Evaluation externe des élèves
de 1re année du secondaire

Pistes didactiques

Mathématique

Dossier pour les enseignants

Juin 1997

Ministère de la Communauté française
Département de l'Education, de la Recherche et de la Formation

Pilotage de l'Enseignement en Communauté française

TABLE DES MATIERES

Ce document a été élaboré par Jacques GREGOIRE, Professeur à l'Université Catholique de Louvain ; Catherine VAN NIEWENHOVEN, chercheuse à l'Université Catholique de Louvain ; Bernard LARDINOIS, Inspecteur de l'enseignement primaire de la Communauté française ; Joseph MAQUOI, Inspecteur cantonal de l'enseignement primaire subventionné ; Léon COLOT, Sylvain COURTOIS, Inspecteurs de l'enseignement secondaire ; Anne PIRON, animatrice pédagogique à la Fédération des établissements libres subventionnés indépendants (FELSI) ; Lucie FABRY, Professeur, chargée de mission au Conseil des pouvoirs organisateurs de l'enseignement officiel neutre subventionné (CPEONS) ; Danielle DE VYLDER-VANDORPE, Jacques SKA, Professeurs, chargés de mission à la Cellule évaluation de la Fédération de l'enseignement secondaire catholique (FESEC)

D0937/1997/22

INTRODUCTION

Ces « Pistes didactiques » ont été élaborées au vu des résultats des élèves à l'épreuve standardisée d'évaluation externe organisée en octobre 1996 dans toutes les classes de 1^{re} secondaire (1^{re} A et 1^{re} B) de l'enseignement secondaire en Communauté française. Tant les instituteurs de $5^{ème}$ et $6^{ème}$ années primaires que les professeurs de 1^{re} et $2^{ème}$ années secondaires trouveront dans ce document des suggestions concernant leur niveau d'enseignement.

Pour élaborer ce document, le groupe d'Inspecteurs et de chercheurs responsable de l'évaluation externe est parti des réponses des élèves : celles-ci ont été analysées de façon plus clinique, afin de repérer les erreurs a débouché sur un certain nombre de constats, des hypothèses explicatives ont été avancées, qui ont à leur tour débouché sur des propositions didactiques. Cette démarche illustre bien la perspective formative dans laquelle s'inscrit l'épreuve : au départ des acquis et des erreurs des élèves, une réflexion s'engage avec en ligne de mire la régulation des actions didactiques. Dans cette optique s'intéresser aux erreurs est bien plus qu'un constat d'échec ; c'est le tremplin sur lequel s'appuyer pour tenter d'améliorer l'action pédagogique au quotidien et, partant, les performances des élèves.

Les informations présentées dans ce document sont organisées en trois chapitres. Un premier chapitre rappelle brièvement les caractéristiques essentielles des résultats observés dans les classes. Un second chapitre présente ensuite les principes de base selon lesquels devrait être construit un enseignement efficient des mathématiques. Enfin, un troisième chapitre détaille un certain nombre de pistes didactiques dans plusieurs des domaines de compétences visés par l'épreuve d'évaluation externe. Un accent est mis sur les domaines où les performances des élèves se sont révélées anormalement faibles. Ces suggestions didactiques devraient permettre de développer un ensemble harmonieux de compétences sur lesquelles pourront s'appuyer les apprentissages futurs.

1. Rappel du contexte et des objectifs de l'épreuve

En novembre 1996, une évaluation externe en mathématique a été menée auprès de toutes les classes de 1e année secondaire de l'enseignement secondaire en Communauté française. Cette évaluation a été mise au point par la cellule de pilotage de l'enseignement du Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation. L'objectif général de cette épreuve était de permettre aux enseignants de situer leurs élèves par rapport à un ensemble de compétences qu'ils sont sensés maîtriser à l'entrée du secondaire car elle constituent le point de départ des apprentissages mathématiques du premier degré. La visée de l'épreuve était clairement diagnostique. Elle ne visait à classer ni les élèves ni les établissements. Par ailleurs, les résultats obtenus ont d'une part, permis aux enseignants de situer leurs élèves par rapport à l'ensemble des élèves de la même année en Communauté française et d'autre part, ont mis en évidence des connaissances et des démarches mathématiques qui doivent encore être développées dans l'enseignement secondaire.

Pour réaliser l'analyse des résultats des élèves, un échantillon représentatif de la population a été tiré aléatoirement au sein de l'ensemble des classes de première année de l'enseignement secondaire en Communauté française. Ainsi, les observations sont basées sur l'analyse d'un échantillon représentatif de 113 classes (2139 élèves) pour les classes de 1e A et de 26 classes (269 élèves) pour les classes de 1e B, issues des trois réseaux en Communauté française.

Les compétences évaluées dans le cadre de cette épreuve se répartissent dans plusieurs domaines : la numération, les opérations, le traitement de données numériques, les mesures et l'espace et la résolution de problèmes.

Dans un premier temps, nous rappelons les résultats obtenus par les élèves issus des classes de 1e A. Dans un second temps, ce sont les résultats obtenus par les élèves issus des classes de 1e B qui sont brièvement détaillés. Dans un troisième temps, les résultats sont envisagés dans leurs interactions avec quelques variables sociologiques.

Résultats des classes de 1e A

Pour l'ensemble des compétences ciblées, les élèves réussissent, en moyenne, 64 % des questions. Le tableau suivant présente, de manière synthétique, les pourcentages de réussite pour chacune des compétences prises isolément.

Compétences mathématiques	Pourcentages moyens de réussite
Numération	76 %
Opérations	73 %
Traitement de données numériques	50 %
Mesures et espace	62 %
Résolution de problème	7 %

A la lecture de ce tableau, on peut constater une disparité importante entre les résultats obtenus par les élèves en fonction des catégories de compétences ciblées par les questions. Ce sont les questions relatives à la numération et aux opérations qui sont les mieux réussies par les élèves (plus de 70 % de réussite), suivies par les questions relatives aux mesures et à l'espace avec un pourcentage de réussite légèrement plus faible (62 %) et celles relatives au traitement de données numériques dont le score moyen de réussite n'atteint plus que 50 % de réussite. Ce sont, sans conteste, les résultats obtenus en résolution de problème qui sont les plus faibles puisqu'à peine 7 % des élèves donnent une réponse correcte.

Détaillons quelque peu les performances des élèves pour chacune des compétences qui ont fait l'objet d'investigation.

- ***Numération***

Les questions posées portaient sur les compétences numériques suivantes : fractions et décimaux, classement de nombres, nombres sur graduation, numération de position, multiples et diviseurs. Globalement, les résultats sont assez bons (trois-quarts de réussite). Toutefois, les questions relatives au classement, au placement sur une droite orientée, à la numération de position et la détermination des multiples et des diviseurs posent encore problème à de nombreux élèves de première année.

- ***Opérations***

Les questions de ce domaine, bien réussies dans l'ensemble (près de trois-quarts de réussite), étaient centrées sur l'application d'algorithmes et de procédés de calculs. L'application d'algorithmes ne posent guère de problème. Par contre, le calcul et le retrait d'un pourcentage d'un nombre donné reste difficile. En effet, environ la moitié des élèves n'arrivent pas à résoudre ce type de problème. Ces résultats témoignent de la complexité de la notion de pour-cent pour de nombreux élèves.

- ***Traitement de données numériques***

Au niveau du traitement des données, les compétences suivantes étaient évaluées : d'une part, trouver les informations pertinentes dans un tableau à double entrée et effectuer des comparaisons entre des valeurs de ce tableau et, d'autre part, trouver les informations pertinentes dans un diagramme et les comparer. Globalement, les résultats sont étonnamment faibles (environ 50 % de réussite) malgré le fait que ce type de présentation des données numériques est aujourd'hui d'un usage fréquent tant à l'école que dans la vie quotidienne. La simple lecture d'une information est plus facile que la mise en relation de plusieurs informations et l'analyse d'un tableau de nombres est mieux réussie que l'analyse d'un diagramme.

- ***Les mesures et l'espace***

Les questions relatives aux mesures et à l'espace portaient sur des aspects variés de la géométrie : mesures, figures, symétries, espace,… Les scores pour les différentes compétences évaluées sont assez hétérogènes. Ainsi, la plupart des élèves (82,5 %) ont acquis le sens des unités de mesure et sont capables de les mettre en relation avec des situations réelles. Par contre, pour beaucoup d'élèves (près de la moitié), le calcul du périmètre et de l'aire de différentes figures (rectangle, triangle, losange,…) reste assez difficile. De même, l'analyse d'une figure en s'appuyant sur des mesures, des découpages ou encore des assemblages est une tâche complexe pour de nombreux élèves. Par ailleurs, les questions relatives aux symétries (découvrir et tracer les symétries axiales) sont peu réussies par les élèves (moins de 40 % de réussite), ce qui est sans doute dû à une absence d'enseignement de ces notions à l'école primaire.

- ***La résolution d'un problème complexe***

La question posée permettait d'évaluer la maîtrise des différentes étapes nécessaires à la résolution d'un problème : la détermination d'un but à atteindre, la détermination des buts intermédiaires et l'organisation des étapes de résolution, la recherche des informations nécessaires et la résolution des opérations. Le très faible résultat observé à cette question (7 % de réussite) indique que la lecture et la compréhension du texte, le tri des données et des inconnues ainsi que le choix d'une démarche cohérente constituent des tâches difficiles pour les élèves de première année secondaire. Il est important de souligner que le pourcentage de réussite est fonction de la complexité de la tâche et du degré de familiarité de celle-ci plus que des compétences spécifiquement mathématiques (additionner, multiplier,…)

Résultats des classes de 1e B

Pour l'ensemble des compétences ciblées, les élèves réussissent, en moyenne, 33 % des questions. Le tableau suivant présente, de manière synthétique, les pourcentages de réussite pour chacune des catégories de compétences évaluées.

Compétences mathématiques	Pourcentages moyens de réussite
Numération	43 %
Opérations	38 %
Traitement de données numériques	22 %
Mesures et espace	32 %
Résolution de problème	0 %

Globalement, les questions qui apparaissent difficiles pour les élèves de 1e A se révèlent être les plus difficiles pour les élèves de 1eB. Pour ces derniers, le degré de difficulté est particulièrement accentué. En effet, comme pour les classes de 1e A, ce sont les questions relatives à la numération et aux opérations qui sont les mieux réussies par les élèves mais avec une moyenne de 40 % de réussite. Ensuite, viennent les questions relatives aux mesures et à l'espace avec un pourcentage de réussite encore plus faible (32 %) et celles relatives au traitement de données numériques dont le score moyen de réussite n'atteint plus que 22 % de réussite. La résolution de problème pose tout autant problème aux élèves de 1re qu'aux élèves de 1e A.

Impact des variables sociologiques sur les performances

L'influence de certaines variables sociales et culturelles[1] sur les résultats a été testée. Globalement, on constate que les élèves qui ont redoublé ou qui ne parlent pas le français à la maison ou encore qui vivent en situation de précarité réussissent, en général, moins bien le test que les autres. Ces informations ne sont qu'indicatives mais permettent d'affiner les comparaisons entre les écoles ou les classes en fonction des caractéristiques socioculturelles des élèves.

[1] Les informations concernant ces variables sont issues du questionnaire destiné aux enseignants.

Jugement des enseignants sur l'épreuve[2]

Un questionnaire a été rempli par les enseignants de l'échantillon. En majorité, ces enseignants jugent les cinq domaines de compétences (numération, opérations, traitement de données, mesures et espace et résolution de problèmes) d'un niveau bien adapté pour le début de la première année du secondaire, ce qui confirme l'adéquation du niveau de difficulté des questions au but diagnostique de l'épreuve.

Par ailleurs, il est important de souligner que 37 % des enseignants sous-estiment le niveau de leur classe. Or, une opinion défavorable du professeur à l'égard de sa classe à presque automatiquement un effet néfaste sur le moral des élèves. Une des fonctions de l'évaluation externe est justement de permettre aux enseignants de relativiser les performances de leur classe par rapport aux performances d'un échantillon de classes représentatives de l'ensemble de la Communauté française.

[2] Cet avis ne concerne que les classes de 1e A.

2. Grands axes de la formation mathématique au premier degré

2.1 Conduire l'ensemble de la population à la maîtrise des compétences mathématiques de base

Chaque pays est attentif au rendement et à la qualité de son enseignement des mathématiques, particulièrement durant la scolarité obligatoire. Beaucoup pensent que l'élévation du niveau général des compétences en mathématiques dans la population scolaire est importante pour le développement humain des jeunes et en vue de leur vie sociale et économique ultérieure.

On demande souvent aussi que la formation en mathématiques, jusqu'à 14 ans, ne sépare pas les élèves les uns des autres. Mettre ensemble les jeunes de 10-14 ans ne suffit pas pour élever le niveau et entraîner tous les jeunes dans une formation portant sur les bases des mathématiques, acceptons-le comme un défi. Quelques conséquences sont immédiates. On demande que chaque jeune trouve une voie qui le conduise à une formation la mieux réussie possible. Une route pédagogique équitable offre à chaque jeune des questions posées dans un univers qui lui est familier et permet un apprentissage adapté au style cognitif de chaque individu. Elle évite les ruptures d'une classe à l'autre, d'une branche des mathématiques à une autre. Les mathématiques scolaires doivent offrir à certains un volet à caractère concret et pratique, à d'autres plus de raisonnement et de sens de la généralisation. Préparer le futur, c'est apprendre aux élèves à utiliser les mathématiques connues et en construire de nouvelles dans des domaines familiers. On espère que dans leur vie de citoyen et dans leur travail, ils continueront ainsi.

Le test nous apprend que le savoir-faire fiable de notre population de 12 ans (réussi à 80 % et plus), ne couvre que 16 % des questions et 33 % des sous-questions. Le champ de connaissance du jeune de 12 ans ne peut évidemment se définir par ce seul moyen. A 12 ans, l'élève est encore fragile dans ses réponses, il donne des réponses trop hâtives ou hasardeuses. Heureusement les copies des élèves révèlent des acquis tout aussi estimables : oser essayer, placer une question dans la réalité et en tirer profit, conjecturer après exemples, argumenter, exprimer son plaisir d'être créatif. Définir une liste très restrictive des savoirs faire réussis à 80 % dite de « compétences de base » ne s'indique donc pas. La capacité de l'enfant s'apprécie aussi en le voyant œuvrer sur des exercices ayant des référents et du sens, en écoutant ses explications quantitatives et raisonnées, en suivant sa pensée dans le domaine idéalisé des concepts. Une part essentielle du défi réside dans le « comment faire avec le groupe d'élèves aux résultats faibles ? ». Il est vrai que des copies sont pauvres et qu'elles révèlent des démarches ardues pour certains : élaborer une procédure, penser à donner toutes les solutions, interpréter un résultat, déduire, concevoir l'aire, la longueur, le volume comme notion. Le test révèle aussi des jeunes qui ont bien gardé acquis tout ce qu'on leur a appris, y compris les procédures particulières de leurs maîtres, et beaucoup qui font localement preuve de lucidité et d'intelligence.

Le programme de mathématiques du premier degré de l'enseignement secondaire donne un espace de pédagogie et de liberté qui permet d'offrir une route pédagogique équitable.

Pour que les élèves retrouvent leurs anciennes connaissances, qu'ils se raccrochent au fil qu'ils ont peut-être perdu, ne demandons pas que chaque concept soit enseigné directement dans sa forme définitive. Acceptons des concepts provisoires, pas encore entièrement bâtis, placés au niveau intellectuel de l'élève. Commencera ensuite le véritable travail mathématique d'adapter et d'élargir les notions en vue de répondre à de nouveaux contextes et à des nouvelles questions. Ce travail est fructueux pour tous.

Le programme n'est pas tout. La démarche préconisée demande des enseignants qui connaissent « leurs mathématiques par toutes les portes » ainsi que les ressources de la pédagogie. Le progrès dépend du travail collégial au sein de l'école, des apports des commissions scientifiques. Il dépend aussi du moral des élèves et de leurs parents à l'égard des mathématiques.

2.2. Réaliser un apprentissage en spirale

Les socles de compétences à atteindre successivement à 8 ans, 12 ans et 14 ans doivent inciter les concepteurs de programme à abandonner une réaction des matières par année scolaire. C'est d'ailleurs dans cette perspective qu'est rédigé le nouveau programme de mathématique inter-réseaux du premier degré de l'enseignement secondaire.

Des travaux récents de la Cellule de Pilotage[3] et du CREM[4] préconisent un apprentissage permanent de tous les concepts dès le début de la scolarité. Cet apprentissage favorisera une complexification progressive des savoirs construits.

Cette option se fonde sur les trois principes de l'enseignement en spirale proposés par J.S. BRUNER[5]. Ces trois principes peuvent être synthétisés par ces trois maximes :

Tout, tout le temps et tout de suite

D'une part, les savoirs et savoir-faire à apprendre doivent faire l'objet d'une sollicitation permanente des élèves ; d'autre part, ce qui est important doit faire l'objet d'apprentissages le plus tôt et le plus souvent possible.

> Ainsi, le sens du reste dans la division peut être vécu dès l'école maternelle lors d'actions de distributions, de partage alors que cette notion apparaît rarement avant la formalisation de la division euclidienne en 4^{e} ou 5^{e} année primaire. Durant toute leur scolarité, les élèves doivent garder le contact avec cette notion.

Autrement, mais mieux

Si chaque concept doit être souvent rencontré par l'élève, il doit l'être dans des situations de plus en plus diversifiées et à des niveaux de conceptualisation de plus en plus élaborés. Au fur et à mesure de l'apprentissage, les connaissances changent de niveau et de statut.

> La division avec reste sera vécue dans de multiples situations variées portant sur les différents types de grandeurs, différents types d'unités et différents types de nombres (naturels, décimaux, fractionnaires). La représentation de la division avec reste sera de plus en plus élaborée. Ainsi, verbalisé par le jeune enfant, le partage en 3 parties s'exprimera plus tard par la formule «$a = 3b + 2$ », a et b étant des nombres naturels.

Réfléchir pour progresser

Pour progresser dans la compréhension des concepts, l'élève doit pouvoir réfléchir à son apprentissage, c'est-à-dire prendre la position d'observateur pour analyser sa propre action et rechercher en permanence des procédures plus rationnelles.

> C'est ce que fait le jeune enfant. Face à la distribution d'un grand nombre d'objets, il ne procède plus par unité, mais par paquets d'unités. Face à un partage de grandeurs décimales ou fractionnaires, il change d'unité pour se ramener à un cas connu.

En fonction des trois principes qui précèdent, on peut affirmer que *l'apprentissage se base d'abord sur les démarches ou processus mentaux mis en œuvre par l'élève dans les situations d'apprentissage et dans un deuxième temps seulement sur une organisation théorique des contenus.*

---

[3] De 2 ans et demi à 18 ans, réussir l'école, Secrétariat général, M.E.R.F., 1996 Mathématiques de 10 à 14 ans, continuité et compétences, Secrétariat général, M.E.R.F., 1996

[4] Les mathématiques, de la maternelle jusqu'à 18 ans, CREM, Nivelles, 1995

[5] BRUNER J.S., The process of éducation, Cambridge-Harvard, 1960

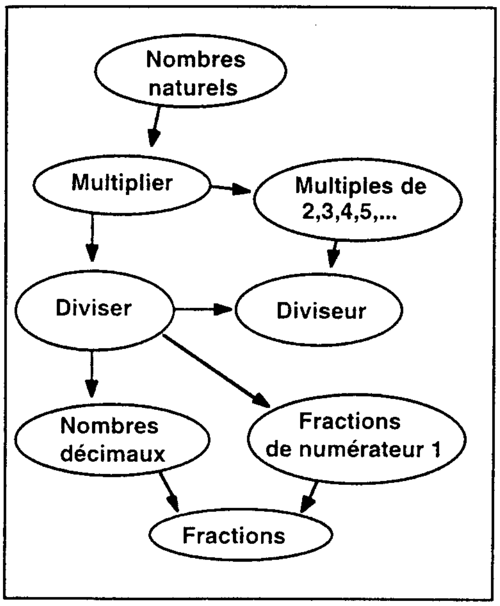
Comme l'enseignant ne peut connaître le niveau de conceptualisation atteint par chaque élève, il doit proposer des situations assez ouvertes, prendre en considération les différentes démarches et aider chacun dans son apprentissage. Les situations-problèmes devenant de plus en plus complexes, les élèves doivent imaginer des procédures de traitement de plus en plus élaborées. La confrontation des points de vue et le partage des idées entraînent les plus lents et font émerger les moyens pour conceptualiser.

