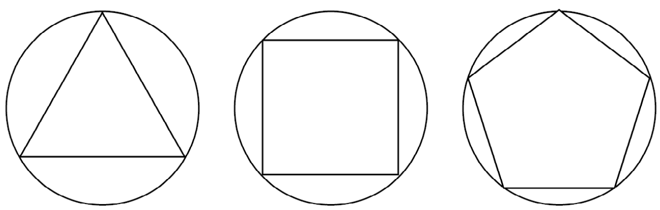
Le nombre π et le cercle

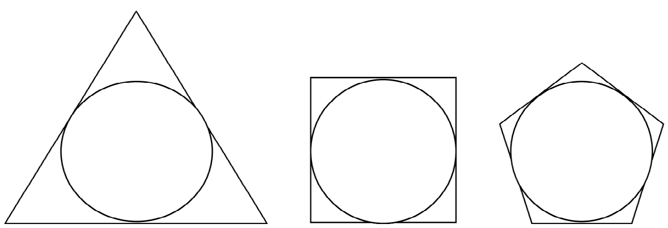
Table des matières

1. Approcher l'aire et la circonférence du cercle

Pour rechercher une approximation de l'aire ou de la circonférence du cercle, une technique très développée historiquement est la méthode des polygones inscrits ou circonscrits.



Polygones inscrits



Polygones circonscrits

Raisonner sur une figure

Le polygone inscrit au cercle permet une approximation par défaut, car plus son nombre de côtés est grand et plus :

–son périmètre sera proche de la circonférence du cercle
tout en lui restant inférieur.
–son aire sera proche de celle du cercle
tout en lui restant inférieure.

Le polygone circonscrit au cercle permet quant à lui une approximation par excès, car plus son nombre de côtés est grand et plus :

–son périmètre sera proche de la circonférence du cercle
tout en lui restant supérieur.
–son aire sera proche de celle du cercle
tout en lui restant supérieure.

2. La manière grecque : Archimède

ANTIPHON le Sophiste, contemporain de SOCRATE, inscrit un carré dans le cercle, puis double le nombre de côtés jusqu'à ce que le polygone obtenu soit indiscernable du cercle. Le calcul de l'aire (ou de la circonférence) peut être ainsi aussi précis que l'on veut, mais de manière théorique.

Pour notre problème, le personnage marquant chez les Grecs est cependant le célèbre ARCHIMÈDE.

Enrichir sa culture

A PROPOS D'ARCHIMEDE

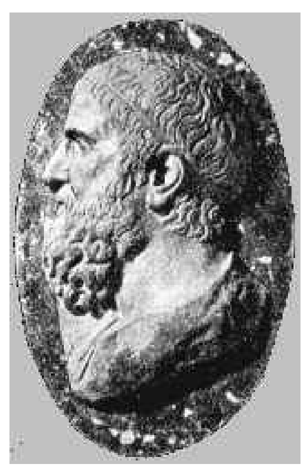
L'œuvre d'ARCHIMÈDE (né à Syracuse vers 287 av. J.-C.) est exemplaire de l'esprit alexandrin. On y voit la recherche de la rigueur alliée au souci de l'application juste. Inventeur génial et populaire, il était réputé dans tout le monde grec pour la construction de mécaniques subtiles et précises — leviers, pompes à eau, machines de guerre,. . .

Non content d'être un habile mécanicien, ARCHIMÈDE établit également les principes de la mécanique théorique et fonda l'hydrostatique (principe d'ARCHIMÈDE). Il se servit de ses connaissances en mécanique comme moyen d'investigation en géométrie.

La Vis d'Archimède

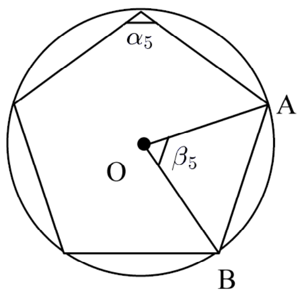
Dans « la Mesure du Cercle », ARCHIMÈDE démontre que le rapport du périmètre au diamètre du cercle est compris entre $3 + \frac{10}{71} = 3,1408$ et $3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7} = 3,14285$ en inscrivant dans le cercle des polygones réguliers à un nombre croissant de côtés et en calculant leur périmètre. Il utilise aussi des polygones circonscrits.

On raconte qu'ARCHIMÈDE utilisa les propriétés des miroirs paraboliques pour faire converger les rayons du soleil sur les navires romains assiégeant Syracuse et mettre le feu à la flotte.
Légende ou réalité ? Nous évoquons cette histoire plus en détails au sein de notre séquence *Histoire conique : la parabole*.



