"La découverte des irrationnel(le)s"

Table des matières[1] :

[1] La bibliographie de ce chapitre est reprise dans celle du module "Genèse des équations"

1. La tablette YBC 7289 et la racine de 2

Enrichir sa culture

Les mathématiques babyloniennes sont caractérisées par l'importance de la résolution d'équations du deuxième degré. Dans la grande majorité des problèmes rencontrés dans les tablettes babyloniennes, les données numériques sont telles que l'extraction d'une racine carrée lors de l'avant-dernière étape de la résolution soit réalisée sur un carré parfait[2].

Cependant, il y a des exceptions. Certains textes montrent l'utilisation d'une approximation de la racine de *2*. Plusieurs approximations ont été proposées par les Babyloniens. Par exemple, *1°25'* ou mieux, *1°24'51"10*.

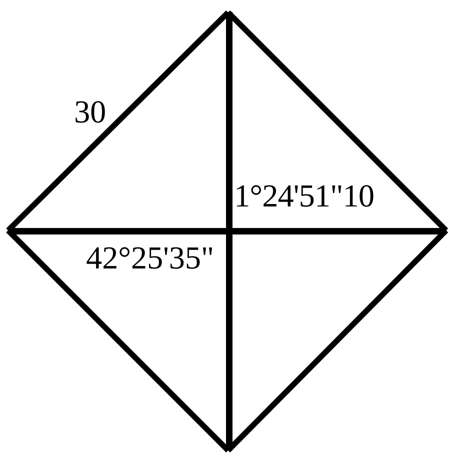
Ces derniers nombres sont écrits dans le système de numération de base 60, appelé système sexagésimal[3]. Actuellement, nous exprimons les nombres dans le système décimal (en base dix). Cependant, le système de base soixante ne nous est pas totalement étranger. C'est, par exemple, celui que nous utilisons pour la mesure du temps. Chaque heure y est divisée en 60 minutes et chaque minute en 60 secondes.

Nous mélangeons parfois les systèmes de base 60 et de base 10 lorsque les circonstances nous obligent à utiliser une subdivision de la seconde (on parle de dixièmes, centièmes, millièmes, ... de seconde).

L'indication de temps 3:12 sur une montre à affichage digital signifie clairement 3 h 12 min soit $3\text{h} + \frac{12}{60}\text{h}$. Cela équivaut à écrire 3,2 h dans le système purement décimal (pointeuses électroniques par exemple).

Voici la tablette YBC 7289 (Yale Babylonian Collection).
Elle date d'environ 1700 av. J.-C.

Analyser un document



On y trouve le dessin d'un carré et de ses deux diagonales.
On y relève également les indications *30* sur un côté ainsi que *1°24'51"10* et *42°25'35"* sur une diagonale.

---

[2] Voir le module intitulé " La genèse des équations"
[3] Voir la séquence multimédia relative au module "La genèse des équations"

Conversion d'un système dans un autre

$$1°24'51''10 = 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60\times 60}+\frac{10}{60\times 60\times 60}$$

$$=1+\frac{4}{10}+\frac{36}{3600}+\frac{15}{3600}+\frac{10}{60\times 3600}$$

$$=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{910}{216000}$$

$$= 1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{864}{216000}+\frac{46}{216000}$$

$$=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{432}{216\cdot 10^4}+\frac{216}{216\cdot 10^5}+\frac{432}{216\cdot 10^6}+\frac{208}{216\cdot 10^7}+\cdots$$

$$= 1{,}41421296......$$

Il s’agit visiblement d’une très bonne approximation de $\sqrt{2}$.
Comparons-là en effet avec la valeur que nous donne la calculatrice de Windows :

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373$$

Les Babyloniens calculaient une longueur approchée de la diagonale d’un carré en multipliant la longueur de son côté par le nombre *1°24'51"10*.

Sur la tablette YBC 7289, le côté du carré est de longueur *30*.
Dès lors la longueur de la diagonale est :

Conversion d'un système dans un autre

$$30\times (1°24'51''10) = 30\times(1+\frac{24}{60}+\frac{51}{3600}+\frac{10}{216000})$$

$$= 30 + \frac{24}{2}+\frac{51}{2\times 60}+\frac{5}{60\times 60}$$

$$= 42+\frac{25}{60}+\frac{1}{120}+\frac{5}{60\times 60}$$

$$=42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60\times 60}$$

= *42°25'35"* qui est bien l’indication figurant sur la tablette.

Remarquons que si nous traduisons *42°25'35"* en système décimal, nous obtenons *42,424...* . L’usage d’une calculatrice donne, pour $30\sqrt{2}$ le nombre *42,42638...* .
Ces deux résultats ne diffèrent que de *0,002* !

L'approximation de $\sqrt{2}$ proposée par les Babyloniens était encore utilisée 2000 ans plus tard par PTOLEMEE pour la rédaction de ses tables de cordes.

2. Les tables de carrés

Nous venons de rappeler l'importance de la recherche d'une racine carrée pour la résolution d'équations du deuxième degré à l'époque babylonienne.

Actuellement, lorsque le nombre dont on doit extraire la racine carrée n'est pas un carré, nous disposons de calculatrices qui nous simplifient considérablement la vie.

Pour faciliter la recherche de racines carrées, les Babyloniens avaient mis au point des tables de carrés du type suivant :

Côtés	Carrés
1°20'	*1°46'40"*
1°21'	*1°49'21"*
1°22'	*1°52'04"*
1°23'	*1°54'49"*
1°24'	*1°57'36"*
1°25'	*2°00'25"*

Supposons que le scribe ait à calculer la racine carrée de *1°54'49"*. Il choisit la table de carrés adéquates et cherche le nombre *1°54'49"* dans la colonne des carrés. Le côté correspondant lui fournit la racine carrée cherchée.

Ce genre de table est construit de façon systématique.
On peut affiner la précision en subdivisant en intervalles plus petits les nombres de départ.

<u>Exemple décimal</u> :

Supposons que nous disposions de tables décimales de carrés et recherchons la racine carrée de *13,4689* en nous aidant des tables figurant à la page suivante :

- *13,4689* est compris entre 9 et 16.
  Sa racine carrée est comprise entre 3 et 4.
  Prenons la table de carrés des nombres compris entre 3 et 4.

- 13,4689 est compris entre 12,96 et 13,69.
  Sa racine carrée est comprise entre 3,6 et 3,7.
  Prenons la table de carrés des nombres compris entre 3,6 et 3,7.

- 13,4689 y figure et sa racine carrée vaut 3,67.