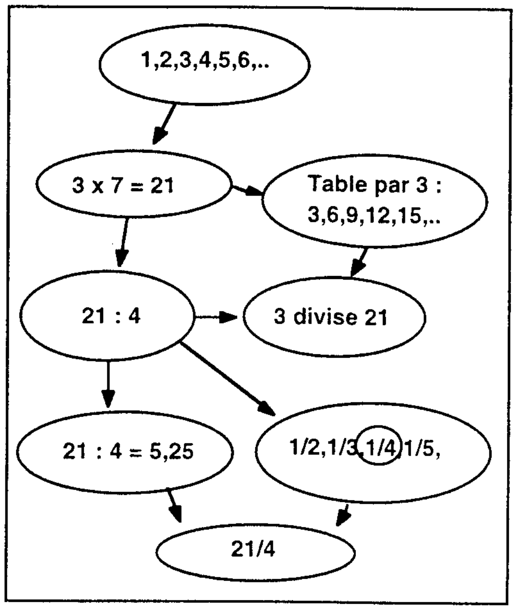
2.3. Stimuler la recherche de liaisons entre notions mathématiques

En mathématique comme dans les autres sciences, les relations entre les notions assurent leur cohérence et leur consistance. Rattacher une notion à une autre, c'est en établir une troisième. C'est ainsi que la connaissance se structure : en voici un exemple.

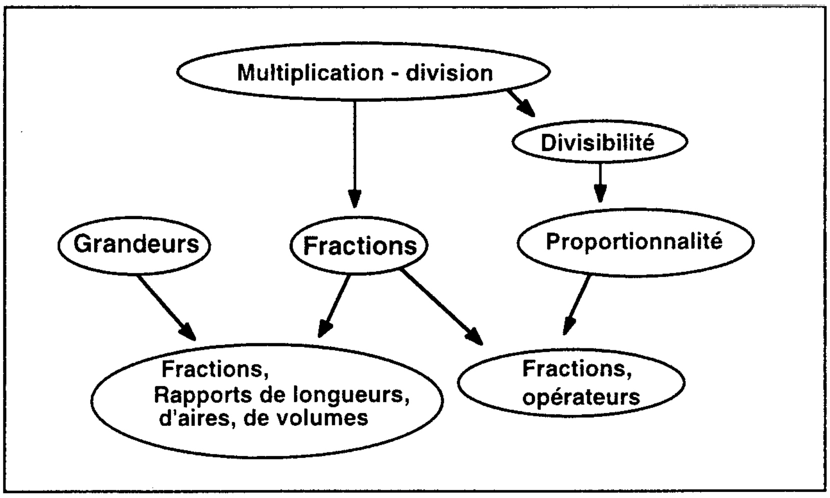
La table de multiplication est une notion de base. La notion de multiple s'y relie ainsi que celle de diviseur ; celle de divisibilité en découle. Puisque la divisibilité ne concerne pas toutes les paires de nombres naturels, il se bâtit une nouvelle notion, celle de fraction qui rend possible toutes les divisions de nombres entiers.

Ces liaisons s'illustrent de la manière suivante :



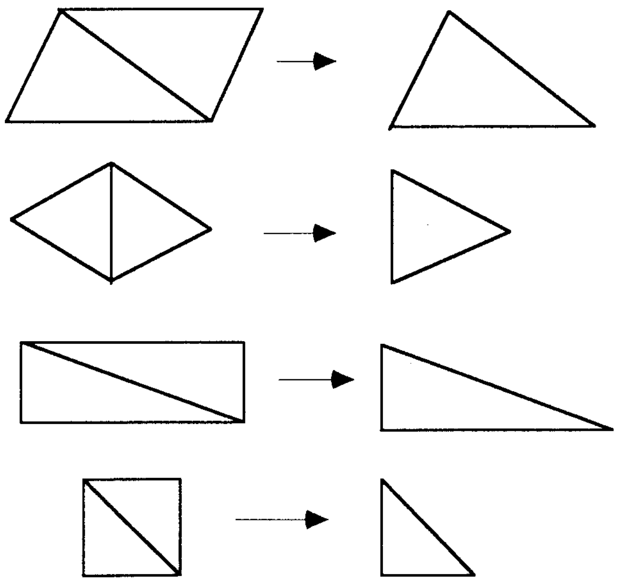


La démarche est omniprésente dans les mathématiques de base ; elle peut encore s'illustrer l'exemple suivant :



En établissant des liens, l'enfant enrichit sa pensée mathématique. En liant ses idées mathématiques à son monde pratique et à ses autres domaines de connaissance, il puise de nouvelles idées et il applique ce qu'il a appris. De la recette de cuisine, au plan d'environnement, de la décoration artistique d'un objet à l'analyse de son mécanisme, du découpage à la classification de figures, il y a matière à inspiration et à applications mathématiques.

En géométrie, la connaissance des figures usuelles lie leurs propriétés de côtés, d'angles,… à leurs propriétés de symétries (existence d'une symétrie axiale ou centrale).



Le calcul de périmètres, d'aires et de volumes se lie à l'algèbre par la construction d'expressions littérales et de formules. Plus tard, la divisibilité s'étendra aux polynômes, la proportionnalité jouera un rôle fondamental dans la similitude de figures, le théorème de Thalès et dans l'étude des fonctions.

2.4 Favoriser une pédagogie de la recherche : explorer-manipuler-conceptualiser

2.4.1 La résolution de problèmes dès l'école fondamentale

Les résultats du test témoignent de la difficulté d'une question quand l'application d'une technique apprise ne suffit pas pour y répondre. Résoudre un problème est une de ces activités plus difficiles. Pourtant c'est celle qui permet aux enfants de modéliser leur réel proche, de mettre en jeu des stratégies et d'aborder concrètement des notions générales.

Dans la vision pédagogique de l'école fondamentale, résoudre des problèmes c'est une activité centrale qui mène à l'élève à se créer des outils de pensée et à s'approprier réellement des compétences mathématiques.

Sur quoi portent ces situations problèmes ? Des situations de vie, réelles ou simulées, un matériel concret à manipuler (par exemple, le tangram), un tracé géométrique à reproduire, un graphique à analyser…

La démarche préconisée voit la situation problème comme source, comme moteur et comme justification à la construction du savoir mathématique de l'enfant.

La résolution de problèmes, source des apprentissages.

« Les situations proposées doivent permettre aux élèves de s'emparer d'un problème, lui-même calibré en vue de provoquer la nécessité de la construction par l'élève de connaissances nouvelles. » (Johsua & Dupin).

Face à une situation problème, l'enfant sélectionne dans ses connaissances ce qu'il juge utile pour résoudre le problème. Toutefois, sa représentation de la situation et les « déjà-là » disponibles ne lui permettent pas toujours d'arriver à une solution ; l'enfant devra affiner, voire rectifier son savoir.

A ses côtés l'enseignant doit favoriser l'émergence de méthodes de résolutions et mettre en évidence les résultats intéressants découverts par les élèves.

Dans cette vision, le professeur modifie son statut : il élabore un savoir avec l'élève, il traite l'erreur comme source de progrès, il met en valeur les idées et les ébauches de solutions.

La résolution de problèmes, moteur des apprentissages mathématiques

« L'activité mathématique n'est pas regard et dévoilement, mais création, production, fabrication. Les concepts mathématiques (…) sont le résultat d'un travail de la pensée, celle des mathématiciens à travers l'histoire, celle de l'enfant à travers son apprentissage » (B. Charlot).

L’élève qui s’engage dans une résolution de problème met en œuvre de multiples démarches : analyser la situation et se la représenter, émettre une hypothèse de travail, recourir à des analogies, mettre en œuvre une méthode de résolution, la confronter à celles des autres, exprimer sa solution oralement, par écrit …

L’enseignant intervient pour prolonger la réflexion : comparer des méthodes, faire varier une donnée, demander un modèle concret ou une généralisation …

A ce propos, on parle de problème ouvert :

- un problème facile à comprendre, pour lequel l’élève peut élaborer aisément une hypothèse de travail.

- un problème riche dans la mesure où il implique non pas une seule mais un réseau de notions.

- un problème où la méthode n’est pas dictée par l’énoncé, mais où l’élève peut recourir à des manipulations (découpages, transformations), utiliser des instruments de mesure, de tracé, de calcul, s’informer dans un livre…

La résolution de problèmes, justification des apprentissages mathématiques

Evidemment, les activités de résolution de problèmes ne peuvent seules suffire pour tout apprendre aux élèves. Des moments d’organisation et d’automatisation des connaissances sont indispensables afin de les rendre fiables et afin de les structurer.

L’enseignant montre aussi que ces apprentissages mathématiques ne sont pas pratiqués pour eux-mêmes, qu’ils prennent du sens au fur et à mesure qu’ils sont utilisés dans de nouveaux problèmes.

2.4.2 A l’école secondaire, plus particulièrement…

Aborder les concepts par la leçon théorique, enseigner uniquement des techniques, ne constituent pas des démarches fructueuses pour la majorité des élèves des premières années du secondaire. Tous les praticiens savent l’importance de faire vivre l’activité dans la classe et de trouver un sens aux concepts. L’essentiel pour la vie est aussi de savoir traduire des situations en équations, en graphiques et diagrammes, en algorithmes.

De là l’intérêt à placer régulièrement l’élève devant le défi d’une situation problème à explorer : laisser libre cours à la pensée, essayer des exemples, déceler des analogies, faire varier les figures ou les paramètres, passer aux cas limites, particulariser, généraliser, essayer de comprendre ce qui va et ce qui ne va pas…

Comme dans le modèle de l’école explicité ci-avant, l’élève devra :

- investir son savoir (les situations doivent faire « résonner » du connu),
- prendre conscience de l’insuffisance de celui-ci,
- construire de nouvelles procédures.

Il y a une interaction entre son savoir « déjà-là » et celui des autres : condisciples, enseignant, livres… D’où l’importance accordée dans cette conception aux essais et surtout aux erreurs puisque celles-ci sont non seulement la preuve qu’un apprentissage est nécessaire, mais aussi la base sur laquelle vont s’appuyer les essais suivants. Corriger l’erreur fait prendre conscience.

La similitude entre la démarche de l’école primaire et celle de l’école secondaire se prolonge au rôle des objets et des phénomènes réels comme sources de questions, de modèles et de clartés.

L’apprentissage des mathématiques élémentaires doit passer sans cesse par des modélisations. Beaucoup de contextes à l’apprentissage des mathématiques se trouvent dans des matériels accessibles aux élèves : modèles géométriques rigides plans ou de l’espace, instruments de mesure, papiers divers, engins pour expérimenter des équilibres (par exemple des balances, des ressorts),… calculatrices, logiciels informatiques.

Si l'apprentissage des mathématiques élémentaires doit passer sans cesse par des modélisations. Beaucoup de contextes à l'apprentissage des mathématiques se trouvent dans des matériels accessibles aux élèves : modèles géométriques rigides plans ou de l'espace, instruments de mesure, papiers divers, engins pour expérimenter des équilibres (par exemple des balances, des ressorts),… calculatrices, logiciels informatiques.

Si l'apprentissage des mathématiques élémentaires a une composante essentielle, celle d'utiliser la puissance du raisonnement pour lier des faits mathématiques, il en a une deuxième aussi importante, celle de tirer profit des mathématiques décelables dans la nature autour de soi.

Le passage du maternel au primaire n'implique pas qu'on abandonne l'activité manuelle et l'observation en mathématiques. Il doit en être de même pour le passage du primaire au secondaire, et même pour celui du secondaire inférieur au supérieur.

Il n'est pas infantilisant, dans l'enseignement des mathématiques, ni de construire des modèles matériels et les expérimenter, ni d'observer des réalités de la nature.

3. Quelques apprentissages mathématiques à stimuler au cours du premier degré

3.1 Développer des liens d'amitié avec les nombres

Dans l'enseignement fondamental, on utilise les nombres. Cela permet de découvrir leurs propriétés et de mettre celles-ci en pratique dans du calcul mental (commuter, décomposer puis associer et distribuer, compenser) et dans l'élaboration des algorithmes du calcul écrit.

L'étude de la divisibilité y est amorcée. Elle porte sur les règles de divisibilité par 2, par 5, par 10…, sur la décomposition d'un nombre en la somme ou la différence de deux multiples d'un même nombre et sur la factorisation d'un nombre en produit de facteurs. Cette étude est liée à la connaissance de la numération décimale et à celle des tables de multiplication (et de divisions).

Le nombre, concept évoquant une quantité, a toujours beaucoup intéressé voire inquiété l'homme depuis l'Antiquité. Il a essayé d'en percer les secrets, d'en énumérer les propriétés. Un des moyens d'étude consiste à rechercher des régularités parmi ces nombres entiers.

D'autre part, <u>prendre le temps</u> d'amener l'élève à bien manipuler les nombres est rentable et « Avoir de bons liens d'amitié avec les nombres de 1 à 100 » est une bonne préparation d'une enfant aux mathématiques.

L'activité reprise ci-après s'inspire de cette démarche et a comme objectif d'amener l'élève à

- à créer et explorer un tableau de nombres,
- à en extraire des informations,
- à rechercher une explication aux régularités observées,
- et enfin à réaliser un apprentissage au raisonnement, à la démonstration.

Cette activité trouve sa place tant à l'école primaire qu'au début du secondaire où elle peut être le point de départ d'une organisation déductive en 1^{re} A à partir de notions comme :

- les relations définies par « est diviseur de », « est multiple de » qui sont les clés de voûte de l'édifice. Elles partent de l'égalité $a = b \times c$ qui a comme correspondant au niveau de l'école fondamentale la connaissance des tables de multiplication.

- la relation « est le quotient de » qui en découle (avec la restriction à propos de zéro),
- les caractères de divisibilité, fondés sur deux propriétés :
  - si un nombre en divise un autre, alors ils divise ses multiples.
  - si un nombre en divise deux autres, alors il divise leur somme et leur différence.

Ces concepts pourront être réinvestis par la suite dans des situations plus complexes.
En un premier temps, les tableaux ci-dessous permettent de faire apparaître de rythmes de multiples :

- les nombres pairs toutes les deux colonnes,
- les multiples de 3 en oblique…
- les multiples de 5 en deux colonnes.

On peut ensuite se demander :

- où sont les multiples de 4, de 8, de 6, de 9, de 10, de 15, de 12 et de 7,
- comment faire apparaître les nombres premiers,
  les nombres carrés,
  les nombres cubiques,
- comment vérifier des propositions comme celles-ci :
  tout diviseur de 6 est diviseur de 12
  tout diviseur de 12 est diviseur de 6
  tout multiple de 3 est multiple de 15
  tout multiple de 15 est multiple de 3
  un nombre multiple à la fois de 2 et 5, l'est aussi de 10,
  de 4 et 5, l'est aussi e 20,
  le produit d'un nombre impair et d'un nombre pair est un nombre pair
  la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4
- comment arriver à la mise en place de propriétés comme :
  si un nombre en divise un autre, alors il divise ses multiples.
  si un nombre en divise deux autres, alors il divise leur somme et leur différence.
- Comment à partir de ces observations trouver et justifier un caractère de divisibilité.

On peut aussi se poser la question de savoir si les régularités persistent au-delà de 100.
Pourra-t-on trouver le multiple de 2 suivant ?
Pourra-t-on trouver le nombre premier suivant ?
Enfin, il est intéressant d'exprimer de manière générale :

- les nombres rencontrés,
- les conjectures proposées,
- les raisonnements permettant d'infirmer ou de confirmer ces conjectures.

On poursuit donc bien un triple objectif :

1. connaître les nombres de 1 à 100,
2. induire suite à l'observation de régularités,
3. motiver les démonstrations.

Le programme indique : « *La démonstration sera motivée aux yeux des élèves par l'analyse d'exemples, par l'absence apparente de contre-exemples, par la conjecture d'une loi, par la vérification d'un énoncé ».* Les tableaux de nombres peuvent être un point de départ pour chercher des expressions littérales, pour les transformer et démontrer ainsi des propriétés arithmétiques.

les multiples de 2

1	**2**	3	**4**	5	**6**	7	**8**	9	**10**
11	**12**	13	**14**	15	**16**	17	**18**	19	**20**
21	**22**	23	**24**	25	**26**	27	**28**	29	**30**
31	**32**	33	**34**	35	**36**	37	**38**	39	**40**
41	**42**	43	**44**	45	**46**	47	**48**	49	**50**
51	**52**	53	**54**	55	**56**	57	**58**	59	**60**
61	**62**	63	**64**	65	**66**	67	**68**	69	**70**
71	**72**	73	**74**	75	**76**	77	**78**	79	**80**
81	**82**	83	**84**	85	**86**	87	**88**	89	**90**
91	**92**	93	**94**	95	**96**	97	**98**	99	**100**

les multiples de 4

1	2	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10
11	**12**	13	14	15	**16**	17	18	19	**20**
21	22	23	**24**	25	26	27	**28**	29	30
31	**32**	33	34	35	**36**	37	38	39	**40**
41	42	43	**44**	45	46	47	**48**	49	50
51	**52**	53	54	55	**56**	57	58	59	**60**
61	62	63	**64**	65	66	67	**68**	69	70
71	**72**	73	74	75	**76**	77	78	79	**80**
81	82	83	**84**	85	86	87	**88**	89	90
91	**92**	93	94	95	**96**	97	98	99	**100**

les multiples de 8

1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10
11	12	13	14	15	**16**	17	18	19	20
21	22	23	**24**	25	26	27	28	29	30
31	**32**	33	34	35	36	37	38	39	**40**
41	42	43	44	45	46	47	**48**	49	50
51	52	53	54	55	**56**	57	58	59	60
61	62	63	**64**	65	66	67	68	69	70
71	**72**	73	74	75	76	77	78	79	**80**
81	82	83	84	85	86	87	**88**	89	90
91	92	93	94	95	**96**	97	98	99	100

Comment se disposent les multiples de 2 (nombres pairs), comment les retrouver? Leur disposition en colonnes amène tout naturellement à envisager un critère qui est fonction de cette position. En effet, c'est bien en fonction du dernier chiffre que l'on appartient à telle ou telle colonne.

Comment les obtenir par calcul?

2x1 ; 2x2 ; 2x3 ; 2x4 ; 2x5; ...

Il semble bien que si l'on prend dès le début de ce travail l'habitude de travailler avec des suites de nombres, de calculs, on parviendra à induire un bon nombre d'idées, de concepts. Par exemple, la notation d'un nombre pair de manière littérale peut être amenée par la suite des calculs notés ci-dessus. Si, au lieu du 0,1,2,3... je prends le nombre entier noté *n*, le multiple des deux pourra se noter *2xn*.

