Outre les motivations qui nous ont guidés durant ces douze mois de travail, le lecteur trouvera dans cette introduction un rappel des grandes lignes directrices qui président à la réalisation de ce projet, un bref résumé du contenu du rapport, ainsi que les pistes déjà dégagées pour la deuxième année de recherche.

Motivations

L'étude des mathématiques n'est pas simple, c'est indéniable. A l'époque de l'image de synthèse et du fast-food, la jeune génération actuelle rencontre de sérieuses difficultés lors de l'étude de disciplines nécessitant rigueur et réflexion. On assiste à une désertion des cours forts de mathématique. Manque de motivation ? Manque de courage ? Plus grand attrait pour d'autres disciplines ? Inadéquation des programmes scolaires ? Et pourtant … Pourtant, personne ne s'opposera à cette idée : l'apprentissage du raisonnement est d'une importance primordiale. Et chacun s'accordera aussi à penser que les mathématiques sont reines en la matière !

L'acquisition d'une bonne capacité à raisonner est un facteur important de réussite dans tous les domaines aussi bien scolaire que professionnel, ou même familial, et un précieux bagage pour toute une vie. Dès lors, nous n'avons pas le choix. Nous nous devons de chercher encore et toujours des pistes pour tenter d'intéresser nos jeunes élèves et les guider sur la voie de l'envie d'apprendre. Car si le raisonnement est un outil indispensable et efficace, « être motivé », au sens large, c'est un grand pas sur la route qui mène au bonheur. L'interdisciplinarité est sans doute un moyen, et nous avons choisi l'histoire. Il ne s'agit pas de mener une recherche relative à l'histoire des mathématiques, mais d'utiliser celle-ci. Nous nous sommes référés à des sources historiques sérieuses mais nous ne sommes toutefois pas à l'abri d'une erreur. Répondre à la question « A quoi ¸ ça sert ? » est sans aucun doute intéressant mais il nous semble que « Comment en est-on arrivé là ? » est une question tout aussi porteuse de sens.

A l'époque du « tout, tout de suite », évoquer la patience dont peut faire preuve l'humanité dans le domaine scientifique apportera une saine réflexion. A l'ère du « chacun pour soi », s'apercevoir qu'une théorie bien ficelée est en réalité l'œuvre commune de générations de mathématiciens enseignera l'humilité. En effet, rarement en histoire des sciences une découverte est arrivée comme une étincelle, un coup de génie d'un être d'exception. Au contraire, les théories se mettent peu à peu en place, chaque nouveau résultat acquis s'ajoutant comme une nouvelle pierre à l'édifice déjà ébauché. C'est pourquoi le mot « découverte » est souvent exagéré et même si l'on associe souvent à un concept un concepteur précis, on ne peut oublier les multiples « ouvriers » qui ont contribué à l'œuvre. Parler de découverte en histoire des sciences, c'est résumer !

Nous montrerons donc à nos élèves que certains problèmes mathématiques ont mis vingt-cinq siècles à être résolus (comme le fameux problème de la quadrature du cercle), que d'autres viennent de « tomber » après de nombreux remous dans le monde scientifique (nous pensons au célèbre théorème de Fermat) et que nombre de questions reste encore sans réponses (l'existence de nombres parfaits impairs par exemple). Nous mettrons en exergue « l'universalité » de certaines notions, apparaissant indépendamment dans différentes parties du monde et nous montrerons comment des théories peuvent sombrer dans un profond sommeil pendant des siècles avant de revenir à la lumière sous une impulsion nouvelle. Nous ne négligerons pas l'histoire contemporaine, notamment les succès dus à l'apport des technologies liées à l'outil informatique et les visions nouvelles que cet apport a suscitées tant dans le domaine scientifique que philosophique.

Bref, nous souhaitons proposer une approche historique des programmes de mathématique et en particulier dans un premier temps, des programmes de quatrième année de l'enseignement secondaire. Cependant, nos séquences peuvent servir dans les années ultérieures pour aborder certains points de matière.

- Où et comment sont apparues certaines notions ?
- S'agissait-il d'une nécessité liée à une activité humaine ou bien d'une pure construction de l'esprit ?
- Quelles sont les différentes étapes qui ont conduit à la notion telle qu'elle est enseignée habituellement dans nos cours ?

