la question 9, il suffisait aux élèves de remplacer la vitesse V dans la formule pour obtenir la distance d'arrêt D. Ici, c'est le taux de non-réponse (environ 50%) qui interpelle et qui mène à un pourcentage moyen de réussite relativement faible (21,3%).

Les élèves qui ont réussi les items proposés connaissent les produits remarquables et/ou ont été capables de procéder efficacement aux opérations menant à la réponse correcte. Les erreurs les plus fréquentes, quant à elles, touchent aux connaissances mathématiques de base. On trouve ainsi :

- des erreurs de calcul ou de signe ;
- des erreurs liées aux conventions d'écriture mathématique ;
- des erreurs dans l'ordre de priorités des opérations ;
- des erreurs de distribution ;


B1/ Développe et réduis les termes semblables s'il y a lieu :

$3b \cdot 2b + (1-5b)^2$

$= 6b^2 + (3b - 15b)^2$

$= 6b^2 + 9b^2 + 225b^2$

$= 240b^2$

Réponse : $240b^2$

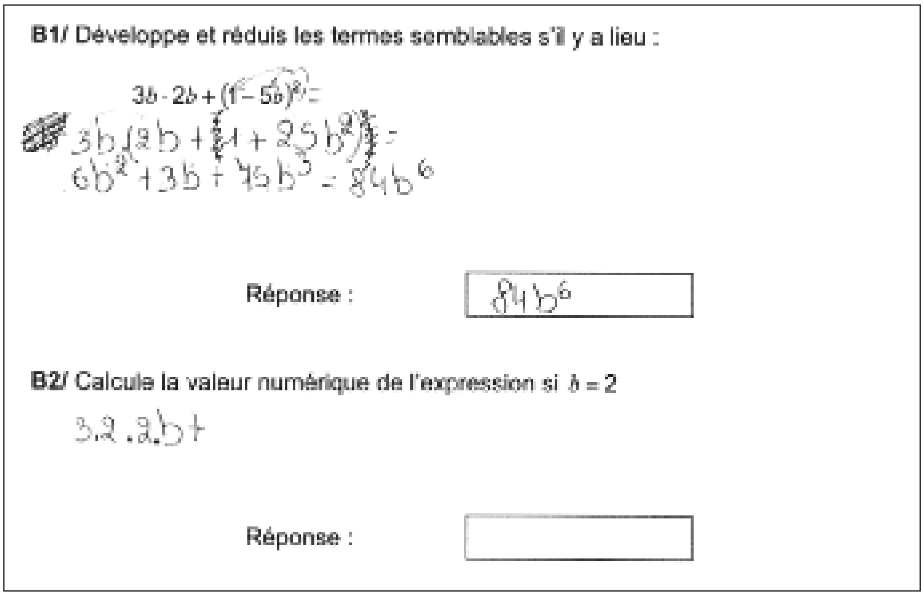
B2/ Calcule la valeur numérique de l'expression si $b = 2$

$6 \cdot 4 + (1 - 10)^2$

$= 24 + (6 - 60)^2$

$= 24 + 36 + 360$

$= 404$ Réponse : 404


B1/ Développe et réduis les termes semblables s'il y a lieu :

$3b \cdot 2b + (1-5b)^2 =$

$3b(2b + 1 + 25b^2) =$

$6b^2 + 3b + 75b^3 = 84b^6$

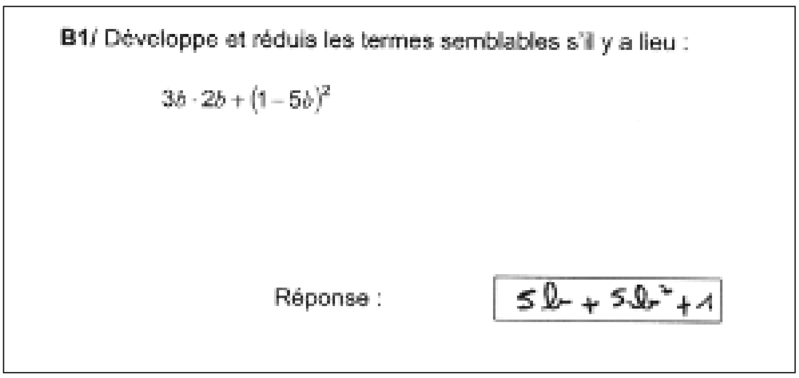
Réponse : $84b^6$

B2/ Calcule la valeur numérique de l'expression si $b = 2$

$3.2.2b +$

Réponse :

- des confusions entre les opérations d'addition et de multiplication ;


B1/ Développe et réduis les termes semblables s'il y a lieu :

$3b \cdot 2b + (1-5b)^2$

Réponse : $5b + 5b^2 + 1$

- des erreurs liées à la compréhension et à l’utilisation de l’exposant.

B1/ Développe et réduis les termes semblables s’il y a lieu :

$$3b \cdot 2b + (1-5b)^2$$

$6b + (1-5b)^2$

$= 6b + (1 - 5b^4 + 25b^2)$

$= 6b - 1 + b^3 + 135b^3$

Réponse : $\boxed{6b + 135b^3}$

Question 9

La distance d’arrêt D d’une voiture en fonction de sa vitesse V est donnée par la formule simplifiée ci-dessous.

(D est exprimée en mètres et V en km/h)

$$D \cong 0{,}005 \cdot V^2 + \frac{V}{6}$$

Complète le tableau :

Vitesse (km/h)	30	90	120
Distance d’arrêt (m)	A/ 5,3m.	B/ 16,9m	C/ 21,4m.

Ecris tous tes calculs.

$D \cong 0{,}005 . 60 + \frac{30}{6}$ -

$D \cong 0{,}005 . 180 + \frac{90}{6}$

$D \cong 0{,}005 . 240 + \frac{120}{6}$

2.1.2. Fractions, décimaux et pourcentages

La question 9, déjà prise pour exemple ci-dessus, nécessite la manipulation par l'élève de nombres fractionnaires et décimaux. Reconnue comme un nombre, comme l'inverse d'un nombre ou comme un quotient, la notion de fraction s'appuie sur les propriétés des opérations numériques ainsi que sur la relation de divisibilité. Les décimaux y sont intimement liés.

Le pourcentage peut également être vu sous l'aspect d'une fraction : 5% = $\frac{5}{100}$ ou sous l'aspect d'un opérateur : 21% de $x = \frac{21}{100}$ de x, comme dans la question 20A/ où on demande à l'enfant de calculer le montant d'une taxe de 21%. Pour rappel, le pourcentage moyen de réussite à cet item est de 34,9%.

Comme en témoignent les résultats à ces questions, les connaissances des élèves restent incertaines et de nombreuses erreurs apparaissent dans :

- les réductions de fractions ;
- la multiplication par un nombre décimal (0,005 dans la question 9) ;
- le calcul du pourcentage

  Exemples. « 21% de » égal diviser par 21, multiplier par 21, diviser par $\frac{21}{100}$, ajouter $\frac{21}{100}$ ou soustraire 21.

2.1.3. Périmètre et aire

Les productions des élèves aux questions 21A/ (calcul de l'aire et du périmètre d'un terrain de 50m sur 30m), 21B/ (calcul de l'aire d'une forme géométrique complexe) et 22 (calcul de l'aire d'un triangle et d'un losange, respectivement inscrits dans un rectangle) frappent par leur diversité et leur richesse.