C'est ici que s'opère le passage entre le travail qui se fait dans le Fondamental et celui que l'on va entamer au Premier Degré. En effet, cette formalisation va permettre un autre type de démarche: le raisonnement déductif

On peut se poser exactement les mêmes questions pour les multiples de 4 et de 8. De plus, après avoir reproduit les différents tableaux sur des transparents, on peut par superposition comparer ces trois ensembles de nombre et voir que l'ensemble des multiples de:

- quatre est une partie des multiples de 2
- huit une partie des multiples de 2
- huit est une partie des multiples de 4

La recherche qui se fait à partir de ces trois premiers tableaux pourra se poursuivre de manière similaire avec ceux des multiples de 3, de 6 et de 9, ou encore avec ceux des multiples de 5, de 10 et de 15 (voir infra).
La répétition de ces recherches semble importante car elle devrait, d'une part, générer des observations de même type et donc permettre des conjectures et, d'autre part, faire apparaître des différences.
Les différences qui pourraient apparaître sont par exemple :

- les multiples de trois, de six et de neuf ne sont pas en colonnes ; leur position sur des **obliques** amène donc à rechercher un autre type de critère pour les reconnaître

- par superposition des grilles des multiples de 3, de 6 et de 9, on observe, que si on compare ces trois ensembles de nombres on voit que l'ensemble des multiples

  – de six **est** une partie des multiples de trois,
  – de neuf **est** une partie des multiples de trois,
  – de neuf **n'est pas** une partie des multiples de six.
  DONC…

- par superposition des grilles des multiples de 5, de 10 et 15, on observe, que si on compare ces trois ensembles de nombres, on voit que l'ensemble des multiples

  – de dix **est** une partie des multiples de cinq,
  – de quinze **est** une partie des multiples de cinq,
  – de quinze **n'est pas** une partie des multiples de dix,
  DONC comme pour les multiples de 3, de 6 et de 9…

Si par contre, on compare les tableaux des multiples de 2, de 3 et de 6 puis des multiples de 4, de 6 et de 12 arrivera-t-on aux mêmes conclusions ?

Pouvoir remarquer que deux et trois divisent six et sont premiers entre eux, tandis que quatre et six divisent douze mais ne sont pas premiers entre eux est une étape intéressante dans la recherche des causes qui provoquent ces différences.

On sent qu'à travers toutes ces manipulations des tableaux de nombres, il est possible de faire ressortir de nombreuses propriétés. Les notations que l'on pourrait mettre en place peuvent bien entendu servir pour vérifier les conjectures avancées tout au cours de ces observations. Par exemple vérifier que :

« Tout multiple de quinze est un multiple de cinq »
« J'ai un multiple de quinze, il peut donc s'écrire
$15 \times n = 5 \times 3 \times n$
$= 5 \times (3 \times n)$ »
« J'ai donc un nombre qui s'écrit également sous la forme de cinq fois un nombre entier, c'est donc bien un multiple de cinq. »
Partant de cette situation, on pourra étendre ce type de raisonnement à la vérification d'autres types de propriétés comme par exemple :
« La somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de quatre »
« J'ai deux nombres impairs consécutifs, ils peuvent donc s'écrire : $2n + 1$, $2n + 3$

Leur somme s'écrira $(2n+1) + (2n+3) = (2n+2n) + (1+3)$
$= 4n + 4$
$= 4 \times (n+1)$
J'ai donc un nombre qui s'écrit également sous la forme de quatre fois un nombe entier, c'est donc bien un multiple de quatre. »

Les multiples de 3

1	2	**3**	4	5	**6**	7	8	**9**	10
11	**12**	13	14	**15**	16	17	**18**	19	20
21	22	23	**24**	25	26	**27**	28	29	**30**
31	32	**33**	34	35	**36**	37	38	**39**	40
41	**42**	43	44	**45**	46	47	**48**	49	50
51	52	53	**54**	55	56	**57**	58	59	**60**
61	62	**63**	64	65	**66**	67	68	**69**	70
71	**72**	73	74	**75**	76	77	**78**	79	80
81	82	83	**84**	85	86	**87**	88	89	**90**
91	92	**93**	94	95	**96**	97	98	**99**	100

Les multiples de 5

1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**
11	12	13	14	**15**	16	17	18	19	**20**
21	22	23	24	**25**	26	27	28	29	**30**
31	32	33	34	**35**	36	37	38	39	**40**
41	42	43	44	**45**	46	47	48	49	**50**
51	52	53	54	**55**	56	57	58	59	**60**
61	62	63	64	**65**	66	67	68	69	**70**
71	72	73	74	**75**	76	77	78	79	**80**
81	82	83	84	**85**	86	87	88	89	**90**
91	92	93	94	**95**	96	97	98	99	**100**

Les multiples de 6

1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10
11	**12**	13	14	15	16	17	**18**	19	20
21	22	23	**24**	25	26	27	28	29	**30**
31	32	33	34	35	**36**	37	38	39	40
41	**42**	43	44	45	46	47	**48**	49	50
51	52	53	**54**	55	56	57	58	59	**60**
61	62	63	64	65	**66**	67	68	69	70
71	**72**	73	74	75	76	77	**78**	79	80
81	82	83	**84**	85	86	87	88	89	**90**
91	92	93	94	95	**96**	97	98	99	100

Les multiples de 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	**20**
21	22	23	24	25	26	27	28	29	**30**
31	32	33	34	35	36	37	38	39	**40**
41	42	43	44	45	46	47	48	49	**50**
51	52	53	54	55	56	57	58	59	**60**
61	62	63	64	65	66	67	68	69	**70**
71	72	73	74	75	76	77	78	79	**80**
81	82	83	84	85	86	87	88	89	**90**
91	92	93	94	95	96	97	98	99	**100**

Les multiples de 9

1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10
11	12	13	14	15	16	17	**18**	19	20
21	22	23	24	25	26	**27**	28	29	30
31	32	33	34	35	**36**	37	38	39	40
41	42	43	44	**45**	46	47	48	49	50
51	52	53	**54**	55	56	57	58	59	60
61	62	**63**	64	65	66	67	68	69	70
71	**72**	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	**90**
91	92	93	94	95	96	97	98	**99**	100

Les multiples de 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	**15**	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	**30**
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	**45**	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	**60**
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	**75**	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	**90**
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les multiples de 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les multiples de 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les nombres premiers

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Comparer la grille des multiples de 7 aux autres grilles peut certainement faire apparaître les particularités de ce nombre. La réflexion qui en découle peut être intéressante avant d'aborder la recherche des nombres premiers.

Le crible d'ERATOSTHENE

Pour obtenir les nombres premiers, je procède de la manière suivante: Je supprime les multiples de 2 supérieurs à 2. Je supprime les multiples de 3 supérieurs à 3. Il y en a déjà des supprimés. Pourquoi? Je supprime les multiples de 4 supérieurs à 4. C'est inutile. Pourquoi? Je supprime les multiples de 5 supérieurs à 5. Il y en a déjà des supprimés. Pourquoi? Je supprime les multiples de 6 supérieurs à 6. C'est inutile. Pourquoi? Je supprime les multiples de 7 supérieurs à 7. Il y en a déjà des supprimés. Pourquoi? Je supprime les multiples de 8 supérieurs à 8. C'est inutile. Pourquoi? etc... Enfin n'oublions pas, au vu de la définition que l'on se donne d'un nombre premier (une paire de diviseurs), que le 1 devra aussi être supprimé de ce tableau.

Outils de travail pour l'élève

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3.2 Divisibilité, proportionnalité, échelles et égalité

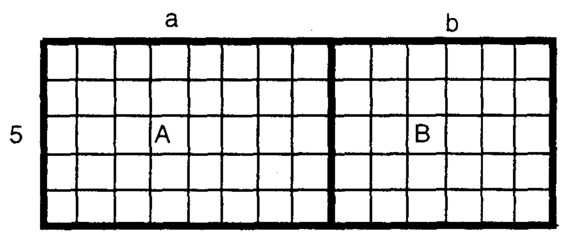
3.2.1 Divisibilité

Dans cette section, on illustre les notions de divisibilité de trois manières : par les représentations géométriques (aires), par le treillis et par le diagramme de Venn.
Une première piste didactique intéressante : lier la notion de divisibilité à des représentations géométriques sur quadrillage.

Dans les exemples suivants, A et B désignent des nombres de carrés (aires)

Premier exemple

A = 5a et B = 5b

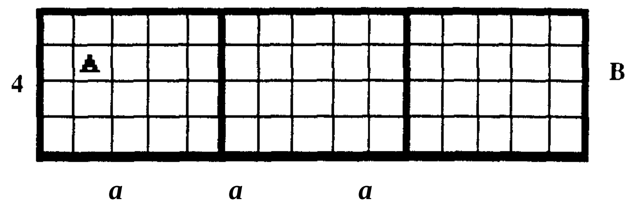


A+ B = 5(a+b)

Si 5 divise A et si 5 divise B alors 5 divise A+B est *une conséquence de la distributivité.* La somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.

Deuxième exemple

A=4a



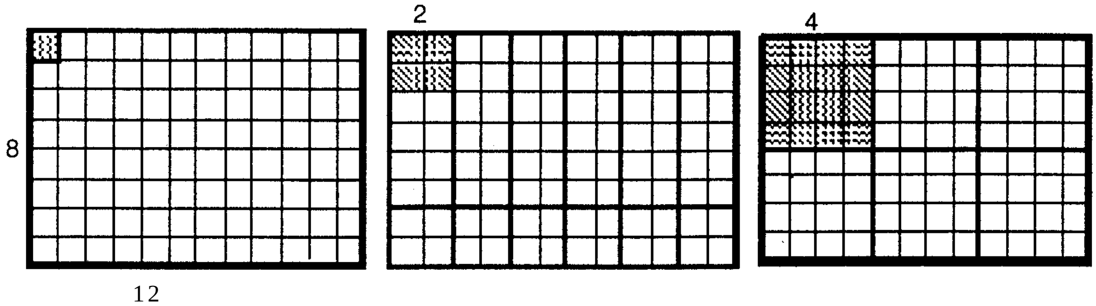
B= 3(4a) = 4a + 4a + 4a = l 2a = 4(3a)

Si 4 divise A et si B est un multiple de A alors 4 divise B

est *une conséquence de la commutativité et de l'associativité.*

Diviseurs communs et pgcd

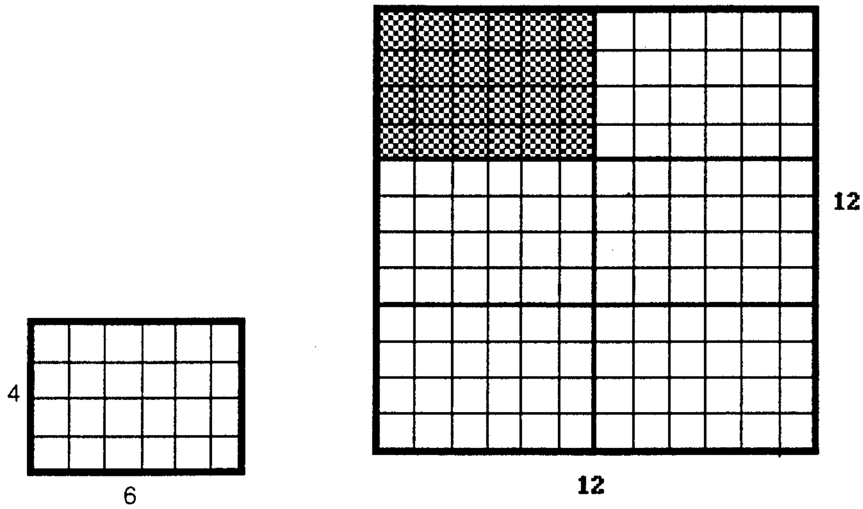
Avec quels carrés peut-on paver un rectangle de 12 sur 8 ? (diviseurs communs). Quel est le plus grand carré qui permet de faire ce pavage '? (pgcd)



Multiples communs et ppcm

Avec un rectangle de 6 sur 4, quels carrés peut-on paver ? (multiples communs)

Parmi ces carrés, quel le plus petit ? (ppcm)



Une deuxième piste didactique intéressante : la représentation en treillis des diviseurs d'un nombre naturel.

Diverses recherches sont possibles sur le treillis

- chercher les nombres premiers et les puissances de nombres premiers ;
- compléter un treillis à partir de certains de ses nombres ;
- chercher les opérateurs multiplicatifs, entiers ou fractionnaires, qui lient deux nombres du treillis ;
- chercher le pgcd et le ppcm de deux nombres du treillis ;

Par exemple : pgcd (20, 8) = 4, ppcm (20, 8) = 40
pgcd (3, 4, 5) = 1, ppcm (3, 4, 5) = 60.

Note

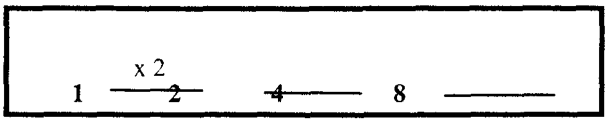
Se rappeler que le pgcd de deux nombres est le diviseur commun qui est multiple de tous leurs diviseurs communs, leur ppcm est le multiple commun qui est diviseur de tous leurs multiples communs.

Exemples

- *Treillis suivant une seule direction (un seul diviseur premier)*

Exemple pour le diviseur premier 2

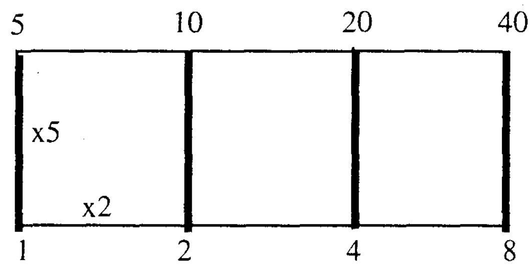
Div 8



- *Treillis suivant deux directions (deux diviseurs premiers)*

Exemple pour les diviseurs premiers 2 et 5

Div 40



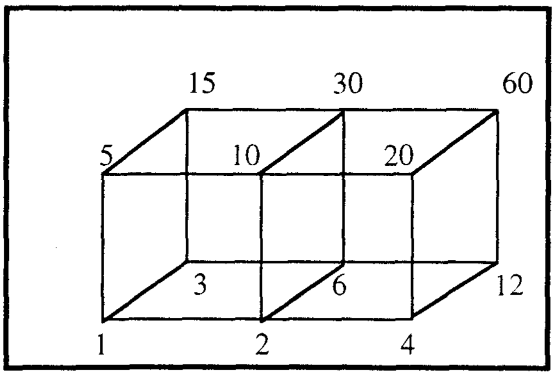
Note

Les liens peuvent suggérer des flèches relatives à la relation "divise" (qui ne sont toutefois pas toutes figurées) ; cela peut aussi servir à figurer des flèches d'opérateurs multiplicatifs.

- *Treillis suivant trois directions (trois diviseurs premiers)*

Exemple pour les diviseurs premiers 2, 3 et 5

Div 60



Note

Le CDS (Université de Mons-Hainaut) a produit un logiciel intéressant traitant de ce sujet. Il s'intitule CDS-

Math 6 Jeux mathématiques 1. Une brochure propose des activités basées sur les treillis.

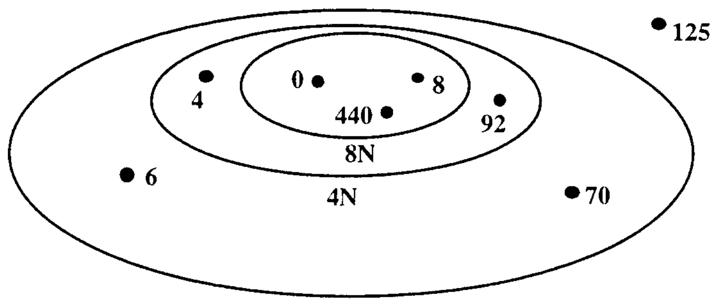
Le treillis fournit de manière organisée l'ensemble des diviseurs d'un nombre à partir des diviseurs premiers de celui-ci et de leurs puissances.

Note
Le treillis est une structure mathématique étudiée notamment par le mathématicien américain Marshall Stone (1934).
L' ensemble des nombres naturels ordonnés par la relation "diviseur de", qui est un treillis, met en lumière les propriétés de la divisibilité.

Une troisième piste didactique intéressante : le diagramme de Venn, un langage graphique pennettant d'exprimer certains concepts de base en ternes d'appartenance, d'inclusion et d'intersection.

Exemples

Les inclusions d'ensembles

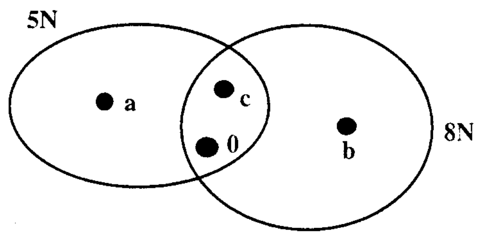


Tout multiple de 8 est multiple de 4 et tout multiple de 4 est multiple de 2

Les intersections d'ensembles

- Sur le diagramme suivant, a, b, c et d sont quatre des nombres suivants :

1 40 84 135 142 2408

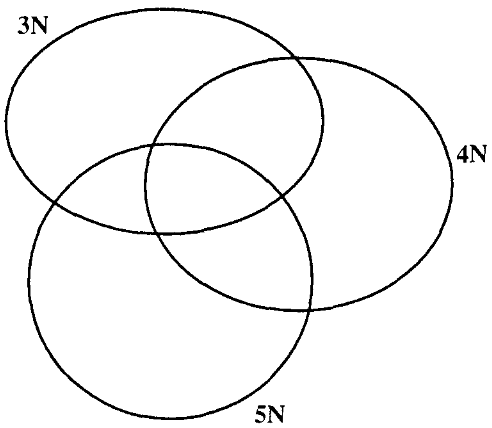


a=? b=? c=? d=?
Le plus petit nombre non nul à placer dans l'intersection de 5N et 8N est 40. Mais le plus petit nombre non nul à placer dans l'intersection de 6N et 8N est 24.

Tout multiple de 5 et de 8 est multiple de 40

Tout multiple de 6 et de 8 est multiple de 24

- Écrire la liste de tous les nombres inférieurs ou égaux à 60 qui se placent à l'intérieur de ce diagramme en feuille de trèfle.



De quels nombres s'agit-il ?

Conclusion

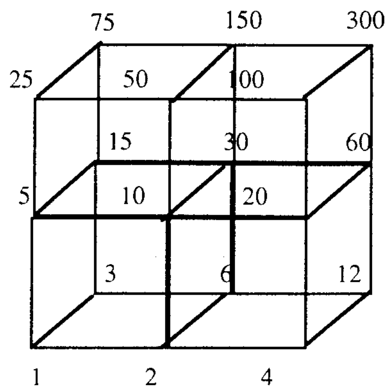
Les exemples choisis apprennent aux élèves à connaître les nombres naturels ; on ne demande pas d'élaborer une théorie à propos de ces pistes didactiques, mais de dégager les idées qu'elles mettent en évidence.

3.2.2 Proportionnalité

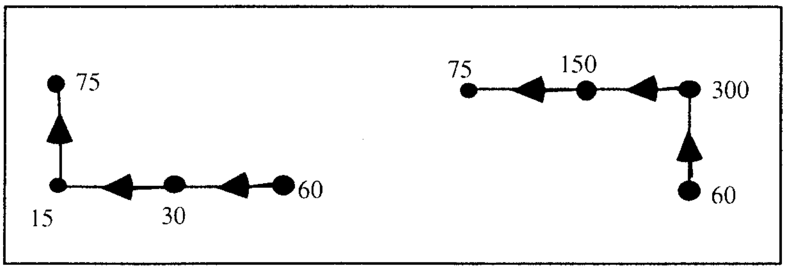
La proportionnalité découle de la divisibilité et y est liée étroitement.
Le treillis des diviseurs permet d'éclairer la "réduction à l'unité" dans les problèmes de "règle de trois".

Exemple :

60 g d'un article coûtent a F. J'en achète 75 g. Que vais-je payer ? Le treillis comprenant 60 et de 75 permet de comprendre le problème.