Lire un tableau

Nombres	Carrés
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

3,1	9,61
3,2	10,24
3,3	10,89
3,4	11,56
3,5	12,25
3,6	12,96
3,7	13,69
3,8	14,44
3,9	15,21

3,61	13,0321
3,62	13,1044
3,63	13,1769
3,64	13,2496
3,65	13,3225
3,66	13,3956
3,67	13,4689
3,68	13,5424
3,69	13,6161

Cependant, lorsque le nombre dont on doit rechercher la racine ne figure pas dans une table, il faut déterminer une valeur approchée de sa racine carrée.

Supposons que nous devions calculer, à l'aide de la table sexagésimale ci-dessus, une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Le carré est *2* : il est compris entre *1°57'36"* et *2°00'25"*.
Sa racine est donc comprise entre *1°24* et *1°25*.

Encadrer

$$1°24' \le \sqrt{2} \le 1°25'$$

$$1+\frac{24}{60} \le \sqrt{2} \le 1+\frac{25}{60}$$

$$1{,}4 \le \sqrt{2} \le 1{,}416666...$$

Nous obtenons déjà une valeur approchée de $\sqrt{2}$ au dixième près !

Les Babyloniens sont allés plus loin dans la précision quant au nombre correct de décimales et ont donné[4] pour $\sqrt{2}$ la valeur *1°24'51"10* comme nous l'atteste la tablette YBC7289.

Ce qui donne $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{3600}+\frac{10}{216000}=1{,}414212963\cdots$ dans le système décimal !

L'erreur commise est de l'ordre de $6 \cdot 10^{-7}$!

[4] On doit à CHRISTOPH RUDOLFF (499-1545) la notation actuelle de la racine carrée : $\sqrt{\ }$. Les algébristes plus anciens utilisaient le « R » pour **r**acine. En fait, l'invention de la presse à imprimer par GUTENBERG en 1434 favorisa l'impression de textes anciens de mathématiques (APOLLONIUS, DIOPHANTE). Cela accéléra la mise en place de notations algébriques mieux adaptées à cette impression.

3. Les Pythagoriciens et les irrationnel(le)s

Une biographie pleine d'incertitudes …[5]

Enrichir sa culture

Originaire de Samos en Ionie — à moins que ce ne soit de Tyrrhénie, de Tyr ou de Syrie), PYTHAGORE (vers 585 av. J.-C.), que certains auteurs tiennent pour un personnage légendaire, se fixe vers 530 avant notre ère à Crotone après un voyage en Egypte.

Il introduit, dit-on, le mot *philosophie* et fonde un cercle, sorte de communauté à la fois savante et religieuse, dont le nombre de membres s'étend rapidement.

Les novices revêtent l'habit de la "secte", prononcent des vœux de silence et de pauvreté, reçoivent une sévère formation morale puis un enseignement mathématique.

La spéculation sur les nombres et sur l'harmonie occupe la place la plus importante de l'initiation : dans la pensée pythagoricienne, le nombre représente en effet l'essence de toute chose. Cette école développe d'ailleurs une théorie de la musique et de l'acoustique, ou, encore, une astronomie.

A côté d'un certain souci religieux, elle accorde enfin un grand intérêt pour la politique : elle cherche une harmonie morale qu'elle veut étendre au plan de la cité.

PYTHAGORE estime que la même âme s'incarne successivement dans le corps de différents animaux. Alors que quelqu'un bat un chien qui hurle, il s'interpose : "Je reconnais en lui la voix d'un ami!"...

En visitant un temple, PYTHAGORE reconnaît parmi les ex-voto un bouclier qu'il avait porté lors de la guerre de Troie ! En se concentrant, il se souvient avoir été poisson, prétend-il ...

De nombreux disciples, des deux sexes, emboîtent le pas à PYTHAGORE. Bien qu'issus de tous les milieux, ils forment un groupe homogène. On dénombre notamment dans leurs rangs des champions olympiques, des astronomes, des sculpteurs, des médecins, des musiciens, des ingénieurs, des amiraux, des architectes, etc. Les centres pythagoriciens les plus remarquables se situent en Italie du Sud, à Crotone et à Tarente.

Plus de 2.500 ans après sa mort, il est bien difficile de connaître la vie de PYTHAGORE. Les sources sont tardives. Le premier "témoin", l'historien HERODOTE, lui est postérieur d'un siècle. PLATON n'est pas d'un grand secours : il ne cite en tout et pour tout le nom de PYTHAGORE qu'une seule fois.

[5] Les premières biographies de PYTHAGORE datent de plusieurs siècles après sa mort. La fiabilité que l'on peut leur accorder est donc limitée. Nous renvoyons le lecteur à la bibliographie.

Certes, ARISTOTE avait bien rédigé *Sur les Pythagoriciens*, mais cet ouvrage est perdu. En revanche, deux œuvres, la *Vie de Pythagore*, de PORPHYRE, et la *Vie pythagorique*, de JAMBLIQUE, ont été conservées intégralement, mais elles datent du III$^{\text{ème}}$ siècle après J.-C. et paraissent fantaisistes. Comble de malchance, aucun écrit de PYTHAGORE — pour peu que de telles traces aient jamais existé! — n'est parvenu jusqu'à nous.

PYTHAGORE constitue donc l'une des figures les plus mystérieuses de l'Antiquité. Sa pensée n'est connue longtemps que par une tradition orale entourée de secrets. Le personnage devient vite — peut-être même de son vivant — une légende. Une extraordinaire affabulation l'entoure rapidement et ne cesse de se développer.

Que d'ouvrages n'a-t-on écrits au sujet d'un homme dont on ne connaît pratiquement rien !

L'enseignement dispensé chez les Pythagoriciens ...

Pythagoriciens

Akousmatikoi (acousmaticiens)	**Mathematikoi** (mathématiciens)
akousma = enseignement oral. **kousmatikoi** = ceux qui suivaient l'enseignement oral de Pythagore. = candidats à l'initiation ?	**mathema** = le sujet d'étude, le savoir **mathematikoi** = ceux qui étaient plus avancés dans le savoir ; = initiés ? Cours dispensés : arithmétique, géométrie, harmonie et astro$\begin{cases}\text{nomie}\\ \text{logie}\end{cases}$.

La découverte des irrationnelles, un événement de taille !

Expliquons tout d'abord l'utilisation de ce féminin pluriel. A l'époque grecque, l'épithète "irrationnel" ne pouvait être appliqué à un nombre. C'est pourquoi on parle plutôt de la découverte des "irrationnelles", sous-entendant qu'il s'agit de "grandeurs", de "quantités".