Avant de nous plonger dans sa méthode, nous allons établir le lien entre le nombre de côtés d'un polygone régulier et l'angle formé par deux côtés consécutifs.

Voici un pentagone régulier. Appelons α_5 l'angle déterminé par deux côtés consécutifs et β_5 l'angle au centre du cercle circonscrit interceptant une corde égale au côté du pentagone.



β_5 intercepte $\frac{1}{5}$ de la circonférence et vaut donc $\frac{360°}{5}$ c'est-à-dire 72° .
Le triangle OAB est isocèle ($|OA| = |OB| =$ rayon du cercle).
Par conséquent,

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{180° - \beta_5}{2} = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$$

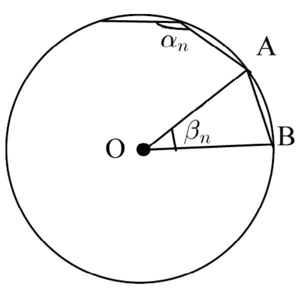
Donc,

$$\alpha_5 = 2 \cdot \widehat{A} = 108°$$

Le travail qui vient d'être réalisé pour un pentagone régulier peut être réalisé de manière semblable pour n'importe quel polygone régulier à n côtés, polygone que nous baptiserons « n-gone ».

Généraliser

Voici un n-gone régulier. Appelons α_n l'angle déterminé par deux côtés consécutifs et β_n l'angle au centre du cercle circonscrit interceptant une corde égale au côté du pentagone.



β_n intercepte $\frac{1}{n}$ de la circonférence et vaut donc $\frac{360°}{n}$.
Le triangle OAB est isocèle ($|OA| = |OB| =$ rayon du cercle).
Par conséquent,

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{180° - \beta_n}{2}$$

Donc,

$$\alpha_n = 2 \cdot \widehat{A} = 180° - \beta_n$$

Les angles α_n et β_n sont supplémentaires.

Calculer

Dressons un tableau des valeurs de α_n et β_n pour quelques valeurs de n :

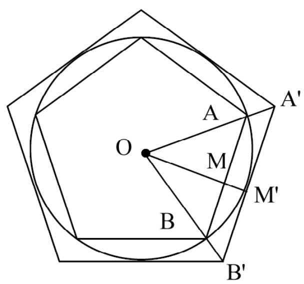
Nom	Nombre de côtés	α_n	β_n
Triangle	3	60°	120°
Carré	4	90°	90°
Pentagone	5	108°	72°
Hexagone	6	120°	60°
Octogone	8	135°	45°
Ennéagone	9	140°	40°
Décagone	10	144°	36°
Dodécagone	12	160°	20°
120-gone	120	177°	3°
n-gone	n	180°-β_n	$\frac{360°}{n}$

Passons maintenant à la recherche de l'approximation de la circonférence d'un cercle en utilisant la méthode grecque.

Voici un cercle dont nous supposerons le rayon égal à 1. Considérons les pentagones inscrit et circonscrit à ce cercle. Nous allons exprimer le périmètre de chacun des deux pentagones en fonction de l'angle β_5 défini au paragraphe précédent.

Utiliser des acquis

Raisonner sur une figure



Pentagone inscrit :
Le triangle AMO est rectangle en M et OA, le rayon du cercle, en est l'hypoténuse.
Par conséquent,

$$|AM| = |OA| \cdot \sin \widehat{O_1} = \sin \frac{\beta_5}{2} = \sin \frac{72^\circ}{2} = \sin 36^\circ$$

Nous en déduisons aisément le côté c_5 du pentagone et ensuite le périmètre p_5 de ce dernier :

$$c_5 = 2 \cdot |AM| = 2 \sin 36^\circ \text{ et } p_5 = 5 \cdot c_5 = 10 \sin 36^\circ$$

Pentagone circonscrit :

Le triangle $A'M'O$ est rectangle en M' et OM', l'un des côtés de l'angle droit est le rayon du cercle.