En répondant à de telles questions, tout en faisant des mathématiques, nous voulons conduire nos élèves à apprécier l'efficacité du symbolisme mathématique actuel, à comprendre l'importance de la démonstration en particulier et du raisonnement en général, à rejeter une étude superficielle pour une étude approfondie, à perfectionner l'usage de la langue française dans un raisonnement scientifique, à décloisonner les différents chapitres en constatant qu'en mathématique comme dans d'autres disciplines, tout est dans tout.

Les lignes directrices

Il nous semble voir un parallélisme frappant entre le développement historique des mathématiques depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours et l'apprentissage en spirale ([4]), appliqué aux mathématiques (voir par exemple [11]). Certes, l'essor des mathématiques a débuté il y a plus de 2500 ans et l'apprentissage des mathématiques dure rarement plus de 20 ans. Mais, si l'on fait abstraction de la durée des deux processus, on constate qu'ils passent tous deux cycliquement par les mêmes phases.

Une première phase expérimentale s'installe, de nombreuses situations mathématiques « similaires » sont expérimentées, des conjectures sont faites, des compétences locales s'installent. Ensuite survient une phase de maturation, un nouveau concept naît, certaines conjectures sont prouvées (mais certaines attendront de nombreux cycles pour être résolues).
Finalement une phase de réification survient, le nouveau concept devient lui-même un objet sur lequel tôt ou tard le cycle des trois phases se réinstalle.

Ce sont des phases que les chercheurs en mathématiques (et dans d'autres disciplines) vivent constamment, « une introspection permanente s'installe » et s'applique à d'autres champs d'activités que les mathématiques. Cette « introspection permanente » est certainement l'une des compétences transversales les plus désirées, puisqu'elle élargit le champ d'application des compétences locales et disciplinaires acquises au cours des cycles précédents. Pendant tout le cycle, la communication entre individus semble jouer un rôle fondamental dans l'émergence d'une nouvelle idée mais il ne faut pas négliger l'analyse individuelle. Ce passage du « procédural au structural » qui se répète indéfiniment semble une constante du développement des mathématiques.

L'objectif du projet est d'étudier l'installation des compétences disciplinaires et transversales (telles que définies dans le document [1], voir également [9]) in situ chez les élèves du cycle secondaire supérieur au travers du cours de mathématique, en tenant compte du parallélisme décrit ci-avant. Celui-ci doit maintenir présent à notre esprit que la plupart des concepts mathématiques (pensons à la notion de continuité, à la notion de groupe, à la notion de nombres complexes,...) ont émergés après bien des tâtonnements. Il ne faut dès lors pas s'étonner que le passage à la troisième phase (dans le processus d'apprentissage) soit difficile à atteindre pour nos élèves.

Cependant le contexte cognitif historique de la naissance des concepts peut nous aider à prévoir certaines difficultés de leur apprentissage, quoique cette analyse a ses limites car le contexte cognitif d'un élève de quinze ans aujourd'hui est bien différent de celui des élèves de quinze ans en 1960. Et que dire de la comparaison avec un mathématicien du $18^{ème}$ siècle ! Mais nous sommes persuadés que l'utilisation de notre connaissance du développement historique des concepts dont nous voulons favoriser l'intégration au sein des compétences de nos élèves, peut aider. Souvent les problèmes qui ont donné naissance à ces concepts sont faciles à formuler et à comprendre. Ces derniers ont servi à résoudre des problèmes technologiques de l'époque. Ils constituent donc une merveilleuse source d'interdisciplinarité (par exemple, on consultera les quelques références mentionnées ci-dessous pour la navigation, les tables de mortalité,...) et ils permettent de se centrer sur l'activité principale en mathématique : résoudre des problèmes.

Pour réaliser l'objectif, le projet vise à concevoir et à expérimenter en continu des séquences d'enseignement des mathématiques qui tiennent compte des remarques ci-dessus. Comme l'indique le sous-titre du projet, des problèmes historiques sont à la base des séquences d'enseignement. Par la même occasion, des compétences terminales relatives au cours d'histoire sont rencontrées :

- Analyser et critiquer des sources historiques (textes originaux de mathématiciens).
- Organiser une synthèse mettant en évidence des processus évolutifs, des changements ou des synchronismes.
- Communiquer un savoir historique (traduction dans un langage moderne ou symbolique).