Soulignons aussi que dans les textes grecs anciens, trois termes font référence à la notion d'irrationalité. Nous les traduirions littéralement par : "inexprimable", "irrationnel" et "incommensurable". On comprend donc aisément les délicats problèmes de traduction et d'exégèse soulevés par l'examen de ces textes.

> *Certains disent que la divinité s'est vengée de ceux qui ont divulgué les enseignements de* PYTHAGORE *: c'est ainsi que celui qui avait révélé la construction de la figure à vingt angles*[6] *périt en mer, pour avoir commis un acte d'impiété. Certains ont dit que celui aussi qui avait révélé ce qui concerne l'irrationalité et l'incommensurabilité, a subi le même sort.*
>
> *Jamblique, Vie de* PYTHAGORE*, §247*

Dans le commentaire de JAMBLIQUE reproduit ci-dessus, on évoque l'*irrationalité* et l'*incommensurabilité*. C'est donc que ces deux concepts ne prennent pas exactement la même signification dans l'esprit de l'auteur. Examinons la notion d'*incommensurabilité*, dans lequel on retrouve la notion de *mesure*.

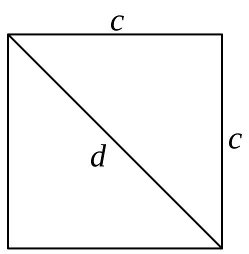
Remarquons que les nombres négatifs n'existaient pas à l'époque, les seuls nombres reconnus étaient positifs et forment ce que nous appelons maintenant les *naturels* et les *rationnels*[7] (c'est-à-dire les quotients de nombres entiers).

<u>Définition</u> :

Deux grandeurs[8] a et b sont dites commensurables (traduction littérale : *mesurables ensemble*) si elles ont une unité de mesure commune, c'est-à-dire s'il existe une unité de mesure u (u nombre naturel ou rationnel) telle que :

$$a = \mathrm{m}.u \text{ et } b = \mathrm{n}.u \text{ avec m et n entiers.}$$

<u>La diagonale et le côté d'un carré n'ont pas de commune mesure.</u>



Si nous considérons un carré de côté c, le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire successivement :

Exploiter un acquis

$$d^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \text{ et } \frac{d^2}{c^2} = 2.$$

Comme nous le montrerons plus loin, cette dernière relation ne peut être satisfaite pour d et c entiers. Ce fait se traduit en disant que d et c n'ont pas de commune mesure[9].

Les historiens des mathématiques admettent généralement que le tournant essentiel dans le domaine de l'incommensurabilité fut effectué lors de la prise de conscience de ce fait capital.

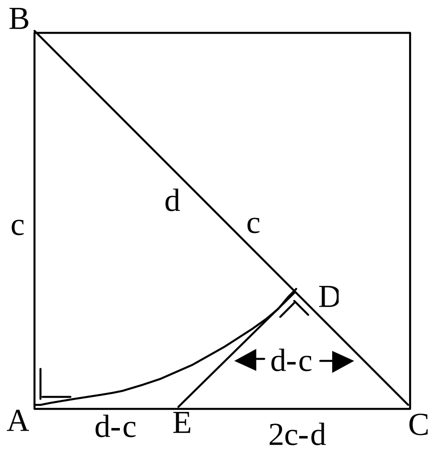
---

[6] Il s'agit du dodécaèdre.
[7] Les naturels sont bien entendu des rationnels.
[8] Chez les anciens Grecs, ces grandeurs peuvent être des longueurs de segments, des aires ou des volumes.
[9] On pourrait dire que d et c n'ont pas de **rapport**, sous-entendu rapport rationnel. En français, lorsque l'on dit que "deux faits n'ont aucun rapport", cela signifie que l'on ne peut les comparer.

Démontrer

<u>Démonstration de l'incommensurabilité de c et d par l'absurde, par descente infinie</u> :

La démonstration par l'absurde consiste à affirmer le contraire de la thèse et à en déduire une contradiction face aux éléments de départ.



Supposons que dans le carré ci-contre, côtés et diagonales possèdent une commune mesure, c'est-à-dire, avec les notations adoptées :

$$\left.\begin{array}{l}|AB| = c \\ |BC| = d\end{array}\right\} \text{avec } c \text{ et } d \text{ entiers.}$$

Le cercle de centre B et de rayon c coupe la diagonale AC en D et on a, de manière évidente : $|DC| = |BC| - |BD| = d - c$.

Soit E l'intersection de AC et de la tangente au cercle en D.

$DE \perp BC$	car la tangente en un point d'un cercle est perpendiculaire au rayon aboutissant en ce point.

Par conséquent, le triangle CDE est un triangle rectangle isocèle (car $\widehat{DCE} = 45°$) et on en déduit :

$$|DE| = |DC| = d - c$$

De plus, EA et ED sont les deux tangentes issues du point E au cercle, ce qui nous permet d'affirmer successivement :

$|EA| = d - c$ et $|EC| = c - (d - c) = 2c - d$

Les nombres c et d sont entiers, par conséquent, il en est de même pour $d - c$ et $2c - d$.

Le triangle DCE a donc ses trois côtés de longueur entière.

Comme il est rectangle isocèle tout comme le triangle ABC de départ sur lequel nous avons effectué notre construction, nous pouvons recommencer la construction et obtenir un autre triangle dont les côtés seront eux aussi entiers et plus petits que les précédents.

$(d\ , c)$	devient	$(2c - d, d - c)$.
$(2c - d, d - c)$	devient	$(3d - 4c, 3c - 2d)$.
$(3d - 4c, 3c - 2d)$	devient	$(10c - 7d, 5d - 7c)$.
$\vdots$		$\vdots$

Et ainsi de suite. Toutes les grandeurs mises en jeu sont donc des nombres entiers de plus en plus petits mais non nuls d'où réside la contradiction.
Cette technique est appelée « descente infinie ».

Examinons également la suite des rapports de la diagonale au côté :

$$\frac{d}{c} = \frac{2c-d}{d-c} = \frac{10c-7d}{5d-7c} = \cdots$$

Chaque égalité se ramène à $\left(\frac{d}{c}\right)^2 = 2$.