Les pourcentages moyens de réussite à ces questions sont repris dans le tableau suivant :

	Moyenne de l'échantillon
Question 21	
A1/ Calculer une aire	61,4%
A2/ Calculer un périmètre	68,1%
A3/ Connaître et comprendre les notions d'aire et de périmètre	84,5%
B1/ Prendre les mesures nécessaires pour calculer une aire	47,1%
B2/ Calculer une aire	34,2%
Pourcentage moyen de réussite	**59,1%**
Question 22	
A/ Connaître et comprendre la notion d'aire	53,3%
B/ Idem	49,5%
Pourcentage moyen de réussite	**51,4%**

Qu'il s'agisse de procédures cohérentes ou non, les erreurs les plus fréquentes sont :

- oubli de l'unité de mesure ou unité de mesure incorrecte ;
- erreurs de mesure ;
- erreurs de calcul ;
- connaissance erronée des formules à utiliser ;
- confusion des notions de périmètre et d'aire.

2.2. Pistes didactiques

Repartons sur cette option essentielle qui souligne l'importance de réaliser un apprentissage en spirale, c'est-à-dire par étapes successives et interconnectées. Les notions mathématiques doivent ainsi être vues et revues, enrichies, structurées et restructurées avant d'atteindre un degré d'abstraction généralisable.

En ce sens, remettre certaines connaissances de base sur le métier au moment d'aborder de nouveaux concepts permet d'en découvrir de nouvelles facettes voire de les élaborer davantage. En outre, le sens en vient plus naturellement et les contextes d'apprentissages sont souvent plus riches.

A titre illustratif, l'*ordre de priorités des opérations* prend une place importante dans le travail sur les expressions littérales et le calcul algébrique. C'est en particulier lorsque l'élève doit remplacer les lettres d'une expression par des valeurs numériques que la hiérarchie des opérations prend tout son sens.

Exemple 1 :

Calculer plusieurs valeurs numériques d'une même expression algébrique, telle que $2+3a^2$. Remplacer par $a=2$, $a=-2$ ou encore $a=-1$.

Exemple 2 :

Vérifier si deux expressions visuellement proches sont $=$ ou $\neq$, en remplaçant les variables par plusieurs valeurs numériques.

Vérifie que $3a-3b \;=\; 3(a-b)$*, en remplaçant successivement par* $a=5$ *et* $b=-3$ *puis, par* $a=-1$ *et* $b=7$.

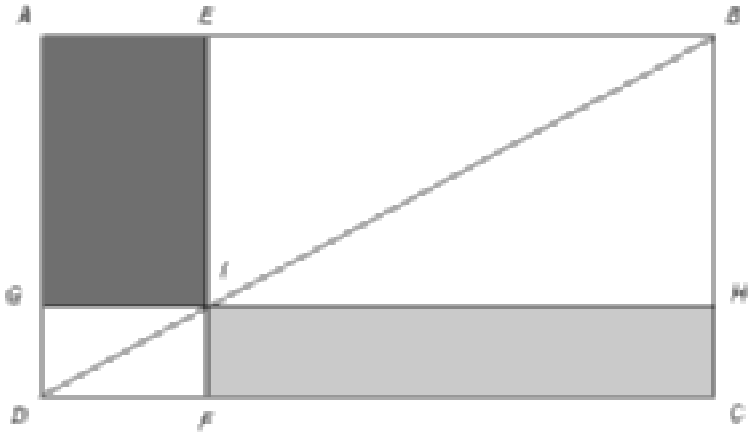
Confronter l'élève à des expressions algébriques simples et relativement proches visuellement permet ainsi de revenir sur le décodage des conventions d'écriture et le respect des priorités des opérations. Ces enjeux apparaissent, notamment, lors l'étude des fonctions du 1er degré et de leurs représentations graphiques.

De même, si le *calcul du pourcentage* d'un nombre s'apprend dès la fin de l'école primaire, des opérations impliquant des pourcentages interviennent occasionnellement au niveau secondaire dans de nombreuses disciplines : les sciences économiques, les sciences humaines, la géographie, la physique, la chimie, les mathématiques, les statistiques… C'est par exemple l'occasion de mettre l'accent sur deux aspects de la notion de pourcentage, à savoir : la comparaison (les pourcentages en tant que rapports) et le calcul (les pourcentages traduits par des coefficients de fonctions linéaires). De nombreuses illustrations et séquences d'apprentissage ont récemment été développées par le CREM[2].

Enfin, il importe que les élèves soient au clair avec les *notions de périmètre, d'aire et de volume* avant d'aborder les quelques grands théorèmes et outils de calcul qui structurent la pensée géométrique. Ainsi, la notion d'aire ne devrait pas être simplement introduite via une série de formules : en procédant par découpages, par décompositions et/ou en développant le raisonnement sur les figures, la notion d'aire comme recouvrement conduit tout naturellement à la démonstration du théorème de Pythagore par « puzzle ».

<u>Exemple 3</u> :

Compare les aires des rectangles coloriés. Les rectangles AEIG et IHCF ont-ils même aire ? Y a-t-il un rectangle qui a même aire que le rectangle AEFD ?



Dans l'impossibilité de calculer les aires en question, les élèves doivent examiner les différentes pièces et repérer des triangles superposables. Ils doivent ensuite écrire l'aire de chaque triangle comme une différence entre des aires de triangles.

aire AEIG = aire ABD – (aire EIB + aire GDI)
aire IHCF = aire BCD – (aire BHI + aire IFD)

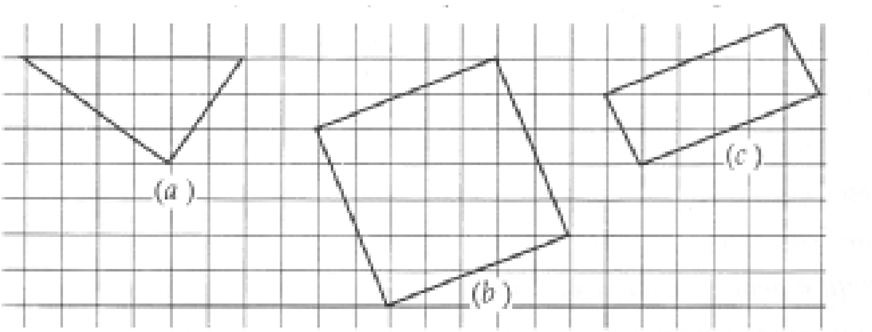
Comme les triangles qui interviennent dans chaque « puzzle » ont même aire, on en déduit que les rectangles AEIG et IACF ont même aire.

---

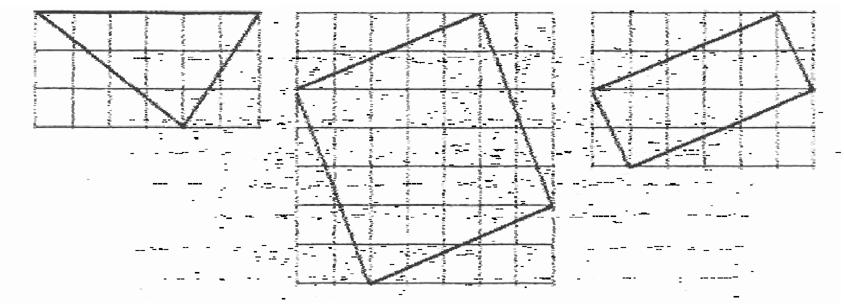
[2] Pour une culture mathématique accessible à tous : Elaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes, Ministère de la Communauté française, CREM, 2004.