La validation (par rapport à l'objectif d'installer des compétences transversales) des séquences d'enseignement mises au point dans le cadre ci-dessus, ne peut que difficilement se faire à travers des expériences de courte durée. En effet, l'installation des compétences transversales ne se fait que lentement au cours de l'apprentissage (plusieurs cycles sont nécessaires).

Il nous semble également important que certains des chercheurs soient à la fois impliqués dans l'élaboration des séquences d'enseignement et dans la mise en oeuvre des séquences d'enseignement sur le terrain.

La préparation des premières séquences d'enseignement a débuté en juillet 1999. Des contacts avec des enseignants ont été pris dans les divers réseaux en vue de concrétiser la phase de test des séquences. Actuellement, seule la séquence intitulée *La genèse des équations* a fait l'objet de deux observations relatées en annexe. Lors de l'année à venir, nous allons multiplier ces observations.
Pour ce faire, nous avons pris contact avec les enseignants suivants :

A l'Institut Communal d'Enseignement Secondaire de Quaregnon :

- Mme Christine Deroover
- M. Didier Mercier
- M. Frederic Derême

A l'Institut des Ursulines de Mons :

- Mme Carine Rimaux
- Mme Anne Belenger

- Mme Patricia Santarelli
- Mme Ida Capodacqua
- Mme Anne Pays

A l’Athénée Royal de Chênée :

- M. Jean Rossi
- M. René Marquet
- Mlle Emmanuelle Simon
- M. André Dryvers
- Mme Monique Zichet

A l'Athénée Royal de Soumagne :

- Mme Patricia Gathot
- Mme Danielle Herbet

A l'Athénée Royal de Vielsalm-Manhay :

- Mlle Delphine Deliège

A l’Athénée Provincial Warocqué de Morlanwelz :

- Mme Véronique Wauty
- Mme Bernadette Brunquers

A l'Athénée Provincial de La Louvière

- Mme Monique Vandensavel

Des contacts sont également en cours avec les Athénées royaux de Binche, Jette et de Couvin ainsi qu’avec l’Athénée Jean d’Avesnes de Mons.

Les séquences proposées seront modifiées à la lumière de ces expérimentations.

Bref résumé

Il existe de nombreux travaux antérieurs qui tentent de cerner les objectifs d'un cursus de mathématique en terme de compétences. On citera des travaux réalisés à Mons, dans le cadre du CREM , du GEM, . . . ou encore à l'extérieur de nos frontières (voir les références ci-après). Notamment [9] constitue une source très intéressante pour identifier les compétences terminales désirables.

Dans cette recherche, il ne s'agit pas de répéter ces études mais plutôt démontrer comment atteindre ces compétences au travers de séquences. Un des objectifs finaux de la recherche est donc la production de séquences d'enseignement rédigées sous forme de modules, comprenant toutes les informations utiles pour leurs réalisations pratiques. Ces séquences d'enseignement ainsi mises au point (et la relation de leur expérimentation) seraient à la disposition des enseignants (via Internet entre autres) et pourraient faire l'objet de séances d'information et de formation continuée destinées aux enseignants.

Dans ce rapport, les séquences réalisées sont disponibles sous la forme de modules détachables, faciles à manipuler et à reproduire. En outre, l'enseignant peut les adapter à ses besoins. Elles ne se veulent pas exhaustives mais simplement cohérentes. Elles n'incluent pas les exercices de « drill » qui succèdent la phase d'introduction et sont laissés à l'appréciation du professeur.

Chaque séquence comporte :
- en marge, des références aux compétences terminales
- une fiche méthodologique distincte

Les programmes de mathématique recommandent l'utilisation de l'outil informatique. A cette fin, certaines séquences font appel aux logiciels suivants :

- EXCEL 97 (disponible dans tous les centres cybermédias)
- DERIVE (logiciel classique pour les professeur de mathématique, de coût modéré et faisant l'objet de formations en cours de carrière)

Dans chaque module, des problèmes historiques tels qu'ils nous ont été transmis au travers de divers documents (tablettes d'argile, manuscrits,...) servent de « situation problème ». Quand c'est possible nous avons choisi des textes dont la multidisciplinarité est évidente.