Par conséquent,

$$|A'M'| = |OM'| \cdot \tan \widehat{O_1} = \tan \frac{\beta_5}{2} = \tan \frac{72^\circ}{2} = \tan 36^\circ$$

Nous en déduisons aisément le côté C_5 du pentagone et ensuite le périmètre P_5 de ce dernier :

$$C_5 = 2 \cdot |AM| = 2 \cdot \tan 36^\circ \text{ et } P_5 = 5 \cdot C_5 = 10 \cdot \tan 36^\circ$$

Encadrer

La circonférence du cercle est comprise entre le périmètre du pentagone inscrit et du pentagone circonscrit. Nous en déduisons la double inégalité suivante :

$$10 \cdot \sin 36^\circ < \text{circonférence} < 10 \cdot \tan 36^\circ$$

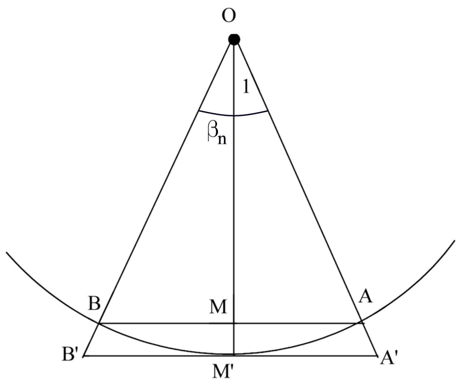
et puisque le rayon vaut 1,

$$10 \cdot \sin 36^\circ < 2\pi < 10 \cdot \tan 36^\circ \text{ ou encore } 5 \cdot \sin 36^\circ < \pi < 5 \cdot \tan 36^\circ$$

Utiliser une calculatrice

La calculatrice nous fournit alors : 2,9389263 $<$ π $<$ 3,6327126 ce qui n'est pas un encadrement de π très précis.

Cependant, en augmentant le nombre de côtés des polygones, l'approximation s'améliore.



Voici un cercle dont nous supposerons le rayon égal à 1 et les n-gones inscrit et circonscrit à ce cercle.

Généraliser

Nous allons exprimer le périmètre de chacun des deux pentagones en fonction de l'angle β_n défini précédemment.

n-gone inscrit :

Le triangle AMO est rectangle en M et le rayon OA du cercle en est l'hypoténuse.

Par conséquent,

$$|AM| = |OA| \cdot \sin \widehat{O_1} = \sin \frac{\beta_n}{2} = \sin \frac{180^\circ}{n}$$

Nous en déduisons aisément le côté c_n du pentagone et ensuite le périmètre p_n de ce dernier :

Déduire

$$c_n = 2 \cdot |AM| = 2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ et } p_n = n \cdot c_n = 2n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$$

n-gone circonscrit :

Le triangle $A'M'O$ est rectangle en M' et OM', l'un des côtés de l'angle droit est le rayon du cercle.

Par conséquent,

$$|A'M'| = |O'M'| \cdot \tan \widehat{O_1} = \tan \frac{\beta_n}{2} = \tan \frac{180^\circ}{n}$$

Nous en déduisons aisément le côté C_n du pentagone et ensuite le périmètre P_n de ce dernier :

Déduire

$$C_n = 2 \cdot |AM| = 2 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n} \text{ et } P_n = n \cdot C_n = 2n \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$$

La circonférence du cercle est comprise entre le périmètre du n-gone inscrit et du n-gone circonscrit. Nous en déduisons la double inégalité suivante :

$$2n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} < \text{circonférence} < 2n \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$$

et puisque le rayon vaut 1,

$$2n \cdot \sin \frac{180°}{n} < 2\pi < 2n \cdot \tan \frac{180°}{n} \text{ ou encore } n \cdot \sin \frac{180°}{n} < \pi < n \cdot \tan \frac{180°}{n}$$

Utiliser une calculatrice

Voici un tableau reprenant les valeurs par défaut et par excès de cet encadrement de π pour quelques valeurs de n :

n	Défaut	Excès	Valeur obtenue
10	3.090169943749	3.249196962329	3
100	3.141075907813	3.142626604335	3.14
1.000	3.14158748588	3.141602989056	3.141
10.000	3.141592601913	3.141592756944	3.14159
100.000	3.141592653073	3.141592654623	3.14159265
1.000.000	3.141592653585	3.1415926536	3.141592653

Ces valeurs ont été calculées avec la calculatrice de WINDOWS 95 en mode scientifique. ARCHIMÈDE, quant à lui, ne disposait pas de la moindre calculette de poche, aussi simple fût-elle !

3. La manière chinoise : Liu Hui

1 Introduction

En Chine, les inscriptions datant de la dynastie Shang (XIVème siècle av. J.-C.) retrouvées sur des carapaces de tortues constituent la plus ancienne preuve d'activité mathématique dans ce pays.