Exemple 4[3] :

Calculer l'aire du triangle (a) ; puis les aires des deux quadrilatères (b) et (c).

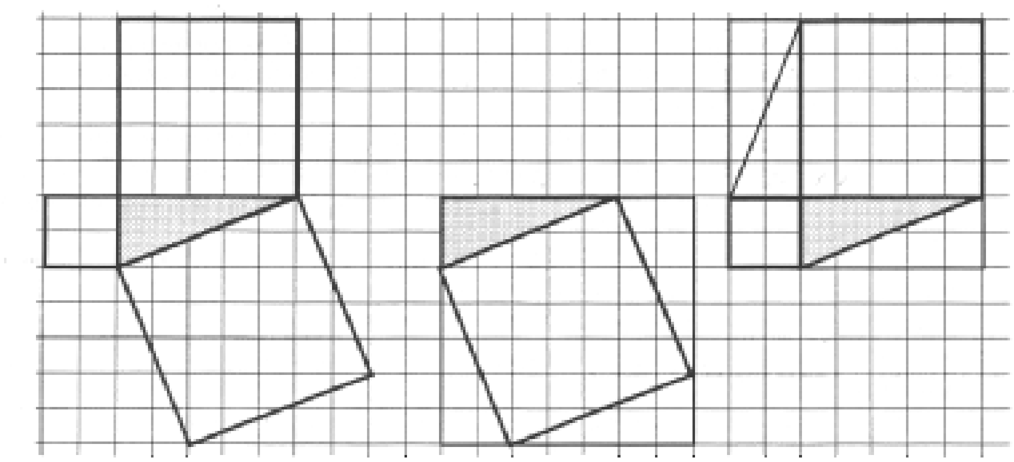


Lorsque les élèves calculent les aires après avoir mesuré côtés et longueurs, ils obtiennent des résultats significativement différents, au moins pour les figures (b) et (c). Tel n'est plus le cas s'ils songent à encadrer chacune des figures dans un rectangle ou un carré, et qu'ils calculent les aires demandées par différence d'aires plus simples à évaluer sur le quadrillage.



[3] Extrait de « Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans : Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques », CREM asbl, 1995.

Des élèves qui ont résolu quelques questions de ce genre accèderont plus facilement que d'autres au théorème de Pythagore et à sa démonstration.



3. Deuxième axe : Donner du sens aux nombres

Comme en témoignent les réponses des élèves aux questions qui leur étaient posées lors de l'évaluation, le sens des nombres en contexte scolaire est souvent mis entre parenthèses. En outre, les élèves ont tendance à ne pas évaluer le caractère plausible de leurs réponses.

Plusieurs recherches ont ainsi montré que les élèves agissent comme s'ils appliquaient un rituel, une routine apprise en classe, routine qui répond à un certain nombre de règles tacites (Verschaffel et De Corte, à paraître). Parmi les règles implicites que les élèves semblent suivre, on retrouve les postulats suivants :

- tous les problèmes présentés par l'enseignant peuvent être résolus et ne peuvent avoir qu'une seule réponse qui doit nécessairement être précise et numérique,

- la réponse doit être obtenue en réalisant une ou plusieurs opérations mathématiques ou en utilisant des formules avec les nombres fournis par le problème,

- le problème verbal contient toutes les informations nécessaires à sa résolution,

- le problème peut être résolu en utilisant les connaissances que l'élève a étudiées au cours de mathématiques.

Une autre croyance partagée par un grand nombre d'élèves est qu'il existe une grande différence entre les problèmes arithmétiques tels qu'ils sont présentés à l'école et le monde réel ; et qu'ils ne doivent donc pas se préoccuper de savoir si les connaissances du monde quotidien sont violées dans les problèmes arithmétiques présentés à l'école (Verschaffel et De Corte, à paraître).

Stella Barouk (1985) a ainsi montré au travers d'une série d'exemples qu'il arrive souvent aux élèves de donner des réponses aberrantes au vu de la réalité : des portes qui mesurent 9 mètres de haut, une femme de 4,50 mètres, … Elle souligne que même les problèmes portant sur la réalité concrète la plus évidente acquièrent, pour certains élèves, le statut de l'irréalité. Elle souligne également que l'élève va vite comprendre que toutes les histoires qui entourent les problèmes proposés en classe ne sont là que pour l'amener à réaliser des additions, des soustractions, des multiplications, …

Un autre exemple a été donné par Verschaffel et De Corte (1994) qui ont proposé à des élèves de l'enseignement secondaire inférieur des problèmes mathématiques pour lesquels si on prend la réalité du contexte, la réponse est discutable.

Exemple : « *Un homme veut une corde assez longue pour l'étendre entre deux mats séparés de 12 mètres, mais il ne dispose que de morceaux de corde de 1,5 mètres de long. Combien de morceau doit-il attacher les uns aux autres pour disposer d'une corde qu'il puisse étendre entre les deux mats ? »*.

Une majorité des élèves interrogés a répondu qu'il fallait 8 morceaux de corde. Seule une petite minorité d'entre eux (environ 17%) a tenu compte des caractéristiques du monde réel, c'est-à-dire du fait qu'il faut nouer les morceaux de corde entre eux, et qu'il n'est donc pas possible de répondre de manière précise à cette question.

Toutes ces croyances et les types d'erreurs qui en découlent sont dus au fait que pour une majorité d'élèves, les mathématiques sont totalement dénuées de sens (Baruk, 1985). Ce manque de sens pour la majorité des élèves aboutit à des comportements que Stella Baruk (1985) qualifie « d'automath », c'est-à-dire le fait que des élèves réalisent des mathématiques de manière automatique sans se poser de questions, qu'ils appliquent des formules apprises en classe sans en comprendre réellement le sens. L'exemple le plus flagrant de cet automatisme a été donné lorsque des élèves du début de l'enseignement secondaire se sont vus proposés le problème suivant : « Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? ». La plupart des enfants interrogés ont donné l'âge du capitaine en additionnant le nombre de moutons et de chèvres.

Inviter les élèves à explorer les situations, à estimer au préalable la réponse attendue et en vérifier ensuite l'exactitude contribue à assurer la cohérence et la consistance des notions. De façon complémentaire, la confrontation des points de vue est source d'enrichissement et débouche souvent sur l'émergence de procédures originales.

3.1. Analyse des erreurs

Au-delà du manque de maîtrise des connaissances de base, l'analyse des productions erronées des élèves de l'enseignement général et technique aux questions 5, 9, 20, 22, 25, 26 et 27 révèle souvent l'absence de bon sens dans la mise en œuvre d'une procédure ou dans la production d'une réponse. En outre, le sens donné aux nombres et/ou aux notions mathématiques peut entraver considérablement l'usage qui en est fait.