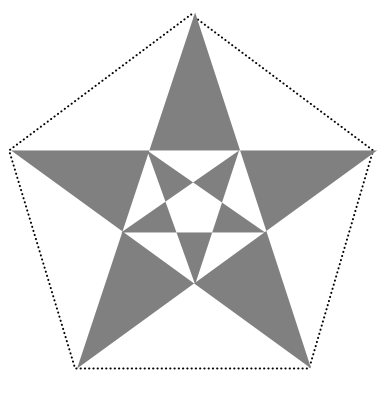
Cette technique dite "par descente infinie" est également applicable au pentagone régulier. Certains avancent d'ailleurs que la découverte de l'incommensurabilité aurait pu être réalisée grâce à la figure bien connue du *pentagramme.*

<u>*Le pentagramme, signe de reconnaissance des Pythagoriciens*</u>

"Le devin PYTHAGORE, bien qu'il n'ait pas jugé bon de nous laisser rien de ses propres écrits, à en croire du moins OCELLOS DE LUCANIE, ARCHYTAS et le reste de ses disciples, ne commençait jamais une lettre par les formules traditionnelles : "Bonjour !" ou "Prospérité !", mais prescrivait de débuter par "Santé !". Aussi tous ses disciples avaient-ils coutume, dans la correspondance qu'ils échangeaient, de placer le vœu de "Santé" au tout début de leurs lettres, parce qu'il convenait parfaitement à l'âme et au corps.
En outre, le triple triangle étoilé, le pentagramme, symbole éternel à la secte, ils l'appelaient "Santé"; si en général, "Santé !" voulait dire en même temps "Bonjour !" et "Prospérité", la réciproque n'était nullement vraie."

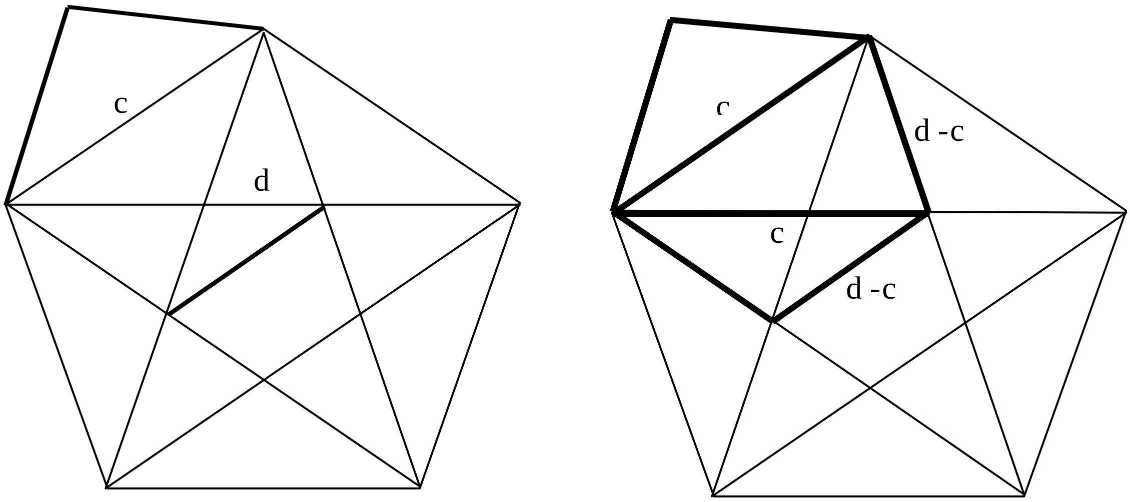
LUCIEN DE SAMOSATE (écrivain et philosophe cynique du II$^{\text{ème}}$ siècle)
Sur une faute en saluant, 5.

Un vase d'Aristophon datant du VII$^{\text{ème}}$ siècle av. J.-C. présente un tel pentagone étoilé sur ses flancs. Ce vase, trouvé en Italie et actuellement conservé à Rome, atteste que la figure géométrique du pentagramme était déjà connue à cette époque.
D'autre part, en observant pentagone et pentagramme, on ne peut que constater l'infinité de figures semblables de plus en plus petites déduites les unes des autres et de considérer la suite des rapports des diagonales aux côtés.



Voici un pentagone convexe régulier et ses diagonales. Soit c la longueur des côtés et d celle des diagonales. Des segments supplémentaires ont été tracés de manière à faire apparaître un nouveau pentagone convexe régulier[10].

Raisonner sur une figure



En observant la figure ainsi obtenue, on peut calculer la longueur du côté et de la diagonale du nouveau pentagone obtenu. On trouve $d-c$ comme côté et c comme diagonale.

Nous pouvons reprendre tout le processus avec le nouveau pentagone obtenu.
De *d* et *c* comme longueur de diagonale et de côté, on passe à *c* et *d - c*.

Nous pouvons schématiser le processus de la façon suivante :

(d , c)	devient	*(c , d - c).*
(c , d - c)	devient	*(d - c , 2c - d).*
(d - c, 2c - d)	devient	*(2c - d, 2d - 3c).*

Et ainsi de suite.
De la même façon que pour le triangle rectangle isocèle, la méthode dite de « descente infinie » nous livre une suite de longueurs **entières** de plus en plus petites mais non nulles d'où vient la contradiction.

Tous les pentagones obtenus étant semblables, on obtient également la suite des rapports suivants : $\frac{d}{c}=\frac{c}{d-c}=\frac{d-c}{2c-d}=\cdots$.

Chaque égalité se ramène à affirmer que $\left(\frac{d}{c}\right)^2-\left(\frac{d}{c}\right)-1=0$.

En posant $\frac{d}{c}=\varphi$, on obtient l'équation $\varphi^2-\varphi-1=0$ dont la racine positive est le fameux *nombre d'or* $j=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

---

[10] La démonstration de la régularité de ce pentagone est démontrée dans la première annexe. Elle ne fait appel qu'à des notions du programme de 3ème année.

Dans les cas du carré et du pentagone régulier, nous avons donc prouvé que c et d étaient incommensurables.

Les rapports $\frac{d}{c}$ ne sont donc pas des nombres rationnels.

De nos jours, nous les appelons *nombres irrationnels*.

Nous les notons $\frac{d}{c} = \sqrt{2}$ dans le cas du carré et $\frac{d}{c} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ dans le cas du pentagone.

Certains prétendent que la date de la découverte des quantités irrationnelles remonte à PYTHAGORE. D'un spécialiste à l'autre, cette date varie entre le VI$^{\text{ème}}$ siècle av. J.-C. et le V$^{\text{ème}}$ siècle de notre ère. Certains affirment que la découverte est l'apanage du Maître lui-même, d'autres estiment qu'il faut l'attribuer à un disciple. Peu de certitudes …

Nous n'avons aucune preuve du fait que les contemporains des Pythagoriciens ont établi le lien entre les grandeurs incommensurables et les racines irrationnelles de nombres naturels.