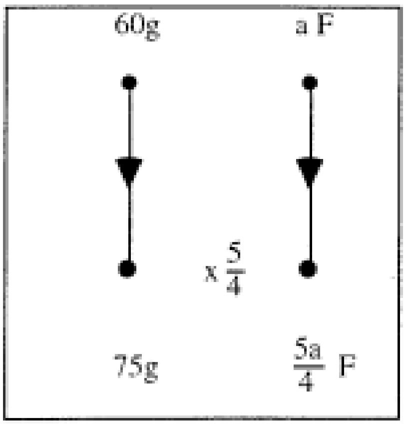
Sur ce treillis, repérons les plus courts chemins de 60 à 75.



60 x ½ x ½ x 5 = 75 = 60 x 5 x ½ x ½

L'unité commune est 15, pgcd de 60 et 75 **L'unité commune est 300, ppcm de 60 et** 75

Dans les deux cas, l'opérateur est x $_{5/4}$, l'ordre des facteurs n'influençant pas le résultat. Cet opérateur s'applique au prix comme à la quantité.

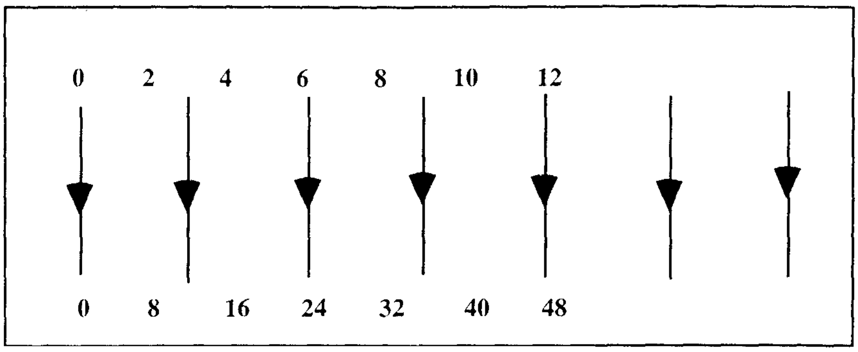


Une autre possibilité est de partir de deux ensembles de multiples qu'on met en correspondance.

Ces deux ensembles de multiples mis sous forme de tableaux de nombres constituent deux suites proportionnelles.

Exemple :

Des tableaux de la section 3.1, on extrait les premiers multiples de 2 et de 8.



A 6 x 100 = 600, correspond 24 x 100 = 2400.
A 6 + 4 = 10, correspond 24 + 16 = 40.
Qu'on peut utiliser ainsi :

A 600	correspond	2400
A 80	correspond	320
A 4	correspond	16
A 0,2	correspond	0,8
A 684,2	correspond	2736,8

Les problèmes de « règle de 3 » peuvent se résoudre selon un tel schéma.

Exemple :

Si 12 feuilles coûtent 48 F, que coûtent 32 feuilles ?
Combien de feuilles aura-t-on pour 204 F ?

3.2.3 Fractions

L'étude des fractions (1/2, 2/3, …) fait partie des programmes scolaires depuis des siècles et déjà en Egypte ancienne. Cet héritage peut convaincre que les fractions constituent un des concepts mathématiques les plus importants qu'on peut apprendre aux jeunes. Pourtant, son importance est quelque peu controversée.

D'abord, l'utilité pratique des fractions devrait se réduire, selon des idées venant des Etats-Unis et des pays anglo-saxons, à cause de l'abandon du système impérial des mesures (le pouce, le pied valant 12 pouces, le yard …). Abandon à portée très limitée chez nous ; l'idée mérite néanmoins d'être examinée.

Ensuite, l'usage des calculatrices et de la micro-informatique a réduit les nécessités de calculer formellement avec des fractions, soit que ces machines fournissent des résultats avec une approximation décimale suffisante, soit qu'elles les fournissent sous forme fractionnaire.

Certains posent la question : est-ce l'étude des fractions ou celle des décimaux qui doit avoir la priorité ou qui doit précéder l'autre ?

D'un autre côté, des enseignants en mathématiques estiment que l'étude des fractions constitue un tout qui a sa valeur formative. En outre, leur valeur propre serait telle que si les fractions ne sont pas enseignées assez intensivement dès l'école fondamentale, les élèves en ressentiront les inconvénients dans l'étude des mathématiques supérieures et de l'algèbre en particulier.

Il est un fait que les enfants de 11-12 ans obtiennent en général des résultats moyens à faibles, dans les questions relatives aux fractions posées lors de tests. Pourquoi ? Est-ce par ce que les professeurs enseignent mal les fractions, c'est-à-dire dans des situations mathématiquement pauvres, sans les faire sortir de situations problématiques réalistes, sans les immerger dans de petits modèles concrets, en un temps trop court ?

Pour devenir une matière organisée, la fraction doit être reconnue comme un nombre, comme l'inverse d'un nombre, comme un quotient. Elle doit s'appuyer sur les propriétés des opérations numériques ainsi que sur la relation de divisibilité.

Nos programmes considèrent que les jeunes de 13-14 ans en deuxième année du secondaire sont aptes à étudier ainsi le calcul sur les fractions. Aux termes entiers utilisés d'abord succèdent des décimaux limités, des termes littéraux…

Certains estiment que si les fractions étaient enseignées de manière continue jusqu'à 12-13 ans et dans des situations authentiques de résolutions problèmes, elles seraient mieux apprises et mieux comprises. C'est vrai pour des fractions « usuelles », mais trouvera-t-on des problèmes réalistes qui font intervenir les opérations sur des fractions « simples » telles que 11/21, 9/13, 5/7, 19/24 … ?

A un moment donné il faut se retourner vers l'idée que les fractions ont un caractère abstrait sans grande utilité pratique, mais qu'elles constituent une voie vers l'abstraction, avec des règles de calcul organisées, avec des expressions numériques dont le sens et la valeur ne s'estiment qu'au prix d'un bon coup d'œil mathématique.

De là, l'idée que l'étude des fractions développe le coup d'œil mathématique. On verrait plus clair si on disposait d'une évaluation de l'ensemble des élèves de 14-15 ans sur le thème des fractions et d'une analyse des obstacles qu'ils rencontrent.

On peut faire néanmoins quelques propositions qui reprennent les divers arguments.

- **Les fractions peuvent être enseignées, de manière informelle** et continue, chaque fois qu'une occasion se présente et en suscitant les occasions de le faire, dès le début de l'école fondamentale.

- **La suite des nombres naturels est bien connue : 1, 2 , 3 …** A chacun d'entre eux, 12 par exemple, correspondent deux opérations réciproques l'une de l'autre :

« multiplier par 12 » et
« prendre 1/12 e » .

Cette dernière désigne **l'action de partager.**
La fraction désigne aussi **la partie du tout.**
Le tout pris comme modèle peut être une forme géométrique plane (un carré, un rectangle…), un nombre, un objet, une longueur, une durée, un poids…

Selon le modèle, ¾ peut avoir trois sens :

- Un tout partagé en 4 parts égales, on en choisit 3,
- Parmi 4 objets dans un ensemble, on en choisit 3,
- 3 objets identiques partagés de 4 parts égales.

S'il s'agit de 12 œufs, on dit « ¾ en 12 vaut 9 » et on écrit ¾ x 12 = 9

- **Certaines fractions sont élémentaires, dans le sens qu'elles servent à en construire d'autres : ½, 1/3, 1/5 …**

Prendre ½ et puis ½, c'est prendre ¼
Prendre ½ et puis 1/3, c'est prendre 1/6

- **On élabore ainsi des familles de fractions,**

½	¼		(1)
½	1/3	1/6	(2)
½	1/5	1/10	(3)

qui s'étendent

(1)	1/8
(1) et (2)	1/12
(1) et (3)	1/20
(2) et (3)	1/30
(1), (2) et (3)	1/60

Les nombres 12, 20, 60 ne sont pas choisis au hasard ; ils ont toujours eu un grand rôle pratique. Il reste utile de les connaître précocement.

• **On relève des régularités qui élargissent l'idée de fraction.**

Grâce au tableau ci-dessous de multiples de 2, de 3, de 4, ... on révèle des familles de fractions égales, des rapports.

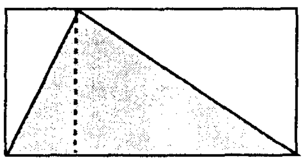
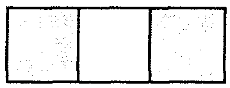
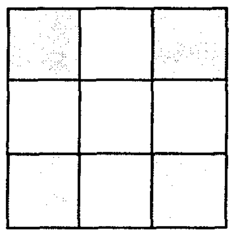
1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30

1/2=2/4=3/6=...

1/3=2/6=3/9=... 1 /4 = ...

3/5=6/10=9/15=...

Des rapports de longueurs et d'aires sont aussi éclairants,

1/2 2/3 4/9

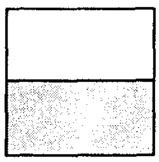
• **On relève aussi des régularités dans la comparaison, la somme, la différence de fractions.**

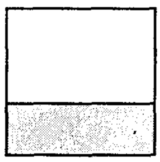
1/2 - 1/3 = 1/6

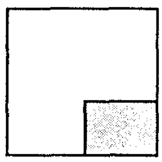
1/3 - 1/4 = 1/12

1/4 - 1/5 = 1/20

1/5 - 1/6 = 1/30


1/2


1/3

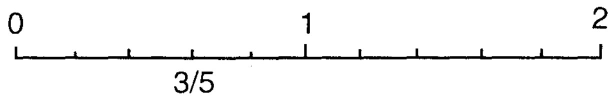

1/6

Cet autre exemple montre la fraction sous son aspect nombre

1/4		0,25		2/5		0,4	
	+1/4		*+0,25*		*+1/10*		*+0,1*
1/2		0,50		1/2		0,5	
	+1/4		*+0,25*		*+1/10*		*+0,1*
3/4		0,75		3/5		0,6	

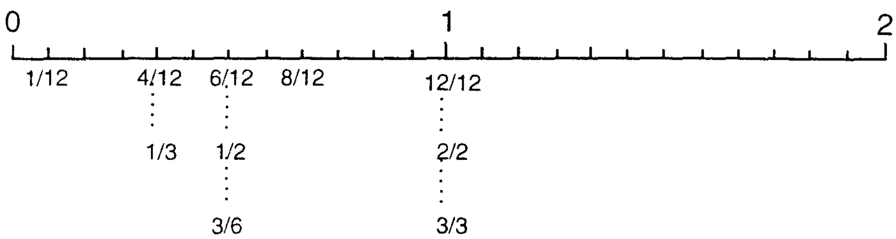
- **Une fraction peut être interprétée comme un point sur la droite numérique situé entre deux nombres entiers.**

Exemple : la fraction 3/5

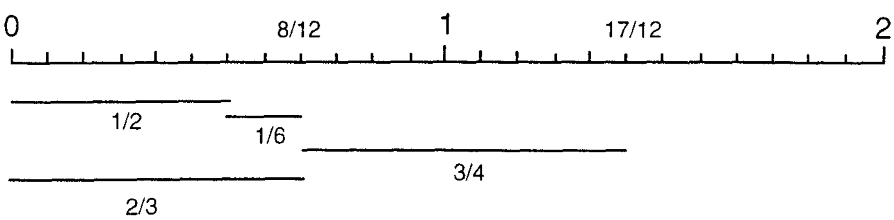


Cette représentation a deux intérêts : l'égalité et la somme de fraction.

Une droite est munie d'une graduation régulière et d'un repère fixe. Si le repère contient 12 sous-graduations, celles-ci peuvent se repérer en 1/2, 1/3, 1/4, 1/6, 1/12. Chaque graduation est repérée par des *fractions égales.*



Le choix judicieux du nombre de sous-graduations du repère et l'application du principe précédent fournit un modèle de l'addition ou de la soustraction de fractions. Un peu plus difficile peut-être, mais qui traite aussi bien des fractions supérieures à 1 que celles comprises entre 0 et 1.



1/2 + 1/6 = 4/6

2/3 + 3/4 = 17/12

La sous-graduation peut être 1/10, 1/15, 1/18, … La connaissance des diviseurs et multiples des nombres usuels vient bien à point.

- **Finalement, on s'attache à ne pas démoraliser enseignants et élèves à propos de fractions.**

L'expérience montre qu'une question simple,

« ½ - 1/3 »,

posée sans contexte dans un test, constitue un obstacle pour un nombre important de jeunes de 12 ans. On peut observer les élèves.

- Adoptent-ils l'attitude, en dehors de la règle formelle de calcul, de recourir à divers modèles pour trouver la valeur 1/6 ?
- Comment procèdent-ils quand on leur propose un modèle approprié (objet, nombre, figure géométrique), sur lequel ils peuvent agir ?

Connaître ces *démarches mathématiques utiles, connaître les nombres qui sont les termes des fractions* sont deux moyens d'améliorer la familiarité avec les fractions. Il reste entendu qu'avec des élèves de 12-13-14 ans, les questions doivent être simples. Enfin – il est important de le dire – si l'élève n'a pas assimilé entièrement le calcul sur les fractions à 14 ans, il peut encore progresser notablement en mathématiques.

3.2.4 Pourcentage

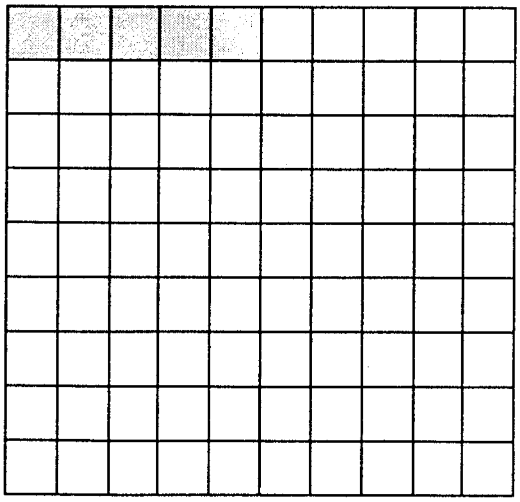
Le pourcentage peut être vu sous deux aspects :

L'aspect fraction

$$5\ \% = \frac{5}{100}$$

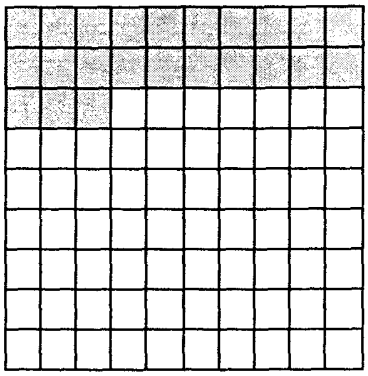
La grille des nombres de 1à 100 permet aussi d'y donner sens (partage en carrés).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23							
91									100



$5\ \% = \frac{5}{100} = 5$ carrés (correspondant à 5 dans la grille par exemple).

$23\ \% = \frac{23}{100} = 23$ carrés

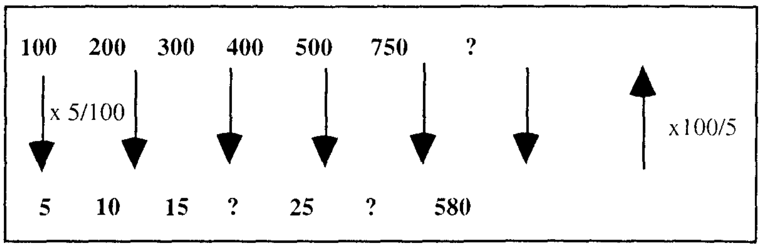


L'aspect ***opérateur*** *(fonction).*

Ici, on revient à la proportionnalité et au tableau de proportionnalité.

Exemples

$$\mathbf{5\%\ de} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{100}}\ \mathbf{de}$$



3.2.5 Échelle

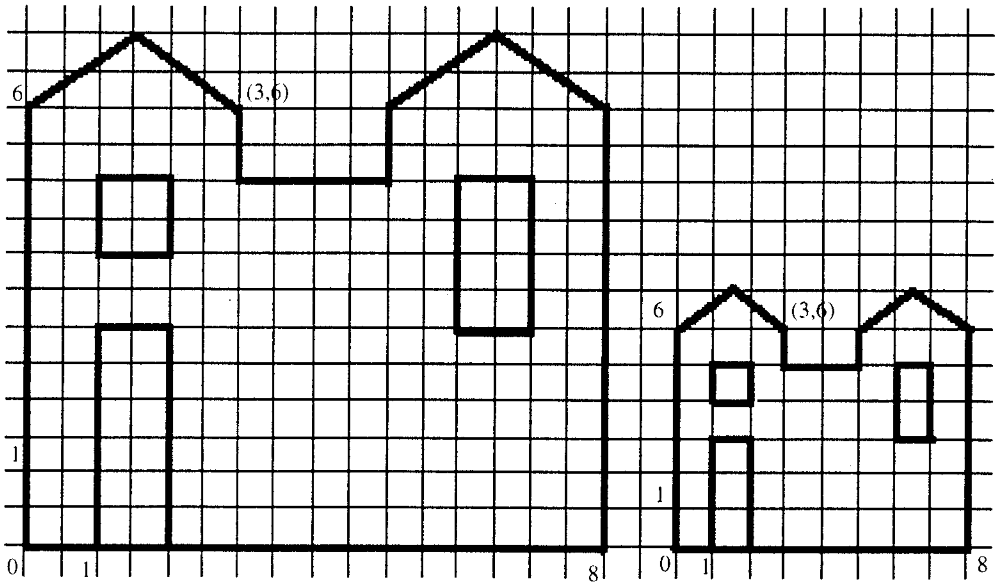
Ici aussi la fraction apparaît comme rapport et comme opérateur. On retrouve donc un problème lié à la proportionnalité et aux fractions.

Deux aspects:

- agrandir des objets (ou des figures) : $\frac{2}{1}$ x, $\frac{5}{1}$ x, $\frac{100}{1}$ x, ...
- réduire des objets (ou des figures) : $\frac{1}{10}$ x, $\frac{1}{200}$ x, $\frac{1}{10000}$ x,...

Exemples

La consigne d'échelle permettant aux élèves de réaliser le dessin du tableau ;
Utiliser des quadrillages et leurs repères pour agrandir ou réduire des figures.



On remarque que le coefficient de forme (rapport entre longueur et largeur) est conservé dans une reproduction à l'échelle (conservation de la forme).

3.2.6 Egalité

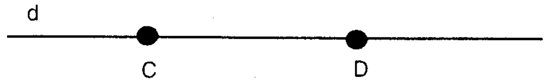
Le signe « = » est essentiellement considéré dans l'enseignement primaire comme un signe d'exécution d'une procédure, un signe qui annonce un résultat. Le début de l'apprentissage du calcul en fait un usage quasi exclusif dans ce sens. C'est le sens qu'a aussi le signe « = » sur les calculatrices et, en algorithmique, il est souvent le signe d'affection.

Dans l'enseignement secondaire, sans guère de transition, on passe au signe « = » dans son sens logique.

On écrit « = » entre deux termes (ou expressions) qui désignent le même objet, en l'occurrence le même nombre, la même expression littérale, le même point, la même droite.

Par exemple, 5 + 7 est un terme qui désigne le nombre 12, ce qu'on note par 5 + 7 = 12.
Le signe « = » exprime donc la synonymie entre des termes.

exprime que A et B désignent le même point, ou autrement dit que A et B sont deux points confondus.
On écrit aussi A = B.



La droite d est désignée soit par d, soit par CD, on dit parfois que d et CD sont deux droites confondues.
On écrit aussi d = CD.

$\frac{5}{15} = \frac{10}{30}$ exprime que $\frac{5}{15}$ et $\frac{10}{30}$ désignent le même nombre (un tiers).

Il est important d'en avoir conscience pour ménager une transition progressive entre le stade "procédural" , qui est celui de l'école primaire, et ce que d'aucuns appellent le stade "structural", qui est celui de l'algèbre. En algèbre, on opère sur les termes et sur les égalités en mettant en oeuvre les propriétés opératoires : termes et égalités sont considérés comme des objets. L'algèbre met en oeuvre des procédures algébriques de transformation d'expressions numériques et littérales. Le modèle de la balance est riche de possibilités pour découvrir ou illustrer les propriétés de l'égalité.