3.1.1. Vraisemblance des réponses

Plusieurs questions ont permis de mettre en évidence le fait que certains élèves ne vérifient pas le caractère plausible de leurs réponses. Comme nous le disions plus haut, ils ne se préoccupent pas de savoir si leur réponse paraît possible dans le monde réel.

a. Opérations

Ainsi, dans la question 9, il était demandé aux élèves de calculer la distance de freinage D d'une voiture selon une formule qui leur était donnée : $D \cong 0{,}005 \cdot V^2 + \frac{V}{6}$ (V représentant la vitesse de la voiture).

Suite à des erreurs de calculs, une part importante d'élèves a obtenu des réponses tout à fait impossibles au vu de la réalité. Plusieurs d'entre eux ont, par exemple, indiqué que lorsqu'une voiture roule à 90 ou à 120 km/h, il lui faut plusieurs kilomètres pour s'arrêter. A l'inverse, d'autres élèves ont évalué la distance de freinage à quelques centimètres.

Question 9

La distance d'arrêt D d'une voiture en fonction de sa vitesse V est donnée par la formule simplifiée ci-dessous.
(D est exprimée en mètres et V en km/h)

$$D \cong 0{,}005 \cdot V^2 + \frac{V}{6}$$

Complète le tableau :

Vitesse (km/h)	30	90	120
Distance d'arrêt (m)	A/ 0,05 m	B/ 0,4065 m	C/ 0,1115 m

Ecris tous tes calculs.

$30 \to D \cong 0{,}005 \cdot 30^2 + \frac{30}{6}$

$D \cong 0{,}005 \cdot 30^2 + 5$

$D \cong 0{,}045 + 5$

$D \cong 0{,}050 \cong 0{,}05$

$90 \to D \cong 0{,}005 \cdot 90^2 + \frac{90}{6}$

$\cong 0{,}005 \cdot 90^2 + \frac{45}{3}$

$\cong 0{,}005 \cdot 90^2 + 15$

$\cong 0{,}4050 + 15$

$\cong 0{,}4065$

$120 \to D \cong 0{,}005 \cdot 120^2 + \frac{120}{6}$

$D \cong 0{,}005 \cdot 120^2 + 15$

$D \cong 0{,}005 \cdot 1400 + 15$

$D \cong 0{,}1100 + 15$

$D \cong 0{,}1115$

Question 9

La distance d'arrêt D d'une voiture en fonction de sa vitesse V est donnée par la formule simplifiée ci-dessous.
(D est exprimée en mètres et V en km/h)

$$D \cong 0{,}005 \cdot V^2 + \frac{V}{6}$$

Complète le tableau :

Vitesse (km/h)	30	90	120
Distance d'arrêt (m)	A/ 455	B/ 4065	C/ 5220

Ecris tous tes calculs.

A) $D \cong 0{,}005 \cdot 900 + \frac{30}{6} = 0{,}005 \cdot 900 + 5$

B) $D \cong 0{,}005 \cdot 8100 + \frac{90}{6} = 0{,}005 \cdot 8100 + 15$

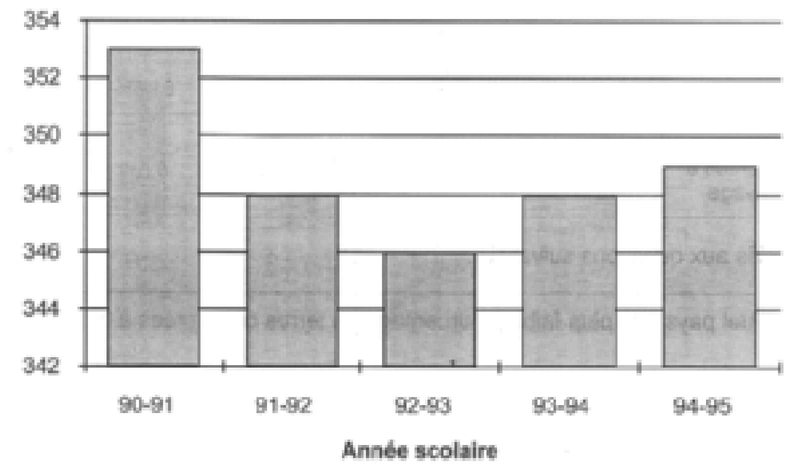
C) $D \cong 0{,}005 \cdot 10400 + \frac{120}{6} = 0{,}005 \cdot 10400 + 20$

b. Traitement de données

Dans la question 27, les élèves étaient amenés à interpréter un graphique représentant l'évolution du nombre d'élèves dans l'enseignement secondaire de la Communauté française. Ne tenant pas compte du fait que graphique était exprimé en milliers d'élèves, un nombre important a répondu qu'il y avait quelques centaines d'élèves dans l'enseignement secondaire de la Communauté française.

Question 27

Evolution du nombre d'élèves (en milliers) de l'enseignement secondaire en Communauté française



Réponds aux questions suivantes :

A/ Combien y avait-il d'élèves dans l'enseignement secondaire durant l'année scolaire 91-92 ?

348 élèves

B/ Combien y avait-il d'élèves dans l'enseignement secondaire durant l'année scolaire 94-95 ?

348 élèves

C/ Durant l'année scolaire 92-93 combien d'élèves y avait-il en moins par rapport à l'année scolaire 90-91 ?

60 élèves

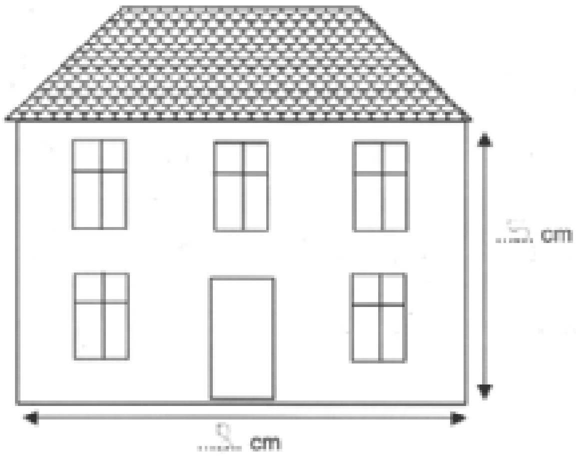
D/ Entre 92-93 et 94-95, la population scolaire est en :
décroissance – stagnation – croissance (Entoure la bonne réponse)

c. Echelle et proportionnalité

Dans la question 26, les élèves devaient calculer la hauteur et la longueur d'une maison à partir d'un dessin reproduisant la maison à une échelle donnée. Suite à des erreurs dans les unités de mesures, plusieurs élèves ont estimé la hauteur et la longueur de la maison à plusieurs centaines de mètres.

Question 26

Voici le dessin d'une maison. **L'échelle** utilisée pour la représenter est de **1/120**.



A/ Mesure et indique les dimensions de la façade de la maison sur le dessin.