Ce que l'on peut affirmer, par contre, c'est le contexte autour duquel la découverte a eu lieu. En effet, en ce qui concerne tous les calculs d'ordre pratique, des approximations de racines carrées suffisaient amplement. On pouvait toujours s'imaginer n'être pas allé assez loin dans les décimales du nombre envisagé pour découvrir une éventuelle séquence de chiffres qui se répète dans son expression décimale, c'est-à-dire sa *période*. Par contre, dans le domaine des arts « nobles » tels que la musique, il était inadmissible de ne pas aboutir à un résultat exact, quelle que soit l'opération effectuée.

La proposition X,117 des *Eléments* d'EUCLIDE, adaptée ci-dessous, concerne l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. La place plutôt modeste qui lui est réservée dans cette œuvre magistrale prouve que le résultat était bien connu et largement diffusé à cette époque.

Auparavant, ARISTOTE déjà, cite la preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ comme exemple typique de démonstration par l'absurde. Cet exemple est cité 26 fois dans le *Corpus aristotélicien*.

ARISTOTE naît à Stagire, en Macédoine, aux alentours de 384 avant J.-C. Son nom signifie "le meilleur". Il descend d'une lignée de médecins, métier que son père exerce à la cour de Macédoine. Durant ses études à l'Académie d'Athènes, ARISTOTE est un brillant disciple de PLATON.
A la mort de son Maître et déçu de ne pas assurer sa succession, il est envoyé à Assos en Troade où il devient conseiller politique du tyran HERMIAS D'ATARNEE.
Il y ouvre également une école. Par la suite, ARISTOTE est appelé à la cour de Macédoine pour éduquer le petit ALEXANDRE qui deviendra LE GRAND.
Lorsque ce dernier monte sur le trône, ARISTOTE retourne à Athènes et y fonde le Lycée, école rivale de l'Académie. Après la mort d'ALEXANDRE, les proches de la cour de Macédoine sont menacés. ARISTOTE est accusé d'impiété pour avoir immortalisé un mortel en écrivant un hymne sur HERMIAS. Il fuit ces ennuis en se réfugiant sur l'île d'Eubée où il meurt à l'âge de 63 ans.
Esprit organisateur et classificateur, ARISTOTE énonce les *catégories* qui structurent le langage et la pensée de l'homme. Son œuvre domina la pensée humaine pendant plus de mille ans.

Démontrer

Démonstration par l'absurde :

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.
On peut dès lors l'écrire sous la forme d'une fraction.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$ avec a, b nombres entiers positifs, premiers entre eux (c'est-à-dire que l'on a simplifié la fraction).

La définition de la racine carrée nous permet d'écrire :

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2b^2$$

Le second membre de cette égalité est un nombre pair, par conséquent, le premier membre l'est aussi.

De plus, un nombre entier est pair si et seulement si son carré l'est.
Par conséquent, a est un nombre pair.

Nous pouvons donc écrire : $a = 2k$ avec k entier.

Réécrivons $a^2 = 2b^2$ en tenant compte de ce fait :

$$(2k)^2 = 2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4k^2 = 2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2k^2 = b^2$$

De la même manière que précédemment, nous en déduisons que b est pair puisque son carré est le double d'un nombre entier.

Nous avons donc démontré que a et b étaient tous les deux pairs ce qui est impossible puisque nous étions partis d'une fraction simplifiée c'est-à-dire dont le numérateur et le dénominateur n'avaient pas de facteur commun.

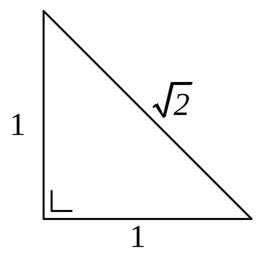
4. Construction de l'escargot

THEODORE DE CYRENE (vers –450) s'est intéressé aux nombres incommensurables (c'est-à-dire les nombres irrationnels) découverts par les Pythagoriciens.

Construire

Construction de $\sqrt{2}$:

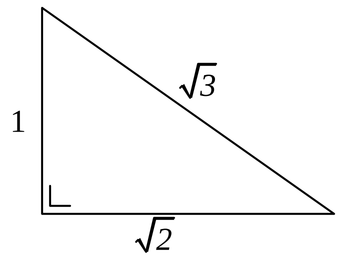
Traçons deux segments perpendiculaires de longueur 1. Comme le prouve le théorème de PYTHAGORE, nous obtenons un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{2}$.



$$1^2 + 1^2 = 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$$

Construction de $\sqrt{3}$:

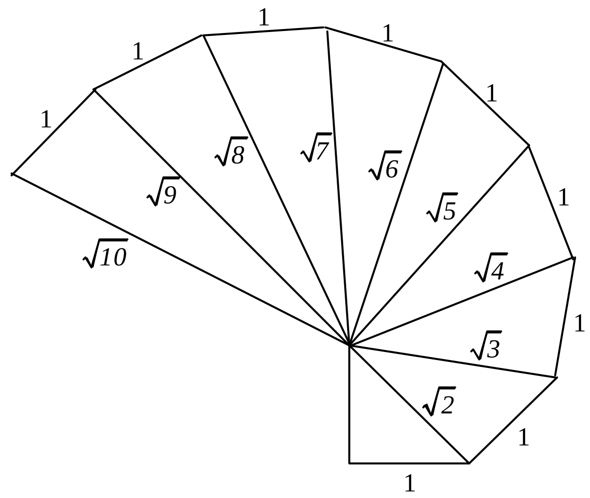
Traçons deux segments perpendiculaires, l'un de longueur 1 et l'autre de longueur $\sqrt{2}$. Comme le prouve le théorème de PYTHAGORE, nous obtenons un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{3}$.



$$1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=3=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

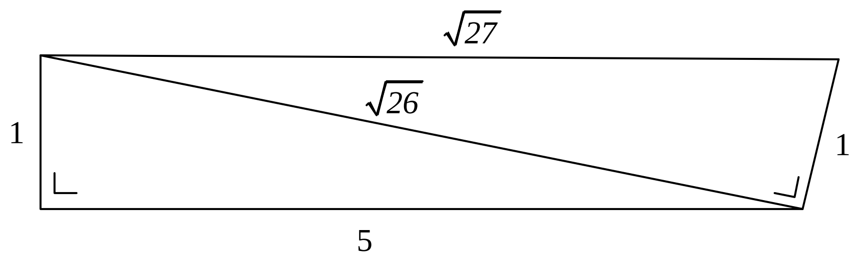
Nous pouvons procéder de la même façon pour construire $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, … et ainsi de suite.