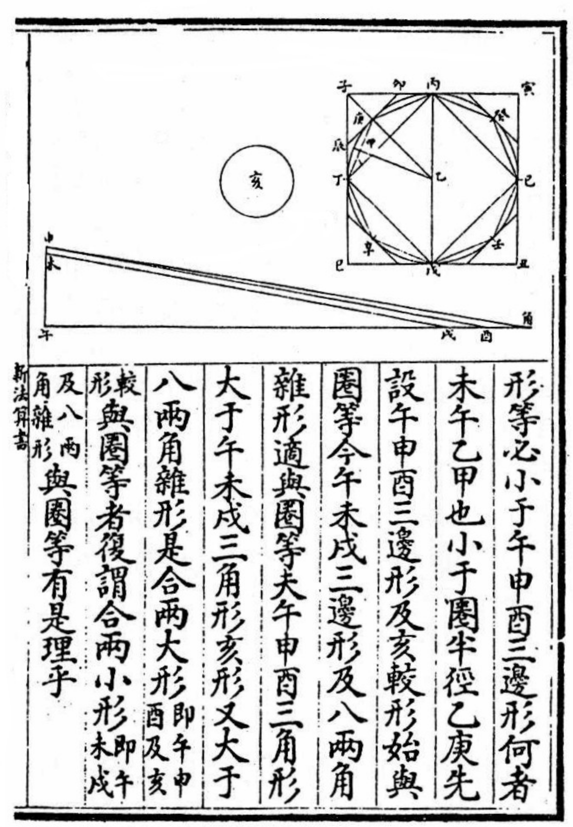
Enrichir sa culture

Pendant longtemps, le travail des mathématiciens chinois anciens — tout au moins dans le domaine de la géométrie — a été considéré comme peu rigoureux.

Ici, contrairement à la géométrie présente dans les travaux des Grecs de l'Antiquité, nous sommes en présence d'une géométrie sans définition ni axiome, sans postulat ni théorème. Bref, une géométrie dont le seul but apparent est celui du partage des terres et peut passer pour une curiosité et rien de plus.

Cependant, l'école des disciples de Mozi, entre le IIIème et le IVème siècle av. J.-C., a défini quelques objets géométriques sans toutefois les utiliser dans un système déductif.

De plus, le vocabulaire employé fait référence à d'autres sciences et n'est pas spécifique à la géométrie (contrairement à celui d'Euclide).



形等必小于午申酉三邊形何者
未午乙甲也小于圜半徑乙庚先
設午申酉三邊形及亥較形始與
圜等今午未戌三邊形及八兩角
雜形適與圜等夫午申酉三角形
大于午未戌三角形亥形又大于
八兩角雜形是合兩大形即午申酉及亥
較形與圜等者復謂合兩小形即午未戌
及八兩角雜形與圜等有是理乎
新法算書

Une traduction chinoise d'Archimède

Epinglons quelques caractéristiques de la géométrie pratiquée dans la Chine ancienne :

– Les mots utilisés sont issus de la vie quotidienne et les termes employés ont donc des connotations prosaïques. Ainsi, un point peut être désigné par « le pied d'un arbre » et un segment de droite par « la profondeur de l'eau » ou encore par « la distance de mes pieds au pied de l'arbre ».

– Les objets utilisés en géométrie sont tous des objets concrets, qui peuvent être manipulés (en réalité ou en imagination) pour faire apparaître des propriétés. Il n'y a pas de représentation abstraite annotée comme chez les Grecs.

  Notamment, l'utilisation de nombreux puzzles est fréquente. Déplacer des pièces d'un jeu de construction à deux ou trois dimensions ne modifie pas l'aire ou le volume du kit complet.

– Chaque propriété utile au sein d'un problème particulier est démontrée dans le cadre de ce contexte spécifique. Aucun souci d'établir des résultats généraux et transposables dans d'autres problèmes n'est mis en exergue.

2 Jiuzhang suanshu

Enrichir sa culture

Le terme générique de *Suanjing shi shu* (« dix canons calculatoires ») regroupe des manuels mathématiques chinois dont la compilation commence officiellement au début de la dynastie TANG (de 618 à 907 de notre ère). Les textes originaux datent cependant parfois de périodes bien antérieures.

L'un des plus importants de ces textes est le *Jiuzhang suanshu*, dont le titre peut se traduire par « prescriptions calculatoires en neuf chapitres ». Le *Jiuzhang suanshu* est considéré comme une bible des mathématiques, un classique par excellence, et certains mathématiciens y voient un équivalent oriental des *éléments* d'EUCLIDE. Chacun des chapitres traite de mathématiques appliquées à la vie de tous les jours (partages de terres, constructions,...) sous la forme d'une succession de problèmes d'où sont absents définitions, axiomes, théorèmes et explications logiques.