Quelles sont **les dimensions réelles** de cette façade?
(N'oublie pas d'indiquer les unités de mesure)

B/

Largeur réelle : 120 × 8 cm = 980 m

C/

Hauteur réelle : 120 × 5 cm = 600 m

3.1.2. Application automatique de procédures

Comme nous le disions précédemment, certains élèves ont tendance à répondre aux questions de manière automatique en appliquant une routine apprise en classe.

a. Pourcentages

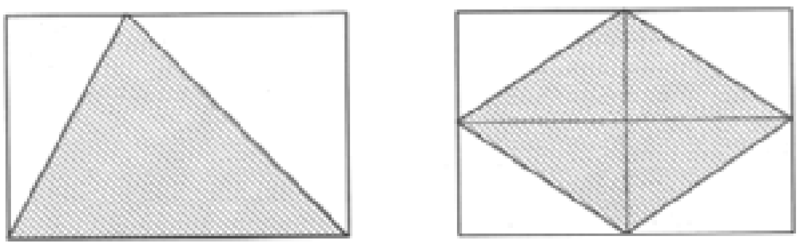
La question 20A/ a trait au calcul du pourcentage, en l'occurrence le montant d'une taxe de 21%. Hormis les erreurs de calcul et/ou le manque de maîtrise des connaissances de base, bon nombre de procédures erronées consistent à calculer non pas uniquement le montant de la taxe mais le prix de la bicyclette TTC. Il s'agit là vraisemblablement d'une procédure automatisée selon laquelle les élèves ont l'habitude de fournir le prix de revient de l'objet soumis à une taxe ou bénéficiant d'une réduction.

b. Périmètre et aire

Dans la question 22, il était demandé aux élèves de calculer l'aire d'un triangle et d'un losange respectivement inscrits dans un rectangle dont l'aire était donnée. Les élèves pouvaient trouver la réponse en divisant simplement l'aire du rectangle par 2. Toutefois, la plupart des élèves ont tenté d'appliquer les formules classiques de calcul de l'aire d'un triangle et d'un losange. Ce type de réaction est sans doute dû au fait qu'en classe, les élèves ont appris que lorsqu'on leur demande de calculer l'aire, il y a toujours une formule à appliquer. Ils ne cherchent donc pas s'il existe d'autres moyens plus simples de parvenir à la réponse.

Question 22

Voici deux rectangles. Dans celui de gauche, on a dessiné un triangle et dans celui de droite un losange. L'aire du rectangle est de 24 cm^2.



A/ Quelle est l'aire du triangle?

(...) = 6cm² · 4cm² = 24cm²

B/ Quelle est l'aire du losange?

$\frac{\text{petite diagonale} \cdot \text{grande diag.}}{2}$

4cm² · 6cm² = 24cm² : 2 = 12cm²

3.1.3. Vérification et validation des réponses

a. Calcul algébrique et opérations

Dans la question 5, les élèves devaient développer puis réduire les termes semblables de deux équations contenant un produit remarquable : $(a+5)\cdot(a-5)$ et $3b\cdot 2b+(1-5b)^2$. Il leur était ensuite demandé de calculer la valeur numérique de ces équations en remplaçant l'inconnue par un chiffre donné. Les élèves avaient donc la possibilité de vérifier si le développement des équations était correct, et inversement. Cependant, aucun des élèves ayant commis des erreurs dans le développement et la réduction des équations ne semble avoir vérifié son développement en remplaçant l'inconnue par le chiffre donné à la fois dans l'équation de départ et dans la réponse obtenue suite au développement.

Question 5

A1/ Développe et réduis les termes semblables s'il y a lieu :

$(a+5)\cdot(a-5)$

$= a - a \cdot 5 - 5$

$= 0 \cdot 0$

$= 0$

Réponse : 0

A2/ Calcule la valeur numérique de l'expression si $a = 10$

$= (\overset{15}{10 + 5}) \cdot (\overset{5}{10 - 5})$

$= 15 \cdot 5$

$= 75$

Réponse : 75

B1/ Développe et réduis les termes semblables s'il y a lieu :

$3b \cdot 2b + (1-5b)^2$

$= 6b + (1-5b)^2$

$= 6b + 1 - 25b$

$= 6b - 25b + 1$

$= -19b + 1$

Réponse : $-19b + 1$

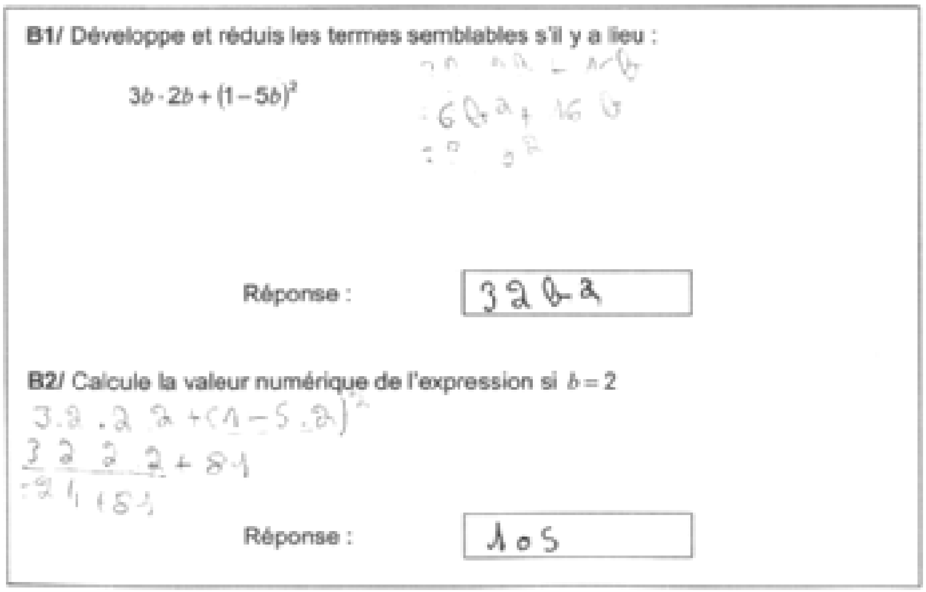
B2/ Calcule la valeur numérique de l'expression si $b = 2$

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + (1 - 5 \cdot 2)^2$

$= 24 + (1 - 100)$

$= 24 - 99$

$= -75$ Réponse : -75


B1/ Développe et réduis les termes semblables s'il y a lieu :

$3b \cdot 2b + (1 - 5b)^2$

Réponse : 32b2

B2/ Calcule la valeur numérique de l'expression si $b = 2$

3.2.2 2 + (1 − 5.2)²

Réponse : 105

b. Proportionnalité

On peut également constater que les élèves donnent parfois une réponse ne correspondant pas à la question posée. Ce faisant, ils valident une réponse erronée.

Par exemple, la question 25 amenait les élèves à calculer différents types de réponses. La distance parcourue par un train en 3 heures étant fournie, il leur était demandé de calculer soit le temps mis pour parcourir une certaine distance, soit la distance parcourue en un certain temps. Leurs réponses devaient, dans un premier temps, apparaître dans un tableau pour ensuite être réutilisée en réponse aux questions formulées.

Outre le fait que peu d'élèves établissent la correspondance entre le tableau de proportionnalité et les questions formulées ensuite, plusieurs élèves ont donné une réponse exprimée en km lorsqu'on leur demandait de calculer une durée et inversement une réponse formulée en heures ou en minutes lorsqu'on leur demandait de calculer une distance.

Question 25

Jean a fait un voyage en train (TGV). A vitesse constante, il lui a fallu 3 heures pour parcourir 870 km.

A/ Complète :

Durée (en minutes)	Distance (en kilomètres)
30	435 30
60	850 120
2	435
5	870

Puis, réponds aux questions :

B/ Quelle est sa vitesse horaire moyenne ?

Réponse : 60

C/ A cette même vitesse, quel temps mettrait-il pour parcourir 435 km ?