Les diverses figures obtenues peuvent être réorganisées de la manière suivante, évoquant la coquille d'un escargot :

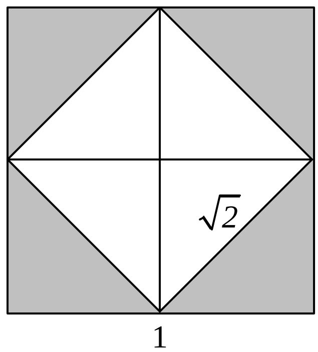


Remarque :

Pour construire $\sqrt{27}$, il n'est pas nécessaire de passer par la construction de 26 triangles. En effet, deux étapes suffisent.



Autre méthode pour construire $\sqrt{2}$:



Construisons quatre carrés de côté 1 groupés en un grand carré : ce grand carré a pour aire 4 .
Considérons le carré obtenu en joignant les milieux des côtés du grand carré. Il est deux fois plus petit.

Son aire vaut donc 2, et son côté $\sqrt{2}$.

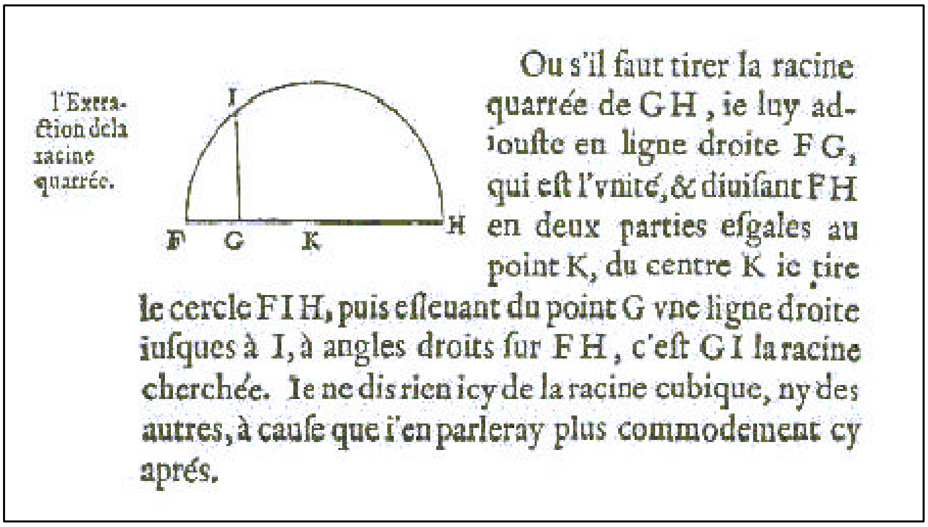
5. Construction de la racine carrée d’un nombre

Le moyen précédent nous permet uniquement de construire la racine carrée d'un nombre entier.

RENE DESCARTES, philosophe et savant bien connu, naquit en France en 1596 et y décéda en 1650. Il écrivit le "*Discours de la méthode pour conduire correctement la Raison et chercher la vérité dans les Sciences*." dont est extraite la célèbre phrase "*cogito ergo sum*" ("Je pense donc je suis").

Nous allons nous intéresser à "*La Géométrie*" de DESCARTES, annexée à son œuvre précitée.
En voici un extrait.

Analyser un document



l'Extraction dela racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouſte en ligne droite FG, qui eſt l'vnité, & diuiſant FH en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur FH, c'eſt GI la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Exploiter un acquis

- Construisons un segment $[GH]$ dont la longueur est le nombre dont nous voulons extraire la racine carrée.
- Prolongeons $[GH]$ en lui ajoutant un segment unitaire $[FG]$;
- Construisons K, le milieu de $[FH]$;
- Traçons le cercle de centre K et de rayon $|KF|$.
- La perpendiculaire à FH en G coupe le cercle en I.

$|GI|$ est la racine de $|GH|$, c'est-à-dire du nombre de départ.

En effet, le triangle FIH est rectangle (l'angle $F\hat{I}H$ intercepte le diamètre $[FH]$).

$IG^2 = FG \cdot GH$ (Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur cette dernière.)

Or, $|FG| = 1$, donc $IG^2 = GH$ et $|IG| = \sqrt{|GH|}$

6. Approximation d'une racine selon Héron d'Alexandrie

On attribue à HERON D'ALEXANDRIE la formule d'approximation de la racine carrée de N. Nous ne connaissons avec précision ni la date de sa naissance, ni celle de sa mort mais on estime qu'il a vécu au premier siècle de notre ère.

Dans son ouvrage intitulé *Métriques*, il explique son approche de la racine carrée de *720*. Voici ce qu'il en dit :

Commenter un document

Texte de HERON	Commentaires
Puisque 720 n'a pas son côté rationnel, on peut obtenir son côté avec une très petite différence comme suit. Comme le premier nombre carré successeur de 720 est 729 qui a 27 pour côté, on divise 720 par 27. *Cela donne* $26+\frac{2}{3}$.	Cela signifie que *720* n'est pas l'aire d'un carré dont le côté est rationnel. Dans notre langage actuel, nous dirions que $\sqrt{720}$ n'est pas un nombre rationnel. Le carré le plus proche de *720* est $729 = 27^2$.
On ajoute 27, ce qui fait $53+\frac{2}{3}$ *, et l'on en prend la moitié, soit* $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. *Le côté de 720 sera par conséquent très proche de* $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.	$27^2 = 729 \rightarrow$ 27 est une approximation par excès $\left(26+\frac{2}{3}\right)^2 = 711+\frac{1}{9}$ $\rightarrow 26+\frac{2}{3}$ est une approximation par défaut Leur moyenne arithmétique $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ est donc une meilleure approximation.
En fait, si on multiplie $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ *par lui-même, le produit est* $720+\frac{1}{36}$, *de sorte que la différence (sur le carré) est* $\frac{1}{36}$.	En effet, le carré de ce nombre ne diffère de *720* que de $\frac{1}{36}$.
Si l'on désire rendre la différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, *on prenda* $720+\frac{1}{36}$ *au lieu de 729, et en procédant de la même façon, on trouvera que la différence résultante est beaucoup moindre que* $\frac{1}{36}$.	Pour obtenir une meilleure approximation, il suffit de réitérer le processus en remplaçant *729* par $720+\frac{1}{36}$.

Généraliser

Utilisons la technique de HERON pour un nombre N quelconque[11] dont nous voulons calculer la racine carrée.