Ils se présentent comme suit :

1. L'énoncé d'un problème.
2. Une réponse numérique.
3. Une marche à suivre pour calculer cette réponse à partir des données.

Au total des neuf chapitres, 246 problèmes sont ainsi abordés.

Cette absence d'indication quant à d'éventuelles généralisations, ce manque d'explication sur les recettes données, n'ont pas manqué d'interpeller de nombreux commentateurs au fil des siècles.

3 Un commentaire de Liu Hui

Nous allons nous intéresser à Liu Hui, commentateur du III^{ème} siècle de notre ère et auteur du *Haidao suanjing* — le « canon calculatoire de l'Ile de la Mer » — manuel repris lui aussi dans les *Suanjing shi shu*. Il a manifestement vécu de 220 à 265 après J.-C., mais peu de détails nous sont parvenus.
Notons qu'il est délicat de distinguer les notes de Liu Hui de celles écrites au VI^{ème} siècle par un certain Zu Xuan ; les versions actuellement disponibles du *Jiuzhang suanshu* datent en effet au mieux du XIII^{ème} siècle et tous les commentaires y sont emmêlés.

Afin de calculer la surface S d'un disque de diamètre d et de circonférence p, le problème n°23 du premier chapitre du *Jiuzhang suanshu* propose la formule :

$$S = \frac{p}{2} \cdot \frac{d}{2}$$

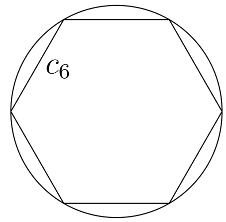
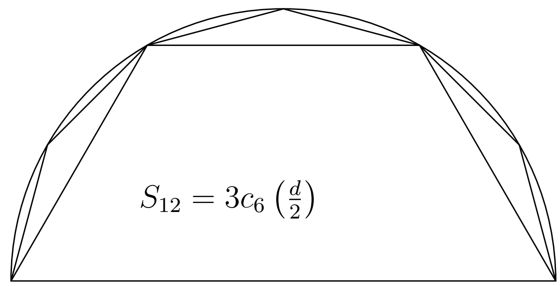
Remarquons cette formule a l'avantage d'être correcte ! Mais elle n'est utile que si le périmètre est connu.

Liu Hui s'est attelé à la prouver, à travers ce commentaire :

按爲圖，以六觚之一面乘半徑，因而三之，得十二觚之冪。若又割之，
次以十二觚之一面乘半徑，因而六之，則得二十四觚之冪。割之彌細，
所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓合體，而無所失矣。

Le tableau de la page suivante en propose une traduction en notations modernes. Il y n'est pas question d'hexagone, mais d'un vase particulier : le *liugu*.

Les GU *étaient des vases sacrificiels chinois. Plus particulièrement, le* LIUGU *est un vase à base hexagonale.*

N°	Action	Schéma et Notations actuelles
1	Construire un hexagone (*liugu*) inscrit à un cercle. Prendre le côté de l'hexagone.	
2	Multiplier ce côté par la moitié du diamètre, et le tripler, on obtient l'aire du dodécagone inscrit.	
3	Prendre le côté du dodécagone précédent.	c_{12}
4	Multiplier ce côté par la moitié du diamètre, et puis par 6, on obtient l'aire du polygone inscrit à 24 côtés.	$S_{24} = 6c_{12}\left(\frac{d}{2}\right)$
5	Diviser de plus en plus jusqu'à ce que l'on ne puisse plus, de manière à ce que le polygone inscrit coïncide avec le cercle : la différence d'aire va alors se réduire jusqu'à disparaître.	$S_{2n} = \frac{n}{2} \cdot c_n \cdot \frac{d}{2}$

Liu Hui suggère donc la formule :

$$\boxed{S_{2n} = \tfrac{n}{2} \cdot c_n \cdot \tfrac{d}{2} = \tfrac{p_n}{2} \cdot \tfrac{d}{2}}$$

Passer à la limite

où n est le nombre de côtés du polygone inscrit et p_n son périmètre.

Il est clair que si n croît, le périmètre du n-gone tend vers celui du cercle, et que la surface du $2n$-gone tend vers celle du disque.