Réponse : 870

D/ A cette même vitesse, quelle distance parcourrait-il en $\frac{1}{2}$ heure ?

Réponse : 435

3.2. Pistes didactiques

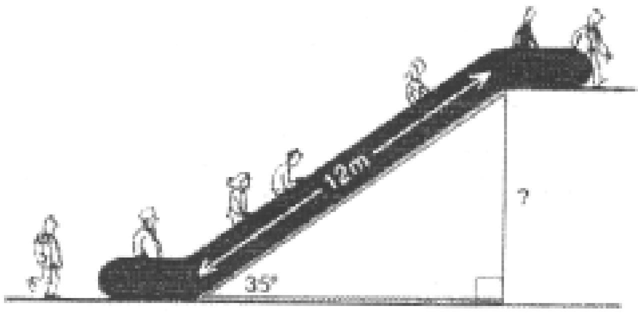
Afin de tenter d'aller à l'encontre de ces automatismes et règles implicites que les élèves partagent, Verschaffel et De Corte (à paraître) conseillent d'être attentif à la qualité des problèmes proposés aux élèves afin d'amener les élèves à réfléchir au sens du problème, à tenir compte de la réalité et à ne pas entrer dans une routine lors de la résolution. Il importe d'offrir aux élèves des contextes d'apprentissage variés afin d'éviter qu'ils ne sur-généralisent des procédures acquises à des contextes dans lesquels elles ne sont pas pertinentes.

Lors de séquences d'apprentissage réalisées en classe, l'enseignant devrait encourager ses élèves à toujours vérifier la solution d'un problème ou d'une équation. On peut aussi demander à l'élève de systématiquement formuler une phrase qui mette en lien sa réponse et la question-problème, ou encore de « parier » sur une réponse approximative au préalable.

De même, il importe d'exercer régulièrement le bon sens des élèves. La trigonométrie offre des contextes particulièrement riches à cet égard.

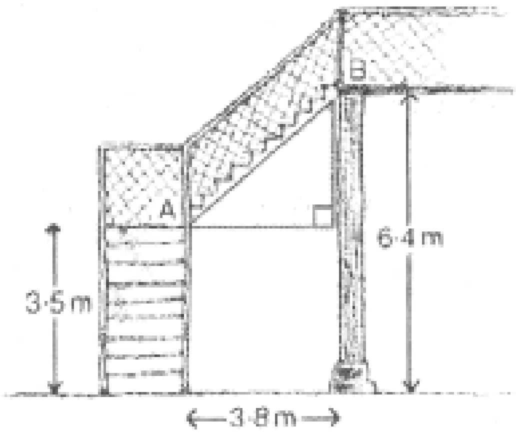
Exemple 5 :

Quelle est la dénivellation entre les 2 étages ?



Exemple 6 :

Quelles est l'inclinaison de l'escalier ?



4. Troisième axe : Encourager les démarches de recherche

Les résultats obtenus par les élèves de 3e secondaire à l'épreuve d'évaluation externe en mathématiques témoignent de la difficulté d'une question qui ne nécessite pas uniquement l'application d'un procédé appris en classe. La lecture et la compréhension d'un énoncé ou d'une consigne, la traduction d'une situation en langage mathématique, le tri des données et des inconnues, le choix d'une démarche cohérente conduisant à la résolution de problèmes complexes, la production et la vérification de la réponse, … constituent des tâches difficiles pour l'élève.

Résoudre un problème est pourtant la seule démarche qui conduise l'élève à s'appuyer sur ses propres connaissances pour chercher, découvrir et construire de nouveaux liens. Ainsi, une situation-problème peut être entendue, au sens large du terme, comme toute situation peu conventionnelle, inhabituelle pour l'élève et vis-à-vis de laquelle il doit mettre en œuvre de multiples démarches afin d'aboutir à la solution attendue.

En ce sens, un problème peut être purement mathématique et non nécessairement complexe, pour autant qu'il déstabilise l'élève par rapport aux démarches routinières qu'il a l'habitude d'appliquer.

Selon des travaux conduits par la Cellule de Pilotage[4], la démarche de résolution de problèmes peut être schématisée de la manière suivante :

1. Analyser - Prendre connaissance de la situation ; - Critiquer la situation ; - Construire une représentation de la tâche et du but à atteindre.	↔	2. Elaborer une stratégie de traitement et la mettre en œuvre - Générer un scénario de résolution en choisissant ou en inventant une procédure ; - Anticiper et organiser les démarches.
↕	⤡ ⤢	↕
3. Vérifier et valider la démarche et le résultat.	↔	4. Communiquer la réponse.

[4] Mathématiques de 10 à 14 ans, Continuité et compétences, Cellule de pilotage, Secrétariat général, M.E.R.F., 1996.

D’après ce schéma, quatre phases doivent idéalement intervenir dans la résolution d’un problème, quel qu’il soit : l’analyse, l’élaboration d’une stratégie, la vérification et la validation de la démarche, la communication de la réponse.

Un parallélisme évident peut être fait avec les quatre stratégies métacognitives majeures identifiées par Focant et Grégoire (à paraître), à savoir : la détermination du but, la planification, le contrôle et la régulation. Les recherches menées indiquent que ces stratégies constituent une aide à la résolution de problèmes arithmétiques. Elles permettent, en effet, d’organiser les connaissances de base nécessaires en vue d’aboutir à la solution attendue.

4.1. Analyse des erreurs

Parmi les questions de l'évaluation externe en mathématiques, nous nous proposons d'analyser les productions et réponses des élèves aux items 12 et 21B/ comme relevant de situations problèmes. Dans les deux cas, en effet, la démarche de résolution doit être construite par l'élève lui-même : il doit analyser la situation non conventionnelle, organiser ses connaissances de manière réflexive et cohérente, contrôler sa démarche et l'ajuster afin d'aboutir à la solution.

4.1.1. Périmètre et aire

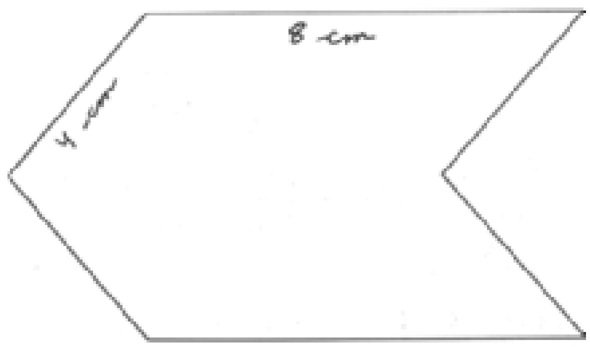
Dans la question 21B/, les élèves doivent calculer l'aire d'une figure complexe après en avoir pris les mesures utiles et strictement nécessaires. La lecture des résultats est interpellante puisque :

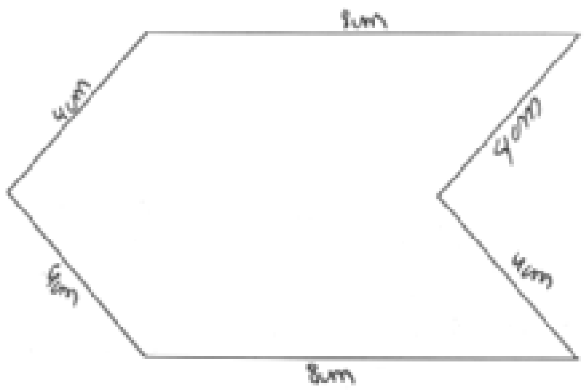
- 52,9% des élèves ne parviennent pas à disséquer la figure en figures élémentaires et à mentionner sur cette figure les mesures utiles pour en rechercher l'aire ;

- 65,8% des élèves fournissent ensuite une réponse incorrecte au calcul de l'aire de cette figure complexe.