Il faut rappeler aussi deux propriétés essentielles de l'égalité : la symétrie (si a = b alors b = a) et la transitivité (si a = b et b = c alors a = c).

La symétrie de l'égalité permet de lire aussi bien de droite à gauche que de gauche à droite (analogie avec la commutativité) ; la transitivité de l'égalité intervient dans de nombreux raisonnements algébriques ou géométriques.

Le mot « égal » est souvent utilisé comme raccourci : on parle de figures égales, de côtés égaux, d'angles égaux,... Il convient de préciser qu'il s'agit alors d'une égalité « à une isométrie près ».

La préférence pour l'égalité, plus simple, s'exprime ainsi :

- pour des segments : [AB] isométrique à [CD] par $|AB| = |CD|$, « AB et CD ont la même longueur » ;
- pour des angles : Â isométrique à Ô par amplitude de Â = amplitude de Ô, en abrégé : $|\hat{A}| = |\hat{O}|$, ou par « Â et Ô ont la même amplitude ».

En conclusion, il est important que les professeurs du début du secondaire assurent harmonieusement l'adaptation au rôle du signe « = ». On peut souhaiter aussi que les instituteurs s'attachent aussi à l'égalité logique. Par exemple, la procédure suivante respecte l'égalité :

17 x 3 = ?
10 x 3 = 30
7 x 3 = 21
30 + 21 = 51
donc 17 x 3 = 51.

3.3. Traitement de données

Dans de nombreux domaines qui ne sont pas à priori mathématiques, on trouve de nombres présentés sous forme de tableaux, de diagrammes et de graphiques divers.

3.3.1 Observation des questions et réponses du test .

Les questions du test visaient deux démarches de base, l'une à partir d'un tableau de nombres, l'autre à partir d'un graphique .

Les compétences évaluées lors de ce test étaient :

- Trouver les informations pertinentes dans un *tableau* à double entrée et effectuer des comparaisons entre des valeurs de ce tableau. (Question 13),
- Trouver les informations pertinentes dans un *diagramme* et les comparer. (Question 14)

Partant d'un tableau de nombres obtenu par des comptages, des mesures … on relève des informations, selon une difficulté croissante.

* *Lire* la valeur correspondante à *deux caractères* donnés (exemple : quelle superficie de ses terres la Grèce consacre-t-elle à l'élevage ?).

Pour y répondre, il faut repérer la ligne et la colonne adéquates dans le tableau des nombres et ensuite lire la valeur.

Constatation : la lecture est simple, il suffit de repérer un rang et une colonne. Beaucoup d'élèves donnent la bonne réponse.

* *Lire* les valeurs correspondantes à *un caractère* donné et parmi ceux-ci choisir la plus grande, la plus petite … (exemple : quel pays consacre le plus faible pourcentage de ses terres à l'élevage ?)

Pour y répondre, il faut repérer la ligne ou la colonne dans le tableau de nombres et y choisir la valeur qui correspond à la condition donnée.

Constatation : les causes d'erreurs portent sur différents points :

- Confusion de colonnes (*Italie – Irlande*),
- Utilisation de la valeur précédente (6,5 % pour le Danemark) pour trouver la différence demandée (10,5 %),
- Confusion entre rapport et différence.

* *Comparer* deux valeurs, trouvées de la même manière qu'aux points précédents.
Trouver leur rapport, leur différence.

Constatation : Très peu d'élèves donnent la bonne réponse.

Il faut reconnaître que la formulation de la question pouvait prêter à confusion.

D'autre part, certains élèves n'ont pas fait le lien entre les sources de données dans la question et dans le tableau.

Partant d'un graphique donné, on relève des informations.

On notera bien que le graphique utilisé dans le test est un graphique en bâtons. Celui-ci est représenté par des rectangles non accolés, car il ne s'agit par d'un histogramme, qui viserait lui une variable numérique continue.

**Lire* la valeur correspondant à un caractère donné.
Pour répondre, il faut lire une ordonnée en tenant compte de sa graduation (origine et unité), ce qui ramène à la compétence étudiée plus haut (lire une *échelle graduée*)

Constatation : certains élèves n'ont pas vu le *sens de la lecture* des données sur les axes ou ont fait une *lecture partielle* des données.

**Comparer* deux valeurs trouvées.

Constatations : certains élèves,

- N'ont pas indiqué *l'unité*
- Ont utilisé uniquement les repères indiqués, sans penser à sous-graduer
- Ont mal repéré les données à utiliser.

* *comparer* deux valeurs, trouvées de la même manière qu 'aux points précédents. Trouver leur rapport, leur différence.

Constatation : Très peu d'élèves donnent la bonne réponse.

Il faut reconnaître que la formulation de la question pouvait prêter à confusion.

D'autre part, certains élèves n'ont pas fait le lien entre les sources de données dans la question et dans le tableau.

Partant d'un graphique donné, on relève des informations.

On notera bien que le graphique utilisé dans le test est un graphique en bâtons. Celui-ci est représenté par des rectangles non accolés, car il ne s'agit pas d'un histogramme, qui viserait lui une variable numérique continue.

**Lire* la valeur correspondant à un caractère donné.
Pour répondre, il faut lire une ordonnée en tenant compte de sa graduation (origine et unité), ce qui ramène à la compétence étudiée plus haut (lire une *échelle graduée)*

Constatation : certains élèves n'ont pas vu le *sens de la lecture* des données sur les axes ou on fait une *lecture partielle* des données.

**Comparer* deux valeurs trouvées.

Constatations : certains élèves,

- N'ont pas indiqué *l'unité*
- Ont utilisé uniquement les repères indiqués, sans penser à sous-graduer
- Ont mal repéré les données à utiliser.

3.3.2 Les graphiques comme outils de communication

Les nombres nous renseignent *bien,* un schéma nous montre *mieux* et un graphique nous montre *encore bien mieux.* C'est pour cette raison que l'on emploie très souvent les graphiques dans l'information et la publicité.

Les élèves arrivent de *l'école fondamentale* avec des approches variées des graphiques : la météorologie, le poids ou la taille d'un enfant, d'un animal, la participation à diverses activités, …

Au fondamental, il s'agit principalement d'apprendre à lire, à interpréter, à comparer, à réaliser des tableaux, des arbres, des diagrammes, des graphiques.

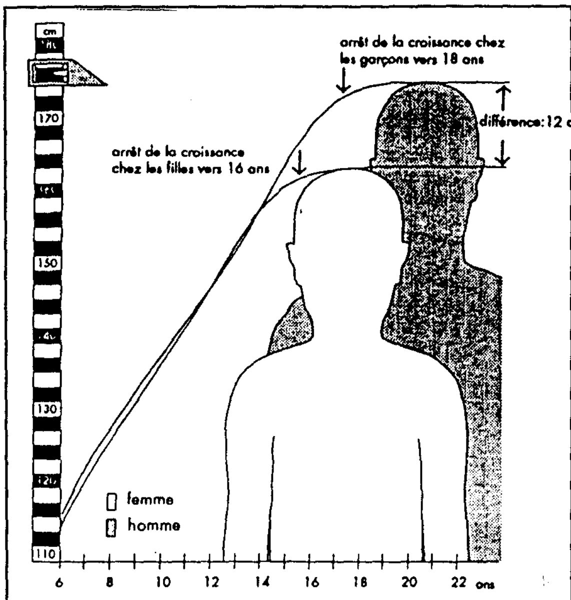
Au Premier Degré, les objectifs du programme s'énoncent :

1. Lire des représentations graphiques.
2. Organiser des informations chiffrées issues de la vie courante, de l'actualité, d'autres branches et répondre à des questions à leur propos.

Voir détails dans ce programme.

Familiariser les jeunes à différentes représentations de tableaux de nombres et de graphiques et harmoniser les connaissances.

Des tableaux de nombres, de graphiques trouvés dans la presse, dans des livres documentaires, des guides touristiques, des documents santé, … constituent le point de départ.



Tous parents, Tous différents

Données fournies par M. Vercauteren (Laboratoire d'Anthropologie et de Génétique humaine, ULB) et dessin de P. Semal (in N. Hubert van Blijnburgh et R. Orban « 5 Milliards d'hommes : tous parents, tous différents », IRScNB, 1993)

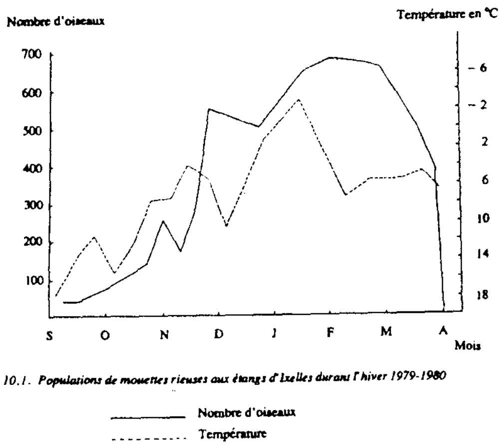
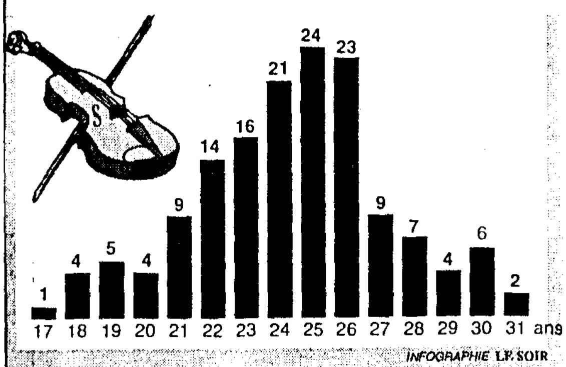


Fig. 10.1. Populations de mouettes rieuses aux étangs d'Ixelles durant l'hiver 1979-1980

Courbe de population des mouettes rieuses

On a mis en parallèle la courbe de population et une courbe de température (basses températures au-dessus). Il y a, du moins l'automne, une assez bonne corrélation entre les deux, ce qui semble indiquer que leur arrivée de plus en plus massive en ville est commandée par le refroidissement du temps. L'allure générale de la courbe montre bien qu'il s'agit d'oiseaux hivernant, ils ont complètement disparus de la ville le 28 mars.

Extrait du document : « les arbres et les oiseaux de la ville », du centre technique et pédagogique de la Communauté Française de Framerie. Mars 1980



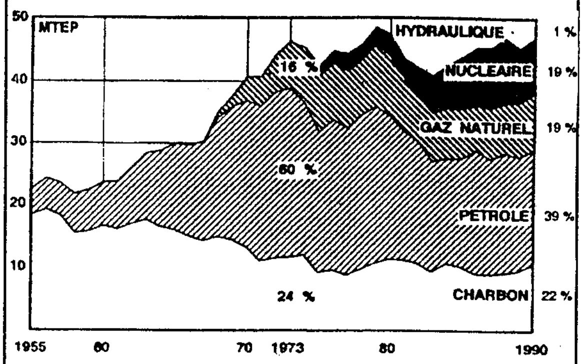
Répartition par âge des candidats

Concours Reine Elisabeth 1997

Extrait : Musique : Participation au concours Reine Elisabeth.

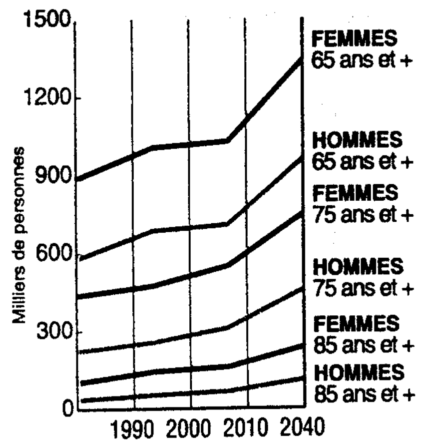
Infographie - LE SOIR (8/5/1997)

Consommation d'énergie primaire - Belgique



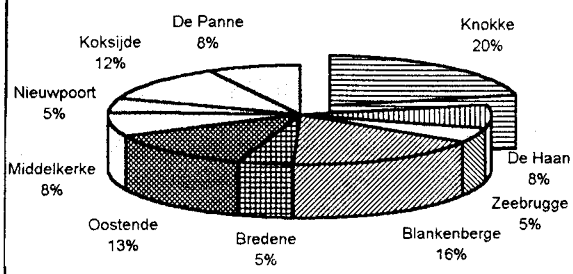
Extrait : livret pédagogique 10-14 ans. Domaine touristique de Blegny

Profil des + de 65 ans jusqu'en 2040

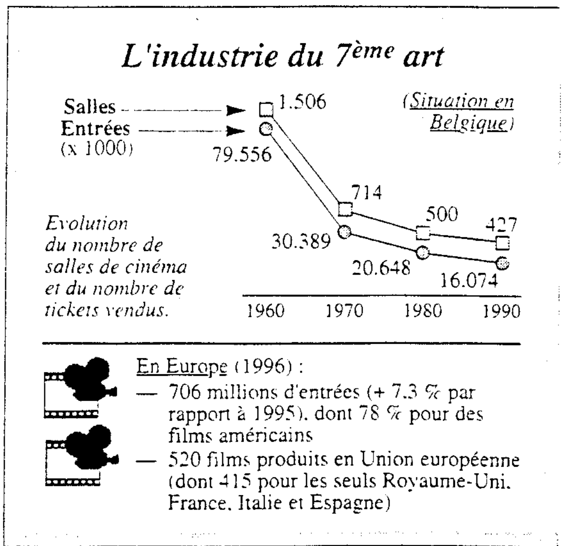


Extrait : « Demain, je serai vieux » Revue Profil n°1 - janvier 91 - Fémada. Source INS

Les voyages d'un jour à la mer



Graphique réalisé à partir de « Une maréee de Touristes » Revue 1 D n°18 - 15 avril 1997. Ed. Averbode



Extrait : « Le marché du cinéma » Fiche d'actualité du 7/5/1997

ATTENTION

Il est indispensable de garder les yeux bien ouverts lors de l'examen d'un graphique.

Lorsque le zéro n'est pas sur l'échelle, c'est à dire si l'échelle complète n'est pas représentée, les augmentations ou les diminutions paraissent agrandies, dès lors, il est bon de se représenter où se trouve le zéro.

L'échelle peut être graduée par 2, par 5, par 10, ... il est nécessaire de bien reconnaître la valeur d'une graduation pour lire une donnée.

Enfin, un graphique sans échelle n'a aucune valeur.

Les activités sur ces graphiques donnent l'occasion :

- *D'observer* et *d'analyser* les différentes représentations : en bâtons, histogrammes, diagrammes circulaires, et d'en voir les intérêts.
- De *comprendre* l'importance de la place de l'origine sur le graphique et de l'échelle des unités.
- De *repérer la légende* (les variables en présence), de bien comprendre pour replacer les valeurs dans leur contexte (voir si la réponse a du *sens*).
- D'utiliser le *repère* pour trouver les valeurs et pour les *comparer* .
- De stimuler la réflexion personnelle et *l'esprit critique* (en fonction du contexte).
- D'introduire progressivement des termes usuels et leur signification : effectif, fréquence, axe, ordonnée, abscisse, origine …

Choisir et réaliser une représentation graphique pour rendre compte d'une situation

Les enquêtes, les mesures lors d'expériences fournissent des résultats bruts qui doivent être dénombrés, triés, classés, organisés, avant de pouvoir tirer des conclusions.

Ce n'est qu'après avoir mis ces résultats sous forme de tableaux et de graphiques qu'on pourra se livrer à leur analyse.

Mettre les élèves *en situation de réalisation* consiste, par exemple, à

- Faire des relevés lors d'un voyage, d'une expérience, …
- Traiter des questions issues d'autres branches : relever en éducation physique, des résultats de sauts, des rythme cardiaques, …, en sciences, des croissances de plantes, des compositions d'aliments, …, en étude du milieu, des évolutions de populations, des répartitions d'énergie, …
- Comparer des aires et des périmètres de figures, observer la variation d'une grandeur en fonction d'une autre.
- Choisir la représentation la mieux adaptée : tableau de nombres, graphique en bâtons, graphique circulaire, histogramme, ainsi que le support : papier quadrillé, millimétré, …
- Choisir les unités adéquates (graduations des axes) et bien les utiliser.
- Utiliser les graduations des axes, la mesure des angles en degrés et les pourcentages.
- Exposer oralement les résultats observés.
- Evaluer la plausibilité du résultat …

Pistes pour réaliser différents diagrammes
*** Diagramme en rectangle et diagramme circulaire***

Le diagramme en *rectangles* permet d'exprimer lire les valeurs (effectifs), des différences et des rapports. Il peut se traduire en diagramme circulaire.

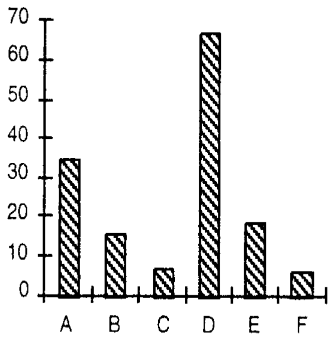
Le diagramme circulaire est constitué d'un disque ou d'un demi-disque partagé en secteurs, représentant les parties d'un tout, souvent exprimée en pour-cents. Le diagramme circulaire illustre bien les proportions entre les différentes parties. Son élaboration nécessite des calculs de pourcentages et de mesures d'angles

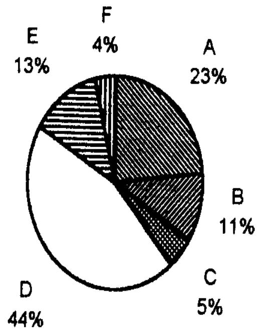
Exemples :

Election du délégué des Premières.

Six élèves sont candidats pour le poste de délégué des premières, 152 élèves ont participé au vote.

Candidats	Nombres de voix obtenues
A	35
B	16
C	7
D	67
E	19
F	6



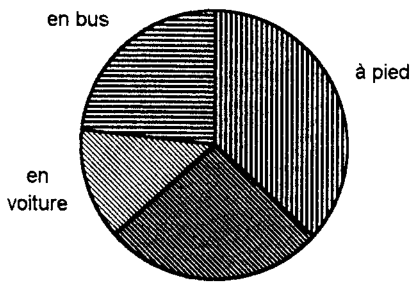


D'autres domaines peuvent être analysés : les moyens de transport, les loisirs, l'alimentation, l'argent de poche des jeunes, …

Moyens de locomotion

Parmi 30 élèves, 11 viennent à pied, 8 en vélo, 4 en voiture et 7 en autobus.

	Total	à pied	à vélo	en voiture	en bus
Effectif	30	11	8	4	7
Mesure en degrés	360	132	96	48	84



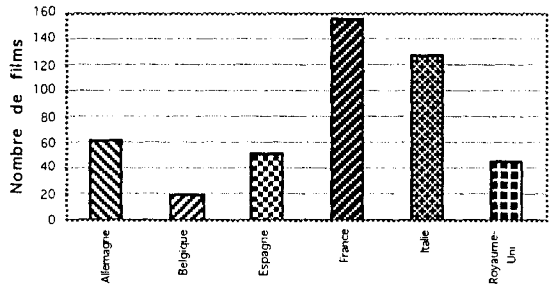
L'effectif est le nombre d'éléments d'une catégorie.

L'exemple suivant montre comment on peut traiter des données pour en obtenir d'autres. On met ainsi en évidence de nouvelles informations.

Le cinéma en Europe

Voici un tableau comparatif du nombre de films produits en 1990, 1991 et 1992 dans différents pays de la Communauté européenne et un graphique en bâtons pour l'année 1992.

	1990	1991	1992
Allemagne	48	72	63
Belgique	9	9	20
Espagne	47	64	52
France	146	156	155
Italie	119	129	127
Royaume-Uni	60	48	47



Années 1990, 1991, 1992	Nombre de films produits	Pourcentage	Amplitude des angles du secteur
Allemagne			
France			
Italie			
Royaume-Uni			
Total :		100 %	360°

Compléter le tableau des productions de ces quatre pays.