Pour indiquer que S_{2n} tend vers S lorsque n tend vers l'infini (noté ∞), nous utiliserons la notation suivante :

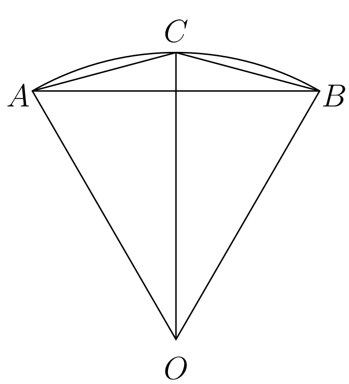
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

et nous pouvons donc écrire :

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{p}{2} \cdot \frac{d}{2}$$

Désignons par K la surface de $OACB$. Pour prouver la formule de Liu Hui (encadrée ci-dessus), il suffit d'exprimer la surface K de deux manières différentes :

1 Première méthode



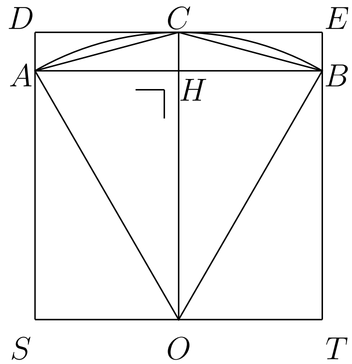
Le polygone considéré est constitué de $2n$ triangles identiques à OCA, et donc de n quadrilatères identiques à $OACB$.
Par conséquent,

$$K = \frac{1}{n} \cdot S_{2n}$$

C'est-à-dire :

$$n \cdot K = S_{2n}$$

2 Seconde méthode



L'aire du rectangle $OCDS$ est donnée par $DC \cdot CO = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CO = AH \cdot CO$. Elle vaut donc le double de l'aire du triangle OAC.
Les triangles OAC et OCB étant égaux,

$$K = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CO = \frac{1}{2} \cdot c_n \cdot \frac{d}{2}$$

comparer

En égalant les valeurs trouvées pour K dans chacune des méthodes, nous obtenons bien la formule annoncée.

4 Enfin π

Appliquer un théorème

Liu Hui ne s'arrête pas en si bon chemin ! Il dispose du théorème de Pythagore et l'applique dans le triangle rectangle ACH.

On a ainsi :

$$|AC| = \sqrt{|AH|^2 + (|OC| - |OH|)^2}$$

Nous pouvons généraliser cette application du théorème de Pythagore comme suit :

$$c_{2n} = \sqrt{\left(\frac{c_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - a_n\right)^2}$$

Dans cette formule,

- a_n représente l'*apothème* du n-gone (ici, $|OH|$),
- c_n représente un côté du n-gone (ici, $|AB|$),
- c_{2n} représente un côté du $2n$-gone (ici, $|AC|$),
- $\frac{d}{2}$ représente la moitié du diamètre du cercle (ici, $|OC|$).

$$c_{2n} = \sqrt{\left(\frac{c_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c_n}{2}\right)^2}\right)^2}$$

Liu Hui choisit comme point de départ $c_6 = 10$ et lui applique la formule précédente jusqu'à obtenir c_{48}, puis calcule S_{96} grâce à la formule permettant de calculer S_{2n}.

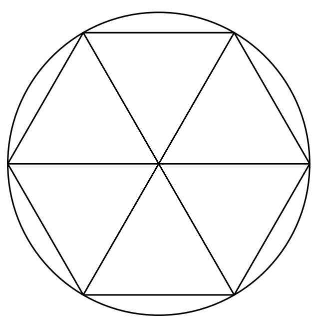
Nous avons suivi ses traces à l'aide du tableur MICROSOFT EXCEL et avons obtenu :

Utiliser un logiciel

n	a_n	c_n	S_n
6	8,660254038	10	
12	9,013878189	5,176380902	300
24	8,926785536	2,610523844	310,5828541
48	8,948638165	1,308062585	313,2628613
96	8,943180013	0,654381656	313,9350203
192	8,944544863	0,327234633	314,1031951

Nos calculs sont plus précis que ceux de LIU HUI, qui menaient pour S_{96} et S_{192} respectivement à 313,9344 et 314,1024.

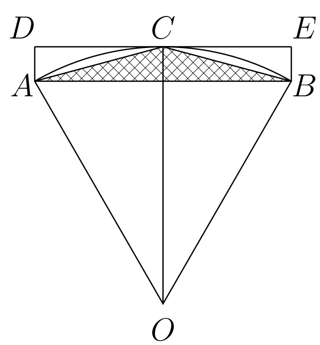
Notons qu'il est *supposé* que le côté de l'hexagone inscrit à un cercle est égal au rayon de ce cercle. Mais c'est le type de propriété facile à démontrer et qui — dans l'esprit des mathématiciens chinois anciens — ne demande pas de justification.