De manière générale, les procédures des élèves frappent par leur diversité et leur richesse. Les erreurs commises se situent à différents niveaux de la démarche de résolution de problème décrite plus haut.

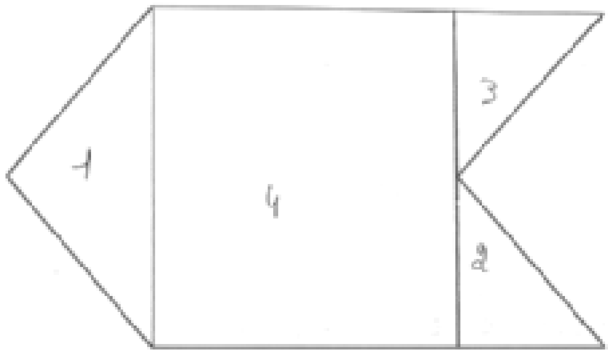
A titre illustratif, nous reproduisons quelques productions d'élèves de l'enseignement général et technique.





B/

Observe la figure ci-dessous :



B1/ Mesure au centimètre près ce dont tu as besoin pour calculer l'aire de cette figure. **Indique ces mesures sur la figure.**

B2/ Calcule ensuite l'aire de cette figure (n'oublie pas l'unité de mesure).

1 $\frac{6 \times 2,5}{2} = 7 cm^2$

2 $\frac{3 \times 2,5}{2} = 6,5 cm^2$

3 $\frac{3 \times 2,5}{2} = 6,5 cm^2$

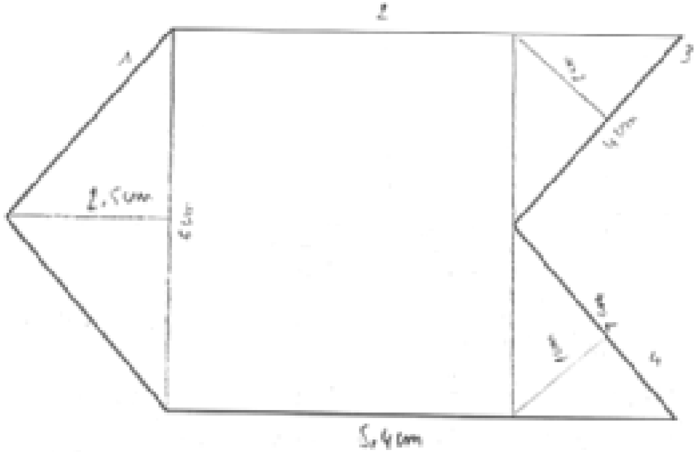
4 $5,5 \times 6 = 33,5 cm^2$

+

Réponse: 53,5 cm²

B/

Observe la figure ci-dessous :



B1/ Mesure au centimètre près ce dont tu as besoin pour calculer l'aire de cette figure. **Indique ces mesures sur la figure.**

B2/ Calcule ensuite l'aire de cette figure (n'oublie pas l'unité de mesure).

1) 7,5cm²
2) 30,3cm²
3) 4cm²
4) 4cm²

7,5 + 29,06 + 8 = 44,56 cm²

Réponse: 44,21 cm²

4.1.2. Résolution d'un problème complexe

La question 12 nécessitait que l'élève traduise un problème complexe en langage mathématique afin de le résoudre. Outre l'important taux de non-réponse (53%), il est intéressant de se pencher sur les démarches mises en œuvre par les élèves pour aboutir ou non à la solution.

Ainsi, la majorité des élèves qui échouent à cette question sont partis de l'énoncé et non pas de la question-problème. Ils ont donc transformé les 21000 bouteilles/heure en litres/semaines , ce qui aboutit difficilement à la solution. Beaucoup d'erreurs sont également relevées dans la transformation des bouteilles en litres (x 3 ou x 0,33 au lieu de :3), et inversement (:3 au lieu de x3). Certains élèves, pour leur part, ont simplement soustrait les 21000 bouteilles des 300000 litres. Enfin, quelques erreurs apparaissent déjà dans la lecture/traduction de l'énoncé en langage mathématique.

Question 12

Dans une brasserie, les ouvriers travaillent encore 40 heures par semaine et produisent 21.000 bouteilles de 33 cl (= 1/3 de litre) de bière par heure. Ils souhaitent réduire leur temps de travail à 36 heures par semaine. La direction veut bien marquer son accord à condition que la production passe à 300.000 litres par semaine.

Calcule le nombre de bouteilles supplémentaires que les ouvriers devront produire par heure s'ils acceptent cette condition.

Ecris tous tes calculs.

1h = 21 000 bout.
36h = 300 000 bout.
18h = 150 000 bout.
9h = 75 000 bout.
3h = 37 500 bout.
1h = 12 500 bout.

21 000 bout. - 12 000 bout.
= 9 000 bout.

Réponse : ...-9000... bouteilles supplémentaires par heure

Question 12

Dans une brasserie, les ouvriers travaillent encore 40 heures par semaine et produisent 21.000 bouteilles de 33 cl (= 1/3 de litre) de bière par heure. Ils souhaitent réduire leur temps de travail à 36 heures par semaine. La direction veut bien marquer son accord à condition que la production passe à 300.000 litres par semaine.

Calcule le nombre de bouteilles supplémentaires que les ouvriers devront produire par heure s'ils acceptent cette condition.

Ecris tous tes calculs.

21000 . 0,33 = 6930 litres

6930 . 40 = 277200 litres

300 000 − 277200 = 22800

Réponse : 69090... bouteilles supplémentaires par heure

Question 12

Dans une brasserie, les ouvriers travaillent encore 40 heures par semaine et produisent 21.000 bouteilles de 33 cl (= 1/3 de litre) de bière par heure. Ils souhaitent réduire leur temps de travail à 36 heures par semaine. La direction veut bien marquer son accord à condition que la production passe à 300.000 litres par semaine.

Calcule le nombre de bouteilles supplémentaires que les ouvriers devront produire par heure s'ils acceptent cette condition.

Ecris tous tes calculs.

heure : 21 000 bouteille d'un tiers de litre.

$\frac{21\,000}{3} = 7000$ bouteil d'un litre à l'heure

semaine : 21 000 . 40 = 840 000 d'1/3 de litre

$= \frac{840\,000}{3}$ = 280 000 d'un litre

nouveau : 300 000 : 40 = 7500

accord

à l'heure

mbrs : 7500 − 7000

en plus

Réponse : ...500... bouteilles supplémentaires par heure

Question 12

Dans une brasserie, les ouvriers travaillent encore 40 heures par semaine et produisent 21.000 bouteilles de 33 cl (= 1/3 de litre) de bière par heure. Ils souhaitent réduire leur temps de travail à 36 heures par semaine. La direction veut bien marquer son accord à condition que la production passe à 300.000 litres par semaine.