- Soit r, un nombre connu[12] dont le carré est proche de N par excès.
  C'est une approximation par excès de $\sqrt{N}$, donc $r > \sqrt{N}$.

- Calculons $\frac{N}{r}$

Démontrer

  C'est une approximation par défaut de $\sqrt{N}$.

  En effet, $r > \sqrt{N}$

  $r^2 > N$ (élévation au carré de l'inégalité ci-dessus)

  $1 > \frac{N}{r^2}$ ($r \neq 0$)

  $N > \frac{N^2}{r^2}$ ($N > 0$)

  $\sqrt{N} > \frac{N}{r}$ (passage à la racine carrée)

- Le nombre $\frac{\frac{N}{r}+r}{2}$, moyenne arithmétique de ces deux approximations, nous fournit une nouvelle approximation de $\sqrt{N}$, meilleure que les deux précédentes[13].

Si r était une approximation par défaut, alors $\frac{N}{r}$ serait une approximation par excès, et le même processus serait d'application.

Appelons r_0 l'approximation de départ. Les approximations successives obtenues seront notées r_1, r_2, r_3, …

Synthétiser

> Formule de HERON pour le calcul approché de $\sqrt{N}$:
>
> $$r_n = \frac{r_{n-1} + \frac{N}{r_{n-1}}}{2}$$ est la $n^{\text{ème}}$ approximation.

---

[11] Que se passe-t-il lorsque N est un carré parfait ?
[12] On peut, par exemple, utiliser une table de carrés.
[13] En général, la moyenne arithmétique d'une approximation par défaut et d'une approximation par excès d'un nombre n'est pas forcément meilleure que les approximations de départ. C'est vrai dans ce cas-ci, voir deuxième annexe.

Appliquons le processus ci-dessus pour calculer $\sqrt{5}$.

Appliquer un algorithme

Prenons $r_0 = 2$

1. $r_1 = \dfrac{2 + \dfrac{N}{2}}{2} = 2{,}25$

2. $r_2 = \dfrac{2{,}25 + \dfrac{N}{2{,}25}}{2} = 2{,}236111111$

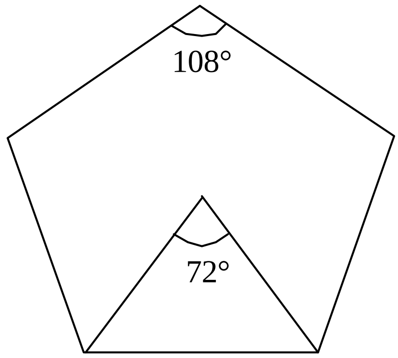
3. $r_3 = \dfrac{2{,}236111111 + \dfrac{N}{2{,}236111111}}{2} = 2{,}236067978$

4. $r_4 = \dfrac{2{,}236067978 + \dfrac{N}{2{,}236067978}}{2} = 2{,}236067977$

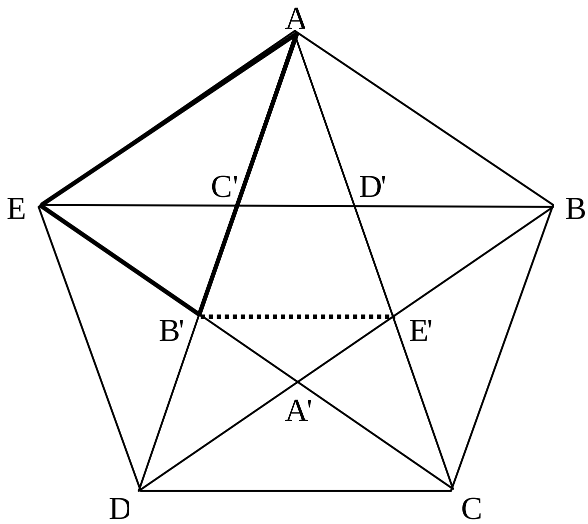
En seulement 3 étapes, on obtient 8 décimales exactes ! En 4 étapes, on a le même résultat que la calculatrice, à savoir 2,236067977.

7. Première annexe

Exploiter des acquis



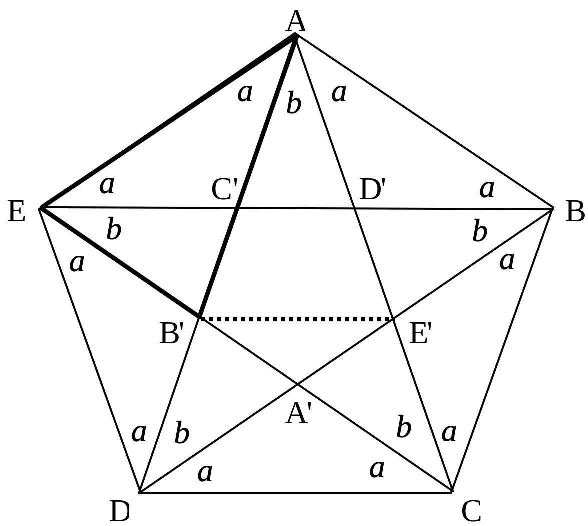
Pour rappel[14], l'angle entre deux côtés consécutifs d'un pentagone régulier vaut 108°.



Considérons un pentagone régulier *ABCDE* et ses diagonales, formant un nouveau pentagone régulier *A'B'C'D'E'*.

Nous allons démontrer que :

1. Le triangle *EAB'* est isocèle.
2. Le triangle *DB'E'* est isocèle.



Pour simplifier les notations, posons $\begin{cases} a = \widehat{EAB'} \\ b = \widehat{DAC} \end{cases}$.

Vu la régularité du pentagone *ABCDE*, les angles a et b se retrouvent à de multiples endroits dans la figure.

De plus, nous connaissons une relation liant a et b : $2a + b = 108°$.

---

[14] Voir module intitulé "Le nombre π et la quadrature du cercle", où ces calculs sont effectués en détails pour un n-gone..