Tracer un diagramme en rectangle et un diagramme circulaire.

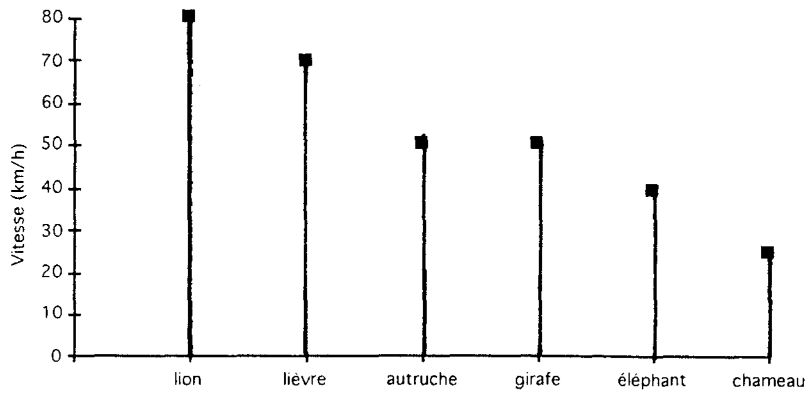
Expliquer verbalement les observations.

*** Diagramme en bâtons**

Le diagramme en bâtons est semblable au diagramme en rectangle. La longueur des segments verticaux dans la graduation de l'axe vertical donne l'effectif de chaque *catégorie.*

Les champions de vitesse

Animal	Vitesse (km/h)
autruche	50
lion	80
éléphant	40
lièvre	70
girafe	50
chameau	25



Des exemples peuvent être pris dans le domaine des plantes, de l'élevage, de la biologie..

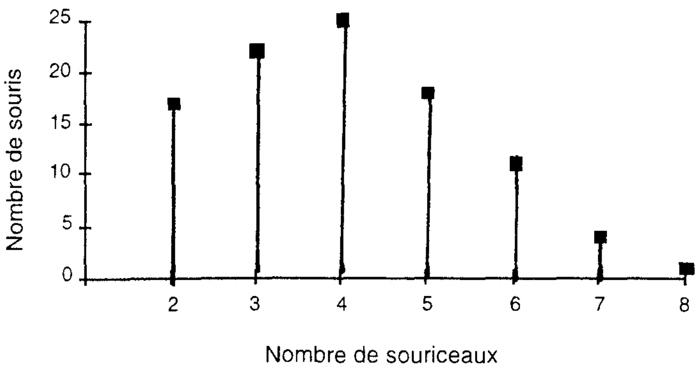
Les souriceaux

Les élèves de première élèvent des souris, ils ont recensé le nombre de petits nés à la première portée.

nombre de souriceaux	2	3	4	5	6	7	8
nombre de souris	17	22	25	18	11	4	1

On lit : 17 souris ont eu 2 souriceaux, 22 souris en ont eu 3, ...

Le diagramme en bâtons illustre bien les types de nichées ainsi que celle qui a le plus grand effectif (4 est le *mode*).



* Diagramme temporel

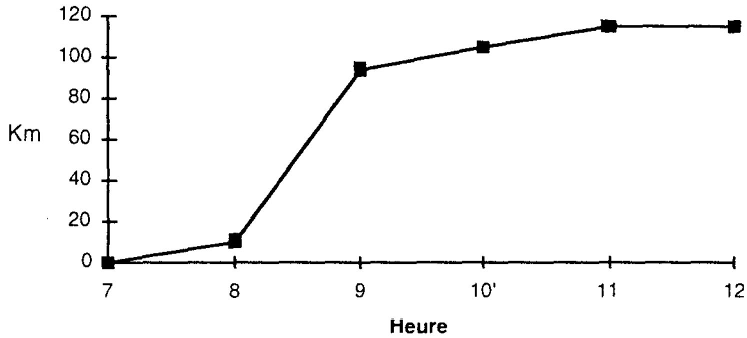
Le diagramme temporel est utilisé pour représenter l'évolution d'une grandeur dans un intervalle de temps.

Exemples

Histoire d'une excursion

On joint les sommets du digramme en bâtons pour indiquer l'évolution. Cela ne signifie pas qu'à 7:30 h on avait parcouru 5 km, ... Les valeurs intermédiaires n'ont pas de sens.

Heure	Position (km)
7	0
8	10
9	95
10'	105
11	115
12	115

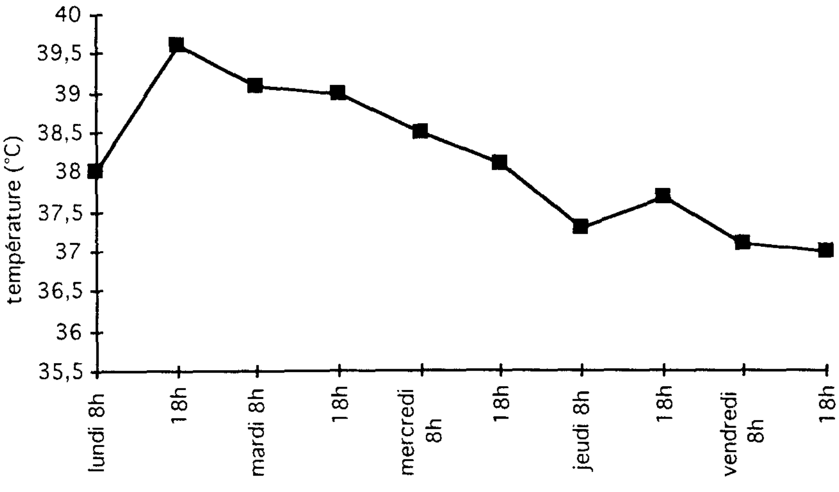


L'origine de l'intervalle du temps n'est pas toujours à l'intersection des axes.

La température d'un malade

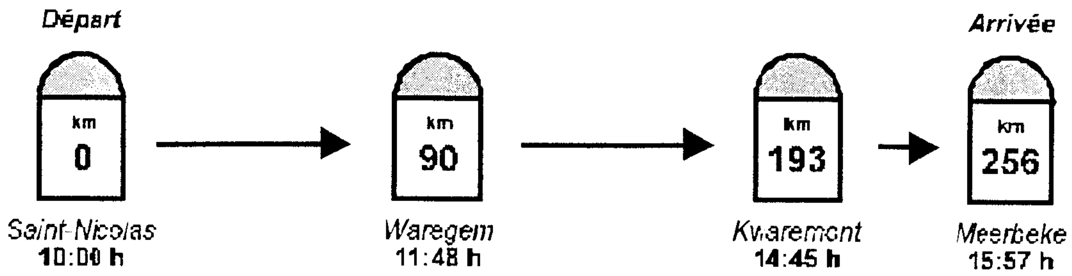
Voici la feuille de température d'un malade. On peut y lire à quel moment la fièvre était la plus forte et comment la température a évolué vers la normale.

Ici également on ne peut pas affirmer que le mercredi à 12 h le malade a eu 38,3° C.



Tour des Flandres 1997

Voici le schéma du parcours du vainqueur, le Danois Rolf Sörensen :



En partant de ces données, tracer un graphique temporel et déterminer dans quel intervalle la vitesse moyenne a été la plus élevée. D'autres questions sont bien sûr intéressantes.

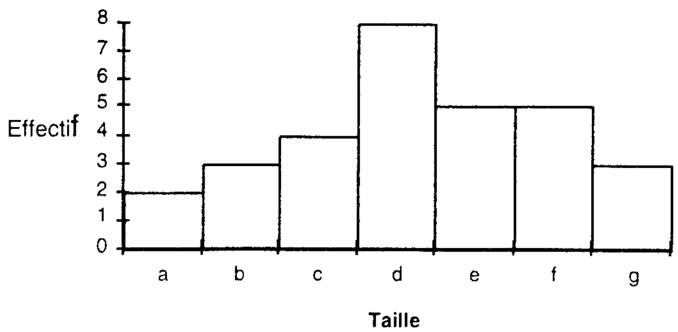
* Histogramme

L'histogramme vise une *variable numérique continue.*

Classement d'élèves selon leur taille

Les 30 élèves d'une classe ont été répartis selon leur taille.

Taille t en cm	$130 \leq t < 135$	$135 \leq t < 140$	$140 \leq t < 145$	$145 \leq t < 150$	$150 \leq t < 155$	$155 \leq t < 160$	$160 \leq t < 165$
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
Effectif	2	3	4	8	5	5	3



La taille de fleurs semées, la longueur de rivières se prêtent aussi à ce type de diagramme.

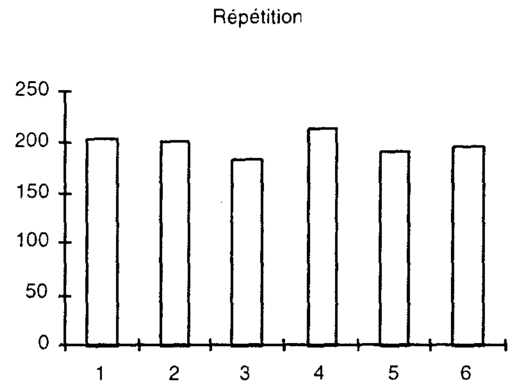
Les jeux de dés, une approche des probabilités

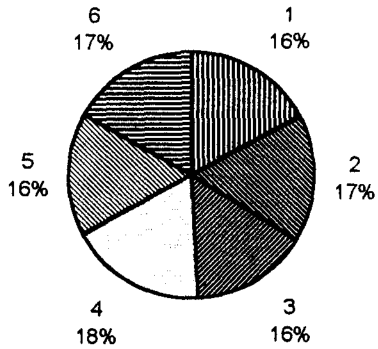
Le calcul des probabilités est né, entre autre, de l'étude des jeux de dés. Le mot "hasard" vient de l'arabe. "al-zahr" qui signifie "dé à jouer", le mot "aléatoire" vient du latin "alea" qui signifie "jeu de dé" ou "hasard" et le mot "chance" vient du vieux français "chéance" qui signifie "manière dont tombent les dés". (...)

Lorsque l'on lance un dé bien équilibré, on dit qu'on a "une chance sur 6 d'obtenir le 1, d'obtenir le 2, le 3, ...".

Chaque élève lance *50 fois* le dé. Il y a 24 *élèves* dans la classe. On relève les résultats dans un tableau

Faces	Comptages	Répétitions (1)
1	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 || ...	205
2	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 |||| ...	202
3	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||| ...	186
4	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ...	215
5	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ...	193
6	卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||| ...	199
	Effectif :	1200





On observe que les répétitions sont « proches » de 200, même si l'écart entre les valeurs extrêmes, 215 – 186 est 29. Les fréquences sont proches de 16,7.

D'autres expériences peuvent être menées : lancer une pièce de monnaie et compter les « piles » et « faces », … .

Les notions *d'effectif*, de *répétition,* de *fréquence* sont sous-jacentes dans ces exemples.
La répétition est le nombre de fois que sort une face donnée du dé.
La fréquence est l'expression de la répétition en pour-cent de l'effectif.

La *probabilité* est une idéalisation mathématique de la fréquence. Pour mesurer pratiquement une probabilité, on ne connaît qu'un moyen : faire une longue série d'expériences et noter la fréquence. La fréquence est la mesure de la probabilité[6] .

Les tableaux de nombres et les représentations graphiques voient leur utilité dans les *statistiques*. Leur analyse amène les notions de *moyenne arithmétique, mode, étendue.*

(*Exemple : taille des élèves, nombre d'enfants par famille…)*

Les statistiques organisent des données numériques et les analysent. La science naît parfois d'un jeu. La théorie des probabilités est née d'un simple jeu de dés et a acquis de plus en plus d'importance dans la science contemporaine.

3.3.3 Conclusion

Pour que les activités proposées ci-dessus aient du sens, il convient qu'elles soient réelles, actuelles et adaptées aux intérêts des jeunes.

Il est bon d'apprendre à ceux-ci à lire de manière critique les tableaux de nombres et les graphiques fournis par les médias.

Un graphique dans un repère bien précisé donne une vision globale plus immédiate qu'un tableau de nombres.

En dehors des graphiques construits à partir de mesures directes, on peut aussi représenter les variations de périmètres, d'aires, de volumes en fonction d'une dimension de la figure.

Cet exemple prépare la notion de fonction et utilise la notion de proportionnalité. Il peut conduire à des fonctions à une variable, du second ou troisième degré.

Le passage de la représentation de phénomènes concrets à celle de la fonction abstraite sera une nouvelle étape.

[6] Contremanuel de statistiques et probabilités. M. Peltier-N.Rouche-A.Manderick

3.4 Périmètre, aire, volume

La lecture des résultats aux questions de géométrie est interpellant :

- 34,9 % des élèves de l'échantillon fournissent une réponse incorrecte au calcul de l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont données (question 16 A1) ;
- 62,2 % des élèves de l'échantillon ne parviennent pas à disséquer une figure en figures élémentaires et à mentionner sur cette figure les mesures utiles pour rechercher l'aire (question 16B1) ;
- 71,1 % des élèves fournissent ensuite une réponse incorrecte au calcul de l'aire de la figure complexe (question 16B2) ;
- 51,1 % des élèves ne parviennent pas à déterminer l'aire d'un triangle et d'un losange inscrits dans un rectangle donné (question 19) ;
- 41,7 % des élèves échouent dans le calcul du volume d'un parallélépipède rectangle.

Après avoir évoqué la pertinence de ces questions par rapport au programme du 1er degré de l'enseignement secondaire, nous analyserons quelques productions d'élèves dans les questions 16A1, 16B1, 16B2 et 19. Cette analyse nous permettra à la fois d'identifier l'origine des difficultés chez les élèves et aussi de mettre en évidence la diversité des démarches qu'ils utilisent.

Enfin, nous présenterons des pistes d'activités en vue d'adapter les apprentissages à la diversité des élèves de nos classes.

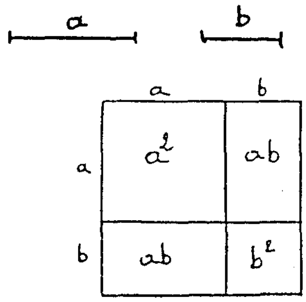
3.4.1 Pertinence de l'évaluation par rapport au programme du 1e degré du secondaire

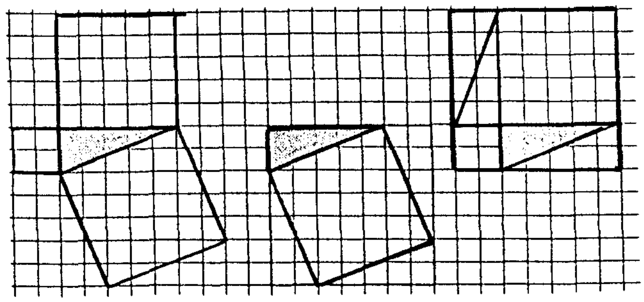
Le périmètre (la longueur), l'aire, le volume sont des grandeurs.

A l'école fondamentale, les grandeurs occupent une place primordiale dans la plupart des apprentissages mathématiques. Ce sont les grandeurs qui donnent du sens aux nombres, qui favorisent la compréhension du système de numération de position, qui contribuent à la construction des concepts géométriques et à la résolution des problèmes de la vie courante.

Dans l'enseignement secondaire, les grandeurs sont encore utilisées, mais à un niveau plus conceptuel. La formalisation des concepts de carré, de triangle, de rectangle, d'aire, de volume permet donner du sens au calcul algébrique et aux théorèmes géométriques :

ex. : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ compréhension du théorème de Pythagore[7]





Des relations peuvent être établies entre les deux exemples ci-dessus.

3.4.2 Analyse de productions d'élèves

Dans la perspective d'une évaluation formative centrée sur l'appropriation des concepts par chaque apprenant, l'observation des productions des élèves est essentielle. Elle permet à l'enseignant d'analyser les stratégies utilisées par les enfants et de tenter de comprendre comment ils se représentent le problème.

Cette analyse débouche naturellement sur une évaluation et une adaptation de la didactique qui a produit les effets observés.

Dans cette optique, examinons des réponses d'élèves aux questions 16A, 16B, 19, 17 :

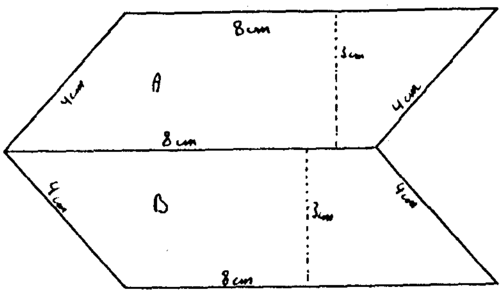
1. *quelle est la nature des erreurs commises ?*
2. *quelles démarches utiles les élèves qui ont réussi ont-ils mobilisées ?*
3. *quelles conclusions tirer ?*

L'analyse qui suit se fonde sur les 25 copies d'élèves d'une même classe.

**Des réponses satisfaisantes*

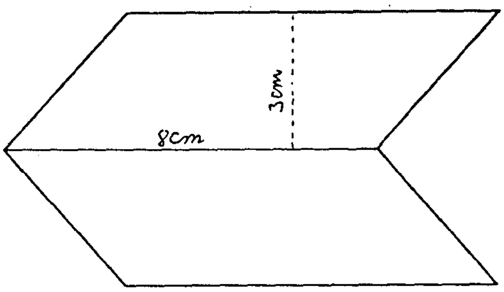
Les productions des enfants à la question 16B1 frappent par leur diversité et leur richesse.
Deux élèves partagent la figure en deux parallélogrammes : l'un calcule l'aire des deux parallélogrammes (mais en commettant une erreur), …

[7] CREM, Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Nivelles, 1995



Parallélogramme A : $1 cm^2 \times \frac{8}{2} \times 3 = 12 cm^2$
" B = $1 cm^2 \times \frac{8}{2} \times 3 = 12 cm^2$
Aire du polygone = $24 cm^2 + 24 cm^2 = 24 cm^2$

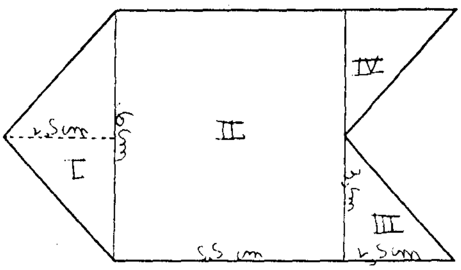
Un autre trace une seule hauteur, utilisant vraisemblablement l'existence d'un axe de symétrie :



Réponse: $1 cm^2 \times \overset{24}{(8 \times 3)} \times 2 = 48 cm^2$

Quelques élèves ont découpé la figure en un rectangle et en trois triangles et calculé selon des processus différents :

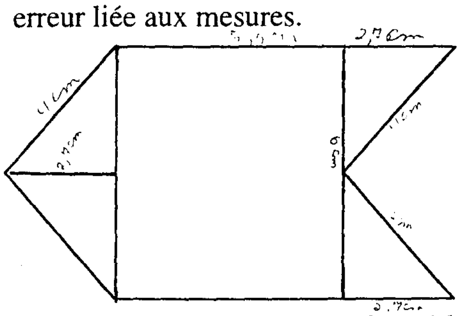
- décomposition en figures simples, calcul de l'aire de chacune des figures, avec une erreur dans la somme



Aire du I = $1 cm^2 \times \frac{6}{2} \times 2,5 = 7,5 cm^2$
" " II = $1 cm^2 \times 6 \times 5,5 = 33 cm^2$
" " III = $1 cm^2 \frac{3}{2} \times 2,5 = 3,75 cm^2$
" " IV = $3,75 cm^2$

Réponse: 46,6 cm²

- décomposition en figures simples, reconstitution mentale d'un losange à partir des 4 triangles et calcul de l'aire des deux figures (rectangle et losange) obtenues, avec une erreur liée aux mesures.



rectangle : $5,5 cm \times 6 = 33 cm^2$
losange : $5,4 cm \times 6 = 32,4 cm^2 : 2 = 16,2 cm^2$
la flèche mesure = $33 cm^2$
$+ 16,2 cm^2$
$49,2 cm^2$

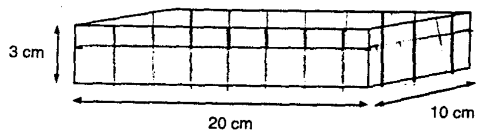
Réponse: 49,2 cm²

D'autres élèves, enfin, ont transformé la figure en un rectangle en effectuant une translation plus ou moins explicite du triangle formant la partie avant de la flèche :

L'addition de longueurs intervient également chez certains élèves lors du calcul du volume à la question 17 :

exemple de réponse : On peut mettre 3 cm + 20 cm + 10 cm = 33 x 1 cube ou 33 cubes

Pour résoudre la question 17, un élève applique la technique du quadrillage sur la représentation d'un parallélépipède rectangle en perspective pour dénombrer des cubes (en faisant abstraction de l'échelle utilisée)



Combien de cubes faut-il pour remplir exactement la boîte?