Calcule le nombre de bouteilles supplémentaires que les ouvriers devront produire par heure s'ils acceptent cette condition.

Ecris tous tes calculs.

21000 b : 3 = 7000 l

7000
40
280000

280000 litres par semaine (40 h)

300000 | 40
- 280 | 7500 litres par h.
100
- 100
000

7500
· 36
45000
225000
270 000

Réponse : .... bouteilles supplémentaires par heure

4.2. Pistes didactiques

Résoudre un problème est une activité complexe qui mène l'élève à analyser une situation avec les moyens du bord, à se donner une stratégie de calcul ou de résolution en vue d'un objectif et à l'appliquer à bon escient. La diversité des contextes significatifs doit permettre à l'élève de développer un regard critique à la fois sur des situations réelles et/ou purement mathématiques.

A ses côtés, l'enseignant doit accompagner et, le cas échéant, guider l'élève dans sa démarche. Il intervient également pour prolonger la réflexion : comparer des méthodes, faire varier une donnée, demander un modèle concret ou une généralisation, … Il veillera en outre à diversifier le type de problèmes proposés. A ce propos, on parle de problème ouvert[5] :

- un problème facile à comprendre, pour lequel l'élève peut élaborer aisément une hypothèse de travail ;

- un problème riche dans la mesure où il implique non pas une seule mais un réseau de notions ;

- un problème où la méthode n'est pas édictée par l'énoncé, mais où l'élève peut recourir à des manipulations, utiliser des instruments de mesure, de tracé, de calcul, s'informer dans un livre, …

A titre illustratif, il peut être intéressant de proposer aux élèves des situations-problèmes où le choix de l'inconnue pose difficulté.

<u>Exemple 7</u> :

J'échange des pièces de 50 cents contre des pièces de 10 cents. J'ai alors 80 pièces en plus. Quelle est la somme échangée sachant qu'il y a plus de pièces de 10 cents que de 50 cents ?

<u>Exemple 8</u> :

On coule dans une usine 490 pièces de fonte ; les unes pèsent 15 kg, les autres 20 kg. Le poids total de ces pièces est de 8300 kg. Quel est le nombre de pièces de chaque type ?

Il est évident que les activités de résolution de problèmes ne permettent pas à elles seules de structurer toutes les compétences de la formation mathématique. Des moments d'organisation et d'automatisation des connaissances sont indispensables. Ce qui importe ici, « c'est le travail de modélisation qui consiste à dégager dans une situation les aspects qui se prêtent à un traitement mathématique. On observera donc surtout comment l'élève modélise, choisit une méthode ou des procédures parmi celles qui ont été travaillées en classe, comment il présente et interprète ses résultats »[6].

Considérons le problème suivant, élaboré dans le cadre du programme PISA[7].

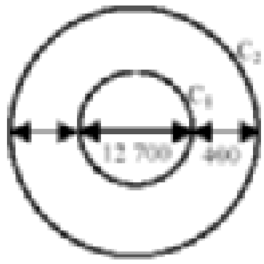
---

[5] Extrait du document « Pistes didactiques » édité en juin 1997 à l'attention des enseignants de 1ère secondaire.
[6] Extrait d'un document rédigé par le Secteur mathématiques, FESEC 2005.
[7] Evaluation de la culture mathématique des jeunes de 15 ans : Document à l'attention des professeurs de mathématiques des 1er et 2è degrés de l'enseignement secondaire, Ministère de la Communauté française, Service général du pilotage du système éducatif, 2004.

VOL SPATIAL

La station Mir tournait autour de la Terre à une altitude d'à peu près 400 kilomètres. Le diamètre de la Terre est d'environ 12 700 km et sa circonférence d'environ 40 000 km $(\pi \times 12700)$.

Donnez une estimation de la distance totale parcourue par la station Mir pendant les 86 500 révolutions qu'elle a accomplies lorsqu'elle était sur orbite. Arrondissez votre réponse à la dizaine de millions la plus proche.

Première étape Transformation du problème en un problème mathématique	Un schéma annoté permet de mieux comprendre les relations évoquées dans le problème :  Quelle est la longueur correspondant à 86 500 fois la circonférence du cercle C_2 ?
Deuxième étape Résolution du problème mathématique en vue de dégager une solution mathématique	- Formule pour calculer la circonférence d'un cercle : 2π x rayon - Circonférence de C_2 : 2π x (6350 + 400), soit environ 42 412 km - Distance totale parcourue : 2π x (6350 + 400) x 86 500, soit environ 3 668 594 829 km
Troisième étape Transformation de la solution mathématique en une solution réelle	- Porter un regard réaliste sur la solution mathématique est nécessaire et cette étape du processus est largement facilitée ici (puisque l'énoncé précise qu'il faut arrondir la réponse à la dizaine de millions la plus proche). - La distance totale parcourue est d'environ 367 dizaines de millions de kilomètres.
Quatrième étape Confrontation de la solution réelle au problème de départ	- Différentes confrontations sont possibles ici : calculer la distance à partir d'une approximation pour déceler les erreurs de calculs ; vérifier la représentation du problème, et en particulier, s'assurer que le 12 700 correspond bien à la longueur d'un diamètre (et doit donc être divisé en 2 pour appliquer correctement la formule).

Comme souvent, l'analyse du problème débouche sur la segmentation du problème général en problèmes partiels. Ce faisant, les élèves sont amenés à sélectionner les informations pertinentes. De ce point de vue, connaître la circonférence de la Terre n'apporte aucun élément utile à la résolution du problème. Il importe également que les élèves envisagent la nature de la réponse attendue ; ici largement précisée dans l'énoncé.

De façon complémentaire, on encouragera les élèves à comparer leurs solutions : Ont-ils tous obtenu la même réponse ? Si non, pourquoi ? Si oui, ont-ils tous procédé de la même façon ? Si non, quelles sont les diverses démarches mises en œuvre ?

On rappellera enfin aux élèves que les solutions doivent être rédigées de façon communicable : elles doivent être comprises par un lecteur qui n’a pas résolu le problème.

Références et liens utiles

Cellule de Pilotage. (1996). *Mathématiques de 10 à 14 ans, continuité et compétences.* Bruxelles : M.E.R.F.

Cellule de Pilotage. (1997). *Evaluation externe des élèves de 1ère année du secondaire : Pistes didactiques – Mathématique.* Bruxelles : Ministère de la Communauté française.

CREM. (1995). *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans : Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques.* Nivelles.

CREM. (2004). *Pour une culture mathématique accessible à tous : Elaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes.* Bruxelles : Ministère de la Communauté française.

Service général du Pilotage du système éducatif. (2004). *Evaluation de la culture mathématique des jeunes de 15 ans : Document à l'attention des professeurs de mathématiques des 1er et 2è degrés de l'enseignement secondaire.* Bruxelles : Ministère de la Communauté française.

La majorité des documents repris ci-dessus sont disponibles sur demande et/ou directement téléchargeable aux adresses suivantes :

Ministère de la Communauté française
Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique
Service général du Pilotage du système éducatif
Rue Belliard, 9-13
1040 Bruxelles
02/213.59.32
http://www.enseignement.be

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Rue Emile Vandervelde, 5
1400 Nivelles
067/21.25.27
http://www.profor.be/crem