En effet, un hexagone est composé de six triangles égaux. Les angles pointant sur le centre du cercle valent donc chacun $\frac{360°}{6} = 60°$. De plus, les côtés partant du centre du cercle sont tous égaux au rayon du cercle. Les triangles sont par conséquent isocèles. Les deux autres angles de chacun des triangles valent nécessairement 60° et les triangles sont équilatéraux.

Raisonner sur une figure

La méthode d'encadrement de l'aire du disque ne consiste pas ici à considérer des polygones inscrit et circonscrit, mais à « gonfler » S_n pour le comparer à S_{2n}.



Le secteur ci-contre montre l'un des n triangles OAB qui composent le $n-$gone inscrit au cercle.
Lorsque l'on passe au $2n-$gone inscrit, le même secteur comprend deux triangles OAC et OCB.

Raisonner sur une figure

La différence entre S_{2n} et S_n qui concerne le secteur OAB est matérialisée sur la figure par la surface grisée.

C'est la moitié de l'aire du rectangle $ADBE$.

L'aire totale des n rectangles $ADEB$ vaut donc $2 \cdot (S_{2n} - S_n)$.

Plus particulièrement, LIU HUI encadre l'aire du disque en considérant S_{96} et S_{192} :

Encadrer

$$S_{192} < S\text{disque} < S_{96} + 2 \cdot (S_{192} - S_{96})$$

En utilisant le tableau ci-dessus, on obtient l'encadrement suivant :

$$314,1031951 < S_{\text{disque}} < 313,9350203 + 2 \cdot (314,1031951 - 313,9350203)$$

c'est-à-dire :

$$314,1031951 < S\text{disque} < 314,2713699$$

A l'instar des autres mathématiciens chinois anciens, LIU HUI n'était pas à la recherche du nombre π en réalisant les calculs précédents, mais s'intéressait uniquement à la circonférence et au diamètre du cercle.

En calculant cependant le rapport $\frac{c}{d}$ à l'aide de l'encadrement précédent, on trouve

$$3,141031951 < \pi < 3,142713699$$

ce qui donne une valeur moyenne de $3,141872825$.

4. Petit historique de la quête

1 Les mathématiques babylonniennes

Enrichir sa culture

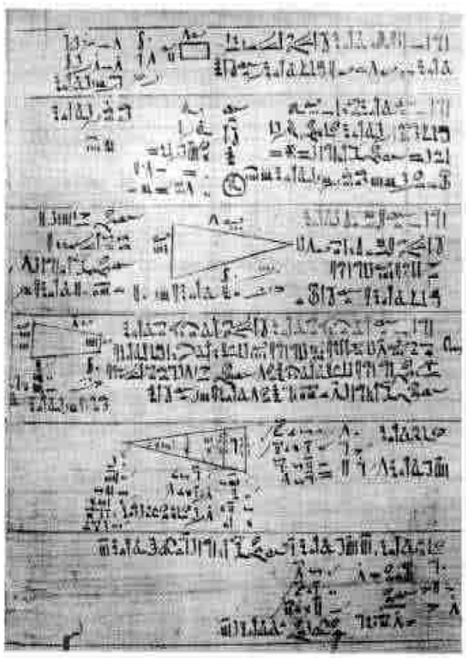
En 1936, des archéologues français travaillant à Suse, la capitale de l'ancienne Elam, à quelques 350 km à l'est de Babylone, mirent à jour un groupe de tablettes mathématiques.

Des résultats significatifs concernent la géométrie. Les Babyloniens approchent la circonférence du cercle par le périmètre de l'hexagone régulier inscrit. Ils obtinrent l'approximation 3°7'3" , notation sexagésimale dont la transformation dans le système décimal donne 3,125.

Il fit la mer de métal fondu. Elle avait dix coudées d'un bord à l'autre, elle était ronde de pourtour, sa hauteur était de cinq coudées et un cordon de trente coudées en faisait le tour.
Approximation plutôt grossière issue de :
La Bible, Ier livre des Rois 7-23.

2 Les mathématiques égyptiennes

Dans le célèbre Papyrus Rhind, le scribe Ahmes indique le moyen de calculer l'aire d'un cercle de diamètre donné. C'est le problème 48 qui utilise la comparaison entre l'aire d'un cercle et de son carré circonscrit.