1. <u>Montrons que le triangle *EAB'* est isocèle</u> :

Nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}\widehat{AEB'} &= \widehat{AED} - \widehat{B'ED}\\ &= 108° - a\\ &= 108° - \frac{1}{2}(180° - 108°) \qquad \text{(somme des angles dans le triangle isocèle } EDC\text{)}\\ &= 108° - 36° = 72°\end{aligned}$$

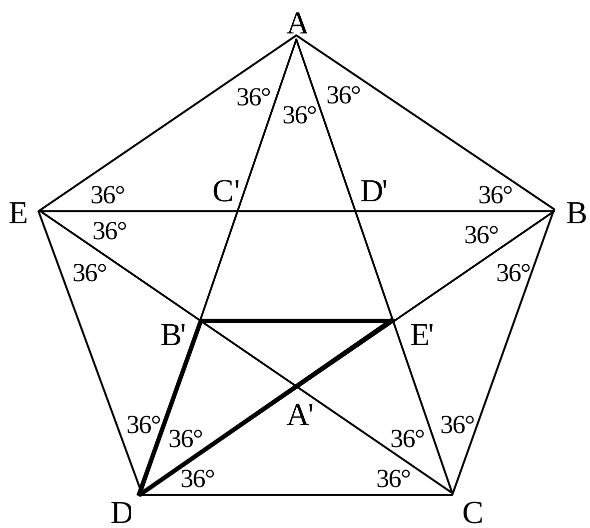
Et d'autre part :

$$\begin{aligned}\widehat{AB'E} &= 180° - 2a - b \qquad \text{(somme des angles dans le triangle } AEB'\text{)}\\ &= 180° - 108° \qquad \text{(vu la relation entre } a \text{ et } b\text{)}\\ &= 72°\end{aligned}$$

Par conséquent, $\widehat{AEB'} = \widehat{AB'E}$ et le triangle *EAB'* est isocèle.

Tous les segments du même type que [*AB'*] ont donc même mesure que le côté du pentagone initial.

Nous en déduisons de plus que $a = b = 36°$ ce qui nous permet d'affirmer que les deux diagonales issues d'un angle d'un pentagone régulier partagent cet angle en trois angles de même amplitude et d'adapter les notations de la figure.



2. <u>Montrons que le triangle *DB'E'* est isocèle</u> :

$$\left.\begin{array}{ll} |EC| = |BD| & \text{(il s'agit de deux diagonales du pentagone initial)} \\ |EB'| = |B'D| & \text{(car le triangle } EB'D \text{ est isocèle)} \\ |BE'| = |E'C| & \text{(car le triangle } BE'C \text{ est isocèle)} \\ |A'D| = |A'C| & \text{(car le triangle } DA'C \text{ est isocèle)} \end{array}\right\} \text{ donc } |A'B'| = |A'E'|$$

car $|A'B'| = |EC| - |EB'| - |A'C|$ et $|A'E'| = |BD| - |BE'| - |A'D|$.

L'égalité $|A'B'| = |A'E'|$ implique que le triangle *B'A'E'* est isocèle.

Or, $\widehat{B'A'E'} = \widehat{DA'C}$ (angles opposés par le sommet)

$= 180° - 2a$ (somme des angles dans le triangle isocèle $DA'C$)

$= 108°$

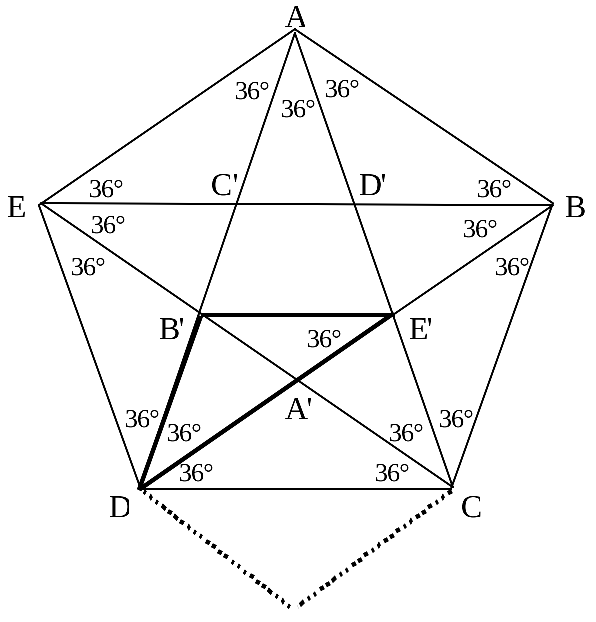
Par conséquent,

$\widehat{B'E'A'} = \frac{1}{2}(180° - 108°)$ (somme des angles dans le triangle isocèle $B'A'E'$)

$= 36° = a$

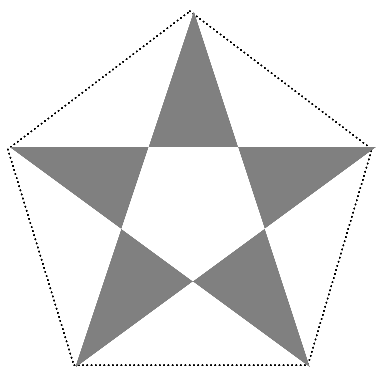
Donc, le triangle *E'B'D* est isocèle et les segments [*B'E'*] et [*B'D*] ont même longueur.

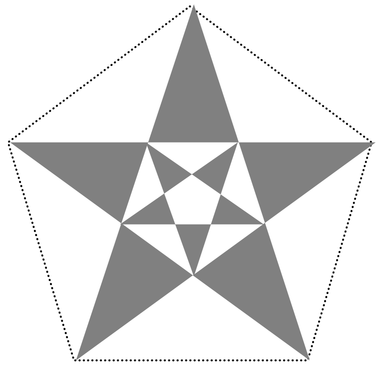
Nous pouvons donc construire un pentagone régulier dont trois côtés consécutifs sont [*DB'*], [*B'E'*] et [*E'C*].



<u>Suggestion</u> :

1. Démontrer que la diagonale et le côté du pentagone central sont entiers.





2. Prouver que la suite des couples (*diagonale* , *côté*) des pentagones emboîtés successifs est la sous-suite

$$\begin{array}{l} (d\ ,\ c) \\ (d - c\ ,\ 2c - d) \\ \vdots \end{array}$$

Il s'agit de la sous-suite d'indices impairs de la suite

$$\begin{array}{l} (d\ ,\ c) \\ (c\ ,\ d - c) \\ (d - c\ ,\ 2c - d) \\ (2c - d,\ 2d - 3c) \\ \vdots \end{array}$$

rencontrée ci-dessus.

8. Deuxième annexe

Nous suggérons les exercices suivants, de difficulté élevée pour des élèves de 4ème année :

1. Prouver que r_n est toujours une approximation de $\sqrt{N}$ par excès.

2. Prouver que si r est une approximation de $\sqrt{N}$, alors la meilleure approximation entre r et $\dfrac{N}{r}$ est celle par défaut.

3. Prouver que r_n est une meilleure approximation de $\sqrt{N}$ que r_{n-1} .