La genèse des équations

Cette séquence aborde le second degré à travers des problèmes qui ont leur origine chez les Babyloniens et les Grecs. Les mathématiques babyloniennes, essentiellement calculatoires, permettent de découvrir les formules de résolution des équations du second degré. Un problème géométrique grec met en évidence une analogie avec les calculs babyloniens. Enfin, les Arabes, héritiers des deux traditions, imposent l'algèbre.

La découverte des irrationnel(le)s

La tablette YBC 7289 prouve que les Babyloniens possédaient déjà une bonne approximation de $\sqrt{2}$. En ce qui concerne la période grecque, l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est abordée à la fois de manière algébrique et de manière géométrique en liaison avec la notion de grandeurs commensurables. La séquence, gorgée d'anecdotes historiques, s'achève par la célèbre approximation due à HERON D'ALEXANDRIE.

Second degré et chaos

A la base de ce problème, se trouvent le mathématicien Belge du 19ème siècle FRANÇOIS VERHULST et le météorologue EDWARD LORENZ. Cette séquence permet de déboucher sur le chaos en utilisant uniquement le second degré. La constante de FEIGENBAUM, universelle au même titre que les célèbres nombres « π » et « e », apparaît au sein du désordre. De l'histoire moderne …

Histoires coniques : la parabole

Que de grands noms jalonnent l'histoire de cette célèbre conique !
Que de domaines d'applications différents !
Le grand APOLLONIUS nous permet d'apprécier le génie grec de la démonstration dans toute sa splendeur et GALILEE nous livre l'étonnante clarté de sa pensée.

Le nombre « p » et le cercle

Cette séquence est destinée à faire découvrir le nombre « π » au travers de sa nature première, en liaison avec le cercle. Pour ce faire, deux points de vue sont envisagés : la méthode classique d'ARCHIMEDE et celle, plus exotique, due à LIU HUI (mathématicien chinois ancien). Cette dernière est basée sur le dédoublement des cotés d'un hexagone de départ (mais les différences avec ARCHIMEDE ne s'arrêtent pas là).

De la « ligne » au vecteur

Si les notations algébriques permettent une résolution élégante de problèmes numériques, les relations entre objets géométriques, quant à elles, sont plus difficiles à quantifier. LEIBNIZ, le premier, perçoit la nécessité d'établir un formalisme propre à la géométrie. Avant d'aborder le concept abstrait de *vecteur*, introduisons le *segment orienté* au travers des textes de BELLAVITIS. Direction, sens, longueur, loi de CHASLES, … tout apparaît de manière logique et structurée. Le problème classique du pont clôture la séquence.

Des lieux plans au fil du temps

Les lieux plans sont des lieux géométriques faisant intervenir uniquement des droites et des cercles. Le « grand géomètre » APPOLONIUS s'y est intéressé. D'autres lui ont succédé. Nous nous penchons plus particulièrement sur l'œuvre de FERMAT. C'est l'occasion de revoir de nombreuses notions géométriques et d'en aborder de nouvelles.

Un problème de Fermat

A travers un problème de minimisation soumis par FERMAT à TORRICELLI, un lieu géométrique classique apparaît : l'ellipse. Un problème qui peut se résoudre de nombreuses façons, dans des cadres différents et se discuter.

Annexes

A la fin de ce projet, nous avons ajouté une série de textes d'origines diverses.

- Les *Probabilités* et la *Trigonométrie* sont deux collections de références présentées à l'état brut. Elles nous servirons de pistes à suivre pour l'établissement de séquences lors de la deuxième année du projet.

- La séquence baptisée *La chance tourne en rond* est destinée à être insérée dans une séquence plus globale sur les probabilités. Dans son état actuel, elle est plutôt exploitable avec des élèves de cinquième année. Le calcul des probabilités permet d'établir la formule de JOHN WALLIS relative au nombre π.

- Un travail réalisé hors projet sur la bifurcation de FEIGENBAUM a été présenté lors de la « Journée des sciences » à l'Université de Mons-Hainaut en avril 2000. Le texte de ce travail a été adapté et joint au module "Second degré et chaos" en vue d'une exploitation au niveau de la 5ème année. Nous avons joint à ce rapport final le fascicule diffusé à cette occasion.