Les Egyptiens connaissent l'aire des triangles, des trapèzes, des rectangles, etc. et utilisent pour l'aire du cercle une règle que nous écririons en notations modernes :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{8}{9}\cdot d\right)^2 \\ &= \left(\frac{16}{9}\right)^2 \cdot r^2 \\ &= \frac{256}{81}\cdot r^2 \\ &= \left(3+\frac{13}{81}\right)\cdot r^2 \end{aligned}$$

où d désigne le diamètre du cercle. Nous en déduisons la valeur 3,16 comme approximation pour π.

A part les précurseurs que sont les Babyloniens et les Egyptiens, l'histoire du nombre π peut être scindée en trois périodes.

Enrichir sa culture

3 La période géométrique (des Grecs au milieu du XVII$^{\text{ème}}$ siècle)

De nos jours, « réaliser la quadrature du cercle »signifie « résoudre un problème très difficile ». La récupération de cette expression à des fins rhétoriques date pourtant du V^{eme} siècle avant J.-C.

Le célèbre problème de la *quadrature du cercle* consiste à construire — à l'aide de la règle et du compas — un carré ayant même aire qu'un cercle donné. Les recherches sur le nombre π y sont intimement liées.

4 La période du calcul infinitésimal

C'est une période au cours de laquelle on améliore la connaissance quantitative de π mais où on n'engrange pas de nouveau renseignement quant à sa nature.

Voici deux formules célèbres provenant de cette période :

– la formule de Leibniz :

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

– la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

5 La période où la nature de π commence à apparaître

En 1766, Lambert prouve que π est irrationnel. Plus d'un siècle plus tard, en 1882, Lindemann prouve que π est un nombre transcendant et il en découle que la quadrature du cercle est impossible.

Il aura donc fallu 25 siècles pour conclure a l'impossibilité de la quadrature du cercle. Comme le remarque Hobson :

La qualité essentielle de l'humanité, c'est sa colossale patience.

Soulignons le fait que le rapport de la circonférence au diamètre du cercle n'a été nommé π qu'en 1706 par les soins de W. Jones mais que ce nom fut rendu populaire lorsque des mathématiciens réputés tels que L. Euler l'adoptèrent.

6 Quelques autres noms

– Le mathématicien Tsu Chung-chih parvient au V$^{\text{ème}}$ siècle à approcher π par $3,1415929$.

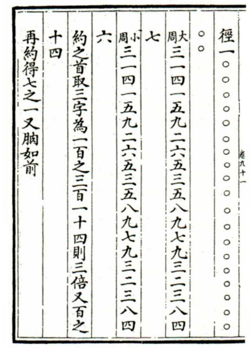
– Aryabhatta (510), polygones à 12, 24, 48, 192, 384 côtés : π = 3,14156

– Adrianus Romanus (1561-1615), polygone à $6 \cdot 2^{16}$ côtés : π avec 9 décimales exactes.

– W. Snellius (1580-1626), amélioration d'Archimède avec un hexagone : π avec 17 décimales exactes.

– Vers 1635, en Chine, le manuel *Celiang quanyi* contient notamment une traduction de l' œuvre d'Archimède sur la mesure des cercles.

On y trouve également un calcul de π qui mène (sans preuve) à l'encadrement suivant :


卷九十一
徑一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇
大周三一四一五九二六五三五八九七九三二三八四
七
小周三一四一五九二六五三五八九七九三二三八四
六
約之首取三字為一百之三百一十四則三倍又百之
十四
再約得七之一又朒如前

$$3,14159265358979323846 < \pi < 3,14159265358979323847$$

– Christiaan Huygens (1654), grâce à une nouvelle accélération du processus archimédien obtient à l'aide d'un triangle : 3,1415926533 $< \pi <$ 3,1415926538 et montre que pour une telle précision, Archimède aurait dû user d'un polygone à 400000 côtés !
– Tabeke (1722), polygone à 1024 côtés : 41 décimales.

Et cette histoire n'est pas terminée puisqu'à l'heure actuelle, la course aux décimales continue à l'aide de puissants ordinateurs.

Ainsi, en 1997, Kanada obtient plus de 2^{34} décimales du nombre π à l'aide de 2^{10} processeurs travaillant en parallèles durant 7 heures !

5. Pour en savoir plus

– Collectif, *Numéro Spécial* π, supplément au « Petit Archimède » N°64-65, mai 1980.
– J.-C. Martzloff, *A history of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, 1997.
– http ://www.saxakali.com/color_asp