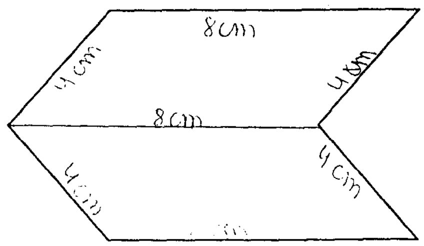
22 cubes

Au plan des formules à appliquer

Certains élèves utilisent l'opération de multiplication pour le calcul de l'aire, sans toutefois appliquer la formule adéquate. On constate...

- soit l'usage de dimensions inadéquates :

dans la question 16B2,
la prise en compte du côté oblique
plutôt que la hauteur



Aire = 1 cm² x 8 x 4 = 32 cm²
Aire de la figure = 32 cm² x 2 = 64 cm²

dans la question 19, la prise en compte des côtes du losange plutôt que des diagonales

3,6 x 3,6 x 3,6 x 3,6 = 0,432

dans la question 19, la prise en compte des 3 côtés du triangles plutôt que de sa base et de sa hauteur

6 x 4,5 = 27 x 5,5 = 135
+14
149 R : 149

dans la question 17, la multiplication de l'aire de deux faces

1ère calculer = 30 c. x 60 c. = 1800 c.

- soit une erreur dans l'utilisation de la formule

dans la question 16A, l'utilisation du facteur 1/2 dans le calcul de l'aire du rectangle

Réponse: $\boxed{1cm^2 \times 30 \times 50 : 750}$

dans la question 16B, l'utilisation du facteur 1/2 dans le calcul de l'aire du parallélogramme.

Parallélogramme A : 1cm² x $\frac{8}{2}$ x 3 = 12 cm²
" B = 1cm² x $\frac{8}{2}$ x 3 = 12 cm²

dans la question 19, l'absence du rapport 1/2 dans le calcul de l'aire du triangle et du losange

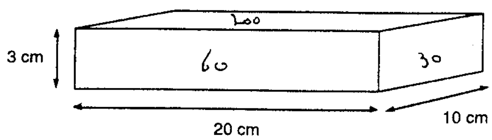
A/ Quelle est l'aire du triangle?

6 X 4 = 24 cm²
Base x Hauteur

B/ Quelle est l'aire du losange?

grande diagonal x petite diagonale
6 X 4 = 24 cm²

dans la question 17, la prise en compte de 3 aires de faces latérales plutôt que des 3 dimensions données



.....580 cm².................

Ces différentes observations témoignent d'une part, d'un amalgame entre les concepts périmètre (longueur), aire, volume et d'autre part, d'une connaissance erronée des formules d'aires de figures simples telles que le rectangle, le parallélogramme, le losange.

Analyse et commentaires

N'ayant repris ici les réponses de 25 élèves seulement, notre analyse n'est pas exhaustive. La lecture des copies d'autres classes nous permet d'émettre très sérieusement l'hypothèse que partout les mêmes types d'erreurs et de démarches positives peuvent être observées.

Quelles démarches ont été mobilisées par les enfants qui ont réussi ?

Les élèves qui ont réussi les items proposés maîtrisent évidemment les formules d'aires, de périmètres et de volumes. Avec une grande diversité de méthodes, les élèves concernés ont été capables *d'analyser la figure complexe présentée et de la décomposer en d'autres figures pour lesquelles il était possible de faire appel à une formule connue.*

Par contre, en ce qui concerne la question 19, on peut être étonné du fait que peu d'élèves reconnaissent spontanément le rapport ½ entre l'aire du triangle, du losange et celle du rectangle.

Les élèves qui ont réussi la question 17 ont interprété le dessin comme une représentation d'un solide en perspective.

Quelle est la nature des difficultés observées chez beaucoup d'élèves ?

Les élèves qui n'ont pu répondre correctement aux questions 16A, 16B, 17, 19, rencontrent des difficultés à mettre en pratique les démarches suivantes :

1. concevoir le périmètre comme une longueur, l'aire comme la partie recouvrant l'intérieur d'une figure, le volume comme l'espace intérieur d'un solide ;
2. transformer une figure en plusieurs autres figures dont il serait possible de rechercher la grandeur demandée ;
3. déterminer les dimensions nécessaires pour calculer la grandeur souhaitée ;
4. utiliser la formule adéquate.

3.4.3 Pistes didactiques pour l'apprentissage des concepts aire – périmètre - volume

Pourquoi tant d'élèves ont-ils échoué aux questions 16a, 16B, 19, 17 ?

Une pratique habituellement en vigueur consiste à découper la matière en tranches d'apprentissages et à envisager ensuite une succession d'apprentissages de difficulté croissante, de la 2^{e} année primaire à la 2^{e} année secondaire.

…c'est ainsi, qu'en ce qui concerne l'aire, on passe de l'aire du carré, à celles du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du losange ; on termine par celles du disque et des polygones réguliers,… ;
…en ce qui concerne le volume : on pratique des empilements, puis on envisage le calcul du volume du cube, du parallélépipède rectangle, du cylindre. Plus tard, on généralisera au calcul des prismes droits. Le volume des pyramides, même en tant que fractionnement du prisme, sera rarement envisagé.

Chaque objectif poursuivi, chaque compétence acquise est isolée. L'enfant est ainsi davantage centré sur des résultats et non sur des démarches d'apprentissages. La faiblesse des réponses aux questions 16 et 19 est à rapprocher du fait que les élèves ne sont pas assez souvent encouragés à transformer les grandeurs qu'ils rencontrent.

Une autre étude des concepts, en spirale, favorise l'intégration progressive des démarches importantes. Pour les questions 16, 17, 19, ce sont des manipulations, des découpages,… qui transforment les figures tout en laissant invariants le périmètre, l'aire, le volume.

Ces transformations mettent en pratique des propriétés des grandeurs :

- la conservation d'aires, de périmètres de volumes.
- des comparaisons par ordre de grandeur,
- des additions, des soustractions d'aires, de périmètres, de volumes,
- des mesures d'aires, de périmètres, de volumes par itération d'unités.

Différentes phases d'une situation didactique

C'est en proposant *des situations ouvertes et variées* aux élèves qu'on favorise l'émergence de compétences chez tous les élèves.

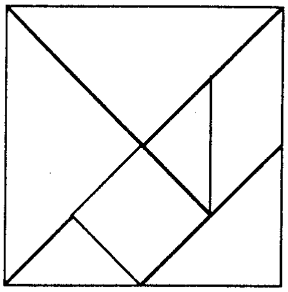
Ensuite, *la traduction par l'élève de son action, de ses représentations, l'échange d'informations* entre élèves, *la confrontation des argumentations* favorisent les trouvailles et le développement de chacun au sein de la classe.

Ainsi, l'enfant de 6 ans à qui on autorise de représenter à *sa* manière un bloc de 24 cubes[8], construit déjà la compétence visée par la question 17 du test.

[8] MAQUOI J., Des problèmes pour apprendre (3), in l'Ecole fondamentale – dossier 48 -, Erasme 1994

Dans un premier temps, permettre une approche libre du problème (découpage, quadrillage, transformation, calcul, ...) qui sera affinée ultérieurement.

- Utiliser le tangram

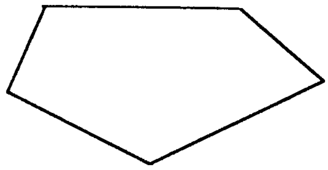


«Avec toutes les pièces du Tangram, construis 3 figures»

Les transformations du Tangram conservent son aire.

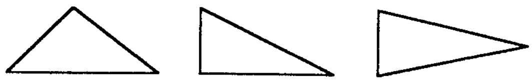
- Décomposer une figure complexe en figures simples

« Décompose la figure ci-contre de plusieurs façons. Explique tes solutions et leurs avantages. »



- Additionner/Multiplier des aires et périmètres

« A partir de deux ou plusieurs triangles identiques, construis des quadrilatères »



On considère *le périmètre* des figures

«Construis un rectangle valant le double d'un autre rectangle»[10]

«Construis un parallélogramme valant le double d'un autre parallélogramme»

«Construis un triangle valant le double d'un autre triangle»

«Construis un losange valant le double d'un autre losange»

«Construis un carré valant le double d'un autre carré»

Répondre aux mêmes questions en considérant *l'aire* - Comparer les solutions

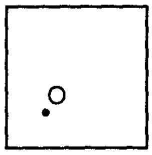
10Voir Cellule de Pilotage, Mathématiques de 10 à 14 ans, continuité et compétences, pp. 101 à 120, MERF, 1996

• Diviser une aire

«Comment prendre la 1/2 d'un carré, d'une feuille de format A4»

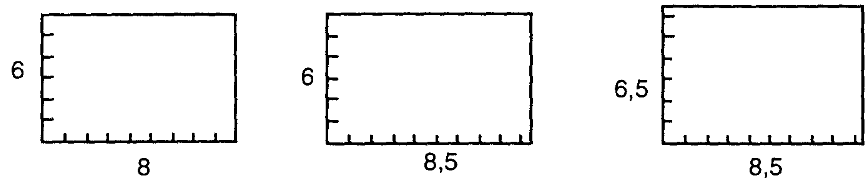
... susciter beaucoup de trouvailles chez les élèves...

«A l'intérieur d'un carré, place au hasard un point «o» et trace 4 triangles ayant un sommet commun, «o». Deux triangles opposés valent la moitié de l'aire du carré. Explique... »

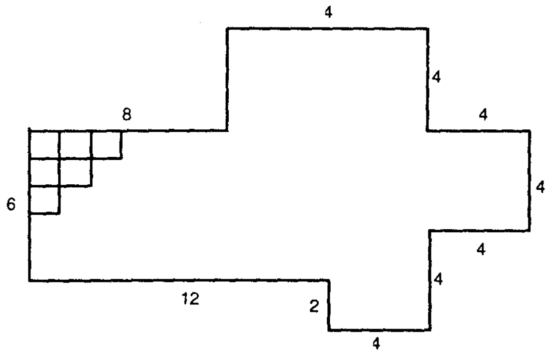


Situations plus spécifiques menant à l'élaboration de formules

• *« Combien de pavés sont nécessaires pour recouvrir ces rectangles? »*

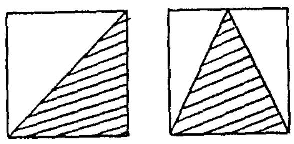


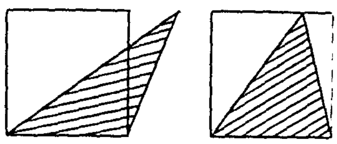
• *« Combien de pavés sur la terrasse ? »*



• *Ci-dessous, les triangles hachurés valent la 1/2 du carré...*

... et ces autres triangles hachurés valent-ils aussi la 1/2 du carré ?



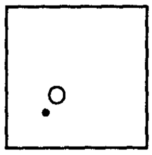


- Diviser une aire

«Comment prendre la 1/2 d'un carré, d'une feuille de format A4»

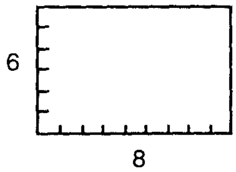
... susciter beaucoup de trouvailles chez les élèves...

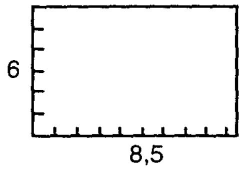
«A l'intérieur d'un carré, place au hasard un point «o» et trace 4 triangles ayant un sommet commun, «o». Deux triangles opposés valent la moitié de l'aire du carré. Explique... »

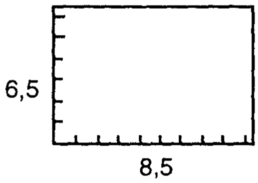


Situations plus spécifiques menant à l'élaboration de formules

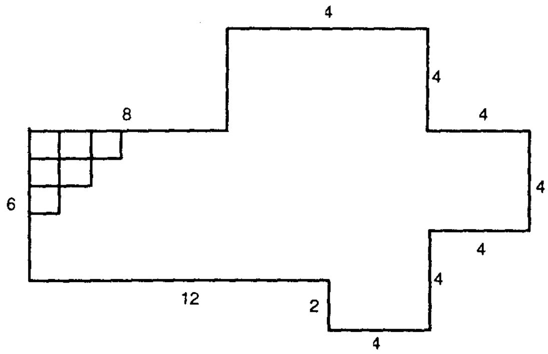
- *« Combien de pavés sont nécessaires pour recouvrir ces rectangles? »*





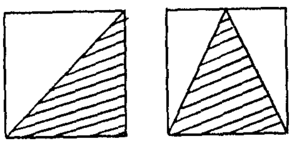


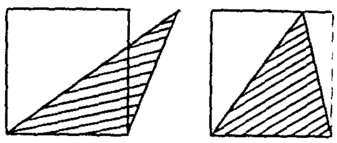
- *« Combien de pavés sur la terrasse ? »*



- *Ci-dessous, les triangles hachurés valent la 1/2 du carré...*

... et ces autres triangles hachurés valent-ils aussi la 1/2 du carré ?





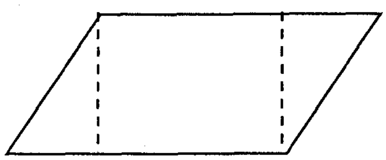
L'utilisation du géoplan, des tracés sur quadrillages s'avèrent très utiles pour dégager l'invariance de l'aire.

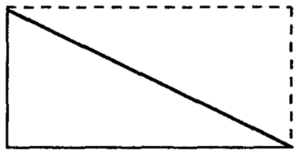
Vers la généralisation de formules d'aires

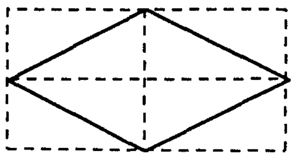
- *«Tu connais la formule du calcul de l'aire du rectangle : L x l*

A partir de cette formule (L x l), comment calculer l'aire...

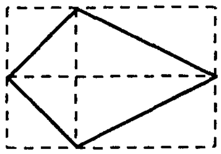
... du parallélogramme *... du triangle* *... du losange*

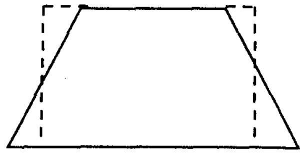






... du cerf-volant *... du trapèze ?*

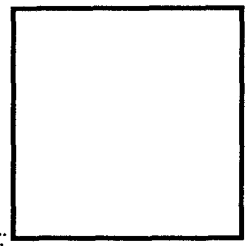




- *«Transforme un rectangle en ... un parallélogramme de même aire*
  un triangle de même aire
  un losange de même aire
  un cerf-volant de même aire
  un trapèze de même aire»

- Des transformations en cascade...

«Soit, au départ, le carré suivant



:

① Transforme le carré en un trapèze de même aire
② Transforme le trapèze obtenu en un triangle de même aire
③ Transforme le triangle obtenu en un parallélogramme de même aire
④ Transforme le parallélogramme obtenu en un rectangle de même aire
④ Transforme le parallélogramme obtenu en un rectangle de même aire
⑤ Transforme le rectangle obtenu en un carré de même aire.

Que constates-tu ?»

Construction du concept « périmètre »

Le périmètre peut être assimilé au contour d'une figure. Sa recherche conduit à additionner la longueur des différents segments ou courbes qui la composent.

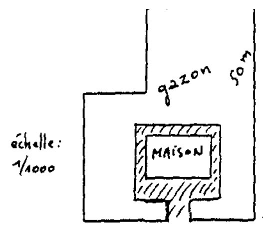
La confusion fréquente entre « périmètre » et « aire » n'est-elle pas la conséquence d' «un apprentissage de ces concepts sous la simple forme de formules ?

Trop souvent, à l'école primaire, le périmètre est appréhendé à partir du carré, du rectangle. De ce fait, les mêmes dimensions (côté – pour le carré -, longueur et largeur – pour le rectangle) sont utilisées, à la fois pour la recherche de l'aire ainsi que pour celle du périmètre. Or, le concept de périmètre ne peut se construire que si, dès le départ, il est envisagé dans des situations variées qui proposent différentes configurations de périmètres. Les situations réalistes offrent beaucoup de possibilités :

- une haie, une clôture pour délimiter un terrain (qui est rarement un rectangle !) ;
- un talus autour d'une pièce d'eau ;
- une frise de papier peint à poser autour de la pièce à tapisser ;
- des barrières « Nadar » à poser autour d'une manifestation ;
- une ficelle pour emballer un paquet cadeau ; etc…

• Exemple d'activité complexe faisant appel aux concepts d'aire et de périmètre

    - *« On veut délimiter le périmètre du terrain bâti en plantant une haie de hêtres. Les plants doivent être distants l'un de l'autre de 20 cm. Combien de plants faut-il acheter ? Quelle superficie peut-on couvrir de gazon ? »*



Construction du concept « volume »

Le volume est une partie de l'espace occupée par un objet.

Le chauffagiste a besoin de connaître le volume total des pièces occupées pour déterminer la puissance du chauffage. Lorsqu'on souhaite acheter une pompe pour un aquarium, il est utile de connaître le volume de celui-ci. Le futur acquéreur d'une voiture s'intéresse au volume du coffre du véhicule.
Tantôt le volume s'exprime en m^3, dm^3, cm^3, tantôt il s'exprime en litres, en hectolitres.

Cette diversité de contextes dans lesquels s'inscrit la notion de volume nous impose de placer les élèves dans un maximum de situations variées.

Exemples de situations privilégiant la prise en compte de trois dimensions :

• *« On dispose d'une boîte à chaussures et d'une boîte d'allumettes. Avec combien de boîtes d'allumettes pourrait-on remplir la boîte à chaussures ? »*

• *« Voici un bloc (6x4x4) composé de 96 cubes. On a peint toute la partie extérieure du bloc.*

    Combien de cubes ont 3 faces peintes ?
    Combien de cubes ont 2 faces peintes ?
    Combien de cubes ont une face peinte ?
    Combien de cubes n'ont aucune face peinte ? »
    Et si le bloc de 96 cubes a comme dimensions 2x4x12, les réponses sont-elles modifiées ?

3.5 Symétries et transformations

La notion de symétrie est un moyen d'approcher la géométrie en ce sens qu'elle apprend *à regarder* des objets, des figures, à les*manipuler*, à les *dessiner ou les construire.*

3.5.1 Regardons un motif qui se répète

Des figures géométriques formées de motifs qui se répètent par symétries axiales, translations, rotations sont courantes dans la décoration de vêtements, de tissus d'ameublement, dans l'ornementation de bâtiments ou de locaux. Depuis des temps anciens, pour exprimer sa sensibilité, pour embellir, l'homme utilise couramment des figures répétées sous forme de frises (fig 1) de dentelles, de mosaïques, de pavements, de papiers peints (fig 2), de rosaces autour d'un point (fig 3).