- Sur la base d'un travail antérieur de CHRISTIAN Michaux [7], fourni en annexe, un élève de sixième année de l'Athénée Royal Jean Rey rédige actuellement un dossier-projet[1] relatif à l'évolution des machines à calculer. Ce type de travail peut faire l'objet d'une évaluation bien différente de celle à laquelle les élèves et les professeurs sont habitués.

Ce que nous attendons des expérimentateurs

Tester dans leurs classes un ou plusieurs modules, voire la totalité du travail, et émettre des critiques constructives en vue d'une amélioration ultérieure du travail.

Nos séquences de cours sont prévues pour aider et documenter les professeurs, mais peuvent être diffusées dans les classes en vue de l'expérimentation.

Il n'est pas toujours indispensable de tester un module dans sa globalité. Selon le temps disponible, la personnalité du professeur ou la motivation des élèves, liberté totale est offerte aux expérimentateurs. Nous demandons simplement à être informés du cadre d'expérimentation utilisé.

Voici les renseignements que nous souhaiterions obtenir après expérimentation :

- L'environnement (type d'enseignement, degré, année, nombre d'élèves).
- Le nombre de périodes de cours consacrées à chaque partie d'une séquence.
- L'intérêt et les réactions des élèves.
- Des conclusions et des suggestions d'amélioration.

Nous sommes bien entendu conscients qu'il est difficile de donner un cours et d'être simultanément attentif aux réactions précises d'une classe !

Contenu du CD-ROM

Le CD-ROM qui accompagne ce rapport contient des compléments à la version papier :

- La version informatique de chacune des séquences au format PDF (lisible avec ACROBAT READER).
- Une présentation de la séquence *La Genèse des Equations* réalisée en VISUAL BASIC. Ce logiciel permet une introduction à la séquence et accompagne de manière attrayante le travail en classe. Les élèves peuvent visualiser cette présentation seuls, à leur rythme, ou la découvrir ensemble sur les grands écrans des centres CyberMédias, avec leur professeur. Un fichier texte explicitant les différentes étapes de l'installation se trouve sur le CD-ROM, il s'intitule "Installation du logiciel.doc".
- Le logiciel gratuit ACROBAT READER 4.0.

[1] Pour des détails sur la notion de *dossier-projet*, voir [9].

Références

[1] Décret du 24 juillet 1997 définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre, Moniteur Belge du 23 septembre 1997, 24653-24674,1997.

[2] A.S.L. Guidelines for Logic Education, proposal for consideration at the 1993 Annual Meeting from the A.S.L. Committee on logic and Education.

[3] *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour les mathématiques*, Ed. CREM, Nivelles, 1995.

[4] J.S. Bruner, *The process of education,* Cambridge, Harvard, 1960.

[5] J.-L. Chabert et autres, *Histoire d'Algorithmes,* du caillou à la puce, Ed. Belin, 591 pages, 1994.

[6] M. Demal, *Géométrie des transformations à l'école primaire,* Collection documents du CREM, 7, janvier 1998, 31 pages.

[7] C. Michaux, *La machine de Babbage et les logarithmes*, Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut, 15 pages, 1995.

[8] C. Monseur et M. Demeuse, *l'enseignement des sciences, un réel défi pour notre système éducatif*, dans Athena, 142, 487-496, juin 1998.

[9] J.P. Cazzaro, G. Noël, F. Pourbaix et Ph. Tilleuil, *Des compétences terminales en mathématique, rapport final 1998-1999* (recherche financée par le Ministère de la Communauté Française de Belgique), 640 pages.

[10] K. Pearson, *The history of statistics in the 17th & 18th centuries, lectures given during the academic sessions 1921-1933,* London, Ed. E. S. Pearson, C.Griffin & Co Ltd, London, 744 pages, 1978.

[11] A. Sfard, *On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on process and objects as different side of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36, 1991.

[12] O. Stern-Veyrin, *Navigation astronomique,* Ed. Arthaud, 151 pages, 1987.

[13] R. Strasser, *The TIMSS-Video-Study: teaching mathematics differently?,* Institute für Didaktik der Mathematik (IDM), Bielefeld, publié dans le Newsletter of the European Mathematical Society, 23-25, Juin 1998.

[14] A. Dahan-Dalmenico / J.Peiffer, *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales* Seuil, Paris 1986