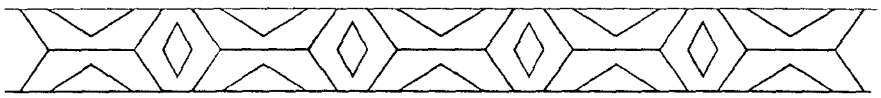


figure 1

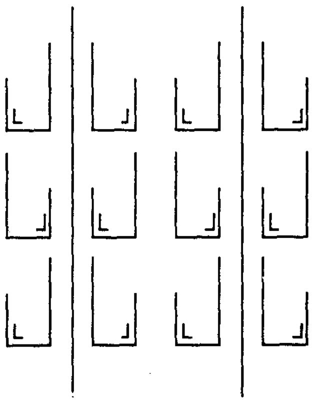


figure 2

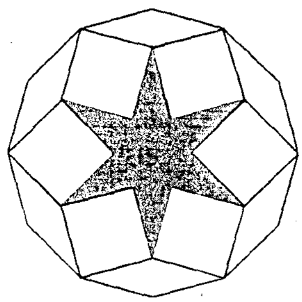


figure 3

Le premier coup d'œil à une figure formée de motifs (papier peint, frise ...) est comme celui qu'on jette à un vitrail ou à une peinture. Il apprécie les lignes et les formes, les couleurs, les sombres et les clairs. L'analyse géométrique est un deuxième temps auquel on va quelque peu s'attacher. Elle demande peu de pré-requis.

Un jeune élève peut aisément l'aborder, comme il traite des figures symétriques dans ses cahiers de jeux. Il peut en colorier des parties suivant ce qu'il veut mettre en évidence : une figure (fig 4) qui se reproduit par translations, un motif (fig 5) qui comme un pochoir permet de reproduire l'ensemble du papier peint par translations. Il peut tracer le réseau des translations en forme de parallélogramme, de rectangle, de carré (quadrillage), losange, hexagone.

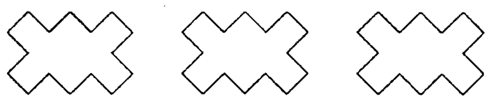


figure 4

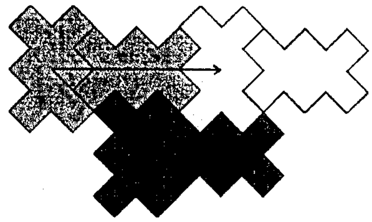


figure 5

Enfin, il peut rechercher l'existence d'une symétrie ou une rotation (fig 6) qui conserve le motif, la frise, le pavement ou le papier peint dans leur ensemble (fig 7: reproduction d'un mur de la Mosquée Karatay, Konya, Turquie).

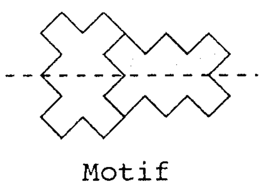


figure 6

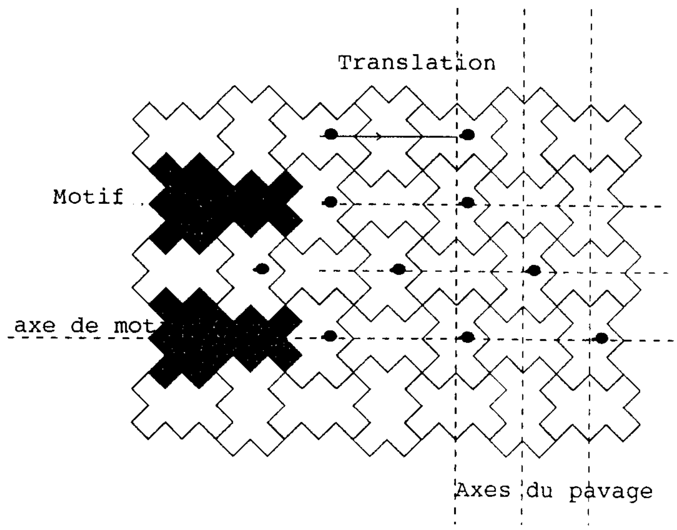


figure 7

3.5.2 Pavés et papiers quadrillés.

Il n'y a que trois figures régulières qui peuvent servir à paver: le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone régulier. Paver signifie ici recouvrir, sans laisser de vide, sans recouvrements, comme poser un pavement dans une pièce. Des rectangles ou des parallélogrammes peuvent aussi convenir pour paver, mais il ne s'agit plus de figures régulières c'est à dire ayant tous les côtés de même longueur et tous les angles de même amplitude (Fig 8).

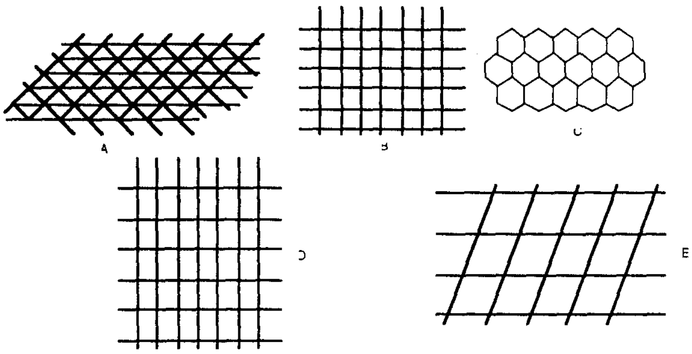


figure 8

Les bords des pavés carrés tracés sur le papier forment un quadrillage. Le papier quadrillé est une ressource pédagogique bien connue, à l'école primaire déjà. On peut aussi imprimer sur la feuille un réseau de rectangles ou d' hexagones réguliers qui offrent aussi un intérêt didactique (fig 9).

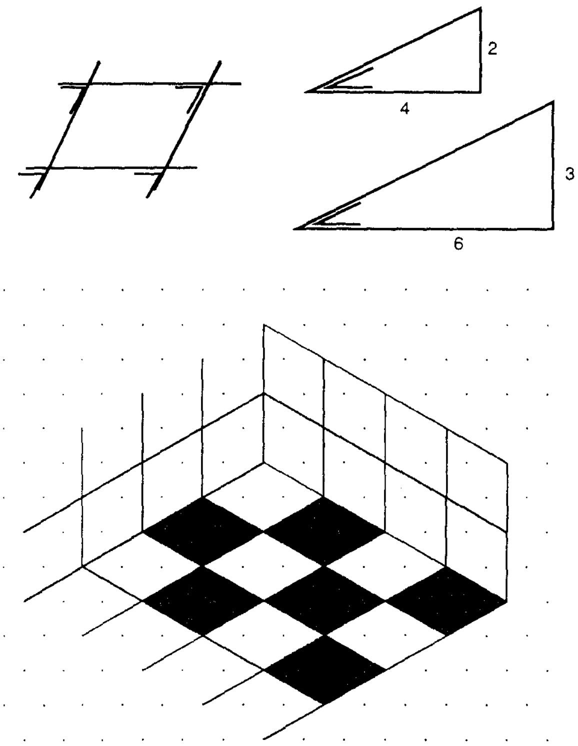


figure 9

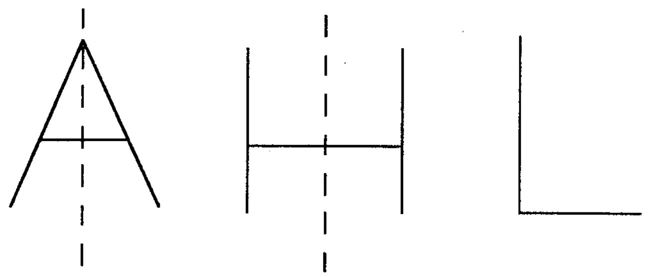
3.5.3 Les symétries axiales: quelques étapes dans leur apprentissage.

La recherche de symétries oblige le jeune à regarder une figure dans sa globalité, donc à élargir le champ de sa perception, quitte à revenir à une analyse des particularités locales ensuite. Les manuels scolaires de nombreux pays présentent des situations visant à familiariser les jeunes élèves à l'idée de symétrie. Ils ont inspiré la démarche proposée ici.

- ***Reconnaître une figure ayant un axe de symétrie en pliant la figure ou en utilisant un miroir.***

Une figure est symétrique si on sait la plier de manière qu'une moitié s'applique exactement sur l'autre. Le pli s'appelle axe de symétrie. Si on place un miroir sur l'axe et qu'on y regarde, on voit toute la figure.

Exemple: la lettre A un axe de symétrie, H en a deux et L n'en a pas.(Fig 10)



La symétrie dont l'axe est «vertical» sur la feuille de papier (Fie 11) semble être la plus accessible aux jeunes élèves. Est-ce parce que verticale et horizontale, gauche et droite sont liés physiquement à l'observateur ? A la symétrie, correspondent des côtés de même longueur, des angles de même mesure.

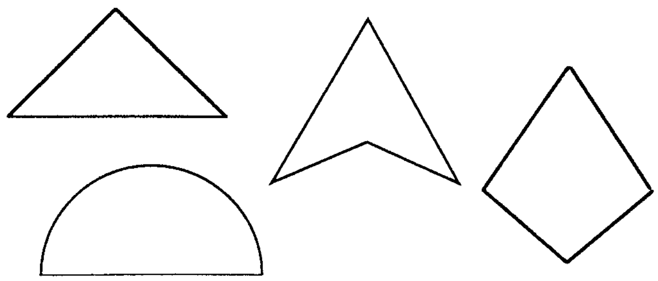


figure11

• ***Trouver les axes de symétrie d'une figure tracée sur un quadrillage***

En plaçant une figure sur un quadrillage on fait progresser la qualité géométrique de la figure; on clarifie les hypothèses. La position des points situés sur les noeuds du quadrillage est clairement définie. La distance entre deux points, la pente des segments de droite s'expriment à l'aide de deux nombres de carrés (Fig 12). Un avantage en découle: il n'est plus nécessaire de recourir au pliage ou au miroir pour justifier l'existence de l'axe.

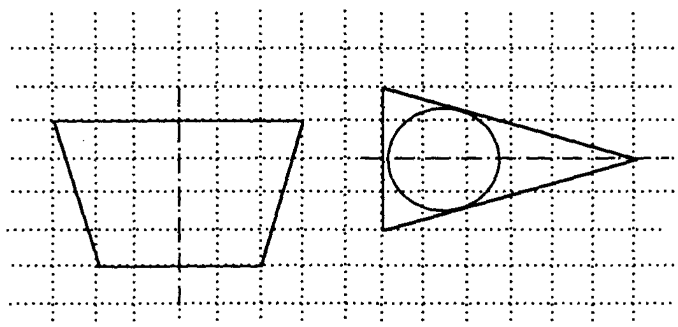


figure12

• ***Compléter la partie manquante d'une figure sur un quadrillage (Fig 13 A)***

Ce problème qui figure fréquemment dans des cahiers de jeux prépare la construction aux instruments de l'image d'une figure par une symétrie.

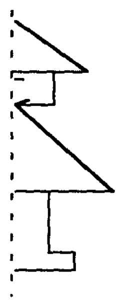


figure13 A

• ***Identifier plusieurs axes de symétrie dans une même figure.***

Exemple: une frise et un polygone régulier (Figures 13B et 13C).

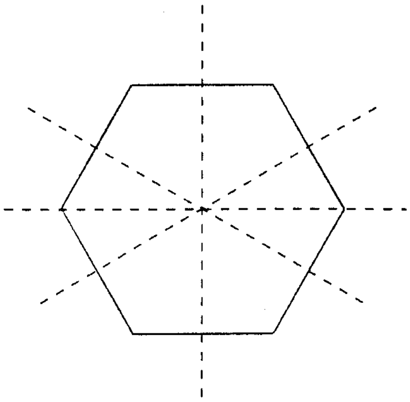


figure13 B

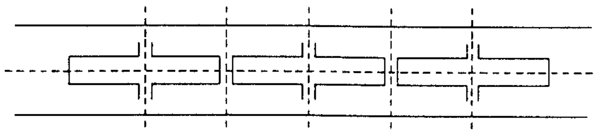


figure 13 C

• ***Créer des figures symétriques***

Nous l'illustrerons dans le cas d'un carré: celui-ci a quatre axes de symétrie.

Le carré de la figure 14 dont on a noirci deux cases, n'a qu'un seul axe de symétrie, un axe vertical.

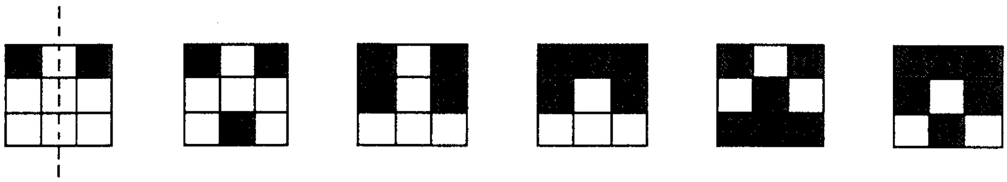


figure 14

On a modifié la figure en y noircissant 3, 4, 5, 6 carreaux, de manière à ce qu'elle garde ce seul axe de symétrie.

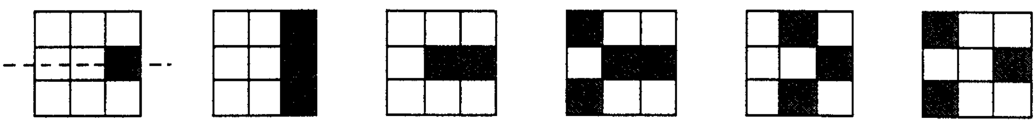


figure 15

Le carré de la figure 15 a un seul axe de symétrie, un axe horizontal.

Modifions-la cinq fois de manière qu'elle conserve ce seul et même axe.

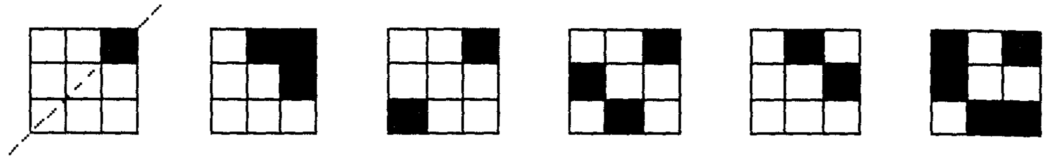


figure 16

Le carré de la figure 16 a un seul axe de symétrie, un axe oblique.

Modifions-la aussi cinq fois de manière qu'elle conserve ce seul et même axe.

- ***Déterminer si une figure admet des rotations (Fig 17)***

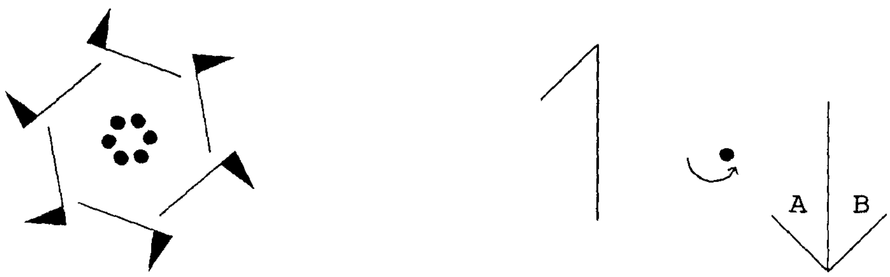


figure 17

- ***A une figure placée sur un quadrillage, appliquer une translation, une symétrie, une rotation (Fig 18)***

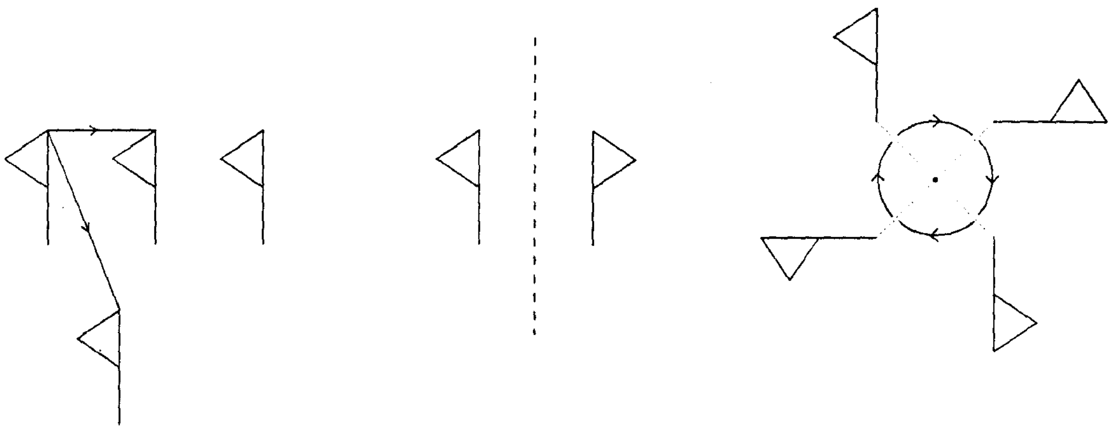


figure 18

Bibliographie

Black, P. & Atkin, J.M. (1996). *Changing the subject. Innovations in science, mathematics and technology education.* London: Routledge.

Cellule de Pilotage. (1995). *Mathématiques de 10 à 14 ans, continuité et compétences.* Bruxelles: MERF.

Colot, L., Courtois, S., Demol, G. & Dubois, A. Organisation des Etudes - Enseignement secondaire - Evaluation formative. Mahtématiques en première A. Généralités et fichier de questions. Bruxelles : MERF

Bénédetti, C., Colot, L. & Dubois, A. Organisation des Etudes - Enseignement secondaire - Evaluation formative. Mahtématiques en deuxième commune. Généralités et fichier de questions. Bruxelles : MERF

Charnay, R. (1995). *Mathématiques et mathématiques scolaires. In M. Develay, Savoirs scolaires et didactiques des disciplines.* Paris: ESF.

Charnay, R. (1996). *Pourquoi les mathématiques à l'école?* Paris: ESF.

Courtois, S. & Denis, F. (1997). Pavages et papiers peints. *Mathématique et Pédagogie, 100,* 1-14.

CREM. (1995). *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans.* Nivelles : CREM.

FESEC (1995). Document d'accompagnement du programme de mathématiques. 1e degré. 02779/073

Gobert, R. (1994). *Le syndrome de l'écureuil.* Bruxelles: Erasme.

Honclaire, B., Van Dieren, F. & Van Troye. *Des images aux figures géométriques : transformer une image.* n° 1A. Nivelles : CREM.

Honclaire, B., Van Dieren, F. & Van Troye. *Des images aux figures géométriques : assembler des triangles.* n° 1B. Nivelles : CREM.

Honclaire, B., Van Dieren, F. & Van Troye. *Des images aux figures géométriques : calques, quadrillages et rotations.* n° 1B. Nivelles : CREM.

Joshua, S. & Dupin, J.-J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* Paris: PUF.

Maquoi, J. (1994). Mathématique: des problèmes pour apprendre (3). *L'école Fondamentale, janv.-fév.*

MERF - CAF. *La Neuville/Tihange - Mathématiques : Document relatif aux aspects théoriques du programme de première année.* Bruxelles.

MERF - CAF. *La Neuville/Tihange - Mathématiques : Fiches de fixation et d'évaluation formative - Les nombres - première année.* Bruxelles.

MERF - CAF. *La Neuville/Tihange - Mathématiques : Fiches de fixation et d'évaluation formative - Géométrie - première année.* Bruxelles

Papy. Mathématique Moderne. Bruxelles : Didier

Stordeur, J. (1996). *Enseigner et/ou apprendre.* Bruxelles: De Boeck.

Ballieu, M., Higuet, F., Noël, G., Giot, R., Honclaire, B. & Roch, Y. *Logiciel CDS-Math 6, Jeux mathématiques.* Université de Mons-Hainaut CDS.